

Wiskunde in de praktijk

Kerninzichten



Noordhoff

**W. Oonk, R. Keijzer, S.A. Lit,
F. Barth, J.F.M. den Engelsen, A.T.E. Lek
& C. van Waveren Hogervorst**

4^e druk

Wiskunde in de praktijk

Kerninzichten

Wil Oonk
Ronald Keijzer
Sabine Lit
Frits Barth
Martine den Engelsen
Anita Lek
Caroliene van Waveren Hogervorst

Vierde druk

Noordhoff

Ontwerp omslag: G2K Creative Agency (Groningen/Amsterdam)

Omslagillustratie: iStockphoto

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Hoger Onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB
Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleenen.



0 / 23

© 2023 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, Nederland.

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN(ebook) 978-90-01-08073-0

ISBN 978-90-01-08072-3

NUR 846

Woord vooraf

Het vak rekenen-wiskunde staat volop in de aandacht: de inzichten en vaardigheden van leerlingen, maar ook van leraren moeten op een hoger niveau gebracht worden. Daarom heeft een landelijke commissie voorstellen gedaan over wat leerlingen van de verschillende onderwijstypen zouden moeten beheersen. Voor de aanstaande leraren is een kennisbasis geformuleerd. Voor zowel leerlingen als leraren ligt de lat hoog.

Gelukkig weten we steeds beter hoe leerlingen en studenten leren.

Leerlingen leren het best door een goede afwisseling van samen en individueel actief nadenken over wiskundige problemen op een bij hen passend niveau. De verworven vaardigheden moeten inzichtelijk worden geoefend. Studenten leren effectief vanuit de basisschoolpraktijk, met de theorie als gereedschap voor de doordenking van die praktijk.

Dit boek biedt een overzicht van wat zowel leerlingen als hun leraren moeten kennen en kunnen als het gaat om rekenen-wiskunde op de basisschool.

Het boek gaat uit van eenendertig kerninzichten voor rekenen-wiskunde die leerlingen in hun basisschoolloopbaan verwerven. Ze hebben betrekking op de verschillende domeinen van rekenen-wiskunde: hele getallen, gebroken getallen, meten en meetkunde.

De kerninzichten worden aan de hand van sprekende praktijkvoorbeelden geïntroduceerd en in beknopte vorm uitgewerkt in leerlijnen. De theorie die verweven is in de praktijkverhalen rond de kerninzichten en de toelichtingen daarop, maken we vooral zichtbaar in belangrijke vak- en vakdidactische begrippen.

Een belangrijk idee achter dit boek is studenten een redelijk beknopt, maar volledig en betekenisvol overzicht te geven van wat leerlingen moeten leren begrijpen en kunnen op het gebied van rekenen-wiskunde. We laten zien wat leraren in hun mars moeten hebben om hen daarbij te ondersteunen. Dat heeft geleid tot een boek dat op verschillende manieren gebruikt kan worden: als studieboek, als naslagwerk of als handboek voor de leerkracht.

Pabostudenten kunnen in elke fase van de studie met het boek aan de slag.

Het boek *Kerninzichten* kan beschouwd worden als 'dekkend' voor de kennisbasis van leraren voor dit vakgebied. Dat geldt ook voor de honderd opgaven van hoofdstuk 14; ze sluiten aan bij de eenendertig kerninzichten en de kennisbasis rekenen-wiskunde. Studenten kunnen op die manier hun niveau van kennis, vaardigheid en inzicht peilen.

In het boek verwijzen we naar de website wp-kerninzichten.noordhoff.nl.

Daar vind je videobeelden van praktijksituaties en antwoorden op studievragen en opdrachten. Voor de opleiders zijn er bovendien ideeën te vinden voor het gebruik van het boek in bijeenkomsten met studenten.

Onze dank gaat uit naar de leerlingen, leraren en opleiders die de inhoud van dit boek tot leven hebben gebracht: theorie en praktijk konden we daarvoor verweven tot een geheel.



We hopen dat studenten met veel plezier zullen lezen en studeren uit dit boek.

*De auteurs,
Utrecht, mei 2011*

Woord vooraf bij de tweede druk

Mede op basis van een veldraadpleging onder studenten en opleiders zijn in de tweede druk diverse wijzigingen en toevoegingen aangebracht. Ook nieuwe ontwikkelingen, zoals de invoering van de referentieniveaus, noopten ons de inhoud aan te passen. Het heeft ertoe geleid dat deze versie van *Kerninzichten* verder is toegespitst op de kennisbasis, zonder overigens af te wijken van onze fundamentele keuze de didactiek en de eigen vaardigheid in samenhang aan te bieden.

In de eerste plaats zijn twee nieuwe hoofdstukken toegevoegd. Het boek start nu met het nieuwe hoofdstuk Oriëntatie op de inhoud, bedoeld om een eerste invulling te geven van de begrippen kerninzichten, leerlijnen en referenties, en vooral ook de verbanden daartussen. Verder is het boek aangevuld met een nieuw hoofdstuk Verbanden, ingericht op grond van de nieuwste inzichten en eisen. Ook zijn aan elk hoofdstuk oefenopgaven toegevoegd op het niveau van de kennisbasistoets. Ten slotte zijn er door het hele boek heen nieuwe begrippen verwerkt, zodat alle relevante begrippen uit de landelijke kennisbasistoets voor de Pabo in dit boek aan de orde komen.

Bij het herzien van *Kerninzichten* maakten we dankbaar gebruik van reacties die we mochten ontvangen van tal van opleiders en studenten. Wij bedanken in het bijzonder de studenten en opleiders Wiskunde en didactiek van de Hogeschool De Kempel, de Hogeschool iPabo en de Hogeschool Windesheim Flevoland voor het delen van hun kennis en ervaring met ons. Veel plezier en succes gewenst met de studie!

*De auteurs,
Utrecht, maart 2015*

Woord vooraf bij de derde druk

Wij ontvingen veel positieve reacties op de eerste en tweede druk van dit boek. Dit motiveert ons des te meer om actuele ontwikkelingen in het reken-wiskundeonderwijs en de lerarenopleiding basisonderwijs een plek te geven in dit boek.

De wijzigingen in deze derde druk betreffen in de eerste plaats een geheel nieuw hoofdstuk Begrijpen. Wat en hoe begrijpen kinderen eigenlijk? Wanneer kun je spreken van écht begrijpen door leerlingen? Hoe zie je dat als leraar en hoe kun je hen begeleiden in het proces van begrijpen naar inzicht? Praktijkvoorbeelden helpen je bij het vinden van antwoorden op die vragen. Zoals in de hele serie *Wiskunde in de praktijk*, is ook in dit hoofdstuk de theorie verwerkt in praktijkverhalen in de vorm van kenmerkende vak- en vakdidactische begrippen.

Een andere wijziging betreft de leerlijn vermenigvuldigen en delen, onderdeel van paragraaf 3.3. Die leerlijn is aangepast aan nieuwe inzichten op het gebied van die bewerkingen.

Verder is het begrippenregister aangevuld met nieuwe begrippen.

Wat betreft de website is een verzoek van veel studenten ingewilligd met de toevoeging van vakdidactische multiple-choicevragen bij de hoofdstukken 1 tot en met 9.

Onze dank gaat uit naar studenten en opleiders die gereageerd hebben op de tweede druk van dit boek met aanwijzingen voor verbetering en suggesties voor vernieuwing. Dat geldt in het bijzonder voor de uitgebreide reacties van Kenneth Tjon Soei Sjoen en Tim van de Wiel.

We hopen dat je aan deze derde druk vooral veel leerzaam plezier beleeft!

*De auteurs,
Utrecht, september 2018*

Woord vooraf bij de vierde druk

Op dit moment (juli 2022) richt de overheid haar onderwijsbeleid onder andere op basisvaardigheden. Rekenen-wiskunde wordt daarbij stevast genoemd als een van deze vaardigheden. Dat ligt ook voor de hand, want rekenen-wiskunde is van het grootste belang voor maatschappelijk functioneren en bij het leren voor een beroep of doen van een studie. Wanneer leerlingen onvoldoende inzicht hebben in rekenen-wiskunde kunnen zij niet goed deelnemen aan het maatschappelijk verkeer en worden ze belemmerd in hun school- of studiercarrière. Dat wil de overheid voorkomen en daarom wordt geïnvesteerd in reken-wiskundeonderwijs en wordt van (aanstaande) leraren gevraagd juist hier het verschil te maken. Hoe je dat kunt doen, is beschreven in dit boek. Het laat zien welke inzichten kinderen moeten verwerven om rekenen-wiskunde als basis op orde te krijgen en wat dat betekent voor de taak van leraren.

De gerichtheid op door leerlingen te verwerven inzichten was ook in de vorige edities van dit boek de kern. Dat neemt niet weg dat we bij het samenstellen van deze druk enkele verbeteringen in het boek hebben doorgevoerd. We hebben verouderde opgaven uit basisschoolmethoden vervangen door recentere activiteiten voor leerlingen. Verder hebben we toepassingsopgaven geactualiseerd in gevallen waar de achterhaalde context daarom vroeg. Daarnaast is een paragraaf rond 'expliciete directe instructie' (EDI) toegevoegd, omdat veel scholen voor dit organisatiemodel hebben gekozen. We zijn bij het samenstellen van deze vierde druk bijgestaan door enkele leraaropleiders van de Haagse Hogeschool, Martine den Engelsens, Ali Belhaji en Brenda van de Fliert. Wij danken hen hartelijk voor al het werk dat ze hebben verzet bij het uitzoeken van vervangende opgaven uit reken-wiskundemethoden.

*Ronald Keijzer
Sabine Lit
15 juli 2022*

Serie Wiskunde in de praktijk

De serie *Wiskunde in de praktijk* bestaat uit de volgende delen:

- *Rekenen-wiskunde in de praktijk: onderbouw* (2^e dr., 2014),
978-90-01-83281-0
website: rwp-onderbouw.noordhoff.nl
- *Rekenen-wiskunde in de praktijk: bovenbouw* (2^e dr., 2014),
978-90-01-83286-5
website: rwp-bovenbouw.noordhoff.nl
- *Wiskunde in de praktijk: kerninzichten* (4^e dr., 2023),
978-90-01-99444-0
website: wp-kerninzichten.noordhoff.nl
- *Rekenen-wiskunde in de praktijk: verschillen in de klas* (2^e dr., 2017),
978-90-01-87782-8
website: rwp-verschillenindeklas.noordhoff.nl
- *Rekenen-wiskunde in de praktijk: kennisbasis* (2^e dr., 2020),
978-90-01-89639-3
website: wp-kennisbasis.noordhoff.nl

De delen worden online ondersteund met:

- het e-book (digitale hoofdstukken)
- samenvattingen per hoofdstuk
- videofragmenten ter illustratie van de kerninzichten
- antwoorden op vragen en opdrachten
- vakdidactische multiplechoicetoetsvragen en antwoorden
- bronnen en literatuurverwijzingen
- lessuggesties voor opleiders

Inhoud

Studiewijzer 10

Oriëntatie op de inhoud 15

Deel 1

Hele getallen 27

1 Tellen en getallen 29

- 1.1 Synchron tellen 30
- 1.2 Resultatief tellen 33
- 1.3 Representeren van getallen 36
- 1.4 Leerlijn tellen en getallen 39
- 1.5 Kennisbasis 45

2 Tientallig stelsel 49

- 2.1 Tientallige bundeling 51
- 2.2 Positiewaarde 55
- 2.3 Leerlijn tientallig stelsel 57
- 2.4 Kennisbasis 65

3 Bewerkingen 71

- 3.1 Optellen en aftrekken 73
- 3.2 Vermenigvuldigen en delen 80
- 3.3 Leerlijn bewerkingen 86
- 3.4 Kennisbasis 94

4 Hoofdrekenen en cijferen 99

- 4.1 Hoofdrekenen 101
- 4.2 Leerlijn hoofdrekenen 107
- 4.3 Schattend rekenen 109
- 4.4 Leerlijn schattend rekenen 113
- 4.5 Kolomsgewijs rekenen en cijferen 116
- 4.6 Leerlijn kolomsgewijs rekenen en cijferen 120
- 4.7 Kennisbasis 122

Deel 2

Gebroken getallen 127

5 Verhoudingen 129

- 5.1 Vergelijking tussen grootheden 131
- 5.2 Gelijkwaardige getallenparen 136

- 5.3 Leerlijn verhoudingen 142
- 5.4 Kennisbasis 149

- 6 Breuken 155**
 - 6.1 Breuken in verdeel- en meetsituaties 157
 - 6.2 Een breuk als een verhouding van twee getallen 165
 - 6.3 Leerlijn breuken 172
 - 6.4 Kennisbasis 181

- 7 Kommagetallen 185**
 - 7.1 De decimale structuur van kommagetallen 186
 - 7.2 Decimale verfijning 192
 - 7.3 Leerlijn kommagetallen 198
 - 7.4 Kennisbasis 203

- 8 Procenten 207**
 - 8.1 Gestandaardiseerde verhouding 208
 - 8.2 Percentage als deel-geheelverhouding 214
 - 8.3 Leerlijn procenten 220
 - 8.4 Kennisbasis 225

Deel 3 **Meten, meetkunde en verbanden 231**

- 9 Meten 233**
 - 9.1 Grootheden kwantificeren 235
 - 9.2 Effectiviteit van standaardmaten 239
 - 9.3 Verfijning en nauwkeurig meten 243
 - 9.4 Het metrieke stelsel 247
 - 9.5 Leerlijn meten 252
 - 9.6 Kennisbasis 254

- 10 Meetkunde 259**
 - 10.1 Meetkundige eigenschappen 261
 - 10.2 Perspectief en viseerlijnen 265
 - 10.3 Schuiven, spiegelen en roteren 269
 - 10.4 Plaats bepalen 272
 - 10.5 Leerlijn meetkunde 277
 - 10.6 Kennisbasis 280

- 11 Verbanden 285**
 - 11.1 Aan de slag met verbanden 287
 - 11.2 Leerlijn verbanden 300
 - 11.3 Kennisbasis 305

Deel 4 **Verdieping van de professionaliteit 311**

- 12 Begrijpen 313**
 - 12.1 Niveaus van begrijpen 314
 - 12.2 Netwerken van relaties 318

- 12.3 Begrijpen en transfer [322](#)
- 12.4 Begrijpen door onderzoeken en 'uitvinden' [329](#)
- 12.5 Begrippen, begrijpen en taal [334](#)

- 13 Visie en samenhang [341](#)**
 - 13.1 Gecijferdheid [342](#)
 - 13.2 Waarden in het reken-wiskundeonderwijs [344](#)
 - 13.3 Kerndoelen en referentieniveaus [347](#)
 - 13.4 Leer- en onderwijsprincipes [351](#)
 - 13.5 Rekenen-wiskunde als onderzoeksgebied [355](#)
 - 13.6 Professionele gecijferdheid [357](#)

- 14 Honderd opgaven [361](#)**
 - Overzicht kerninzichten [419](#)

 - Begrippenregister [426](#)

 - Illustratieverantwoording [472](#)

 - Over de auteurs [474](#)

Studiewijzer

Dit studieboek gaat over het vak wiskunde in de basisschool en de wiskundige en wiskundig-didactische bagage, de zogenaamde professionele gecijferdheid, die een leerkracht basisonderwijs moet bezitten om goed reken-wiskundeonderwijs te kunnen geven.

Dit boek biedt de (aanstaande) leerkracht:

- een overzicht van de belangrijkste wiskundige noties die leerlingen moeten verwerven, beschreven in 31 kerninzichten die verweven zijn in betekenisvolle praktijksituaties
- een beschrijving van de leerlijnen bij die kerninzichten
- bij elk hoofdstuk opgaven op het niveau van de kennisbasistoets voor de pabo, met in het laatste hoofdstuk honderd extra opgaven voor verdere verbreding en verdieping van de professionele gecijferdheid

In dit boek komen alle onderwerpen aan de orde die vermeld zijn in de Kennisbasis Wiskunde voor de lerarenopleiding basisonderwijs.

De begrippen in de marge bevatten begrippen uit de Toetsgids pabo. Het boek bestaat uit vier delen:

- 1 Hele getallen
- 2 Gebroken getallen
- 3 Meten, meetkunde en verbanden
- 4 Verdieping van de professionaliteit

Professionele gecijferdheid

Het spreekt vanzelf dat je als (aanstaande) leerkracht voldoende wiskundig inzicht moet hebben en vaardig moet zijn in het rekenen, in het bijzonder in het oplossen van opgaven uit reken-wiskundemethoden voor de basisschool. Wie dat kan, wordt gecijferd genoemd. Maar een leerkracht basisonderwijs moet 'professioneel gecijferd' zijn en daar is meer voor nodig.

Om goed wiskundeonderwijs te kunnen geven, is het nodig dat je als leerkracht vooral over de volgende kennis, vaardigheden, inzichten en houding beschikt:

- herkennen van wiskunde in zowel de eigen omgeving als die van kinderen. De leerkracht moet situaties uit de belevingswereld van kinderen kunnen herkennen als geschikte wiskundige contexten of als geschikte toepassingssituaties.
- gericht zijn op oplossingsprocessen bij het (laten) oplossen van wiskundeproblemen, onder andere door te reflecteren op eigen en andermans oplossingen. De leerkracht moet oplossingen van leerlingen kunnen volgen en moet kunnen zien of ze wiskundig correct zijn en functioneel in het leerproces. De leerkracht moet flexibel kunnen omgaan met oplossingen en altijd verschillende oplossingsmanieren naast elkaar kunnen zetten.

- inspelen op het wiskundig denken van de leerlingen, onder andere door te anticiperen op hun denkprocessen en hen te stimuleren tot niveauverhoging. De leerkracht moet wiskundige redeneringen kunnen verwoorden op het niveau van (jonge) kinderen en ze kunnen uitdagen om wiskundige ontdekkingen te doen. Daarbij is het van belang dat de leerkracht ook plezier heeft in wiskunde, want daarmee draagt hij op leerlingen over dat dit een mooi vak is om te leren.

Theorie en praktijk

In dit boek is de praktijk het uitgangspunt voor het leren. De theorie is in de vorm van kenmerkende vak- en vakdidactische begrippen verwerkt in praktijkverhalen rond de kerninzichten. Deze begrippen vind je ook in de marge van de bladzijden, terwijl achter in het boek een begrippenregister is opgenomen met omschrijvingen van alle begrippen. Die begrippen hebben betrekking op het hele vakgebied, op de leerstof, de activiteiten van leerlingen en de didactische aanpak van de leerkracht. Het samenhangende cognitief netwerk van begrippen dat je door deze studie gaat ontwikkelen, vormt in feite de theoretische basis die je nodig hebt om het vak goed te kunnen onderwijzen.

De belangrijke begrippen horen tot de vaktaal, je hebt ze nodig om:

- leerprocessen van leerlingen te kunnen begrijpen, te volgen en daarop in te spelen als je lesgeeft of kinderen begeleidt
- de leerstof(opbouw) van reken-wiskundemethodes te herkennen en te kunnen aanpassen aan je eigen groep
- vakliteratuur te kunnen lezen
- de handleiding van de rekenmethode te kunnen begrijpen en kritisch te kunnen volgen
- gesprekken over rekenen-wiskunde te kunnen voeren met de collega's uit je schoolteam
- te kunnen overleggen met of advies te vragen aan begeleiders of andere deskundigen

Door na te denken over de relatie tussen theorie en praktijk leer je het vak op een steeds hoger niveau te beheersen.

Begrippenlijst

Op wp-kerninzichten.noordhoff.nl vind je een lijst met alle begrippen en een instructie hoe je de lijst kunt gebruiken om je eigen kennis te peilen. In de tabel hierna krijg je een beeld van die lijst.



Zelfpeiling: zet een kruisje in de kolom die van toepassing is

	Begin-/eindpeiling	Begin-/eindpeiling	Eindpeiling
Begrip	Ik weet wat dit begrip betekent	Ik kan een praktijkverhaal vertellen bij dit begrip	Dit begrip is voor mij beter bekend geworden. Ik kan een praktijkverhaal vertellen waarin dit begrip betekenis heeft.
Aanpak			
Aanzicht			
Absoluut			
Abstract niveau			

Verdieping van de professionaliteit

Het vierde deel van het boek gaat over de verdieping van de professionaliteit. Je maakt in dit deel kennis met algemene ideeën achter het wiskunde-onderwijs, zoals die in methoden voor de basisschool zijn vormgegeven. Ook ga je op onderzoek naar de vraag wanneer je kunt spreken van ‘werkelijk begrijpen’ door leerlingen en hoe je daar als leraar aan kunt bijdragen. Bovendien geeft het je zicht op de samenhang tussen de kerninzichten uit de voorgaande hoofdstukken.

Het laatste hoofdstuk van het vierde deel bestaat uit honderd opgaven. Ze bestrijken de gehele kennisbasis die aanstaande leraren geacht worden te verwerven. Ook kennis die geen onderdeel is van de leerstof van de basisschool, maar die volgens de kennisbasis wel tot de bagage van de leerkracht behoort, heeft er een plaats gekregen. De opgaven zijn bedoeld om je uit te dagen je professionele gecijferdheid te toetsen. De meeste opgaven hebben bovendien een extra didactische dimensie, die gelegenheid geeft de specifieke inzichten in de didactiek van dit vak te vergroten.

Vragen en opdrachten

Om het gericht studeren te bevorderen, zijn er naast de begrippen in de marge ook vragen in de tekst opgenomen. Vragen met een vraagteken in de kantlijn zijn bedoeld om je tijdens het lezen te laten nadenken over het voorafgaande. In de loop van de tekst vind je het antwoord.

Aan het eind van de paragrafen waarin kerninzichten beschreven en toegelicht zijn, staan genummerde vragen en opdrachten. Deze zijn bedoeld om de stof uit de voorafgaande paragraaf te verwerken. De antwoorden kun je vinden op de website.

Website



Op wp-kerninzichten.noordhoff.nl vind je:

- videofragmenten ter illustratie van de kerninzichten
- antwoorden op vragen en opdrachten
- vakdidactische multiplechoicetoetsvragen en antwoorden
- de begrippenlijst om je eigen kennis te peilen
- bronnen en literatuursuggesties



Oriëntatie op de inhoud

De eerste drie delen van dit boek beschrijven de leerstof voor het vak reken-wiskunde in de vorm van 31 kerninzichten die leerlingen in hun basisschooltijd moeten verwerven. Het zijn de belangrijkste mijlpalen in hun leerproces. Als leerkracht moet je goed op de hoogte zijn van deze kerninzichten om de kinderen die aan jouw zorgen zijn toevertrouwd te kunnen volgen en begeleiden in hun wiskundige ontwikkeling. Ook geven de kerninzichten een helder overzicht van het vakgebied.

Bij elk kerninzicht wordt in het boek een leerlijn geschetst. Bovendien wordt verwezen naar de achterliggende kerndoelen en de referentieniveaus voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool.

In dit eerste, oriënterende hoofdstuk wordt aan de hand van enkele praktijkvoorbeelden toegelicht wat de kerninzichten, leerlijnen, kerndoelen en referentieniveaus betekenen en hoe ze met elkaar samenhangen. Deze componenten vormen, samen met belangrijke begrippen die er betekenis aan geven, de theorie van het reken-wiskundeonderwijs.

Kerninzichten en leerlijnen

Een idee van de betekenis en de samenhang van kerninzichten en leerlijnen krijg je in de volgende praktijkvoorbeelden, waarin kerninzichten rond het onderwerp ‘verhoudingen’ aan de orde komen.

Praktijkvoorbeelden

Het onderwerp ‘verhoudingen’ speelt een rol in de gehele basisschool. Het begint dus al bij de kleuters. We nemen eerst een kijkje in groep 2, waar drie kinderen met poppen spelen. Daarna gaan we naar groep 7, waar leerlingen discussiëren over een probleem dat met schaduwverhoudingen te maken heeft.

Poppen in groep 2

Chaimae, Damian en Naomi spelen in de huiskamerhoek. In de relatieve chaos van poppenspullen hebben ze een probleem met het vinden van passende kleertjes. Juf Monique ziet wat er aan de hand is en vraagt: 'Waar zouden jullie naar kunnen kijken om te zien welke pop bij welke kleertjes past?'

Damian antwoordt: 'Je kunt kijken welke pop groot is en welke pop klein.'

Hij legt de poppen naast elkaar. Maar Chaimae en Naomi protesteren: 'Zo moet het niet. Zo kan je het niet zien.' Naomi verschuift de poppen zo dat ze met de voeten op één lijn liggen. 'Kijk, zo zie je het wel!'

Juf: 'Dat is een goed idee van Naomi. Als je begint met de kleinste pop, dan kun je de andere poppen die steeds een beetje groter zijn ernaast leggen. En dan kunnen jullie gaan uitzoeken welke kleertjes bij welke poppen horen. Leg de kleertjes die bij een pop horen er maar netjes onder.'

Daar hebben de kinderen zin in, ze gaan meteen aan de slag...

AFBEELDING 0.1 Drie poppen van verschillende lengte op een rij



Juf Monique probeert met die laatste interventie kerninzichten bij de kinderen te versterken. Over welke inzichten zou dat volgens jou kunnen gaan?

De uitdrukking 'netjes eronder leggen' die juf Monique gebruikt tijdens haar interventie spreekt boekdelen. Zij doet een beroep op het vermogen van de kinderen om de poppen te vergelijken en te ordenen op lengte van klein naar groot. Maar dat niet alleen. Het woord 'netjes' betekent hier in volwassen wiskundetaal: de kleertjes geordend neerleggen, naar verhouding van de grootte van de poppen. Als de grootste pop drie keer zo lang is als de kleinste pop en de middelste twee keer, dan weten de kleuters natuurlijk niet dat de lengtes van de poppen zich verhouden als $3 : 2 : 1$. Maar door het zoeken naar de passende kleertjes en het met elkaar daarover praten, krijgen ze spelenderwijs wel inzicht in het verhoudingsgewijs vergelijken van die lengtes. Dat inzicht in het vergelijken van grootheden als lengte, oppervlakte, inhoud en tijd, is in de basisschool een belangrijk kerninzicht voor het leren rekenen met verhoudingen.

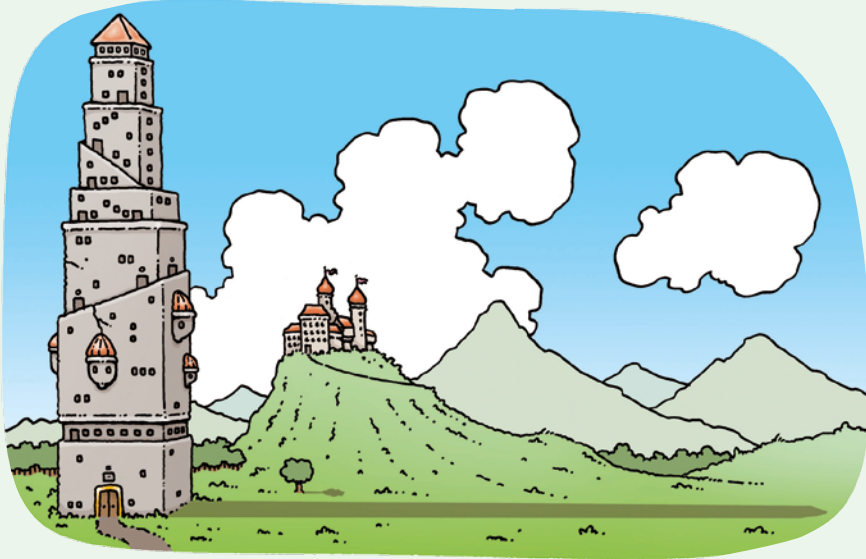
Verhouding

Grootheid

Schaduw in groep 7

Vijf jaren basisschool verder speelt datzelfde kerninzicht, maar nu in groep 7, in een andere context en op een ander niveau. Op het moment dat we het lokaal binnenstappen, zijn de leerlingen in groepjes van twee aan het discussiëren over een opgave uit het rekenboek.

AFBEELDING 0.2 Hoe hoog is de toren?



Bron: Rekenrijk, Rekenboek 7A

De schaduw van de toren is 74 meter lang.

De schaduw van de boom is 480 cm lang. De hoogte van de boom is 360 cm.

Reken de hoogte van de toren uit.

Je kunt de verhoudingstabel gebruiken.

Tess en Bram lijken een verschillende aanpak op het oog te hebben.

Bram: 'We moeten een verhoudingstabel maken. Dat is handig, dan kun je je niet vergissen!'

Tess: 'De toren is in ieder geval een flink stuk lager dan 74 meter... even kijken... wel een kwart lager, denk ik.'

Bram: 'Oké, maar dat is niet precies, we moeten precies de hoogte uitrekenen.'

Tess: 'Je mag de tabel gebruiken, dat hoeft niet.'

Bram: 'Laten we het eerst met een verhoudingstabel proberen, zoals de juf deed, dan gaan we daarna kijken of jouw manier op hetzelfde uitkomt, oké?'

Bram krijgt zijn zin, ze maken een verhoudingstabel. Dat is al lastig genoeg, want waar moet je welke getallen zetten? Het komt er bij Tess en Bram eerst uit te zien als in verhoudingstabel 1, met een vraagteken bij de hoogte die ze zoeken (zie tabel 0.1).

TABEL 0.1 Verhoudingstabel 1

	Boom				Toren
Hoogte	360 cm				?
Schaduw	480 cm				74 m

Bram ziet de stap naar 36 en 48 (tabel 0.2), maar Tess herkent eigenlijk al meteen de verhouding 3 : 4. Nu nog van 4 naar 74. Volgens Tess maakt het even niet uit of het

centimeters of meters zijn, het is een verhouding. Het viervoud 72 (18×4), dicht bij 74, wordt gevonden en dan is het bijbehorende hoogtegetal dus $18 \times 3 = 54$.

TABEL 0.2 Verhoudingstabel 2

	Boom					Toren
Hoogte	360 cm	36	3	54	1,5	55,5
Schaduw	480 cm	48	4	72	2	74 m

Bram: 'Dan hebben we nu nog 2 nodig om op 74 te komen.'

Tess: 'Ja, en bij die kolom...' (ze wijst naar de kolom met de 3 en de 4) 'zie je dat bij 2 de helft van 3, dus 1,5 hoort. Dan hoort bij de schaduw van 74 m dus een hoogte van 55,5 m.'

Juf heeft op een afstandje meegeluisterd en vraagt Tess welke oplossing, zonder de verhoudingstabel, zij in gedachten had...



Welke oplossing zou Tess volgens jou aanvankelijk in gedachten kunnen hebben, gezien ook haar opmerkingen aan het begin en verderop bij de stap van 36 : 48 naar 3 : 4?

Het is bijzonder om te zien hoe meegaand Tess is als Bram voorstelt om met de verhoudingstabel aan de slag te gaan. Aan de ene kant begrijpelijk, want dat is wat de kinderen tot dan toe gewend zijn bij het oplossen van verhoudingsproblemen. Anderzijds lijkt Tess vrijwel meteen in de gaten te hebben dat het hier gaat om de verhouding 3 : 4 en dat je de hoogte van de toren dus kunt vinden door een kwart van 74 af te trekken.

Kerninzichten

Wiskunde is een vak waarbij inzicht een grote rol speelt. Inzichten in wiskundige essenties, kerninzichten dus – in de literatuur ook wel *big ideas* genoemd – worden niet lineair en stapsgewijs verworven, maar cyclisch en sprongsgewijs. Zonder deze inzichten stagneert het leerproces. Ze zijn nodig om vaardigheden te kunnen aanleren, om te kunnen begrijpen wat je doet en zodoende effectief en efficiënt te kunnen werken. In dit eerste hoofdstuk zijn de kerninzichten voor het domein 'verhoudingen' als voorbeeld genomen.

Kleuters doen nog spelenderwijs hun eerste ervaringen op met verhoudingen, zoals in het voorbeeld met de poppen. Gaandeweg hun basisschoolloopbaan krijgen leerlingen de gelegenheid verhoudingsproblemen getalsmatig aan te pakken, al of niet met behulp van een model, zoals een verhoudingstabel in het voorbeeld van de schaduwen. In dit laatste geval gaat het, net als bij de kleertjes en de poppen, om het vergelijken van lengte. Maar wel een flinke stap verder, want nu moet een reeks van verhoudingsgetallen gezocht worden in dezelfde verhouding 3 : 4. Dat vraagt dus een heel ander (kern)inzicht. Ook voor de andere domeinen rond hele getallen, gebroken getallen, meten, meetkunde en verbanden zijn kerninzichten geformuleerd. In een overzicht achter in het boek (voorafgaand aan het Begrippenregister) vind je ze alle 31.

Kerninzicht

Verhoudingstabel

Leerlijnen

Om op een goede manier te kunnen werken aan de ontwikkeling van (kern-)inzichten, moet je als leerkracht uiteraard in de eerste plaats zelf die inzichten hebben. Vervolgens gaat het erom dat je de leerlingen kunt begeleiden bij het verwerven van die inzichten en de bijbehorende kennis en vaardigheden. Geen eenvoudige opdracht.

Gelukkig spannen onderwijsontwikkelaars, onderzoekers en auteurs van reken-wiskundeboeken zich in om de leerlijnen op grond van ervaringen in de praktijk steeds weer aan te passen. Leerlijnen geven globaal aan langs welke lijn leerlingen kerninzichten en bijbehorende begrippen en vaardigheden kunnen verwerven. Het is belangrijk kerninzichten en leerlijnen als een samenhangend geheel te leren kennen, omdat die kennis houvast geeft bij het plannen, uitvoeren en evalueren van het onderwijs.

Leerlijnen

In dit hoofdstuk laten we aan de hand van het onderwerp ‘verhoudingen’ zien hoe kerninzichten en leerlijnen samenhangen. In paragraaf 5.3 van dit boek is de leerlijn voor verhoudingen beschreven. De titels van de subparagrafen (tabel 0.3) geven je een eerste beeld van de belangrijke leerervaringen die kinderen uiteindelijk moeten leiden naar de kerninzichten voor verhoudingen en de bijbehorende vaardigheden voor het rekenen met verhoudingen.

TABEL 0.3 Titels van subparagrafen leerlijn verhoudingen

-
- Meetkundige en getalsmatige voorervaringen
 - Het betekenisvol organiseren van verhoudingssituaties in eenvoudige schema's en modellen
 - Het modelondersteund redeneren en rekenen met verhoudingen
 - Formeel rekenen en toepassen
 - Toepassingen
-

Zo is het eerdergenoemde ordenen van de poppen (afbeelding 0.1) een voorbeeld van een meetkundige voorervaring van verhoudingen. Het rekenen met behulp van de verhoudingstabel door Tess en Bram (tabel 0.1 en 0.2) is een voorbeeld van modelondersteund redeneren en rekenen. In de tweede oplossing van Tess, een kwart van 74 aftrekken, rekent ze formeel ('kaal'). Overigens kun je uit het verhaal niet met zekerheid opmaken in hoeverre de context van de verhouding tussen hoogte en schaduw haar nog steun biedt bij die laatste berekening.

Context

Kerdoelen en referentieniveaus

In opdracht van de overheid zijn kerndoelen beschreven. Later zijn daar referentieniveaus aan toegevoegd. Kerndoelen beschrijven wat leerlingen in het reken-wiskundeonderwijs moet worden aangeboden, referentieniveaus geven aan wat zij moeten begrijpen, kennen en kunnen op 12-, 16- respectievelijk 18-jarige leeftijd. In deze paragraaf worden voorbeelden gegeven van kerndoelen en referentieniveaus, en wordt ook de samenhang met kerninzichten en leerlijnen besproken.

Kerdoelen

De belangrijkste zaken die kinderen moeten leren om actief deel te nemen aan de samenleving, inclusief hun eigen persoonlijke ontwikkeling, heeft de

overheid vastgelegd in de zogenaamde kerndoelen. Die worden overigens regelmatig herzien, de eerstvolgende waarschijnlijk in 2019 (zie curriculum.nu). De maatschappij verandert immers en daarmee ook de eisen die aan de ontwikkeling van haar burgers worden gesteld.

Van de 58 kerndoelen voor het basisonderwijs (2006) zijn er 11 bedoeld voor het reken-wiskundeonderwijs (zie tabel 0.4). Alleen al het taalgebruik verraadt veel aandacht voor betekenisvol reken-wiskundeonderwijs: praktische problemen oplossen door redeneren, onderbouwen en beoordelen van oplossingen, en de rekenmachine met inzicht gebruiken.

TABEL 0.4 De elf kerndoelen voor het reken-wiskundeonderwijs

Kerndoelen reken-wiskundeonderwijs	
23	De leerlingen leren wiskundetaal gebruiken.
24	De leerlingen leren praktische en formele reken-wiskundige problemen op te lossen en redeneringen helder weer te geven.
25	De leerlingen leren aanpakken bij het oplossen van reken-wiskundeproblemen te onderbouwen en leren oplossingen te beoordelen.
26	De leerlingen leren structuur en samenhang van aantallen, gehele getallen, kommagetallen, breuken, procenten en verhoudingen op hoofdlijnen te doorzien en er in praktische situaties mee te rekenen.
27	De leerlingen leren de basisbewerkingen met gehele getallen in elk geval tot 100 snel uit het hoofd uitvoeren, waarbij optellen en aftrekken tot 20 en de tafels van buiten gekend zijn.
28	De leerlingen leren schattend tellen en rekenen.
29	De leerlingen leren handig optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.
30	De leerlingen leren schriftelijk optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen volgens meer of minder verkorte standaardprocedures.
31	De leerlingen leren de rekenmachine met inzicht te gebruiken.
32	De leerlingen leren eenvoudige meetkundige problemen op te lossen.
33	De leerlingen leren meten en leren te rekenen met eenheden en maten, zoals bij tijd, geld, lengte, omtrek, oppervlakte, inhoud, gewicht, snelheid en temperatuur.

Kerndoelen zijn streefdoelen, die aangeven waarop basisscholen zich moeten richten bij de ontwikkeling van hun leerlingen. Scholen mogen zelf bepalen hoe de kerndoelen binnen bereik komen; daarom zijn ze ook ruim gedefinieerd. Tegelijkertijd vormen ze een garantie dat kinderen zich in hun schoolperiode blijven ontwikkelen en dus een breed en gevarieerd onderwijsaanbod krijgen. De ruime formulering van de doelen maakt dat ze van toepassing zijn op veel leeractiviteiten van leerlingen over de volle breedte van de basisschool.



Welke kerndoelen vind je van toepassing op de beschreven praktijkproblemen uit dit hoofdstuk (poppen in groep 2 en schaduwen in groep 7)?

Het ordenen van de poppen en de kleertjes in groep 2 past vooral bij het leren gebruiken van eenvoudige wiskundetaal en redeneren (doel 23 en 24). Ook past het bij eerste ervaringen opdoen met verhoudingen (doel 26). Het rekenen van Bram en Tess sluit aan bij de doelen 23 tot en met 26, met het accent op doelstelling 26.

In tabel 0.5 zie je een deel van de leerlijn bij kerndoel 26. Bedenk dat bij de leeractiviteiten voor elke bouw in dat overzicht de activiteiten van voorgaande groepen zijn inbegrepen.

TABEL 0.5 Leerlijn kerndoel 26, Getallen, breuken en verhoudingen: betekenis en verband

Groepen 1/2	Groepen 3/4	Groepen 5/6	Groepen 7/8
<p>Het onderscheiden van verschillende betekenissen van getallen bij het benoemen van onder andere:</p> <ul style="list-style-type: none"> • aantallen • posities (de derde in de rij, huisnummers) • tijd, leeftijd, gewicht, lengte • grootte van kledingmaten en andere groottes • prijzen 	<p>Het onderscheiden van verschillende betekenissen van getallen bij het gebruik van getallen als:</p> <ul style="list-style-type: none"> • hoeveelheidgetal (resultatief tellen) en het rekenen daarmee • op de klok, de kalender, maatgetallen op meetlat en liniaal, getallen op de weegschaal, tijd en data, leeftijd, waarde (prijs, kosten), gewicht en temperatuur • in allerlei contexten, zoals: de krant, de winkel, kledingmaten, rugnummers, huisnummers, autonummers, leeftijden, data (15 juli of de vijftiende van de zevende of 15-07-2007) 	<p>Het onderscheiden van verschillende betekenissen van getallen bij:</p> <ul style="list-style-type: none"> • digitale kloktijden lezen en hanteren, zoals 21:34 uur • breuk als maatgetal: stroken van $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, et cetera • breuken en kommagetallen als maatgetal in prijzen, maten en gewichten • breuk als operator: $\frac{3}{4}$ nemen van een strook of een aantal • breuk als verhoudingsgetal, zoals in recepten • vanuit een deel het geheel berekenen • van niet evenredige verhoudingen, zoals bij: een vierkant wordt vier keer zo groot als de zijden twee keer zo groot worden 	<p>Het onderscheiden van verschillende betekenissen van getallen bij:</p> <ul style="list-style-type: none"> • verhoudingsgetallen voor bijvoorbeeld: snelheid (50 km/uur), 30% (dertig van elke honderd), $\frac{3}{5}$ (drie van elke vijf) en in vijfden verdelen en er drie nemen • het verschil tussen 3,5 meter en 3,50 meter • verband leggen tussen breuken en delen • relaties tussen percentages als 50%, 25%, 10%, 5% • relatie tussen breuken en procenten (voor uitrekenen van percentages) • percentages als verhoudingsgetallen, in verhoudingstabel, sectoridiagram, stroken • percentage als $\frac{1}{100}$ • verhoudingen bij: toename en afname, stijging/daling, rente, winst, verlies, korting • inzicht in lineaire en niet-lineaire maten, lineaire vergroting, oppervlaktevergroting, inhoudsvergroting

Bron: www.tule.slo.nl

Welke van de betekenissen uit tabel 0.5 kun je verbinden met de activiteiten van de kinderen uit groep 2 en 7 in de voorgaande praktijkvoorbeelden?



In het praktijkvoorbeeld van het ordenen van de poppen in groep 1 en 2 (afbeelding 0.1) gaat het vooral over de betekenis van verhoudingen in de zin van verhoudingsgewijs vergelijken en ordenen van de grootte (lengte) van de poppen en hun kleding. Bij het rekenwerk van Bram en Tess moeten de betekenissen van meetgetallen bekend zijn (lengte en hoogte in cm en m, kommagetallen) evenals de tafels van vermenigvuldiging, handig rekenen bij het halveren en verdubbelen, en van verhoudingsgetallen. Vooral is inzicht nodig in het gebruik van de verhoudingstabel, zoals het maken van handige getallenparen in gelijke (evenredige) verhoudingen.

Verhoudings-
gewijs

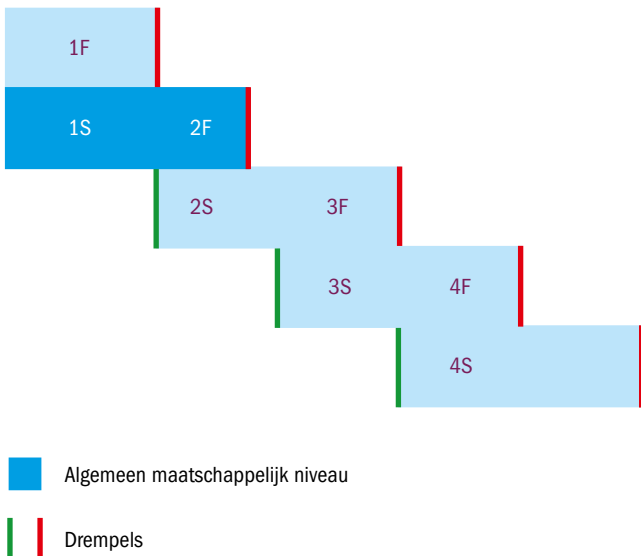
Verhoudingstabel
Evenredigheid

Referentieniveaus

De overheid heeft weliswaar in (kern)doelen beschreven welk reken-wiskundeonderwijs scholen moeten aanbieden en heeft dat door experts in leerlijnen laten uitwerken, maar dat betekent niet zonder meer dat daarmee een voor alle leerlingen gewenst minimum eindniveau of hoger wordt bereikt. Met name de daling in de leeropbrengsten en de zorg voor doorlopende leerlijnen hebben ertoe geleid dat zogenoemde referentieniveaus zijn ontwikkeld. De niveaus zijn gedefinieerd voor 12-, 16- en 18-jarigen (afbeelding 0.3). Er zijn drie soorten referentieniveaus: het 'fundamenteel niveau', aangeduid met de letter F, het 'streefniveau', aangeduid met de letter S, en het X-niveau. Voor 12-jarigen gaat het om de niveaus 1F en 1S (einde basisschool). Het cijfer 1 geeft hier aan dat het om het laagste referentieniveau gaat.

Referentieniveaus

AFBEELDING 0.3 De referentieniveaus



Toewijzing aan sectoren:

Taal

1F en 1S: primair en
speciaal onderwijs
1F: praktijkonderwijs
2F: mbo 1, 2, 3, vmbo
3F: mbo 4, havo
4F: vwo

Rekenen

1F en 1S: primair en
speciaal onderwijs
1F: praktijkonderwijs
2F: mbo 1, 2, 3, vmbo
3F: mbo 4, havo, vwo

Redeneren

Het is de bedoeling dat 90 procent van de leerlingen het fundamentele niveau haalt. Het streefniveau is bedoeld voor twee derde van de leerlingen. Het X-niveau geldt voor excellente leerlingen.

Elke school zal ernaar streven om zo veel mogelijk kinderen op het streefniveau 1S te brengen, een hoger niveau van abstractie en logisch redeneren dan 1F. Niveau 1S is overigens ook nodig voor leerlingen die willen doorstromen naar havo of vwo of naar de gemengde leerweg of theoretische leerweg in het vmbo. Een leerkracht basisonderwijs moet voor rekenen-wiskunde het streefniveau 3S beheersen. Dat niveau is toegespitst op de wiskundige kennis en vaardigheden die de leerkracht nodig heeft om goed te kunnen functioneren en 'boven de stof' te staan. Die wiskundige kennis en vaardigheden zijn beschreven in de Kennisbasis rekenen-wiskunde voor de lerarenopleiding basisonderwijs.



Op de website wp-kerninzichten.noordhoff.nl is het document 'Doorlopende leerlijnen Taal en Rekenen' te vinden, waarin de referentieniveaus voor de vakken rekenen-wiskunde en taal uitgebreid zijn beschreven. Ook vind je

daar een verwijzing naar de Kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo en de bijbehorende toetsgids.

Voor het vak rekenen-wiskunde zijn bij elk referentieniveau vier domeinen (Getallen, Verhoudingen, Meten en meetkunde, en Verbanden) beschreven, met voor elk domein drie onderdelen (zie tabel 0.6):

- notatie, taal en betekenis*, waarbij het gaat om de uitspraak, schrijfwijze en betekenis van getallen, symbolen en relaties en om het gebruik van wiskundetaal
- met elkaar in verband brengen*, waarbij het gaat om het verband tussen begrippen, notaties, getallen en dagelijks spraakgebruik
- gebruiken*, waarbij het erom gaat rekenkundige vaardigheden in te zetten bij het oplossen van problemen

TABEL 0.6 Overzicht onderdelen referentieniveaus

	a Notatie, taal en betekenis	b Met elkaar in verband brengen	c Gebruiken
Getallen	Uitspraak, schrijfwijze en betekenis van getallen, symbolen en relaties. Wiskundetaal gebruiken.	Getallen en getsrelaties. Structuur en samenhang.	Berekeningen uitvoeren met gehele getallen, breuken en decimale getallen.
Verhoudingen	Uitspraak, schrijfwijze en betekenis van getallen, symbolen en relaties. Wiskundetaal gebruiken.	Verhouding, procent, breuk, decimaal getal, deling, 'deel van' met elkaar in verband brengen.	In de context van verhoudingen berekeningen uitvoeren, ook met procenten en verhoudingen.
Meten en meetkunde	Maten voor lengte, oppervlakte, inhoud en gewicht, temperatuur. Tijd en geld. Meetinstrumenten. Schrijfwijze en betekenis van meetkundige symbolen en relaties.	Meetinstrumenten gebruiken. Structuur en samenhang tussen maateenheden. Verschillende representaties, 2D en 3D.	Meten. Rekenen in de meetkunde.
Verbanden	Analyseren en interpreteren van informatie uit tabellen, grafische voorstellingen en beschrijvingen. Veelvoorkomende diagrammen en grafieken lezen en interpreteren.	Verschillende voorstellingsvormen met elkaar in verband brengen. Gegevens verzamelen, ordenen en weergeven. Patronen beschrijven.	Tabellen, diagrammen en grafieken gebruiken bij het oplossen van problemen. Rekenvaardigheden gebruiken.

Bron: SLO Concretisering referentieniveau

Elk van de drie onderdelen a, b en c, dus elke 'cel' in tabel 0.6, is steeds opgebouwd uit drie typen kennis en vaardigheden (niet te zien in de tabel). Die zijn als volgt kort te karakteriseren:

- paraat hebben: kennis van feiten en begrippen, reproduceren, routines, technieken
- functioneel gebruiken: kennis van een goede probleemaanpak, het toepassen, het gebruiken binnen en buiten het schoolvak
- weten waarom: begrijpen en verklaren van concepten en methoden, formaliseren, op een hoger niveau abstraheren en generaliseren, blijk geven van overzicht

Om een indruk te krijgen van de onderdelen in de referentieniveaus (tabel 0.6) gaan we na of die zichtbaar worden in het denkwerk van Bram en Tess als zij het schaduwprobleem oplossen (tabel 0.1 en 0.2).



Welke activiteiten van Bram en Tess kun je verbinden aan de karakteristieken van tabel 0.6?

Verhouding
Wiskundetaal

Kommagetal

Breuken

**Vermenig-
vuldigen**

Inzicht

Als we het denk- en rekenwerk van Bram en Tess bekijken, gaat het in ieder geval over het *gebruik* van *verhoudingen* (c). Daarbij moeten ze de nodige wiskundetaal gebruiken en de betekenis daarvan kennen, zoals de begrippen verhouding, 3 'staat tot' 4, verhoudingstabel, lengte, hoogte, kwart en kommagetal. Die begrippen moeten ze ook met elkaar *in verband brengen*, bijvoorbeeld wanneer ze de lengte van de schaduw en de hoogte van de toren in verhoudingsgetallen in de verhoudingstabel moeten verwerken in een rij van verhoudingsgetallen. Daarbij moeten ze onder andere ook de tafel van 4 kennen en kunnen gebruiken. Tess ziet bovendien al meteen dat 360 en 480 zich verhouden als 3 : 4, en legt daarna het verband met breuken, namelijk dat 360 'een kwart minder' is dan 480. Vooral deze laatste soort inzichten en vaardigheden in het denk- en rekenwerk van Tess zijn elementen van het 1S-niveau.

Het praktijkvoorbeeld van Bram en Tess laat ook zien dat kerninzichten, leerlijnen, leerdoelen en referentieniveaus sterk samenhangen. Voor hun leerkracht betekent het bijvoorbeeld dat het opbouwen en volgen van de leerlijn verhoudingen met bijbehorende doelen nog geen garantie biedt voor succes. Als Bram of Tess de tafels van vermenigvuldiging (bijvoorbeeld de tafel van 4) niet kennen en kunnen toepassen, komt er van inzicht in het werken met verhoudingen weinig terecht en wordt referentieniveau 1F niet bereikt. Vooral alertheid van de leerkracht op de (kern)inzichten van leerlingen is van essentieel belang voor het in gang zetten en op gang houden van hun leerprocessen.



DEEL 1

Hele getallen

- 1 Tellen en getallen 29
- 2 Tientallig stelsel 49
- 3 Bewerkingen 71
- 4 Hoofdrekenen en cijferen 99



1

Tellen en getallen

Tellen en getalbegrip liggen aan de basis van tal van reken-wiskundeactiviteiten. Kunnen tellen is een belangrijke vaardigheid om te leren rekenen. Men zegt ook wel: 'Tellen is de basis voor het leren rekenen.'

Dit hoofdstuk beschrijft hoe kinderen in de onderbouw kennis maken met getallen en leren tellen. Het kennismaken met tellen en getallen gebeurt al vanaf de vroegste kinderjaren. In groep 1 en 2 stimuleert de leerkracht de verdere ontwikkeling, door activiteiten aan te bieden en vragen te stellen die kinderen op het spoor zetten van nieuwe inzichten in getallen. Tellen is een vaardigheid die veel geoefend moet worden. Gelukkig hebben jonge kinderen daar vaak veel plezier in!

Overzicht kerninzichten

Bij tellen en getallen verwerven kinderen het inzicht dat:

- bij het tellen van een aantal voorwerpen het opzeggen van de telrij gelijk loopt met het aanwijzen (kerninzicht synchroon tellen)



- het laatste getal bij tellen van een aantal objecten de hoeveelheid aanduidt (kerninzicht resultaatief tellen)



- je hoeveelheden kunt representeren met behulp van materialen, schema's en cijfersymbolen (kerninzicht representeren)



Deze kerninzichten sluiten aan bij de kerndoelen 23 en 26:

- 23 De leerlingen leren wiskundetaal gebruiken.
 26 De leerlingen leren structuur en samenhang van aantallen, gehele getallen, kommagetallen, breuken, procenten en verhoudingen op hoofdlijnen te doorzien en er in praktische situaties mee te rekenen.

In de referentieniveaus staat dat kinderen op 12-jarige leeftijd hele getallen moeten kunnen uitspreken en schrijven, voor niveau 1F tot 100.000 en voor niveau 1S tot 1 miljard. Kinderen moeten in de telrij tot ongeveer 100.000 kunnen doortellen en teruggtellen, en deze rijen kunnen opschrijven op basis van de structuur in de telrij en de structuur van getallen.

1.1 Synchroon tellen

Bij het leren tellen van voorwerpen moeten kinderen leren dat ze steeds één voorwerp moeten aanwijzen en daarbij tegelijkertijd één telwoord moeten noemen: dat heet synchroon tellen. Bijvoorbeeld bij het spelen van spelle-

tjes komt de noodzaak van synchroon tellen op een heel natuurlijke manier naar voren. Wie niet synchroon telt, speelt vals.

1.1.1 Praktijkvoorbeelden

Twee voorbeelden uit de kleutergroepen laten zien hoe kinderen spontaan bezig zijn met leren tellen.

Het racebaanspel wordt vaak gespeeld in de kleutergroep van José en Asrin. De kinderen kennen de regels inmiddels goed: vooraan beginnen met je pion, om beurten met de dobbelsteen gooien en dan met de pion vooruit 'lopen' in de vakjes van het spelbord. Wie het eerst aan het eind komt heeft gewonnen. José en Asrin spelen met verhitte gezichten en naderen het eind van het spel.

José gooit met de dobbelsteen. Ze ziet direct dat het vier is en roept: 'Vier!' Dan pakt ze haar pion en zegt: 'Eén, twee, drie, vier, ik heb gewonnen.'

'Nee!' zegt Asrin, 'Kijk, je moet zo tellen, één, twee, drie, vier.' Asrin telt opnieuw met de pion en tikt hierbij steeds een vak verder aan. José komt helemaal niet aan het eind! Hij heeft nog een kans om te winnen.

AFBEELDING 1.1 Synchroon tellen



| Wat doet José niet goed? Hoe zou dat komen?

José en Asrin kennen allebei de telwoorden tot en met zes. Toch ontstaat er een probleempje: José telt één, twee, drie, vier, maar ze wijst niet bij elk telwoord een vakje aan. Ze maakt wat bewegingen met haar pion boven de vakjes tot helemaal naar het einde van de racebaan en denkt dat ze gewonnen heeft. Asrin steekt daar een stokje voor en laat zien hoe José had moeten tellen. Hij telt opnieuw één, twee, drie, vier en tikt de vakjes één voor één correct aan. Hij telt synchroon, dat is het tegelijk aanwijzen en benoemen van het telwoord. Bij het spelen van een bordspel komt het asynchroon tellen al snel aan het licht. José wordt hier op de vingers getikt door Asrin. Geen probleem, het spel gaat gewoon verder. Dit is een belangrijk kenmerk van spelletjes. Door de interactie in het spel corrigeren kinderen elkaar spelenderwijs.

Bij kinderen die aan het tellen zijn, kun je vaak goed observeren hoe ver hun inzicht ontwikkeld is. Koos overziet de hoeveelheid niet, waardoor het moeilijk wordt elk stuk fruit maar één keer te tellen. Hij weet niet wanneer hij klaar is met tellen en telt sommige vruchten twee of drie keer. Verder blijkt dat Koos de telrij vanaf twaalf nog niet goed kent. Als het moeilijk wordt, kan hij het ritme niet meer volhouden. Hij heeft er steeds meer moeite mee om tegelijkertijd een vrucht aan te wijzen en het volgende telwoord te noemen. Bij één en dezelfde appel noemt Koos de telwoorden 'vijftien' en 'zes-tien'. Koos kan nog niet goed synchroon tellen. Overigens is dat in deze situatie geen probleem: jonge kinderen hoeven nog niet zoveel te tellen en oefenen het tellen hier spontaan en gewoon voor hun plezier. Kinderen vinden het ritme van tellen vaak leuk.



Tellen
Synchroon

Interactie

Observeren

Telrij



Een ander voorbeeld uit deze kleutergroep:

In de kring liggen verspreid op de grond allerlei soorten fruit. De klas werkt met het thema groente en fruit, en de meester heeft een sorteeractiviteit met het meegenomen fruit gepland. Sommige kinderen beginnen echter al spontaan te tellen. Dat valt nog niet mee, omdat er wel twintig stuks fruit liggen. Koos telt in het wilde weg, waardoor sommige vruchten worden overgeslagen en andere meer dan één keer worden geteld. Anne weet raad en maakt mooie rijen van het fruit. Koos begint opnieuw en telt de rijen af: een, twee, drie, vier, tot en met twaalf. Dan vervolgt hij aarzelend: dertien, veertien. Bij de volgende appel noemt hij vijftien en zestien tegelijkertijd.

AFBEELDING 1.2 Verschillende soorten fruit



1.1.2 Kerninzicht synchroon tellen

Na de praktijkvoorbeelden in subparagraaf 1.1.1 kun je in deze subparagraaf lezen waar het bij dit kerninzicht precies om gaat.

Kinderen verwerven het inzicht dat bij het tellen van een aantal voorwerpen het opzeggen van de telrij gelijk loopt met het aanwijzen.

Synchroon tellen Het inzicht dat je synchroon moet tellen is een kerninzicht dat kinderen moeten ontwikkelen om later een aantal objecten goed te kunnen tellen. Als je voorwerpen wilt tellen, moet je elk voorwerp precies één keer aanwijzen. Je mag geen voorwerpen overslaan of dubbel tellen. Bij elk voorwerp dat je

aanwijst, moet je precies één telwoord noemen, en wel steeds het volgende telwoord. Hiermee is synchroon tellen een noodzakelijke voorwaarde om te kunnen vaststellen hoeveel voorwerpen er zijn: om resultatief te kunnen tellen. Wanneer een kind de getallen niet tegelijkertijd zegt met het aanwijzen, zal het resultaat, de hoeveelheid, dus ook niet kloppen.

Resultatief tellen

1

Aspecten van synchroon tellen

Bij het synchroon tellen spelen verschillende aspecten een rol. Als je terugkijkt naar de beide praktijkvoorbeelden hiervoor zie je dat:

- José de pion sneller over de vakken van het spelbord beweegt dan ze de telwoorden uitspreekt
- Koos vruchten dubbel telt of overslaat, omdat het fruit verspreid door elkaar ligt
- Koos bij het tellen van fruit dat geordend ligt in rijen, langzamer is met het noemen van de telwoorden dan hij aanwijst
- Koos de telwoorden groter dan twaalf nog niet zo goed kent

Waarom herken je het kerninzicht synchroon tellen bij leerlingen?

Uit welke kennis of handelingen van een leerling kun je als leerkracht opmaken dat een leerling inzicht toont in synchroon tellen? Dat inzicht kan erg verschillen in niveau en kun je vaststellen als een leerling:

- bij het tellen van voorwerpen precies tegelijk een voorwerp aanwijst en daarbij één telwoord noemt
- weet dat je alle voorwerpen moet tellen
- voorwerpen ordent om ze beter te kunnen tellen
- bij het aanwijzen geen voorwerpen dubbel telt of overslaat
- bij het tellen van voorwerpen de telwoorden correct en in de goede volgorde opnoemt (voor jongste kleuters tot en met zes, en oudste kleuters tot en met tien minimaal)

1.2 Resultatief tellen

Om een hoeveelheid te tellen is naast het synchroon tellen ook noodzakelijk dat je begrijpt dat het telwoord bij het laatst getelde object het aantal van de hele verzameling weergeeft.

1.2.1 Praktijkvoorbeelden

In de voorbeelden hierna wordt weer geteld door kleuters, maar nu naar aanleiding van vragen van de leerkracht.

Sinterklaas heeft in een brief nieuwe potloden beloofd, voor elk kind één. Juffrouw Stefanie vraagt aan de kinderen in de kring: 'Hoeveel potloden moet Sinterklaas vrijdag meebrengen?'

Felien reageert direct: 'Dat kun je toch zien in de lijst?'

Juf zegt: 'Je hebt gelijk', en ze pakt de lijst erbij. 'Dat zijn er dan 28. Zitten alle kinderen vandaag in de kring?' Felien mag tellen: 'Eén, twee, drie...' Ze komt uit bij haar eigen stoel: '25', en zegt: 'Nee, er zijn er maar 25!'

Bij het aftellen of nummeren worden getallen gebruikt. Felien telt de kinderen in de kring. Ze wijst één voor één de kinderen aan en noemt hierbij elke keer een getal, kortom: Felien telt keurig synchroon. De getallen die worden opgenoemd tijdens het tellen, hebben hier een ordinale of ordeningsfunctie. Dat wil zeggen dat het om de volgorde gaat. Op het moment dat Felien het laatste telwoord zegt, 'vijfentwintig', beseft zij dat die 25 slaat op het aantal kinderen in de kring. Het gaat niet meer om de ordinale functie, maar om de kardinale of hoeveelheidsfunctie: het zijn er 25. Uit de opmerking van Felien dat het er maar 25 zijn, wordt duidelijk dat zij begrijpt dat het laatste telwoord de hoeveelheid aangeeft. Felien laat hiermee zien dat ze het kerninzicht verworven heeft dat nodig is voor het resultaatief tellen: het tellen van voorwerpen om te weten hoeveel het er zijn.

Ordinale functie
Ordeningsfunctie

Kardinale functie
Hoeveelheidsfunctie

Resultatief tellen

AFBEELDING 1.3 Een telactiviteit samen met de kinderen



Uit het voorbeeld hiervoor blijkt dat getallen gebruikt worden om een hoeveelheid vast te stellen. Er wordt geteld en het laatstgenoemde getal geeft vervolgens het resultaat. Resultatief tellen heeft een kardiaal aspect. Bij wat Felien doet vallen de ordinale en de kardinale functie samen. Ze kan de telrij goed opzeggen en ze begrijpt dat het laatstgenoemde telwoord iets zegt over de hoeveelheid die geteld is. In het volgende voorbeeld kun je zien dat hiervan bij Jos nog geen sprake is.

'We gaan beginnen', zegt juffrouw Stefanie. Een deel van de groep zit bij de knutsel-tafel en wacht gespannen af. Ze gaan een Piet maken. Juffrouw Stefanie: 'Oh... ik heb de potloden nog niet gepakt. Hoeveel potloden hebben we in deze groep nodig?' Jos telt de kinderen die aan de groepstafel zitten af: 'Eén, twee, drie, vier... twaalf.' Juffrouw Stefanie: 'Pak jij ze maar even Jos.' Jos loopt naar de kast en haalt de bak met potloden. Juf: 'Hoeveel heb je er nodig?' Jos begint weer te tellen: 'Eén, twee, drie, vier... twaalf.' Juf: 'Dus?' Jos kijkt de juffrouw vragend aan en kijkt in de bak potloden die hij in zijn handen heeft. Dan begint hij met uitdelen...

De leerkracht van deze groep stelt veel vragen aan Jos. Waarom doet zij dit, denk je?



De leerkracht geeft Jos een opdracht om te kunnen observeren of hij al inzicht heeft in resultatief tellen. Het is natuurlijk helemaal niet nodig om precies het aantal potloden te weten als de potloden uitgedeeld worden.

Toch vraagt zij bewust door: 'Hoeveel heb je er nodig?' Jos begint dan gewoon weer van voren af aan te tellen, terwijl hij net de kinderen ook al geteld heeft. Jos heeft nog niet in de gaten dat het laatstgenoemde getal, 'twaalf', de hoeveelheid weergeeft: hij verbindt het ordinale aspect nog niet aan het kardinale aspect. Het vragen stellen door de leerkracht kan kinderen helpen zich bewust te worden van het resultatief tellen.

Observeren

Vragen stellen

1.2.2 Kerninzicht resultatief tellen

Na het synchroon tellen zijn kinderen eraan toe inzicht te ontwikkelen in het resultatief tellen.

Kinderen verwerven het inzicht dat het laatste getal bij tellen van een aantal voorwerpen de hoeveelheid aanduidt.

Als het erom gaat te tellen hoeveel er van iets zijn, dan moet een kind allereerst de telwoorden kennen en synchroon kunnen tellen. Maar dat is nog niet genoeg. Het kind moet ook begrijpen dat het laatste telwoord dat het noemt, de hoeveelheid aangeeft. 'Eén, twee, drie: samen zijn het er drie.' Dit is een samengaan van de ordinale functie van een getal, het 'telgetal', met de kardinale functie of 'hoeveelheidsgetal'.

Synchroon tellen

Ordinale functie
Kardinale functie

Resultatief tellen moeten kinderen leren. Als je terugkijkt naar de beide praktijkvoorbeelden hiervoor, zie je dat Felien tot 25 telt en begrijpt dat 25 de hoeveelheid is. Zij kan resultatief tellen. Jos telt tot twaalf, maar kan niet antwoorden op de vraag van de leerkracht hoeveel er dan nodig zijn. Jos kiest een praktische oplossing: hij pakt de potloden en deelt die uit. Jos kan al wel goed synchroon tellen en is er dus aan toe om het resultatief tellen te gaan begrijpen.

Resultatief tellen

Bij kleinere gestructureerde hoeveelheden zien kinderen soms direct hoeveel het er zijn. Een voorbeeld daarvan is het herkennen van de hoeveelheid zes op de dobbelsteen. Er is dan geen sprake van resultatief tellen, maar van globale perceptie. Het kind telt niet, maar herkent het dobbelsteenpatroon en weet dat daarbij het hoeveelheidsgetal zes hoort.

Getalfuncties

Bij het resultatief tellen zijn twee functies van getallen in het geding:

- hoeveelheidsgetal: het gaat om de hoeveelheid of kardinale functie
- telgetal: het gaat om de volgorde of ordinale functie, de getallen waarmee je telt. Bijvoorbeeld: bladzijde 5, huisnummer 37

Hoeveelheidsgetal
Telgetal

Getallen kunnen nog drie andere functies hebben:

- Meetgetal**
 - een meetgetal is een getal met een maat erachter: 7 meter, 3 kilogram, 2 jaar
- Naamgetal**
 - een naamgetal is een getal dat als het ware een naam aangeeft, zoals bij 'bus 15'
- Rekengetal**
 - een rekengetal is een (abstract) getal om mee te rekenen, zoals in: $5 + 3 = 8$

Vijf kleuters zijn aan het spelen in een speeltuin. 'Is iedereen er nog?' vraagt de begeleidster. 'Ik zal ons tellen', reageert Daan. Hij wijst zijn vriendjes aan: 'Eén, twee, drie, vier', en komt dan bij zichzelf: 'vijf.' 'Dat kan niet!' roept hij, 'want ik ben vier.'

Daan gebruikt telgetallen en raakt ineens in de war door zijn leeftijd. Dat is een meetgetal, namelijk het resultaat van een meting, in dit geval een tijdmeting. De eigen leeftijd is een heel bijzonder getal voor kleuters. Het is bijna een 'naamgetal', dat wil zeggen een getal dat een label is voor een situatie, een object of een gebeurtenis.

Waarom herken je het kerninzicht resultaatief tellen bij leerlingen?

Uit welke kennis of handelingen van een leerling kun je als leerkracht opmaken dat een leerling inziet dat het laatste getal bij tellen van een aantal voorwerpen de hoeveelheid aanduidt? Dat inzicht kan erg verschillen in niveau en kun je vaststellen als een leerling:

- na het noemen van telwoorden bij het tellen weet dat het laatste telwoord de hoeveelheid aangeeft
- bij zowel geordende als ongeordende hoeveelheden in staat is te tellen hoeveel het er zijn
- een kleine hoeveelheid bewegende voorwerpen (eenden, vissen) kan tellen
- een aantal al of niet ritmische geluiden kan tellen
- het aantal van enkele kort getoonde voorwerpen weet
- het juiste aantal en de juiste betekenis toekent aan hoeveelheden of getallen die verschillende functies hebben

1.3 Representeren van getallen

Cijfersymbolen

Getallen worden met de cijfersymbolen 0 tot en met 9 geschreven. Jonge kinderen kunnen getallen ook uitbeelden met andere symbolen, zoals streepjes, stippen, dobbelsteenpatronen of met hun vingers.

1.3.1 Praktijkvoorbeelden

Een voorbeeld uit de voorschoolse situatie en een voorbeeld uit een kleutergroep illustreren het volgende kerninzicht.

'Hoeveel jaar ben je vandaag geworden?' vraagt de verjaardagsvisite. Sem steekt vier vingers in de lucht. Daar moeten ze het mee doen. Telkens weer komen er vier vingers in de lucht en iedereen begrijpt wat Sem hiermee bedoelt: Sem is vandaag vier jaar geworden en mag morgen naar school!

AFBEELDING 1.4 Hoeveel jaar ben ik?



Sem laat in dit voorbeeld een representatie van het getal vier zien; hij heeft een manier gevonden om anderen te laten weten hoe oud hij is. Vier vingers betekenen hier vier jaar.

Representatie

Op welke andere manieren zouden kinderen het getal vier kunnen uitbeelden dan door vier vingers op te steken?



Kinderen kunnen getallen op veel verschillende manieren laten zien. Het is juist goed om kinderen zelf actief naar verschillende mogelijkheden te laten zoeken. Door het uitwisselen en bespreken van verschillende representaties gaan leerlingen deze met elkaar in verband brengen en komen ze steeds dichterbij het inzicht van wat een getal nu eigenlijk betekent.

Getal

Bij het getal 'vier' kunnen kinderen denken aan:

- vier vingers
- vier stippen op de dobbelsteen
- het cijfer 4, zoals dat bijvoorbeeld op de kalender staat
- vier fiches op een rijtje
- een groepje van vier poppen of knuffels

Juf Monique gaat samen met groep 1 en 2 groentesoep maken. Ze hebben alle boodschappen op een 'boodschappenbrief' getekend. Je ziet dat er vier tomaten getekend zijn en tien champignons. De cijfers staan erbij. Naast de champignons zijn heel veel doperwtjes getekend. De kinderen vertellen daarbij: 'Die kunnen niet geteld worden, want die zitten in een potje.'

AFBEELDING 1.5 De boodschappenbrief



1.3.2 Kerninzicht representeren van getallen

In deze subparagraaf wordt het kerninzicht representeren van getallen toegelicht.

Kinderen verwerven het inzicht dat je hoeveelheden kunt representeren met behulp van materialen, schema's en cijfersymbolen.

Representeren

Een getal is een abstractie. Volwassenen zijn gewend om een getal aan te geven met een cijfersymbool. Kinderen moeten dat nog leren. Voordat zij vertrouwd zijn met de cijfers, kunnen ze hoeveelheden ook op andere manieren representeren of uitbeelden.

De foto's en praktijkvoorbeelden hiervoor laten zien hoe kinderen een hoeveelheid kunnen representeren:

- Sem steekt vier vingers op om te laten zien dat hij vier jaar is.
- Bij vier kunnen kinderen ook denken aan: de vier stippen op de dobbelsteen, vier poppen of vier fiches op een rijtje, of het cijfer 4 op bijvoorbeeld de kalender.
- Op de boodschappenbrief tekenen kinderen vier tomaten en tien champignons, met het getal erbij, en heel veel doperwtjes.

AFBEELDING 1.6 Representaties van vier



Getallen en cijfersymbolen

Als leerkrachten in de onderbouw kinderen uitdagen om zelf representaties te bedenken om hoeveelheden en getallen weer te geven, dan leren kinderen verschillende mogelijkheden kennen. Voorbeelden van de leerkracht en vondsten van andere kinderen spelen een rol. Juf kan blokjes klaarleggen of een aanzetje geven om te gaan turven. Uiteindelijk zullen kinderen, omdat ze meerdere mogelijkheden leren kennen om hoeveelheden te representeren, de cijfersymbolen accepteren als gezamenlijke afspraak voor het representeren van getallen.

Cijfersymbool

Getal

Representeren

De getallen tot en met 10 worden vaak in de juiste volgorde opgehangen in de kleutergroep, al dan niet met stippenpatronen erbij, zodat kinderen er vertrouwd mee raken. In groep 3 en 4 hangt vaak een waslijn met getalkaartjes tot 20 en later tot 100. Zo'n getallenlijn is daar al snel niet meer zozeer bedoeld om kinderen de getallen te leren kennen, maar ondersteunt kinderen bij het leren optellen en aftrekken.

Getallenlijn

1

Waarom herken je het kerninzicht representeren bij leerlingen?

Uit welke kennis of handelingen van een leerling kun je als leerkracht opmaken dat een leerling inziet dat je hoeveelheid kunt representeren? Dat inzicht kan erg verschillen in niveau en kun je vaststellen als een leerling:

- bij een getal dat uitgesproken wordt, een juiste hoeveelheid voorwerpen kan neerleggen of de juiste hoeveelheid vingers kan opsteken
- bij een getal dat uitgesproken wordt, het juiste dobbelsteenpatroon of stippenpatroon kan aanwijzen
- bij een getal dat uitgesproken wordt, het juiste cijfersymbool kan aanwijzen

1.4 Leerlijn tellen en getallen

Al ver voor hun vierde jaar maken kinderen kennis met tellen en getallen. In de kleutergroepen moeten kinderen zich een aantal basale kerninzichten eigen maken. Deze paragraaf schetst een leerlijn.

Jonge kinderen leren tellen

Leren tellen begint niet op school. Jonge kinderen kunnen voordat ze naar groep 1 gaan al tellen en hoeveelheden herkennen. Vanaf ongeveer 2 jaar kunnen kinderen de hoeveelheid twee en drie, soms ook vier en vijf benoemen op basis van herkenning. Structuur speelt hierbij een grote rol.

Tellen

Structuur

Een peuter die zegt dat ze drie auto's voor haar verjaardag heeft gekregen, zal de auto's misschien nog niet kunnen tellen, maar ziet in één oogopslag dat het drie autootjes zijn. Een bekend voorbeeld van hoeveelheden herkennen is het herkennen van hoeveelheden in een dobbelsteenstructuur.

Kinderen leren de telwoorden door volwassenen te imiteren. Volwassenen tellen vaak van alles samen met hun kinderen: borden en bestek, sokken, blokjes, traptreden en zo meer. Zonder dat zij het zich bewust zijn, oefenen jonge kinderen de telwoorden. Het ritme en de cadans geven plezier. Zo kun je jonge kinderen in het dagelijks leven spontaan en met veel plezier zien tellen.

Bij de supermarkt staat een vader met een boodschappenkar bij de groente- en fruitafdeling. In de kar zit een jongetje van ongeveer drie jaar. Hij houdt een plastic zak vast. Zijn vader wil de kiwi's er al in doen. Dan neemt het jongetje het over en doet de kiwi's rap één voor één in de zak. Hij telt hierbij enthousiast en hardop: 'Eén, twee, drie, acht, negen, tien.' 'Ho, ho, zo is het wel genoeg', zegt zijn vader. Maar hij gaat nog even door: 'Acht, negen, tien!' roept hij heel hard.

Akoestisch tellen

De meeste kinderen kennen al een aantal telwoorden als ze in groep 1 beginnen. Op school wordt de telrij verder geoefend. Het ritmisch opzeggen van de telrij, zonder besef van wat de telwoorden betekenen, noemen we akoestisch tellen. Regelmatig herhalen is belangrijk. Je kunt eenvoudig elke dag in de kring een stukje met de kinderen tellen: met z'n allen van 1 tot 10 en dan weer terug van 10 naar 1 of 0. Dat vinden veel kinderen spannend.

Telrij

Akoestisch tellen



! Waarom zou je niet beginnen te tellen bij nul?

Er zijn veel eenvoudige telspelletjes, rijmpjes en liedjes om de telwoorden te leren. Een oud liedje is: *'Een twee drie vier hoedje van papier'*.

Eén, twee, drie, vier
Hoedje van, hoedje van
Eén, twee, drie, vier
Hoedje van papier.

'Tien kleine visjes' is een modern versje, waarbij kinderen aftellen van tien naar één:

Tien kleine visjes
Die zwommen naar de zee
Moeder zei:
Maar ik ga niet mee
Ik blijf lekker in die oude boerensloot
Want in de zee zwemmen haaien
En die bijten je blub, blub, blub, blub, blub

Negen kleine visjes
Die zwommen naar de zee

...

En zo gaat het verder tot één klein visje. Terugtellen is moeilijker dan vooruit tellen, omdat we het minder gebruiken. Bij het terugtellen komt het getal nul op een natuurlijke manier aan de orde; bij vooruit tellen start je gewoon bij één. Het vermogen om terug te tellen is een essentiële voorbereiding op het latere aftrekken. De getallen van de telrij 1, 2, 3 enzovoort heten natuurlijke getallen. De natuurlijke getallen en de negatieve gehele getallen heten samen de gehele getallen.

Natuurlijke
getallen

Gehele getallen

Synchroon tellen

Als kinderen de telrij kunnen zingen of opzeggen, betekent dat nog niet dat zij een hoeveelheid kunnen tellen. Hiervoor moeten kinderen ook tegelijk met het opzeggen van de telrij voorwerpen kunnen aanwijzen. Het één voor één de getallen in volgorde opzeggen en gelijk en in hetzelfde tempo objecten aanwijzen, heet synchroon tellen. Synchroon tellen is pas betekenisvol voor kinderen als zij de noodzaak zien om de getallen goed op rij op te zeggen en om daarbij en tegelijkertijd ook nog de voorwerpen aan te wijzen. Dat is bijvoorbeeld het geval bij spelletjes met pionnen en dobbelstenen (zie afbeelding 1.7). Gelijktijdig met tellen een beweging laten maken ondersteunt het leggen van de één-één-relatie. De context van het spel geeft betekenis aan het tellen. Kinderen zijn pas later toe aan objectgebonden tellen: het tellen van een aantal voorwerpen, zonder dat voor het kind duidelijk is waarom er geteld moet worden.

Synchroon tellen
Betekenisvol

Één-één-relatie
Objectgebonden
tellen

AFBEELDING 1.7 Bordspel



Een goede oefening voor het leren zien van één-één-relaties is tafeldekken: bij elke plaats een bord, bij elk bord een beker, bij elk bord een lepel.

Van synchroon tellen naar resultaatief tellen

Het vaardig synchroon tellen vormt de opstap naar het resultaatief tellen. Wanneer het synchroon tellen op orde is, ligt ook het resultaatief tellen binnen bereik, ofwel in de zone van de naaste ontwikkeling. De leerkracht kan uitnodigende telactiviteiten aanbieden, die de gewenste ontwikkeling in het tellen verder stimuleren. Dat kunnen activiteiten zijn die uitlokken tot imiteren, maar ook situaties die kinderen uitdagen om op onderzoek te gaan naar hoeveelheden. Het is goed om situaties te nemen waarin de hoeveelheid betekenisvol is voor kinderen. Zo'n situatie is bijvoorbeeld het aantal kaarsjes op een verjaardagstaart.

Resultatief tellen

Zone van de naaste ontwikkeling

Betekenisvol

Is het tellen van kaarsjes op een taart zoals hierna afgebeeld een makkelijke of moeilijke telopdracht, en waarom?



AFBEELDING 1.8 Taart met kaarsjes



Context

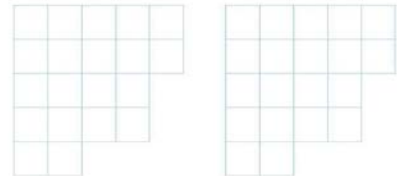
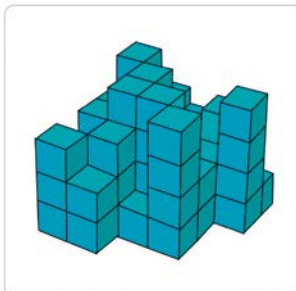
Het tellen van de kaarsjes is niet eenvoudig, omdat de kaarsjes in een cirkel staan: waar moet je beginnen en wanneer houd je op? Het feit dat deze situatie betekenisvol is voor kinderen helpt: het aantal kaarsjes is de leeftijd van de jarige. De vraag 'Hoeveel jaar zal het kind zijn voor wie deze verjaardagstaart is?' is een vraag met betekenis voor kinderen: het gaat om het aantal jaren en voor elk jaar is er een kaarsje. Een goede context helpt kinderen het kerninzicht te ontwikkelen dat het laatste telgetal de hoeveelheid aangeeft.

Het tellen van een klein aantal voorwerpen in een rijtje is relatief makkelijk. Moeilijker zijn telopdrachten waarbij de te tellen voorwerpen niet geordend zijn. Een voorbeeld daarvan zag je in subparagraaf 1.1.1, waar kinderen een grote hoeveelheid fruit tellen, zoals in afbeelding 1.2. Moeilijk is ook het tellen van (deels) niet zichtbare dingen, zoals de blokjes aan de achterkant van een bouwwerk (zie afbeelding 1.9), of bewegende objecten, zoals vissen in een aquarium of zwanen in een vijver (zie afbeelding 1.10).

AFBEELDING 1.9 Onzichtbare hoeveelheden

6

Vul hoogtecijfers op 2 verschillende manieren in.
Er zijn blokken die je niet ziet.



AFBEELDING 1.10 Zwanen



In ideeënboeken voor groep 1 en 2 en in voorlopers van rekenwiskundemethoden kun je veel suggesties voor telactiviteiten vinden.

Kinderen leren de verschillende functies van getallen kennen door er in het dagelijks leven en in rijke leersituaties op school mee in aanraking te komen. Een mooi voorbeeld is het 'winkeltje spelen' in de onderbouw.

Kinderen komen bijvoorbeeld 2 kilo appels en 2 kilo peren kopen, en betalen daarvoor 1 euro en 2 euro is 3 euro. Het gewicht en de prijs worden in meetgetallen uitgedrukt. Het berekenen van de totale prijs doet een beroep op de rekenfunctie: 1 euro en 2 euro is samen 3 euro. Als ze willen weten of er meer appels of peren zijn, kunnen ze de vruchten tellen. Dan zijn ze bezig met de ordeningsfunctie en de hoeveelheidsfunctie.

Getalbeelden

Naarmate kinderen vaker objecten tellen – vooral ook objecten die in een vaste structuur liggen, zoals de stippen in een dobbelsteenpatroon – ontwikkelen kinderen getalbeelden. Een getalbeeld is een mentale voorstelling van een getal. Bij het getal vijf kunnen kinderen als 'plaatje in hun hoofd' hebben: het dobbelsteenpatroon, een hele hand met vijf vingers, een rijtje van vijf eieren in een eierdoos van tien stuks of de vijf rode kralen op de bovenste stang van het rekenrek. In alle gevallen helpt de structuur. Die meervou-

Functies van
getallen

Meetgetal

Structuur
Getalbeeld

Rekenrek

dige inbedding (*multiple embodiment*) in verschillende contexten zorgt voor een toenemend begrip van de hoeveelheid vijf en (later) het getal vijf.



Als kinderen in groep 1 en 2 hun vingers gebruiken om op te tellen, loop je dan niet het risico dat kinderen altijd op hun vingers blijven rekenen?

AFBEELDING 1.11 Tellen op je vingers



Bij het leren tellen is het heel natuurlijk om je vingers te gebruiken. In groep 1 en 2 is het goed als kinderen door het opsteken van vingers hoeveelheden leren ervaren. In groep 3 kunnen kinderen met behulp van getalbeelden het één voor één tellen loslaten. Bijvoorbeeld: er zitten zes mensen in de bus en er stappen er drie in. Hoeveel zijn er dan in de bus?

Begin groep 3 hebben veel kinderen materiaal nodig om dit één voor één te tellen. Maar als kinderen gebruikmaken van de vijfstructuur van hun vingers, gaat het op een verkorte manier: zes is een handvol en nog een vinger, dan drie erbij, en dan zie je dat je op één na alle vingers gebruikt hebt, dus het antwoord is negen. Het goed gebruiken van de structuur van de vingers biedt dus juist mogelijkheden om het één voor één tellen te verkorten. De structuur van verschillende aantallen vingers kan als mentaal getalbeeld in het geheugen worden opgeslagen.

Verkort tellen

Wie wil weten hoeveel objecten er zijn, hoeft die niet altijd één voor één te tellen. Je kunt bijvoorbeeld gebruikmaken van getalbeelden: bij een worp met twee dobbelstenen begin je te tellen bij een van de worpen die je herkent, bijvoorbeeld de 5, en tel je de ogen van de tweede dobbelsteen daarbij: 6, 7, 8. Kinderen die twee aan twee in de rij lopen, tel je als volgt: 2, 4, 6, 8, 10. Als je het fruit in een fruitschaal wilt tellen, en je ziet in een oogopslag drie grote groene appels liggen, begin je bij 3 en tel je het andere fruit erbij: 4, 5, 6. Het tellen op deze manier, waarbij niet alle voorwerpen meer één voor één geteld worden, heet verkort tellen.

Vijfstructuur

Verkorten

Verkort tellen

Verkort tellen wordt gestimuleerd en gemakkelijk gemaakt door een structuur in het te tellen materiaal. Tellen met twee tegelijk wordt ook wel tellen met sprongen genoemd, in dit geval dus met sprongen van twee. Je kunt ook tellen met sprongen van vijf of van tien. Het tellen met sprongen is een vorm van verkort tellen en is een voorbereiding op het leren vermenigvuldigen.

Structuur

Tellen met sprongen

1

VRAGEN EN OPDRACHTEN

1.1 Kijk naar de videofragmenten over tellen en getallen, die je op de website vindt. Welke kerninzichten spelen hier een rol?



1.2 Je kunt kinderen met verschillende vragen en opdrachten stimuleren om te gaan tellen. Bijvoorbeeld:

- a** Tel jij de kinderen maar!
- b** Hoeveel kinderen zijn er?
- c** Zijn er genoeg scharen voor alle kinderen?

Vergelijk vraag a, b en c op hun bruikbaarheid in verschillende situaties, de te verwachten reacties van kinderen en het leereffect.

1.3 Kijk terug naar het voorbeeld van Sem in subparagraaf 1.3.1. Sem steekt vier vingers op om te laten zien hoeveel jaar hij is. Welke verschillende functies van getallen spelen daar een rol?

1.4 Beschrijf een activiteit waarbij kinderen op een natuurlijke wijze uitgenodigd worden om resultaatief te tellen in een hoek die is ingericht als schoenwinkel.

1.5 Kennisbasis

Kleuters maken kennis met getallen, de verschillende functies en representaties van getallen. Hoe goed ben jij zelf thuis in de getallenwereld? Kun jij handig tellen, kun je redeneren met negatieve getallen en ken je de wetenschappelijke notatie van getallen?

Hoe staat het met jouw wiskundige en vakdidactische kennis en inzichten op het gebied van getallen?

**VRAGEN EN OPDRACHTEN****1.5 Sinaasappelstapel**

BRABANTS DAGBLAD, 5 DECEMBER 2011

KAATSHEUVEL - 5500 sinaasappels werden zondag in Kaatsheuvel binnen 5,5 uur tot een toren van bijna 2 meter hoog gestapeld. Volgens Luuk Broos, de initiatiefnemer, is daarmee een nieuw wereldrecord

sinaasappelstapelen neergezet. 'Het was ontzettend spannend,' aldus Broos. 'Vooral als er weer eens een hoek wegrolde.' Broos heeft al het wereldrecord champagneglazen vullen (43.680 glazen) op zijn naam staan.

- a In afbeelding 1.12 zie je hoe je een stapel maakt van tien sinaasappels. Hoeveel sinaasappels zijn er nodig voor een stapel met vier lagen? En voor vijf lagen? Welke systematiek herken je?

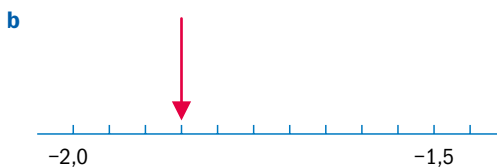
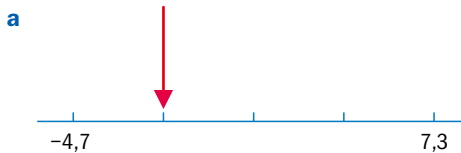
AFBEELDING 1.12 A, B, C Sinaasappelstapel



- b Hoeveel lagen heeft een sinaasappelstapel van vijfhonderd sinaasappels die volgens deze systematiek is opgebouwd?
- c Je kunt het aantal sinaasappels van een stapel met n lagen berekenen met behulp van de formule $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$. Hoeveel sinaasappels heeft een stapel met twintig lagen ($n = 20$)? En een stapel met dertig lagen?
- d Hoeveel lagen heeft de sinaasappelstapel van 5500 sinaasappels in het persbericht? Is de 5500 in het persbericht een exact of een afgerond getal?

1.6 Redeneren en rekenen met negatieve getallen

Welk getal hoort bij de pijl?



- c Teken boven getallenlijn a vanaf het getal bij de pijl een sprong naar links naar het getal $-4,7$. Welke aftrekkopgave hoort daarbij? Daarna vanaf het getal bij de pijl een sprong naar rechts naar het getal $7,3$. Welke optelopgave hoort daarbij?
- d Doe de opdracht bij c ook voor getallenlijn b. Hoe kan zo'n getallenlijn leerlingen in de brugklas helpen als ze leren optellen en aftrekken met negatieve getallen?
- e Je hebt in dit hoofdstuk vijf verschillende functies van getallen leren kennen. In welke twee getalfuncties kom je negatieve getallen vooral tegen?

1.7 Wetenschappelijke notatie van getallen

a Schrijf op volgorde van klein naar groot:

$$4 \text{ miljard} \quad \frac{4}{100} \quad 4,4 \times 10^6 \quad 4 \times 10^{-3} \quad 40.000.000 \quad 1,4 \times 10^{12}$$

b Spreek de getallen uit.

c 4×10^6 , 4×10^{-3} en $1,4 \times 10^{12}$ zijn getallen die geschreven zijn 'in de wetenschappelijke notatie': als een getal tussen 1 en 10 maal een macht van tien. Schrijf ook de andere drie getallen in de wetenschappelijke notatie. Wat is het nut van de wetenschappelijke notatie?



Meer oefenopgaven vind je in hoofdstuk 14, opgave 1 tot en met 8 en 43.

Samenvatting

De samenvatting van dit hoofdstuk staat op wp-kerninzichten.noordhoff.nl.



In dit hoofdstuk ben je de volgende begrippen tegengekomen:

Akoestisch tellen	Ordinale of ordeningsfunctie
Betekenisvol	Rekengetal
Cijfer, cijfersymbool	Representatie, representeren
Driehoeksgetal	Resultatief tellen
Functies van getallen	Structuur
Getal	Synchroon tellen
Getalbeeld	Telgetal
Hoeveelheidsgetal	Tellen
Interactie	Tellen met sprongen
Kardinale of hoeveelheidsfunctie	Telrij
Meetgetal	Verkort tellen
Naamgetal	Vijfstructuur
Natuurlijk getal	Vragen stellen
Objectgebonden handelen	Zone van de naaste ontwikkeling
Observeren	