Rekenen met hele getallen op de basisschool

Frans van Galen, Annette Markusse,
Ans Veltman

Noordhoff

3e druk

Rekenen met hele getallen op de basisschool

Frans van Galen

Annette Markusse

Ans Veltman

Tweede, geheel herziene druk

Noordhoff Groningen

Ontwerp omslag: G2K Designers, Groningen/Amsterdam
Omslagillustratie: iStockphoto

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Hoger Onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189
FSC www.fsc.org

0 / 22

ISBN (ebook) 978-90-01-29928-6
ISBN 978-90-01-29927-9
NUR 133

Voorwoord

Getallen spelen een grote rol in ons leven. Je komt in de media voortdurend kwantitatieve informatie tegen en er wordt van je verwacht dat je die begrijpt en kritisch tegemoet treedt. Je moet, zoals dat heet, *gecijferd* zijn. Ook in je eigen leven neem je vaak beslissingen op grond van getallen.

Onze leerlingen moeten zich kunnen ontwikkelen tot gecijferde burgers, die met zelfvertrouwen omgaan met de kwantitatieve kant van de wereld om hen heen. Dat lukt alleen als we binnen het onderwijs ook aandacht besteden aan hoe je problemen oplost door kritisch nadenken en door wiskundig redeneren. In dit boek richten we de blik daarom niet alleen op het rekenen in engere zin, maar ook op de brede context waarbinnen dat rekenen plaatsvindt.

Dit boek gaat over het rekenen met hele getallen, en dus gaan we uitgebreid in op de basisbewerkingen van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Die rekenprocedures zijn echter maar een deel van het verhaal. Leerlingen hebben een rijk begrip nodig van de getallenwereld, want dat maakt dat ze flexibel kunnen zijn in hun rekenwerk. Hoofdrekenen en schattend rekenen zijn belangrijke praktische vaardigheden en daarin staat dat flexibel zijn voorop. Leerlingen moeten ook een kritische houding ontwikkelen tegenover al die kwantitatieve informatie die ze tegenkomen. Wanneer er bijvoorbeeld in een nieuwsbericht staat dat er 1.000.000 mensen in een stadion passen, moet er een belletje gaan rinkelen. Daar zijn geen precieze berekeningen voor nodig. Globaal redeneren is in dit geval voldoende en dat geldt voor veel alledaagse situaties.

Wanneer je leerlingen wilt helpen in hun rekenontwikkeling heb je een gedegen kennis nodig van leerlijnen. De reken-wiskundemethoden spelen een grote rol in het onderwijs, maar de meeste leerlingen ontwikkelen zich niet precies volgens het boekje, want elke leerling doorloopt zijn eigen leerproces. Je zult daarom je onderwijsaanbod voortdurend moeten aanpassen, maar dat kan alleen als je weet wat lastig is aan bepaalde leerstof en als je weet om welke wiskundige ideeën het uiteindelijk gaat.

In hoofdstuk 1 bespreken we op een wat algemeen niveau de leerlijnen van het rekenen met hele getallen. In de hoofdstukken daarna zoomen we steeds in op één leerstofgebied en gaan we dieper in op specifieke didactische aspecten.

De hoofdstukken in dit boek hebben steeds dezelfde opbouw. Ieder hoofdstuk begint met een practicum op eigen niveau. Dit practicum is een introductie op het hoofdstuk en geeft je de mogelijkheid om samen met medestudenten een aantal kernaspecten van de didactiek te verkennen. Het practicum wordt gevolgd door de paragraaf *Hoe rijk is jouw rekenkennis?* Hierin onderzoek je hoe het staat met je eigen kennis en in welke mate je je kunt verplaatsen in het denken van kinderen.

Hierna volgen paragrafen waarin de didactiek wordt beschreven. We verwijzen daarbij veelvuldig naar opgaven uit de gangbare reken-wiskundemethoden om daarmee te laten zien hoe je de didactiek kunt vertalen naar de alledaagse praktijk. Het is belangrijk dat je leert om kritisch naar je methode te kijken. Vanuit een kritische houding zul je beter in staat zijn de methode naar je eigen hand te zetten, passend bij de behoeften van je groep.

Ieder hoofdstuk bevat ook een aantal praktijkopdrachten waarmee je in je stageschool aan de slag kunt. Vaak zijn het kleine onderzoeksopdrachten waarmee je de beschreven didactiek in de praktijk verder kunt uitdiepen. In de samenvatting aan het eind van het hoofdstuk worden de belangrijkste punten nog eens op een rij gezet. Dit doen we in de vorm van een aantal tips voor de praktijk en met een opsomming van specifieke begrippen. Deze begrippen geven de vaktaal weer die je nodig hebt om op een professioneel niveau met anderen uit de beroepsgroep te communiceren. We sluiten af met een zelftoets waarin je kunt onderzoeken in hoeverre het hoofdstuk heeft bijgedragen aan je professionele ontwikkeling.

Het belangrijkste wat we je in dit boek willen meegeven, is dat je leert om verder te kijken dan het leerstofaanbod in de methode. We hopen vooral dat je via dit boek ontdekt hoe boeiend het is om je te verdiepen in het denken en redeneren van kinderen. Naarmate je meer vertrouwd raakt met hun manier van denken, zul je ook meer grip krijgen op de didactiek en kun je ermee gaan spelen. We wensen je veel plezier bij deze boeiende zoektocht.

Zomer 2021,
Frans van Galen, Annette Markusse, Ans Veltman

Inhoud

1 Leerlijnen

1

Een practicum als start: een leerlijn vermenigvuldigen

Een reken-wiskundemethode omvat allerlei verschillende leerlijnen: een leerlijn rond het rekenen tot twintig, het vermenigvuldigen, een leerlijn breuken en verhoudingen, een leerlijn meten, enzovoort. In dit practicum vragen we je om na te denken over een leerlijn vermenigvuldigen. Je ziet afbeeldingen van activiteiten uit de methode *Alles telt Q*, maar in een andere volgorde dan in de methode.

Opdracht
Bepaal samen met een of meer medestudenten wat een goede volgorde is voor deze activiteiten. In andere woorden: hoe plaatsen jullie de verschillende activiteiten binnen de leerlijn?

a

Vul in.

6 × .... = 48 6 × .... = 24
.... × 9 = 0 .... × 7 = 56
7 × .... = 56 5 × .... = 40
.... × 9 = 63 .... × 9 = 27

b

a Kleur de uitkomsten van de tafel van 4.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

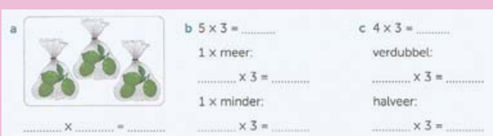
c

d

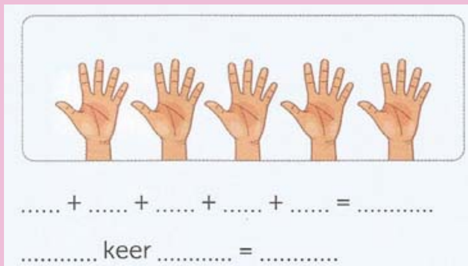
Bedenk zoveel mogelijk keersommen.

antwoord: 12 antwoord: 20 antwoord: 24 antwoord: 30

e

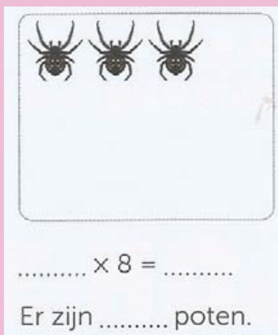


f



g

h



i

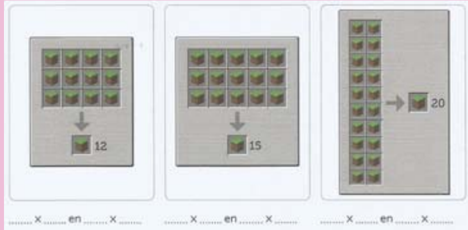
1 × 7 = 7	6 × 7 = 42
2 × 7 = 14	7 × 7 = 49
3 × 7 = 21	8 × 7 = 56
4 × 7 = 28	9 × 7 = 63
5 × 7 = 35	10 × 7 = 70

Kleur de sommen die je al kent uit de andere tafels groen.
Welke blijven over?

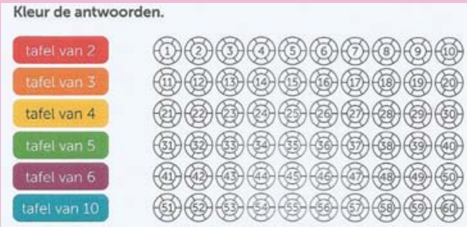
....
....
....

j

l

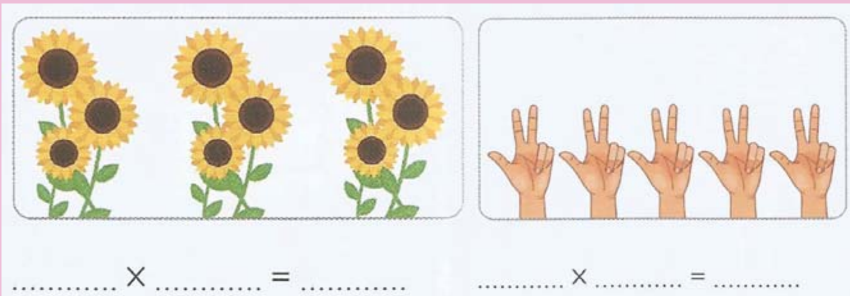


k



m

n



Reflectie
Het eerste wat je opgevallen zal zijn, is dat tafels leren blijkbaar niet gezien wordt als een kwestie van simpelweg 'stampen'. Er zijn inderdaad activiteiten bij die zich richten op het zo snel mogelijk geven van de juiste tafeluitkomst – zoals j en m, allebei oefeningen die de leerlingen op de computer doen – maar er zijn ook activiteiten bij die zich richten op de relaties tussen verschillende sommen binnen een tafel – zoals e – of tussen sommen in verschillende tafels – zoals i.

Er zal echter begonnen worden met meer verkennende activiteiten. De vermenigvuldignotatie is een verkorting van het herhaald optellen, dus 3+3+3+3+3 kun je ook schrijven als 5x3. Dat herhaald optellen kun je bovendien op een slimme manier doen als je al bepaalde tafelsommen kent. Als je bijvoorbeeld 5x3=15 weet hoef je voor 6x3 niet weer alle sprongen vanaf 0 te maken – 3, 6, 9, 12, 15, 18 – maar kun je volstaan met een enkele sprong vanaf 15. In opgave e kun je zien hoe een beeld van zakjes met drie citroenen deze strategie kan ondersteunen.

Waarschijnlijk is in jullie discussie naar boven gekomen dat er minstens twee ordeningsprincipes zijn, die bij de gegeven verzameling activiteiten door elkaar lopen:

- Er is een ordening die loopt van verkennen naar oefenen op snelheid.
- De leerlingen zullen de tafels niet allemaal tegelijk leren; begonnen wordt met gemakkelijke tafels – die van 2, 5, 10, 3 en 4 – en later volgen de andere tafels.

De tafels zullen dus stuk voor stuk aan de orde komen en bij elke tafel wordt weer een vergelijkbare opzet gevolgd: koppelen van de tafel aan contextsituaties, verkennen van het maken van handige sprongen binnen deze tafel, de relaties met sommen in andere tafels en oefenen van de geleerde tafels op snelheid. De volgorde van de activiteiten uit *Alles telt Q* is f - e - n - b - d - l - j - g - k - i - h - a - c - m.

Dit hoofdstuk gaat over leerlijnen. Een leerlijn is een beschrijving van hoe leerlingen bepaalde leerstof gaan leren. Een methode biedt daarvoor een serie onderwijsactiviteiten. Auteurs van een methode kiezen heel bewust een bepaalde opbouw in een serie activiteiten. Wanneer je een methode doorneemt is het echter vaak niet direct duidelijk hoe een bepaalde leerlijn in elkaar zit. De activiteiten worden immers verspreid over verschillende lesblokken en in elk blok komen activiteiten uit heel verschillende leerlijnen aan de orde. Het is daarom goed om de algemene handleiding van de methode te lezen, want daarin staat meestal een duidelijke beschrijving van de verschillende leerlijnen.

Het is heel belangrijk dat je als leerkracht de algemene opzet van een leerlijn goed in je hoofd hebt, want dat heb je nodig om kinderen adequaat te kunnen helpen. Het kan bijvoorbeeld zijn dat een leerling veel moeite heeft met een bepaalde activiteit. Je zult dan na moeten gaan of die leerling wel begrepen heeft wat er eerder in de leerlijn aan de orde kwam. Soms moet je misschien een activiteit herhalen die de groep al eerder gedaan heeft, maar bij deze ene leerling niet voldoende inzicht heeft opgeleverd. Of misschien moet je juist zoeken naar een andere manier om de onderliggende ideeën aan de orde te stellen. Kinderen leren immers niet alles op dezelfde manier en leerprocessen verlopen vaak niet lineair.

1.1 Hoe rijk is jouw rekenkennis?

Er zijn allerlei standaardprocedures om bepaalde typen sommen uit te rekenen, maar in de praktijk kies je vaak je eigen manier van rekenen bij bepaalde sommen. Dat doe je dan omdat zo'n standaardprocedure te omslachtig zou zijn; je kiest voor handig rekenen. En soms zijn er ook nog weer verschillende manieren van handig rekenen.
In deze paragraaf ga je onderzoeken hoe gemakkelijk je kunt wisselen tussen manieren van rekenen. De activiteit laat je ook nadenken over het verschil tussen oefenen van sommen op een kris-krasblad, waarbij leerlingen zelf hun volgorde mogen kiezen, en oefenen van sommen in rijtjes.

OPDRACHT

Zet een timer op 2 minuten en maak de sommen op het kris-krasblad in een zelfgekozen volgorde. Begin met sommen waarvan je de uitkomst al weet of snel kunt vinden. Als de timer afgaat, zet je een cirkel om alle sommen die je gemaakt hebt en daarna reken je de andere sommen uit. Je mag de witruimte gebruiken als denkpapier.

750 x 25 =

25 x 99 =

16 x 19 =

1470 : 30 =

1500 : 50 =

1000 x 25 =

121 : 11 =

60 x 11 =

75 x 98 =

8 x 7 =

448 x 51 =

56 : 7 =

525 : 25 =

22 x 18 =

60 x 44 =

242 : 11 =

Voordat je met anderen gaat overleggen:

- Probeer te reconstrueren hoe je de sommen hebt uitgerekend. Schrijf daar iets over op bij elke som. Als je bijvoorbeeld 16x19 hebt uitgerekend vanuit 16x20, schrijf je ‘16x20’ bij de som.
- Je hebt al werkend een onderscheid gemaakt tussen ‘gemakkelijke’ sommen (die deed je het eerst) en ‘lastiger’ sommen. Zijn er sommen in de laatste groep die achteraf gezien toch heel gemakkelijk bleken?

In tweetallen:

- Vergelijk met een medestudent welke sommen jullie het eerst maakten, de omcirkelde sommen. Leg elkaar uit waarom je dacht dat die sommen gemakkelijk waren.
- Denk je dat basisschoolleerlingen deze taak anders zullen doen dan jullie? Zullen ze dezelfde relaties benutten?
- Wat zou je allemaal aan het werk van een basisschoolleerling kunnen zien?
- Wat is het verschil tussen het maken van sommen op een kris-krasblad en het maken van sommen in rijtjes? Hebben ze allebei hun eigen voordelen?

1.2 Leerlijnen

Een leerlijn is een beschrijving van hoe leerlingen bepaalde leerstof leren. Een methode biedt daarvoor een serie onderwijsactiviteiten. Vaak kiezen methoden globaal eenzelfde opbouw bij bepaalde leerstof; dan kun je zeggen dat de leerlijn min of meer dezelfde is, terwijl de lessen stuk voor stuk natuurlijk anders zijn.
Bij de beschrijving van een leerlijn gaat men ervan uit dat de meeste leerlingen een vergelijkbare ontwikkeling doormaken, maar in de praktijk is dat lang niet altijd het geval. Je hebt als leerkracht een grondige kennis van leerlijnen nodig, vooral om erop in te kunnen spelen als het leerproces bij bepaalde kinderen niet verloopt zoals het de bedoeling is.

1.2.1 Kennis van leerlijnen is belangrijk

Kennis bouwt voort op eerdere kennis. Kinderen komen elke dag naar school met een hoofd vol rekenkennis die ze zich al eerder eigen hebben gemaakt, en als het goed is komt daar die dag op school een klein beetje nieuwe kennis bij. Soms is het een heel nieuw inzicht, maar meestal gaat kennisontwikkeling in kleine stapjes: kinderen leren om wat ze al wisten toe te passen in een iets andere situatie, ze maken bepaalde berekeningen wat vlotter en met meer vertrouwen.
Als leerkracht is het jouw taak om kinderen te begeleiden in hun kennisontwikkeling. Daarbij kun je steunen op de reken-wiskundemethode, met haar beschrijving van lessen en met de erbij passende opgaven voor de leerlingen. Die lessen hebben een ordening die gebaseerd is op ideeën over hoe kinderen stapje voor stapje hun kennis kunnen vergroten. Ze passen binnen een leerlijn.

Meestal delen we het rekenonderwijs op in verschillende leerlijnen: een leerlijn optellen en aftrekken, een leerlijn breuken, een leerlijn procenten, een leerlijn meetkunde. Die leerlijnen staan grotendeels op zichzelf, maar er zijn natuurlijk allerlei verbanden. Breuken, procenten en verhoudingen hebben bijvoorbeeld heel wat overeenkomsten, dus die leerlijnen komen op een gegeven moment samen.
Om kinderen te kunnen steunen in hun ontwikkeling moet je als leerkracht de leerlijnen kennen. Als het goed is draagt iedere les namelijk bij aan een bepaald doel en je kunt alleen adequaat lesgeven als je begrijpt hoe die les past binnen het toewerken naar dat doel.
Dat is vooral belangrijk omdat het leren van kinderen zich niet volgens keurige leerlijnen ontwikkelt. Een leerlijn beschrijft het onderwijs vooral vanuit de aanbodkant: de lessen, de schriftelijke opdrachten, de computeroefeningen. Bij die leerlijn horen ook ideeën over hoe kinderen zich ontwikkelen, maar het leren verloopt niet bij alle kinderen op dezelfde manier. Denk maar aan de grote niveauverschillen in elke klas. Er zijn altijd kinderen die nog op een heel concreet niveau redeneren en de draad kwijtraken als de getallen lastiger zijn, of de situatie ingewikkelder. Tegelijk heb je in elke klas wel kinderen die op een niveau redeneren dat je eerder een klas hoger zou verwachten. Betekent dit dat je kinderen allemaal een eigen leerlijn moet aanbieden? Dat je de klas moet opdelen in drie (of vier? vijf? zes?) niveaugroepen die allemaal hun eigen onderwijs krijgen? Gelukkig is dat niet nodig, want als het goed is biedt een rekenles aan alle kinderen de mogelijkheid om iets te leren, voor ieder kind iets op zijn of haar eigen niveau.

1.2.2 Kinderen leren op hun eigen manier

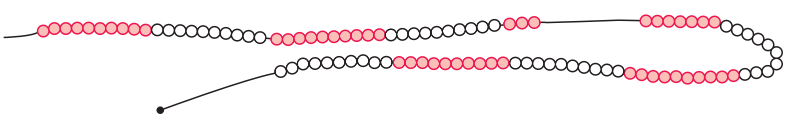
Je kunt proberen om iets zo helder mogelijk uit te leggen, maar dat betekent niet dat jouw leerlingen daarna precies dezelfde ideeën hebben. Het zijn altijd de kinderen zelf die zich nieuwe ideeën eigen moeten maken, en kinderen verschillen allemaal in wat ze al weten en kunnen. Bovendien verloopt leren niet lineair, dat wil zeggen bij alle kinderen op dezelfde manier. Als je een lijst zou maken van de belangrijke inzichten binnen een bepaald deel van de leerstof, dan is het niet zo dat alle kinderen hetzelfde traject volgen van eerst inzicht A, dan inzicht B, dan inzicht C, enzovoort. Cathy Fosnot en Maarten Dolk (2001) spreken daarom over een ‘landscape of learning’, in het Nederlands: een leerlandschap. De inzichten die leerlingen zich eigen moeten maken liggen deels naast elkaar, terwijl er ook een zekere ordening is in de tijd, omdat inzichten voortbouwen op elkaar. Binnen dat landschap volgen kinderen een eigen pad.

Vanuit concrete situaties

Ondanks alle variatie in de manier waarop kinderen leren, kunnen we wel een grote lijn schetsen. Eerst is rekenkennis nog helemaal gekoppeld aan concrete situaties, terwijl leerlingen later op een meer veralgemeniseerde, meer formele manier leren redeneren. Een voorbeeld uit het aanvankelijk rekenen: Er is een fase waarin kinderen wel kunnen beredeneren dat 4 blokjes en 3 blokjes samen 7 blokjes zijn, maar nog niet een vraag als ‘Hoeveel is 4 plus 3?’ kunnen beantwoorden. Voor die kinderen zijn de getallen nog gebonden aan groepjes telbare objecten, de getallen zijn als het ware bijvoeglijke naamwoorden. We formuleren het meestal zo: jonge kinderen kunnen wel uit de voeten met *benoemde* getallen place 1–4 blokjes, 3 blokjes – maar nog niet met *onbenoemde* getallen – 4 en 3.
Om vragen als ‘Hoeveel is 4 plus 3?’, of ‘4 erbij 3’ te kunnen beantwoorden moeten de getallen voor leerlingen zelfstandige wiskundige objecten worden. Eerst is er het besef dat een getal als 4 op heel verschillende verzamelingen van toepassing kan zijn, en dat ‘4’ dus een op zichzelf staand kenmerk kan zijn. Daar hoort het besef bij dat je door kunt tellen vanaf 4 als je wilt weten hoeveel blokjes het samen zijn; je hoeft niet opnieuw te gaan tellen vanaf 1. Vervolgens leren kinderen de relaties van 4 met andere getallen: 5 is één meer dan 4, 3 is één minder dan 4, als je 4 verdubbelt krijg je 8, enzovoort. Uiteindelijk ontleent 4 zijn betekenis niet aan concreet telbare objecten, maar aan zijn relaties met andere getallen, zoals 4=2+2, 4=7-3, 4+4=8, 4=10–6, enzovoort (Gravemeijer, 2016).

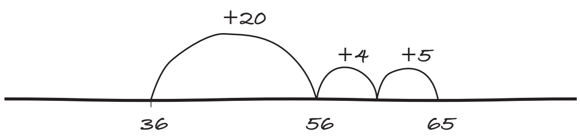
Modellen vanuit concreet handelen

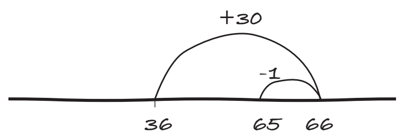
Een vergelijkbare ontwikkeling vindt plaats waar het gaat om het gebruiken van modellen. Denk bijvoorbeeld aan het kralensnoer en de lege getallenlijn als model bij het optellen en aftrekken.



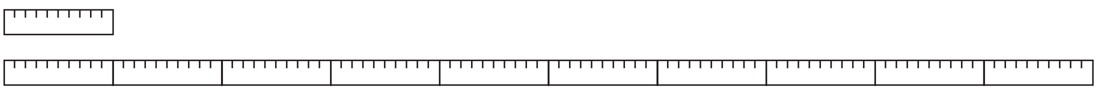
Het kralensnoer heeft 100 kralen, geordend in groepjes van 10. Leerlingen ontdekken dat je de kralen gemakkelijk kunt tellen via sprongen van 10; bij de situatie van het plaatje bijvoorbeeld: ‘10, 20, 30, 40, 43’. Op een vergelijkbare manier kun je ook het effect bepalen van kralen bijschuiven

of wegschuiven. Je hebt bijvoorbeeld 43 kralen en je schuift er 20 bij, dan heb je links 63 kralen.
In eerste instantie is zo'n kralensnoer alleen maar een kralensnoer. De leerkracht vraagt niet naar de som 43+20, maar vraagt naar het aantal kralen dat je dan links krijgt. Al gauw wordt het kralensnoer echter een denkmodel, het kralensnoer wordt een rekenmodel bij optellen en aftrekken onder de 100.





Nog een stap verder is dat bijtellen of weghalen weergegeven worden op een kale lijn: tekenen van de kralen zou te veel werk zijn en is ook niet meer nodig. Uiteindelijk leidt dat tot het model van de lege getallenlijn, waarop je willekeurige sprongen kunt weergeven door een boogje te tekenen met daarbij plus of min een bepaald getal. Op de lege getallenlijn kun je bijvoorbeeld laten zien dat je de som 36+29 op verschillende manieren kunt uitrekenen. Je kunt eerst 20 bijtellen en dan de 9 splitsen om zo op 65 uit te komen (plaatje links). Je kunt ook 30 bijtellen en dan weer 1 aftrekken (plaatje rechts).
De sprongen op de lege getallenlijn zijn een vrij abstracte weergave van rekenhandelingen. De basis ligt echter in heel concrete handelingen: groepjes maken, kralen bijschuiven en wegschuiven, stuk voor stuk tellen van objecten, handig tellen bij even grote groepjes.



Een andere manier om het rekenen op de lege getallenlijn te koppelen aan concrete handelingen, is dat model te introduceren vanuit meetactiviteiten. Kinderen meten eerst lengtes op met losse blokjes. Dat wordt na een tijdje vervangen door meten met een 10-strook, een strook zo lang als 10 blokjes achter elkaar.

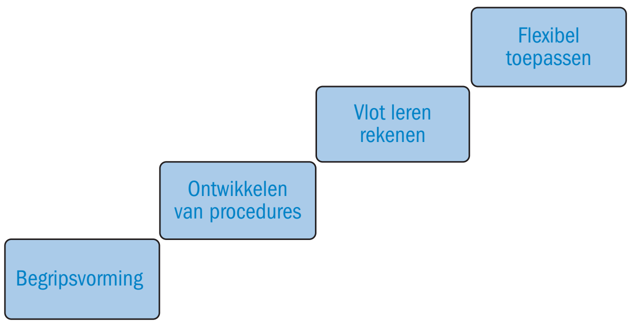
Een aantal van die 10-stroken kun je aan elkaar plakken om een langere meetstrook te krijgen en die meetstrook wordt dan de basis voor het redeneren over 'erbij' en 'eraf' (zie Gravemeijer, 2020).
Deze ontwikkeling – van redeneren binnen een concrete context naar redeneren op een algemener, meer formeel niveau – maakt ieder kind door, maar in de manier waarop kinderen die ontwikkeling doormaken, zit veel variatie.

1.2.3 Plannen van onderwijs

Als de denkontwikkeling van kinderen op een verschillende manier en in een verschillend tempo verloopt, kun je dan eigenlijk wel lesgeven? De kennis van de leerlingen verschilt immers, dus hoe weet je dan wat het volgende stapje moet zijn? Dat is echter een minder groot probleem dan het lijkt, tenminste niet als je leerlingen de ruimte biedt om opgaven op te lossen op hun eigen manier. Waar het ene kind een som als 36+8 nog

oplost via het heel bewust splitsen van 8 in 4+4, 'ziet' een ander kind de uitkomst meteen. Iets soortgelijks geldt bij veel ingewikkelder opgaven. Laat kinderen nadenken en ze steken van elke les wel wat op, ook als hun niveau van oplossen heel verschillend is.
Je kunt als leerkracht dus best een lijn volgen waarbij je uitgaat van een min of meer gemiddelde leerling: de meeste leerlingen van mijn klas weten nu dit, ik kan nu een stapje verder gaan. Zoiets blijft natuurlijk maar een aanname. Misschien kom je er in de les achter dat bepaalde kinderen moeite hebben met die volgende stap, of het blijkt dat ze bepaalde voorkennis nog niet hebben. Dan zul je in de les je aanpak moeten bijstellen, misschien door een bepaald aspect veel uitgebreider met de klas te bespreken dan je verwacht had, of misschien door met een klein groepje kinderen een extra gesprek te hebben.

Bij het beschrijven van de leerlijnen wordt in reken-wiskundemethodes vaak het zogenoemde 'hoofdfasenmodel' aangehaald. Een leerlijn kent in dat model de volgende fasen:



Je hebt van die verschillende fasen al iets gezien in het practicum over activiteiten in de leerlijn vermenigvuldigen. Eerst moeten kinderen gaan begrijpen wat vermenigvuldigen is, namelijk dat het een vorm is van herhaald optellen. Daarna komen manieren om het herhaald optellen te verkorten aan de orde: voor 7x4 verder springen vanaf 5x4=20. Vervolgens is oefening nodig om dat afleiden van tafelproducten heel vlot te gaan doen, misschien zelfs zonder dat leerlingen er nog bewust over redeneren. En uiteindelijk moeten leerlingen die kennis flexibel kunnen toepassen in heel verschillende situaties.
Het hoofdfasenmodel schetst in grote lijn de opbouw van de leerstof. Realiseer je echter dat het niet om fasen gaat die strikt op elkaar volgen. De begripsvorming is het belangrijkst, het gaat in het reken-wiskundeonderwijs uiteindelijk om het ontwikkelen van wiskundige ideeën. Die begripsvorming loopt door in alle volgende fasen. Zo kun je ook de uitbreiding van het relatienet – de kennis van, bijvoorbeeld, vermenigvuldigsommen en hun onderlinge relaties – opvatten als vergroting van begrip.

We kunnen zeggen: je moet als leerkracht de leerlijnen kennen en begrijpen welke rol deze ene les kan vervullen binnen die langere lijn. Daarbij is de kunst van goed lesgeven dat je voortdurend probeert om mee te denken met de leerlingen in je klas. Door meedenken vorm je een idee over wat ze wel en niet begrijpen. Vervolgens gebruik je dat voor het aanpassen van je les, of eventueel zelfs voor het bijstellen van de lessen die gaan volgen.

1.2.4 Doelen

Een leerlijn is te karakteriseren als een serie doelen. Veel methoden formuleren tegenwoordig bij elke les een doel. Dat geeft je als leerkracht steun, omdat zo'n doel beschrijft waar het in die les om gaat. Het geeft ook de leerlingen steun omdat ze zien hoe deze les een vervolg is op wat eerder aan de orde kwam. Zo'n doelbeschrijving per les suggereert echter enigszins dat dat doel in die ene les en door alle leerlingen bereikt kan worden. Doelen zijn juist altijd iets van lange adem. Leren rekenen is een langdurig proces, met doelen aan de einder en met tussendoelen voor wat je in een blok of in dat ene leerjaar met de leerlingen wilt bereiken. Houd daarbij bovendien in gedachten dat het uiteindelijk niet gaat om welke sommen een kind goed of fout maakt, maar om de wiskundige ideeën, om het inzicht dat kinderen ontwikkelen.
De lesdoelen die in de methode worden genoemd zijn heel specifiek. Het reken-wiskundeonderwijs kent echter ook de zogenoemde *kerndoelen,* die door de overheid zijn geformuleerd. Deze zijn vrij algemeen. Kerndoel 25 luidt bijvoorbeeld:

> 'Leerlingen leren aanpakken bij het oplossen van rekenwiskundeproblemen te onderbouwen en leren oplossingen te beoordelen.'

En in kerndoel 27 staat:

> 'De leerlingen leren de basisbewerkingen met gehele getallen in elk geval tot 100 snel uit het hoofd uitvoeren, waarbij optellen en aftrekken tot 20 en de tafels van buiten gekend zijn.'

Omdat deze kerndoelen zo algemeen zijn, en omdat niet alle leerlingen dezelfde doelen zullen bereiken, heeft de overheid zogenoemde *referentieniveaus* laten formuleren. Voor het basisonderwijs geldt dat er een onderscheid wordt gemaakt tussen het *fundamentele niveau (1F)* en het *streefniveau (1S).* Ze heten 1F en 1S, omdat er voor het voortgezet onderwijs vergelijkbare, maar hogere niveaus zijn geformuleerd: 2F en 3F, 2S en 3S. Het fundamentele niveau is min of meer een minimumniveau. De bedoeling is dat 85% van de basisschoolleerlingen dat niveau bereikt. Het streefniveau daarentegen zou je ook het 'standaardniveau' kunnen noemen; dat geeft beter weer dat het niet om een niveau gaat dat alleen is weggelegd voor de beste rekenaars. De ambitie is dat 65% van de leerlingen aan het eind van groep 8 niveau 1S bereikt.

Bereiken de leerlingen ook inderdaad de gestelde doelen? De inspectie voor het onderwijs liet in 2021 een onderzoek uitvoeren (*Peil. Rekenen-Wiskunde einde (speciaal) basisonderwijs)* en constateerde dat het fundamentele niveau inderdaad gehaald werd, maar dat slechts 32% van de leerlingen het streefniveau haalde, in plaats van de bedoelde 65%.
Het is een belangrijke vraag waarom minder leerlingen niveau 1S halen dan we zouden wensen. In vergelijking met het functionele niveau 1F zijn binnen het 1S-niveau de getallen iets moeilijker en de gegeven contexten iets complexer waardoor de kinderen op een meer formeel en abstracter niveau moeten redeneren. Het komt erop neer, denken wij, dat leerlingen flexibel moeten kunnen rekenen, dat ze moeten kunnen redeneren op een niveau waarop je het niet afkunt met alleen maar kennis van regeltjes en rekenprocedures. Blijkbaar is daar in ons rekenonderwijs onvoldoende aandacht voor.

OPDRACHT

We kozen uit de voorbeelditems in het genoemde rapport een item dat typerend is voor niveau 1S en lieten 130 kinderen die opgave maken. We vroegen hen om daarbij op te schrijven hoe ze de opgave oplosten. Ongeveer 70% van alle antwoorden was goed, wat een hoog percentage is. Dat kwam ongetwijfeld omdat de leerlingen meer tijd namen voor deze opgave dan de leerlingen in het onderzoek, want die maakten veel meer opgaven. Misschien heeft echter ook meegespeeld dat ze hun redenering moesten opschrijven. Wat denk je, zou dat veel verschil maken? En hoe dan?

Opgave 5

Jelle tankt 50 liter bij Anurat.
Maarten tankt 50 liter bij Serga.
Jelle moet minder betalen dan Maarten.

Hoeveel minder?

(€ 2,50 minder)

Uit het leerlingenwerk kozen we een aantal goede oplossingen, om te laten zien dat leerlingen heel verschillende aanpakken kunnen kiezen. Voordat je naar dit leerlingenwerk kijkt, is het interessant om de opgaven eerst zelf uit te werken op verschillende manieren. Van daaruit kun je proberen te voorspellen hoe kinderen aan het eind van groep 8 zullen rekenen. Als je daarna het leerlingenwerk bekijkt, kun je onderzoeken of je voorspellingen klopten. De vraag daarna is hoe je de oplossingen van de leerlingen interpreteert. Gebruik hierbij de volgende vragen:

1. Is er verschil in het niveau van de oplossingen? Kun je ze ordenen van laag naar hoog niveau, en op basis van welke argumenten doe je dat?
2. Bij welke uitwerkingen heb je het idee dat de context over de benzinepomp er werkelijk toe doet?
3. Stel dat deze uitwerkingen waren gemaakt door jouw groep, hoe zou je ze dan bespreken? Welke vragen zou je stellen? Waar zou je de aandacht op willen richten?
4. Waar zou je in een volgende les aandacht aan willen besteden en hoe zou je dat aanpakken?
5. Heb je nu je dit rekenwerk hebt bekeken een beter beeld gekregen van wat wordt verstaan onder het referentieniveau 1S? Wat is er volgens jou nodig om ervoor te zorgen dat ten minste 65% van de leerlingen dit niveau gaat halen?

1

Hoeveel minder? 2,50

Ik heb het zo uitgerekend:

1.06
10.60
106.00

53.00
1,11
11,10
111,00
55,50

Hoeveel minder? 2,50

Ik heb het zo uitgerekend:

1,06 5,30 1,11
1,06 5,30 1,11
1,06 5,30 1,11
1,06 5,30 1,11
1,06 5,30 + 1,11 +
1,06 + 26,50 5,55
5,30

53,00 26,50 55,50
26,50 + 53,00 −
53,00. 02,50

Ik heb het zo uitgerekend: 50 X 1 = 50

6 cent × 50 = 3,00
11 cent × 50 = 5,50

50 + 3,00 = 53
50 + 5,50 = 55,50

het antwoord is €2,50

Ik heb het zo uitgerekend:

antwoord: 2,50

€1,06 111
50X 50X
000 000
53,00 + 55,50 +
53,00 5550

Ik heb het zo uitgerekend:

A
€1,06 = 1 L
€2,12 = 2
€4,24 = 4
€5,30 = 5
€53,00 = 50L

S
€1,11 = 1L
~~€2,22 = 2L~~
€5,55 = 5L
€55,50 = 50L

55,50
53,00 −
02,50

Antwoord = €2,50

Ik heb het zo uitgerekend:

1l = 0,05 cent ~~meer~~ goedkoper
5l = 0,25 cent goedkoper
50l = 2,50 goedkoper

Ik heb het zo uitgerekend:

1,06 x 100 = 106 : 2 = 53
1,11 x 100 = 111 : 2 = 55,50
antwoord: 02,50

Ik heb het zo uitgerekend:

1,11 - 1,06 = 0,05
0,05 x 5 = 0,25
0,05 x 50 = 2,50
2,50 minder

PRAKTIJKOPDRACHT

Onderzoek rekenaanpakken van kinderen

In de opdracht hiervoor heb je gezien dat kinderen een opgave op veel verschillende manieren kunnen uitrekenen. Ga zelf ook op zoek naar een opgave waarvan je denkt dat die op verschillende manieren kan worden opgelost. Zoek een opgave die past bij het rekenniveau van je stageklas, maar zorg ervoor dat de opgave niet te gemakkelijk is want dan zullen waarschijnlijk de meeste kinderen een standaardoplossing gebruiken. Probeer te voorspellen hoe de kinderen zullen gaan rekenen en leg de opgave daarna aan de groep voor. Benadruk dat het niet om een toets gaat, maar dat jij, als student, graag wilt weten hoe de kinderen de opgaven oplossen. Stimuleer de kinderen om op te schrijven hoe ze hebben gedacht. Inventariseer en analyseer daarna de uitwerkingen en onderzoek of jouw voorspelling klopte. Welke conclusies trek je eruit?

1.2.5 Wat is rekenen-wiskunde?

De manier waarop je je lessen vormgeeft, wordt mede bepaald door het beeld dat je van rekenen-wiskunde hebt. Hoe je dit vak beschouwt, heeft invloed op jouw rol voor de klas en de doelen die je daarbij nastreeft. Je kunt het vak zien als een bouwwerk van formele afspraken en standaardprocedures. Als je vanuit dit perspectief je onderwijs inricht, zul je vooral aandacht willen besteden aan rekenregels, stappenplannen en procedures die erop gericht zijn om snel en foutloos tot een antwoord te komen. Het komt erop neer dat je dan vooral bezig bent met *rekenen.*
Maar wat leerlingen op de basisschool moeten leren is meer dan alleen rekenen met getallen. Ze moeten ook leren omgaan met getalsmatige informatie in tal van situaties, bijvoorbeeld tijdens het doen van boodschappen, het reizen met het openbaar vervoer of het lezen van nieuwsberichten. De context waarbinnen het rekenen plaatsvindt, is belangrijk. Deze context zorgt ervoor dat leerlingen gaan begrijpen waarom het geleerde nuttig is en hoe het kan worden toegepast in het leven van alledag. Contexten geven betekenis aan bewerkingen en getallen. Rekenen binnen een context vraagt wel om inzicht. Met alleen een goede rekenvaardigheid kom je er niet. Je hebt ook begrip van de onderliggende wiskundige concepten nodig. Daarom spreken we op de basisschool over *rekenen-wiskunde*.

In het dagelijkse spraakgebruik spreken we overigens vaak over de *reken-les*, terwijl leerlingen in het voortgezet onderwijs les krijgen in *wiskunde*. In andere talen dan het Nederlands wordt op de basisschool en in het voortgezet onderwijs dezelfde naam gebruikt voor het vak, meestal verwant aan *mathematics* (Engels), *Mathematik* (Duits), *matematik* (Deens) en *mathématiques* (Frans). Het is wat ongelukkig dat we in het Nederlands een onderscheid lijken te maken tussen rekenen en wiskunde. Je moet *rekenen-wiskunde* niet zien als twee verschillende onderdelen die zijn samengevoegd. Rekenen, gezien als het toepassen van rekenregels, is onderdeel van de wiskunde.

1.3 Begripsvorming

Rekenen moet gebaseerd zijn op inzicht. In zekere zin gaat het in het reken-wiskundeonderwijs zelfs meer om het ontwikkelen van wiskundige inzichten dan om het ontwikkelen van vaardigheden. Bij het bespreken van het rekenen met grote getallen – hoofdstuk 5 – beschrijven we hoe vaardigheden als cijferend vermenigvuldigen en delen grotendeels overbodig zijn geworden omdat we voor berekeningen met grote getallen in de praktijk steeds vaker een rekenapparaat gebruiken. Dat wil niet zeggen dat het cijferen op school niet aan de orde zou moeten komen, maar het begrijpen van deze procedures is belangrijker dan ze snel en foutloos kunnen uitvoeren.
Het ontwikkelen van inzicht gaat het beste wanneer het startpunt ligt in voor leerlingen betekenisvolle vragen. Als leerkracht zul je daarbij moeten kiezen welke rol je in neemt: als iemand die uitlegt hoe een vraag het best beantwoord kan worden, of als iemand die de leerlingen steunt bij het zelf zoeken naar antwoorden.

1.3.1 De rol van contexten

De rekenboekjes van 50 jaar geleden zagen er heel anders uit dan die van tegenwoordig. Er stonden bijna uitsluitend kale sommen in. Toepassingsopgaven hadden de vorm van ‘redactiesommen’, tekstopgaven zonder plaatjes. De huidige reken-wiskundemethodes staan vol *contextopgaven*. Afbeeldingen maken duidelijk om welke situatie het gaat en wat er precies berekend moet worden.
Een illustratie maakt van een kale som niet zonder meer een contextopgave. Waar het om gaat is dat een contextopgave van de rekentaak een vraag maakt die je ook buiten het rekenboekje tegen zou kunnen komen. Een simpel voorbeeld is het plaatje dat je al eerder tegenkwam.

1 × 6 = ...	6 × 6 = ...
2 × 6 = ...	7 × 6 = ...
3 × 6 = ...	8 × 6 = ...
4 × 6 = ...	9 × 6 = ...
5 × 6 = ...	10 × 6 = ...

Uit: *Alles telt Q*, groep 5, blok 2, les 1

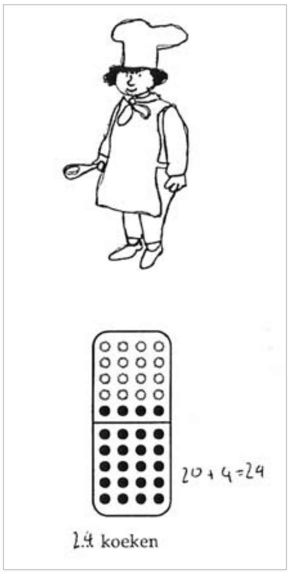
In een theaterzaal staan rijen stoelen. Als één rij zes stoelen heeft, kun je via herhaald optellen berekenen hoeveel zitplaatsen er zijn in twee rijen, drie rijen, enzovoort. Een contextopgave zorgt ervoor dat leerlingen hun kennis over de wereld kunnen inzetten bij zo'n rekentaak. Het plaatje van die stoelen is maar een heel simpele toevoeging, maar het geeft veel leerlingen net de steun die ze nodig hebben.

Waarom contextopgaven?
Er is in kranten en andere media regelmatig discussie over de rekenkennis van leerlingen. Als we als land een plaatsje zakken in de top van landen met een hoog rekenniveau komt dat meteen groot in de krant. Aan de rekenprestaties van onze leerlingen valt best wat te verbeteren, maar opvallend is dat in de discussie door sommige mensen altijd geroepen wordt dat we terug moeten naar het traditionele rekenonderwijs, omdat de veranderingen in het rekenonderwijs sinds de jaren 80 de oorzaak zijn van minder goede prestaties. Het is belangrijk dat je je een mening vormt in deze kwestie en een kernvraag daarbij is: welke rol spelen contextopgaven in het rekenonderwijs? Eigenlijk zou je nu niet verder moeten lezen, maar eerst zelf een aantal argumenten moeten opschrijven.
Een voor de hand liggend antwoord is natuurlijk: het gaat er uiteindelijk om dat leerlingen hun kennis moeten kunnen toepassen. In het dagelijks leven reken je immers nooit zomaar losse sommen uit, je zoekt het antwoord op een bepaalde vraag. Als dat echter het enige argument zou zijn voor contextopgaven zou het onderwijs ook anders opgebouwd kunnen worden: leer kinderen eerst de rekenprocedures, en leer ze pas daarna hoe je dat rekenen toe kunt passen. Dat is in feite de opbouw van de vroegere rekenboekjes: eerst kale sommen, dan toepassen.

De belangrijkste reden voor zoveel contextopgaven is wat we als eerste zin van dit hoofdstuk opschreven: kennis bouwt voort op kennis. Rekenen is een manier om de wereld te ordenen, om grip te krijgen op de wereld. Als een kind leert tellen, levert dat gereedschap voor het vergelijken van situaties in termen van meer en minder, en in termen van hoeveel meer, of hoeveel *keer* meer. Op een gegeven moment, schreven we, worden getallen op zichzelf staande denkobjecten. Kinderen kunnen dan over getallen redeneren zonder dat die getallen direct naar een bepaalde situatie hoeven te verwijzen. Dat wil echter niet zeggen dat de band met de realiteit vanaf dat moment niet meer belangrijk is. Om ervoor te zorgen dat nieuwe kennis zoveel mogelijk ingebed raakt in wat leerlingen al weten, is het belangrijk dat elke nieuwe stap die gezet wordt op de een of andere manier gekoppeld blijft aan ervaringen vanuit het dagelijks leven. Dat wil niet zeggen dat leerlingen steeds weer opnieuw moeten starten vanuit concreet handelen, dus dat ze als het ware steeds pas met getallen mogen werken als ze iets met hun handen hebben gedaan. Het betekent wel dat het rekenen steeds een band moet hebben met vragen uit de wereld buiten school.

Vermenigvuldigen als voorbeeld
Het vermenigvuldigen is een goed voorbeeld om dit toe te lichten. In principe kunnen we leerlingen de tafels laten oefenen zonder dat ze echt begrijpen wat vermenigvuldigen is. Leerlingen kunnen die tafels zelfs uit hun hoofd leren zonder dat ze de relatie tussen vermenigvuldigen en optellen begrijpen. Dat leidt echter tot lege, vrij betekenisloze kennis. In het

hoofdstuk over vermenigvuldigen en delen zullen we betogen dat het oefenen van de tafels juist het sluitstuk van een leerlijn moet zijn. Eerst ervaren kinderen dat vermenigvuldigen een vorm is van herhaald optellen:
4+4+4+4+4+4 kun je ook zien als '6 keer 4 erbij optellen' en schrijven als '6x4'.
Dus als je wilt weten hoeveel krentenbollen er samen in 6 zakjes van steeds 4 krentenbollen zitten, dan hoef je de krentenbollen niet los te tellen, je kunt het antwoord vinden via optellen.
6x4=24 is dan misschien eerst nog alleen maar een elegante manier om een berekening te noteren, maar dat wordt anders wanneer leerlingen de relaties tussen vermenigvuldigsommen gaan zien. Ook die relaties onderzoeken leerlingen vanuit contextsituaties. Het bijgaande voorbeeld past bij een verhaal over een bakkersjongen die probeert bij te houden hoeveel koeken hij bakt. Als het deeg op is, kan hij de bakplaat niet helemaal vol maken. De leerlingen zoeken uit welke aantallen bij de bakplaten horen en schrijven ook op hoe ze die getallen gevonden hebben. Er passen 40 koeken op een lege plaat, 20 koeken op een halve plaat (5 rijen van 4), dus 6 rijen koeken kun je tellen als 20+4.



Uit: Beeldplaat basisvaardigheden rekenen-wiskunde

Pas wanneer je als leerkracht weet dat je leerlingen een redelijk begrip hebben van wat vermenigvuldigen is en ook weet dat ze de relaties tussen vermenigvuldigsommen begrijpen vanuit concrete situaties, pas dan zou je het echte oefenen van de tafels moeten introduceren. Dan zal het ook inderdaad *oefenen* zijn, niet *stampen*. In hoofdstuk 4 komen we uitgebreid terug op vermenigvuldigen en tafels leren.
De belangrijkste reden voor contextopgaven is dus dat leerlingen het meeste leren als ze antwoorden zoeken op voor hen betekenisvolle vragen.

Van context naar som en terug
Een wat ingewikkelder voorbeeld van een contextopgave is de veerboot-opgave.

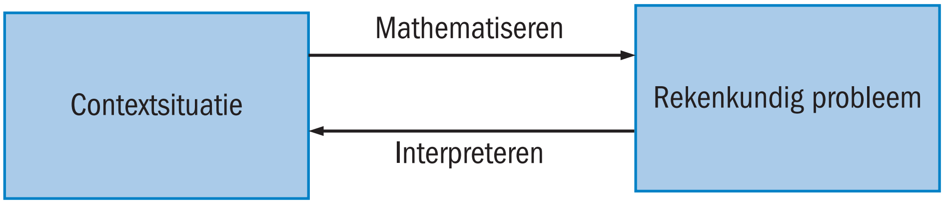
Uit: *Alles telt Q*, groep 7, blok 5, basiswerkschrift, les 1, opgave 1

Het gaat bij deze opgave om het laten oefenen van delen via herhaald aftrekken. Met 72 auto's is een veerboot vol, dus om 884 auto's over te zetten kun je per vaarbeurt 72 auto's aftrekken. De kinderen moeten echter zelf uit het verhaaltje halen dat het om de som 884:72 gaat. Het vertalen van de context naar de som wordt ook wel aangeduid met het begrip mathematiseren. Dit betekent dat het probleem vanuit de echte wereld wordt omgezet naar formele sommentaal. Dit vertaalproces zal bij deze opgave waarschijnlijk niet veel problemen geven. Het schema dat naast de opgave staat, kennen de kinderen al. Ze weten dat dit wordt gebruikt voor het uitrekenen van deelsommen.
Via het schema kunnen de kinderen stap voor stap de som 884:72 uitrekenen. Dit kan er als volgt uitzien:

884 : 72	
720	10x
164	
144	2x
20	

Als de kinderen het schema hebben ingevuld, zijn ze nog niet klaar. De vraag is immers hoe vaak de veerboot op en neer moet. Dit vraagt nog wat extra denkwerk van de kinderen want het antwoord op 884:72 is 12, rest 20. Wanneer dit antwoord wordt teruggeplaatst in de context krijgt het de betekenis van 12 volle veerboten. Er zijn dan nog 20 auto's over waarvoor de veerboot nog een keer op en neer moet. In totaal moet de veerboot dus 13 keer op en neer.
Dit voorbeeld laat zien dat een context niet alleen betekenis geeft aan het rekenen; het geeft ook richting aan de oplossing. Wanneer een uitkomst is gevonden, moet er vanuit de context een interpretatie aan worden gegeven. Het mathematiseren gaat daarom altijd twee kanten op. Van context naar som en weer terug.

Mathematiseerschema



1.3.2 Uitleggen of ondersteunen?

Is goed lesgeven een kwestie van helder kunnen uitleggen? Termen als ‘directe instructie’ of ‘expliciete directe instructie’ suggereren dat. In veel beschrijvingen lijkt lesgeven een kwestie van uitleggen, voordoen en na laten doen. Kinderen leren echter vooral van het zelf nadenken. Je kunt als leerkracht voordoen welke stappen leerlingen moeten maken, maar kinderen leren pas echt wat als ze zelf die stappen maken en gaan begrijpen hoe alles in elkaar zit. Bovendien gaat het in het rekenonderwijs uiteindelijk niet om het leren van allerlei procedures, maar om het ontwikkelen van onderliggende wiskundige inzichten.

Je zult daarom een visie moeten ontwikkelen op jouw rol als leerkracht in het rekenonderwijs. Ben jij degene die probeert om alles zo helder uit te leggen dat zoveel mogelijk kinderen het gaan begrijpen? Of kies je juist meer een rol van iemand die kinderen probeert te ondersteunen terwijl ze zelf hun ideeën ontwikkelen?

Als het erom gaat dat kinderen iets nieuws moeten leren, kies je dan voor:

- ‘Dit is een wat lastiger probleem dan jullie hiervoor hebben gehad, ik zal proberen om jullie goed uit te leggen hoe je zo’n probleem aanpakt.’
- Of: ‘Dit is een wat lastiger probleem dan jullie al hebben gehad. Met wat je inmiddels weet, hoe zou je dit probleem aanpakken?’

Helder uitleggen is een kunst, maar de kans is groot dat een kind het denkt te begrijpen en toch vastloopt als het zelf opgaven gaat maken. Geef leerlingen daarom liever de kans om zelf een antwoord te zoeken en bespreek daarna de antwoorden. Natuurlijk kunnen de kinderen hierbij ook samenwerken en samen op zoek gaan naar mogelijke oplossingen. Soms zullen kinderen het correcte antwoord niet meteen vinden, maar ze kunnen vast wel vertellen hoe ze probeerden te redeneren en waar ze toen vastliepen. Daar leren ze meer van dan van luisteren naar een uitleg.

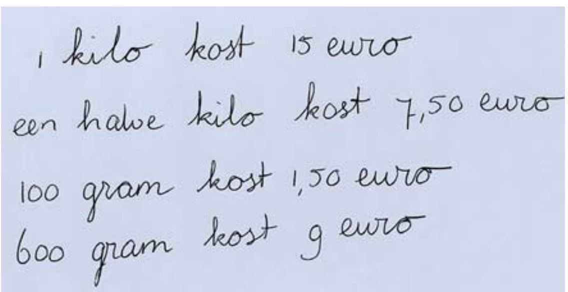
Rekenen-wiskunde is misschien niet het meest populaire vak op de basisschool. Dat komt waarschijnlijk omdat de nadruk sterk ligt op het leren van procedures en regeltjes. Je kunt als leerkracht rekenen-wiskunde een veel interessanter vak maken door de aandacht te verschuiven van het leren van procedures naar andere zaken.

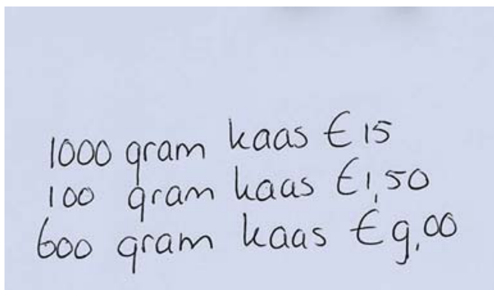
- Leg de leerlingen regelmatig problemen voor waar ze stevig over na moeten denken, niet alleen maar opgaven die vragen om toepassen van wat eerder geleerd is.
- Leg de nadruk op wiskundig redeneren en op het beargumenteren van oplossingsmanieren.
- Zorg voor een gevarieerd aanbod: soms fundamentele gesprekken over wiskundige ideeën, maar ook op een gevarieerde manier oefenen van vaardigheden.

- Straal zelf ook uit dat je plezier kunt beleven aan het vak. Laat merken dat je soms ook niet meteen een antwoord weet, maar dat het leuk is om te puzzelen op een probleem.
- Toon je interesse in het denken van de leerlingen. Laat merken dat het interessant is dat leerlingen soms heel verschillende redeneringen volgen om uiteindelijk tot dezelfde conclusie te komen.
- Leg nadruk op ontwikkeling en groei. Complimenteer leerlingen met wat ze er de afgelopen tijd bij hebben geleerd.
- Laat zien dat fouten interessant zijn omdat je er veel van kunt leren.

1.3.3 Leren door problemen op te lossen

Wij denken dat leerlingen vaker problemen moeten worden voorgelegd waar ze nog geen standaardoplossing voor hebben geleerd. Neem de volgende situatie. Leerkracht Lia vertelt dat ze naar de markt is geweest en daar kaas heeft gekocht. Er stond een bordje bij: €15,- per kilo. Ze had aangewezen welk stuk kaas de verkoper voor haar moest afsnijden, maar dat was natuurlijk niet een stuk van een kilo. Het bleek 600 gram te zijn. De marktkoopman wist meteen hoeveel dat stuk moest kosten, hij kon heel goed hoofdrekenen. Wat zou hij gezegd hebben? En hoe rekende hij het uit, denk je? De leerkracht vraagt eerst nog eens naar de relatie tussen kilo's en grammen en laat de leerlingen dan in tweetallen aan dit probleem werken. Ze benadrukt dat de leerlingen een rekenblaadje moeten gebruiken, want 'jullie zijn geen marktkoopman die dat allemaal uit zijn hoofd kan'.
De leerkracht vertelt er niet bij dat dit een probleem is dat je met een verhoudingstabel op kunt lossen en bijna alle leerlingen kiezen dan ook een eigen manier van noteren.





Nadat het probleem van de 600 gram was besproken en de gekozen aanpakken waren vergeleken, kregen de leerlingen de opdracht om in tweetallen de prijs van andere stukken kaas te bedenken.
In het andere boek uit deze reeks, *Rekenen met verhoudingen op de basisschool*, staat een hoofdstuk over geleid heruitvinden. In dat hoofdstuk pleiten we ervoor om leerlingen regelmatig een open probleem voor te leggen dat ze in kleine groepjes samen proberen op te lossen. We beschrijven ook wat je als leerkracht kunt doen om zoiets mogelijk te maken. Hier beperken we ons tot de opmerking dat niet elke rekenles zo'n les hoeft te zijn. Een open probleem roept altijd veel discussie op en vaak beperkt het gesprek zich niet tot dat ene specifieke deel van de leerstof. Een dergelijke les is daarom altijd behoorlijk intens en ook duurt zo'n les vaak langer dan je verwacht. Er zijn ook lessen nodig waarin het accent meer ligt op oefening en consolidatie.

Schattend rekenen vanuit een context

8

Schrijf de som en schat het antwoord.

Jesse kookt voor een goed doel. 42 mensen bestellen een maaltijd van € 7. Hoeveel euro is de opbrengst ongeveer?

Dit is de som: .... ≈ € ....

Een klas met 29 kinderen gaat naar het zwembad. De entree is € 6 per kind. Hoeveel euro betaalt de juf voor alle kinderen?

Dit is de som: .... ≈ € ....

De sponsorloop heeft € 321 opgeleverd. Alle 8 groepen van de school mogen nu online boeken kopen. Voor hoeveel euro kan elke groep ongeveer bestellen?

Dit is de som: .... ≈ € ....

3 vrienden verkopen op de kleedjesmarkt samen voor € 61.
Hoeveel euro krijgt elke vriend?

Dit is de som: .... ≈ € ....

Uit: *Alles telt Q*, groep 5, blok 6, basiswerkschrift, les 2, opgave 8

De opdracht uit *Alles telt Q* bestaat uit vier contextopgaven. Er wordt telkens een verhaaltje gegeven waarin een som is verpakt. Dit verhaaltje vormt de basis voor de context waarbinnen de kinderen gaan rekenen. De context is meer dan alleen de gegeven tekst. Het is nadrukkelijk ook datgene wat kinderen er zelf aan toevoegen.
Ter illustratie bespreken we de eerste context over Jesse. Het verhaaltje over Jesse zal in meer of mindere mate herkenning oproepen bij kinderen. Hierdoor kunnen ze zich een voorstelling maken van de situatie. Deze voorstelling wordt gekleurd door de eigen ervaringen die ze met het onderwerp hebben. Kinderen die bijvoorbeeld ervaring hebben met koken, kunnen zich waarschijnlijk een beeld vormen van een maaltijd voor 42 mensen. Er zullen ook kinderen zijn die een herinnering hebben aan een eigen activiteit voor een goed doel. Van al deze ervaringen kunnen ze gebruikmaken wanneer ze de opgave gaan oplossen.

Waarschijnlijk zullen de meeste kinderen na het lezen van het verhaaltje meteen aan de som 42x7 denken. Maar boven de opgave staat dat er geschat mag worden en in de tekst wordt het woordje ‘ongeveer’ gebruikt. De vraag is daarom: hoe maak je bij deze som een passende schatting? Er zullen kinderen zijn die er 40x7 van maken omdat deze som gemakkelijk uit het hoofd uitgerekend kan worden via de kapstoksom 4x7. Maar als de context werkelijk tot leven is gekomen, is deze redenering minder logisch want waarom zou je twee maaltijden niet meerekenen in de schatting? Kinderen die vanuit de context redeneren zullen misschien denken: er zijn kosten gemaakt voor de aanschaf van de ingrediënten. Er is daarom per maaltijd misschien maar 3 euro winst gemaakt. De opbrengst is dan ongeveer 42x3=€126.

Dit voorbeeld laat zien dat een context betekenis kan geven aan het rekenen en richting kan geven aan de oplossing. Het is belangrijk dat kinderen hier veel ervaring mee opdoen. Hun inzicht wordt ermee vergroot en ze leren hoe ze hun kennis kunnen toepassen in alledaagse situaties. Voorwaarde is wel dat de context tot leven komt. Hierbij speelt de leerkracht

een belangrijke rol. Deze kan door middel van het stellen van goede vragen kinderen stimuleren om zich in te leven. Bijvoorbeeld:
- Heb jij ook wel eens iets gedaan voor een goed doel?
- Jesse kookt voor 42 mensen. Dat is een grote groep. Wat zou hij gemaakt kunnen hebben?
- Welke kookspullen en ingrediënten heb je dan nodig?
- Is een maaltijd van €7 duur?
- Wat wordt bedoeld met 'opbrengst'?
- Waarom staat er 'schat het antwoord'?

1.4 Oefenen

In het rekenonderwijs is, net als bij andere vakken, oefenen heel belangrijk. Als leerlingen één keer een goed antwoord hebben gevonden wil dat niet zeggen dat ze vergelijkbare opgaven ook zonder meer goed zullen doen. In termen van het eerdergenoemde hoofdfasenmodel gaat het bij oefenen om het vlot leren rekenen en automatiseren (fase 3) en flexibel toepassen (fase 4). Het gaat, met een ander woord, om de consolidatie van de kennis die de leerlingen hebben opgedaan.

1.4.1 Automatiseren en memoriseren

De termen *automatiseren* en *memoriseren* benadrukken verschillende aspecten van oefenen. Er zijn allerlei handelingen die je op een gegeven moment – na veel oefenen – uit kunt voeren zonder erbij na te hoeven denken. Het strikken van je veters, bijvoorbeeld. Je hebt ongetwijfeld gezien hoeveel moeite het kinderen kost om dat te leren, maar zelf hoef je er niet meer bij na te denken. Sterker nog, als je iemand uit wil leggen hoe je het doet – er zijn verschillende manieren – dan moet je als het ware naar je handen kijken om het uit te kunnen leggen. Bij rekenen zijn er allerlei denkstappen die kinderen moeten automatiseren. Sprongen maken over de 10 is zo'n handeling. Bij 7+5 splits je 5 in 3 plus 2, dus 7+5 wordt 10+2=12. Je springt als het ware eerst naar de 10 en dan eroverheen. Op dezelfde manier ga je bij 8+7, via 8+2 naar 10, en dan via 10+5 naar 15. Als leerlingen maar vaak genoeg zulke optellingen oefenen weten ze de uitkomsten op een gegeven moment direct. Het optellen tot 20 is dan *geautomatiseerd*. Ook als de tussenstap via de 10 nog heel snel even door het hoofd gaat, spreken we over *geautomatiseerd.*
Iets soortgelijks geldt bij het leren van de tafels van vermenigvuldiging: een kind dat vaak genoeg 6x8 heeft uitgerekend via 5x8=40, weet de uitkomst van 6x8 op een gegeven moment direct. De tussenstap via 5x8 is dan helemaal ingesleten. Overigens is het daarvoor echt nodig dat kinderen tafelsommen ook op snelheid oefenen – bijvoorbeeld zoveel mogelijk sommen maken binnen 1 minuut – want zonder dat lukt het automatiseren niet.
Memoriseren betekent 'in je geheugen prenten'. Wanneer je dat opvat als 'uit je hoofd leren' dan is daar binnen het leren rekenen haast nooit sprake van. De betekenis van woorden in een vreemde taal leer je wel uit het hoofd, zeker in het begin, omdat je dan nog geen houvast hebt. Maar, zoals je eerder hebt kunnen lezen, zelfs de tafels van vermenigvuldiging leren kinderen niet op zo'n manier. Wel kun je zeggen dat een kind op een gegeven moment de tafels *gememoriseerd* heeft: hij of zij weet de uitkomsten direct.

Hoe dan ook, op een gegeven moment moeten leerlingen bepaalde rekenstappen heel vlot kunnen uitvoeren, vooral omdat er in praktische situaties vaak verschillende denkstappen nodig zijn. Neem een probleem als: Je hebt 4 plankjes nodig van 58 cm; hoe lang moet de lange plank zijn waar je die kleine plankjes uit kunt zagen? Als je snel ziet dat je met 4x60 in ieder geval goed zit, en je weet meteen dat dat 240 cm is – want 4x6=24 – dan is het een simpele vraag. Als je 4x6=24 niet paraat hebt verdwaal je ergens onderweg. Meer in het algemeen: rekenen met grotere getallen steunt op het vlot kunnen uitvoeren van allerlei tussenberekeningen. Vlot kunnen rekenen vraagt om oefening.

1.4.2 Gevarieerd oefenen

Voor het opdoen van vaardigheden, kennis, inzicht en het kunnen oplossen van problemen, is oefening nodig. In de reken-wiskundelessen wordt daar dan ook veel tijd voor ingeruimd. Oefenen is effectiever wanneer dat op allerlei verschillende manieren gebeurt. In deze paragraaf bespreken we een aantal verschillende oefenvormen.

Oefenen op de computer

Meer en meer worden tablets ingezet bij het oefenen van rekenvaardigheden. Daar zijn verschillende argumenten voor:

- Oefeningen kunnen op snelheid worden gedaan. Een zekere tijdsdruk stimuleert het automatiseren en is dus handig bij bijvoorbeeld het leren van de optellingen en aftrekkingen tot 20, of bij het leren van de tafels van vermenigvuldiging.
- Leerlingen krijgen bij een fout ogenblikkelijk feedback. Ze zien op hun scherm dat hun antwoord fout is en krijgen soms een hint waarmee ze hun antwoord kunnen verbeteren.
- De leerkracht hoeft het werk van de leerlingen niet na te kijken en kan via de computer overzicht houden over de prestaties van de leerlingen.
- De leerkracht kan voor ieder kind oefenwerk klaarzetten dat past bij de persoonlijke behoeften. Via de computer is een gedifferentieerd oefenaanbod gemakkelijk te realiseren.

Schriftelijk oefenen

In de rekenboeken staan sommenrijtjes. Deze zijn altijd gericht op een specifieke vaardigheid zoals het kolomsgewijs optellen of het delen via splitsen. Sommenrijtjes worden meestal individueel gemaakt, maar ook hier is interactie met andere leerlingen en de leerkracht belangrijk. Door de opgaven samen te bespreken krijgen de leerlingen direct feedback op hun werk. Dit versterkt de effectiviteit van de oefening. Met name als de feedback is gericht op de oplossingsstrategie: wat gaat goed en wat kan beter? Feedback die louter is gericht op het beoordelen in termen van goed en fout is weinig zinvol en kan leiden tot demotivatie.

Gedachtenvol oefenen

Wanneer kinderen aan het oefenen zijn met sommenrijtjes, hebben ze vaak de neiging om gewoon klakkeloos met de eerste som te beginnen en daarna het rijtje af te werken volgens de gegeven volgorde. Gedachtenvolle oefeningen hebben als doel om kinderen eerst na te laten denken over een handige aanpak, voordat ze aan de slag gaan. In sommenrijtjes komen soms opgaven voor die niet helemaal los van elkaar staan: het antwoord van de ene som kan worden gebruikt om het antwoord van een andere som gemakkelijk te vinden. Kijk bijvoorbeeld eens naar het volgende rijtje. Met welke som zou je beginnen? En welke zou je daarna uitrekenen?

45 x 9
50 x 9
9 x 5
405 : 9

In dit rijtje is 9x5 een handige startsom. Wanneer je dit antwoord weet, is 50x9 ook niet moeilijk meer. Daarna kan 45x9 handig worden uitgerekend, want dat is 450–45=405. Daarmee ligt ook het antwoord van 405:9 voor het oprapen.
Bij gedachtenvol oefenen gaat het er dus om dat kinderen gaan nadenken over relaties tussen sommen, en over de vraag welke som gemakkelijk is of juist moeilijk. Dit vraagt om een andere houding tijdens het oefenen: eerst nadenken en dan doen. Als leerkracht kun je dit begeleiden door in gesprek te gaan over de keuzes die tijdens het oefenen worden gemaakt.

PRAKTIJKOPDRACHT

Ontwerp een gedachtenvolle oefening

Ontwerp zelf een gedachtenvolle oefening en bedenk een sommenrijtje passend bij de oefenstof uit de methode van jouw stagegroep.

- Wat wil je bereiken met deze oefenactiviteit?
- Welke verwachtingen heb je ten aanzien van het reken- en denkwerk van de kinderen?
- Welke vragen stel je in de nabespreking van de oefenactiviteit?

Leg hierna de oefening voor aan een groepje kinderen uit je stageklas. Observeer hoe ze te werk gaan. Maken ze spontaan gebruik van de handige relaties die jij hebt bedacht of hebben ze hierbij stimulans van jou nodig?

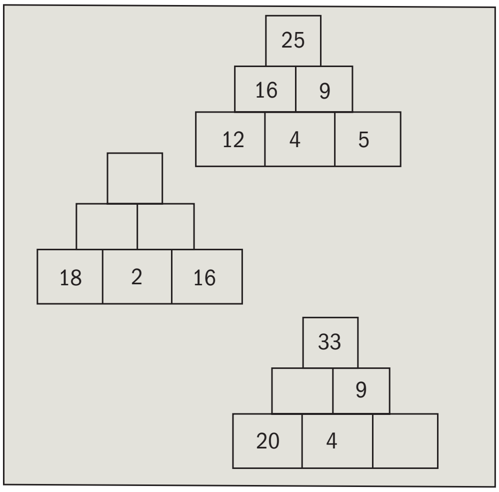
Oefenen met wisbordjes

Een wisbordje is een soort mini-whiteboard waarop kinderen met een uitwisbare stift kunnen schrijven. De leerkracht geeft een opdracht en elke leerling noteert zijn uitwerking op zijn eigen wisbordje. Daarna steekt iedereen op een teken van de leerkracht zijn bordje omhoog. Het grote voordeel van deze aanpak is dat kinderen aan elkaar laten zien wat ze gedaan hebben en aan elkaar uitleggen waarom ze voor deze aanpak hebben gekozen. Ze kunnen direct feedback geven en ontvangen op het gemaakte rekenwerk. Fouten kunnen direct worden gecorrigeerd. Deze aanpak is ook prettig voor de leerkracht want deze krijgt in één oogopslag zicht op de aanpakken van de kinderen.

Productief oefenen

De vorm van oefenen waarbij kinderen zelf opgaven bedenken, wordt productief oefenen genoemd. De meeste kinderen vinden dit leuk om te doen, omdat het initiatief bij henzelf ligt. Het geeft ook veel inzicht in wat leerlingen kunnen. Voorbeelden van productief oefenen:

- Bedenk een rij sommen waar steeds 10 uit komt. In plaats van 10 kan een willekeurig ander getal worden gekozen.
- In een getallenmuurtje wordt de som van twee naast elkaar liggende getallen in de steen er midden boven gezet. Het is een oefenvorm waarbij kinderen kunnen oefenen met optellen en aftrekken (zie afbeelding). Als kinderen vertrouwd zijn met deze oefenvorm kun je ze vragen om zelf zo'n muurtje te bedenken voor een klasgenootje. De oefening wordt dan een productieve oefening.



Een productieve oefening is voor kinderen een interessante manier van oefenen en tegelijk een goede manier om te differentiëren, want de kinderen maken opgaven op hun eigen niveau. Zo'n oefening geeft de leerkracht bovendien goed zicht op wat kinderen kunnen. Op de groene pagina staat een voorbeeld.

PRAKTIJKOPDRACHT

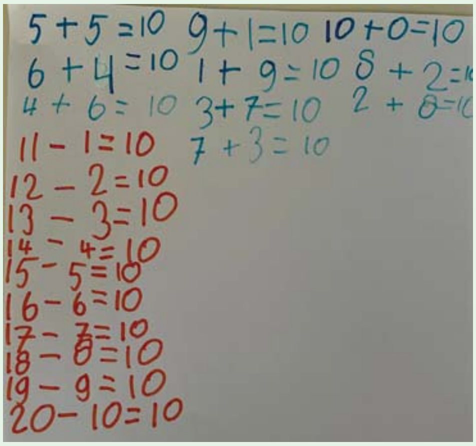
Productief oefenen in de stageklas

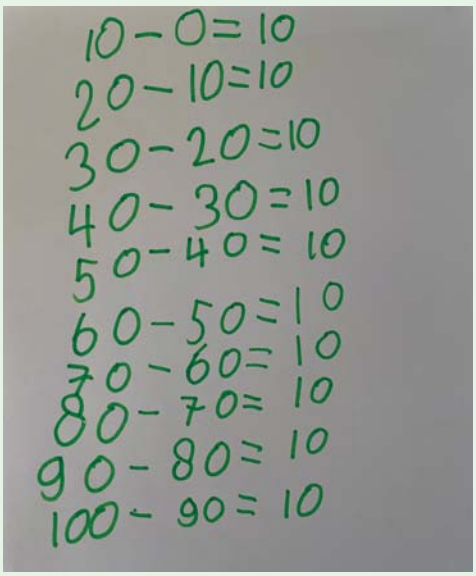
Geef de kinderen uit jouw stagegroep een oefenopdracht met eigen producties.

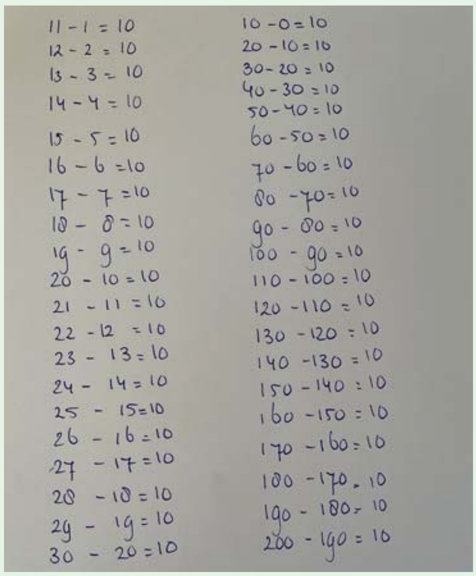
Bekijk de eigen producties van jouw leerlingen. Wat valt je op? Wat leren de kinderen hiervan? Welke informatie over het rekenniveau haal je eruit? Welke vragen stel je de kinderen tijdens de nabespreking?

Productief oefenen: Maak 10

Kinderen eind groep 3 kregen de opdracht om zelf zoveel mogelijk sommen te maken waar 10 uit komt. Nadat de kinderen hun sommen hadden bedacht, bespraken ze met de leerkracht een aantal voorbeelden.
Je ziet hier drie verschillende uitwerkingen van de opdracht. Bekijk het werk voordat je verder leest. Wat valt je op?







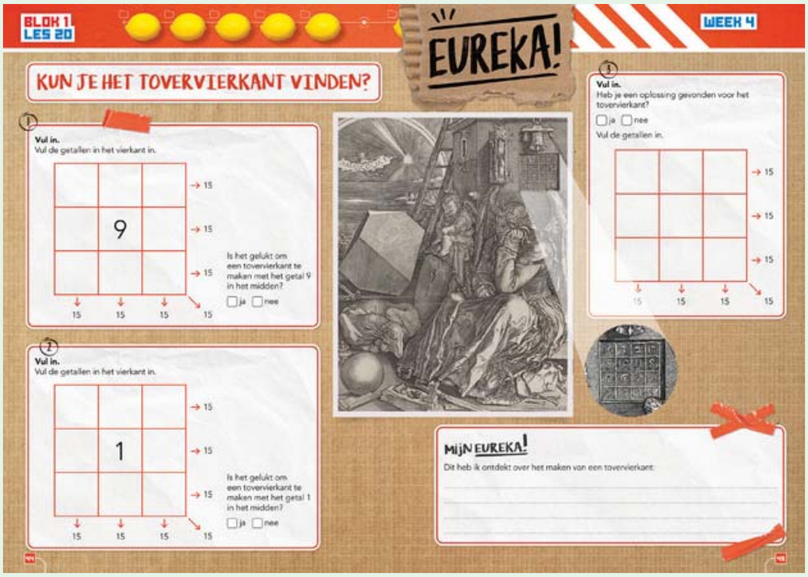
De andere leerlingen in deze groep kwamen met vergelijkbare rijtjes. Wat in het leerlingenwerk opvalt:

- Sommige kinderen kiezen in eerste instantie voor eenvoudige sommen (5+5, 10+0, 9+1) maar al werkend ontdekken ze ook dat je bij optelsommen de getallen kunt omkeren (7+3 en 3+7).
- Ze gaan ook inzien dat je niet alleen optelsommen, maar ook aftreksommen kunt maken.
- Dat je 10 niet alleen kunt maken door het gebruik van mooie ronde getallen, maar ook door 11–1 en vervolgens 12–2 uit te rekenen. In feite ontdekken ze dat je de getallen aan beide zijden van het min-teken steeds met één kunt ophogen, want dan blijft het verschil hetzelfde.

- Een ontdekking en inzicht voor sommige kinderen is dat het maken van de sommen niet ophoudt bij 20 of 100.

Het gekozen leerlingenwerk illustreert hoe ze dit soort opdrachten op een verschillend niveau kunnen maken. De eerste leerling maakt alleen sommen tot 20, maar vindt wel op een systematische manier alle optellingen waar 10 uit komt. De tweede en derde leerling maken systematische rijtjes van aftrekkingen, waarbij de derde leerling laat zien dat ze ook al met getallen boven de 100 vertrouwd is.

Tovervierkant



Uit: *De wereld in getallen*, groep 4 blok 1, les 20

In deze les onderzoeken de kinderen of ze een tovervierkant kunnen maken. Bij een tovervierkant van 3 bij 3 hebben de rijen, de kolommen en de twee diagonalen allemaal als som 15. Bij deze zoektocht wordt er volop geoefend met het maken van optelsommen tot 20 en probleemoplossen. Als leerlingen weten welk getal er in het midden moet staan, dan kunnen ze ook de getallen op de andere plaatsen snel vinden. Maar als je dat verklapt, missen de kinderen het onderzoeken waarbij ze zelf tot een oplossing kunnen komen.
Je vraagt je wellicht af of jij het tovervierkant van 3 bij 3 kunt vinden. Misschien wil je het zelf ook graag uitzoeken. Deze nieuwsgierige houding van jou als leerkracht kun je benutten. Als je het probleem zelf interessant vindt, dan straal je dat ook uit. Je neemt dan als het ware de kinderen mee in het onderzoek.
Om de kinderen in groep 4 te ondersteunen bij het zoeken naar het tovervierkant, krijgt elk kind een blad met daarop een leeg tovervierkant en kaartjes met daarop de getallen 1 tot en met 9. Zij mogen met hun groepje eerst zelf de getalkaartjes op het vierkant leggen en berekenen wat de som is van elke rij, kolom en diagonaal. Productief oefenen en probleemoplossen zijn verstrengeld in deze opdracht. Door proberen en berekenen, ontdekken ze dat een ingevuld vierkant niet meteen een tovervierkant is.

Al schuivend met de getalkaartjes onderzoeken de kinderen of de 9 of 1 in het midden van het tovervierkant kunnen staan. Vervolgens zoeken ze welk getal wél in het midden van het tovervierkant past. Dat kan een eureka-moment opleveren en daarom heet deze les uit *De wereld in getallen* een eureka-les. In de docentenhandleiding staat hoe je de kinderen hierbij kunt begeleiden.

Misschien ben je door deze les nieuwsgierig geworden naar andere tovervierkanten en wat daarbij allemaal te ontdekken valt. Op de afbeelding van het leerlingenwerkboek zie je ook een schilderij van Dürer uit 1514 waarop een tovervierkant staat van 4 bij 4 waarbij de som van elke rij, kolom en diagonaal steeds 34 is. Of misschien ben je een keer in Barcelona geweest bij de Sagrada Família waar op de gevel ook een tovervierkant staat waarbij de som steeds 33 is. Er bestaan zelfs nog meer tovervierkanten, bijvoorbeeld het HSA-magisch vierkant van 12 bij 12 dat herontdekt werd door drie Nederlandse scholieren. Google het maar eens!

Bewegend oefenen

Veel kinderen hebben een natuurlijke behoefte om te bewegen. Lang stilzitten kost ze soms moeite. Als leerkracht kun je hierop inspelen door het oefenen te combineren met het doen van fysieke activiteiten. Vanuit onderzoek weten we dat dit de effectiviteit van de oefening kan vergroten. We geven twee voorbeelden:

- De leerkracht zegt een som, bijvoorbeeld 50+40 of 20+30 of 60+60 en gooit vervolgens de bal naar een kind dat het antwoord moet geven. Alle kinderen zijn actief want als de leerkracht de vraag stelt, weten de kinderen nog niet wie de bal toegeworpen krijgt.
- Kinderen hebben ieder een getalkaartje, lopen door de klas en op een teken van de leerkracht vormen ze met een andere leerling samen 10. Deze oefening is gericht op het oefenen van de ‘vriendjes van tien’.

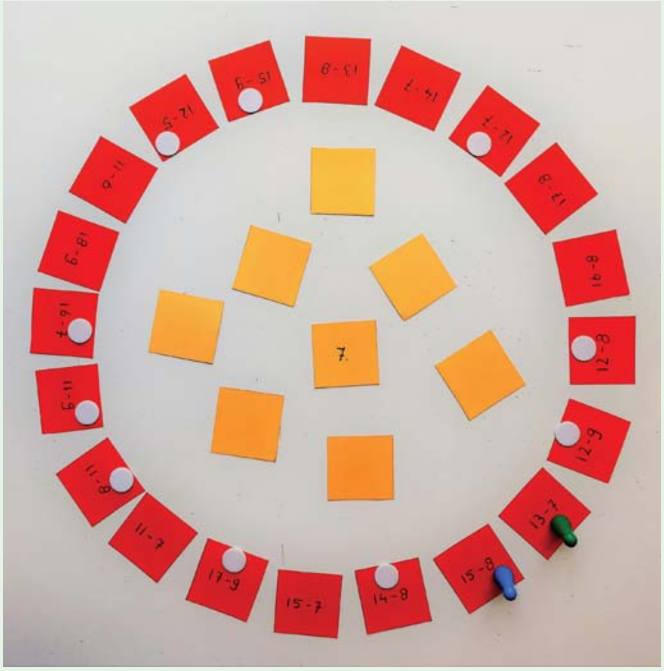
Oefenspellen

Het samen spelen van een rekenspel is voor kinderen een stimulerende manier van oefenen. Meestal heeft zo’n spel ook bepaalde strategie aspecten, wat het spelen uitdagend maakt. Veel spellen kunnen bovendien goed in teams worden gespeeld, bijvoorbeeld twee leerlingen tegen twee andere leerlingen. Dat lokt overleg uit, wat betekent dat leerlingen meer bewust hun keuzes maken.

Leerlingen verantwoordelijkheid geven

Door de kinderen zelf een keuze te laten maken uit de sommen die geautomatiseerd moeten worden, maak je ze eigenaar van hun leerproces en geef je hun verantwoordelijkheid. Je kunt ze eventueel onder jouw begeleiding een plan van aanpak laten maken, waarin ze schrijven wat ze wanneer en met wie gaan oefenen. Bepaal ook samen met de kinderen concrete succescriteria zodat ze weten wat het doel is van het oefenen. Geef ze vertrouwen en ruimte om hier zelf mee aan de slag te gaan. Om uit te zoeken hoe je dit het beste kunt begeleiden, kun je eerst starten met het begeleiden van een klein groepje kinderen.

Drempelspel: Haasje over



Drempelspellen zijn speciaal ontwikkeld om leerlingen precies dat te laten oefenen wat voor hen op dat moment van belang is. Kinderen kunnen er zelfstandig mee aan de slag en vergroten zo niet alleen hun basiskennis, maar ook hun verantwoordelijkheid voor het eigen leren, hun motivatie en hun zelfvertrouwen. Het woord drempel verwijst naar essentiële basisvaardigheden die kinderen moeten beheersen om goed te kunnen rekenen. Op de website van *Rondjerekenspel* kun je een beschrijving vinden van alle rekendrempels en de bijbehorende spellen.

Het spel *Haasje over* is een voorbeeld van een drempelspel. We beschrijven hier een variant voor het aftrekken tot 20, maar het spel is ook geschikt voor andere sommen die geautomatiseerd moeten worden.
Je kunt het spel *Haasje over* zelf maken.
Maak kaartjes met de antwoorden: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9 op gekleurd stevig papier.
Maak daarnaast kaartjes met de sommen op een andere kleur stevig papier:

11–2	11–3	11–4	11–5	11–6	11–7	11–8	11–9
12–3	12–4	12–5	12–6	12–7	12–8	12–9	
13–4	13–5	13–6	13–7	13–8	13–9		
14–5	14–6	14–7	14–8	14–9			
15–6	15–7	15–8	15–9				
16–7	16–8	16–9					
17–8	17–9						
18–9							

Verder heb je 10 tot 15 fiches nodig en voor elke speler een pion (de haas).

De kinderen kiezen een selectie van de sommen die ze gaan oefenen. Deze somkaartjes leggen ze zichtbaar in een cirkel op tafel. Dit is het hazenpad. De antwoordkaartjes liggen omgekeerd binnen het hazenpad, met de getallen dus niet zichtbaar. De kinderen leggen de fiches op verschillende sommenkaartjes, verdeeld over het hazenpad. De kinderen bepalen een startpunt en zetten daar alle drie hun haas (pion) op. De spelers berekenen om de beurt het antwoord op het eerstvolgende somkaartje en draaien een antwoordkaartje om. Staat op dat kaartje het juiste getal dan mag de speler doorgaan naar het volgende somkaartje en meteen nog een keer. Als het antwoordkaartje bij de som past en er een fiche op een kaartje ligt, dan mag de speler dat fiche hebben.
In eerste instantie weten de kinderen nog niet waar de verschillende antwoordkaartjes liggen, maar gaandeweg het spel wordt dat gemakkelijker omdat ze meerdere antwoordkaartjes al gezien hebben.
De haasje-over-regel: Staat er een andere haas op een somkaartje dan ga je naar het volgende somkaartje. Geef je het juiste antwoord dan heb je ‘haasje over’ gedaan en krijg je een fiche van de speler waar je overheen sprong. Het spel is afgelopen als alle fiches van het hazenpad weggespeeld zijn. De winnaar is de speler met de meeste fiches.

1.5 Kinderen opleiden tot gecijferde burgers

Het gaat in het reken-wiskundeonderwijs niet alleen om het aanleren van schoolse vaardigheden. Kinderen moeten ook leren om problemen op te lossen en om kritisch om te gaan met kwantitatieve gegevens. Ze moeten zich ontwikkelen tot volwassenen die met zelfvertrouwen omgaan met de kwantitatieve kant van de wereld om ons heen.

1.5.1 Gecijferdheid

Getallen, grafieken en algoritmes spelen in steeds grotere mate een rol in ons leven. Kinderen moeten daarom een zekere mate van gecijferdheid ontwikkelen zodat ze leren hoe ze die cijfermatige gegevens kunnen interpreteren en hoe ze daaruit conclusies kunnen trekken en goede beslissingen kunnen nemen. Kritisch nadenken en wiskundig redeneren spelen hierbij een belangrijke rol, net zoals de houding van kinderen ten opzichte van rekenen-wiskunde.
Voor het ontwikkelen van gecijferdheid is een nieuwsgierige en positieve wiskundige attitude nodig. Als leerkracht voor de klas heb je hierin een voorbeeldfunctie. Je moet uitstralen dat het leuk en interessant is om met een wiskundig probleem aan de slag te gaan. Leerlingen nemen die houding dan gemakkelijker van je over. Natuurlijk zijn de problemen soms ingewikkeld en moeilijk, maar dat hoort erbij. Sommige wiskundige problemen vragen om doorzettingsvermogen, maar het geeft ook voldoening als het dan toch lukt om een oplossing te vinden. Het versterkt het competentiegevoel. Rekenangst kan vooral ontstaan in een cultuur waarin oplossingen enkel worden beoordeeld in termen van goed of fout. Je kunt dit voorkomen door leerlingen de ruimte te geven om zelf na te denken en ze te laten ervaren dat het heel normaal is dat je bij sommige problemen niet meteen weet hoe het moet. Sterker nog, fouten zijn interessant om te onderzoeken. Door ze samen te bespreken, kan er inzicht in het probleem ontstaan. Stimuleer daarom de durf om gebaande paden te verlaten en nieuwe ideeën uit te proberen, ook als daar niet direct een correcte oplossing uit voorkomt. Stel het voor als een kans om te leren.

1.5.2 Interactie

Reken-wiskundeonderwijs moet interactief onderwijs zijn. Eigenlijk is 'interactie' een te neutrale term, want je kunt ook zeggen dat er ook interactie is wanneer de leerkracht iets voordoet en de leerlingen het na doen. Maar zo bedoelen we het niet. Interactie wil zeggen dat je als leerkracht probeert te begrijpen wat er in het hoofd van een kind omgaat en dat je met jouw vragen en suggesties daarop aan probeert te sluiten. Echte interactie houdt in:

- Als je praat met jouw groep of met individuele leerlingen, dan is het verhaal van de leerlingen minstens zo belangrijk als jouw verhaal.
- Kies je vragen zorgvuldig. Beginnen met een algemene vraag als 'Kun je uitleggen hoe jullie op dat antwoord kwamen?' is beter dan direct op een detail ingaan ('Waarom staat hier een 6?').
- Reageer vooral op wat de leerlingen goed doen. Elk stapje dat leerlingen maken draagt bij aan hun ontwikkeling.
- Laat duidelijk blijken dat het helemaal niet erg is om fouten te maken; nadenken is belangrijk, niet het antwoord. Je kunt veel leren van fouten.
- Geef complimentjes. Wij Nederlanders zijn daar nooit zo gul mee, maar een welgemeend compliment werkt altijd motiverend.
- Zorg dat alle leerlingen een klassikale discussie kunnen volgen. Controleer of iedereen de redenering van een leerling begrijpt voordat je inhoudelijke vragen gaat stellen.
- Wees duidelijk in wat je verwacht van de leerlingen: dat ze geïnteresseerd zijn in de redeneringen van andere leerlingen, dat ze op een positieve manier reageren, dat ze niet lachen als iemand een fout maakt, want van fouten maken leer je veel. Maar realiseer je ook dat jouw eigen voorbeeld nog veel belangrijker is.

- Blijf je ervan bewust dat het uiteindelijk nooit gaat om het antwoord op deze ene opgave; het gaat erom dat kinderen zich de onderliggende ideeën eigen maken.
- Het allerbelangrijkste is dat je als leerkracht nieuwsgierig bent naar het denken van je leerlingen. Eigenlijk volgt alles wat hierboven staat dan vanzelf.

1.5.3 Aandacht voor rekentaal

Je hebt rekentaal nodig om na te denken over wiskundige problemen. Als je bijvoorbeeld de begrippen *hoeveel*, *meer*, *minder*, *evenveel* en *aantal* niet kent, kun je nauwelijks een probleem oplossen waarbij je hoeveelheden moet vergelijken. Zonder kennis van deze begrippen kun je er ook niet met anderen over praten. Rekentaal is daarom heel belangrijk voor de reken-wiskundeontwikkeling. Het bevat alle begrippen die nodig zijn om te kunnen redeneren binnen dit vak.
In de handleidingen van rekenmethodes staan vaak lijstjes met begrippen die de kinderen nodig hebben om de opgaven goed te kunnen maken. Het is belangrijk om daar tijdens de interactieve momenten in de rekenles aandacht aan te besteden. Dit kun je bijvoorbeeld doen door:

- gedurende de hele les de begrippen zelf actief te gebruiken, zowel tijdens de klassikale momenten als tijdens de een-op-eengesprekjes;
- zelf hardop na te denken en voor te doen hoe je een redenering kunt verwoorden;
- uitspraken van kinderen samen te vatten of te herformuleren;
- te verwijzen naar specifieke begrippen of formuleringen die de kinderen eerder hebben geleerd ('hoe zeiden we dat ook alweer?');
- de kwaliteit van goede taaluitingen van kinderen te benoemen ('dat zeg je mooi, horen jullie wat Koen zegt?');
- kinderen woordposters te laten maken van belangrijke begrippen en deze een prominent plekje te geven in het lokaal.

Vragen stellen

1

Nu jij!
Zet de getallen in het positieschema.

Vakantie
Vorig jaar gingen 5,3 miljoen mensen op vakantie naar het buitenland. 2,7 miljoen mensen gingen in eigen land op vakantie. 5,8 miljoen mensen namen de auto als vervoersmiddel. Samen reden zij 4,75 miljard kilometer.

M	Hd	Td	D	H	T	E

M	Hd	Td	D	H	T	E

M	Hd	Td	D	H	T	E

MJ	HM	TM	M	HD	TD	D	H	T	E

Uit: *Alles telt Q*, groep 8, blok 1, basiswerkschrift, les 1, opgave 1

Als de kinderen na de zomervakantie weer op school komen, hebben ze van alles beleefd. Ze zitten vast vol met verhalen. De methode *Alles telt Q* speelt hierop in door op de allereerste bladzijde van het rekenboek voor groep 8 een context te gebruiken over de manier waarop mensen op vakantie gaan. Deze context geeft je daarom de kans voor een goed gesprek.
Het doel van de opgave is dat de leerlingen gaan nadenken over de betekenis van grote getallen. Je zou direct kunnen beginnen met concrete vragen als:

- Wat betekenen de cijfers ‘vijf’ en ‘drie’ in 5,3 miljoen?
- Hoe kun je dit duidelijk maken via het positieschema?
- Wat is het verschil tussen ‘miljoen’ en ‘miljard’?

Als je de les begint met deze vragen, negeer je de context en dat zou jammer zijn, want praten over de context maakt kinderen nieuwsgierig. Begin daarom eerst met vragen waarmee je de context tot leven brengt. Bijvoorbeeld:

- Wat hebben jullie gedaan in de vakantie? Ben je op reis geweest?
- Waar ging je heen en hoe lang was je onderweg?
- Welk vervoersmiddel gebruikten jullie?

Het voordeel van deze vragen is dat je meteen ook de kinderen uit je groep een beetje kunt leren kennen. Je kunt hierna ook een aantal vragen stellen waarmee je de kinderen laat nadenken over het bericht in het boek. Bijvoorbeeld:

- In het bericht worden vier gegevens besproken. Hoe zouden ze hieraan zijn gekomen? Hoe denk je dat ze deze informatie hebben verzameld?
- Uit het bericht kun je niet opmaken of het bericht gaat over mensen in Utrecht, Nederland, Europa of een ander gebied. Wat denk jij? Over welke groep zou het kunnen gaan?
- Als we een nieuwsbericht zouden willen opstellen over de manier waarop de kinderen hier op school op vakantie zijn gegaan, hoe zouden we dat dan kunnen aanpakken?

Deze laatste drie vragen zijn echte denkstimulerende vragen waarbij kinderen actief aan het denken worden gezet over de betekenis van de getallen. De laatste vraag kan uitmonden in een rijke wiskundige activiteit waarbij de kinderen op onderzoek gaan in de eigen school.
De wereld waarin kinderen leven, is rijk aan gecijferdheidssituaties. Hun werkelijkheid is één grote context en een onuitputtelijke bron van ervaringen. Het zou zonde zijn om die niet te benutten. Natuurlijk moeten de kinderen begrijpen hoe ze het positieschema kunnen invullen, maar uiteindelijk gaat het om de betekenis van zulke grote getallen.

Samenvatting: kennis van leerlijnen

Een leerlijn is een beschrijving van hoe leerlingen bepaalde leerstof gaan leren. Zo'n leerlijn geeft je een kader voor het nemen van didactische beslissingen over de inrichting van je onderwijs. Je kunt hierbij denken aan keuzes voor bepaalde contexten, materialen, modellen en werkvormen. De reken-wiskundemethoden spelen een grote rol bij het onderwijzen van de leerstof, maar leerlingen ontwikkelen zich vaak niet precies volgens het boekje. Ze doorlopen allemaal hun eigen leerproces. Je zult daarom altijd je onderwijsaanbod moeten aanpassen en daarbij is kennis van leerlijnen onmisbaar.

Om beter grip te krijgen op de leerlijnen van je (stage)groep volgen hier een aantal tips:
- Blader door het rekenboek en onderzoek hoe de vier fasen van het hoofdfasenmodel zijn vertaald naar concrete activiteiten en opgaven.
- Analyseer schriftelijk rekenwerk van kinderen en probeer te achterhalen op welk niveau van oplossen ze redeneren.
- Voer rekengesprekjes met kinderen en verdiep je in de denkstappen die ze maken. Kruip als het ware in hun hoofd en probeer te achterhalen wat ze nodig hebben om weer een stapje verder te komen in hun ontwikkeling.
- Diverse websites, bijvoorbeeld die van TULE (SLO), geven een uitgebreid overzicht van de tussendoelen en leerlijnen. Maak er gebruik van.
- Verdiep je in de kerndoelen voor rekenen-wiskunde en de referentieniveaus 1F en 1S.
- Kijk verder dan het leerstofaanbod in de methode en voeg zo nu en dan eigen activiteiten toe, passend bij het punt in de leerlijn waarop de kinderen zich op dat moment bevinden. Neem de ruimte om zelf keuzes te maken. Zorg dat je onderwijs avontuurlijk blijft.

1

Vaktaal

Automatiseren
Benoemde getallen
Context
Gecijferdheid
Gedachtenvol oefenen
Getallenlijn
Herhaald optellen
Heruitvinden
Hoofdfasenmodel
Interactie
Kerndoelen
Kralensnoer
Leerlandschap
Leerlijn
Mathematiseren
Memoriseren
Model
Niveau van oplossen
Oefenen
Productief oefenen
Referentieniveau
Rekenen
Rekentaal
Wiskunde
Wiskundige attitude

Zelftoets

Met deze toets kun je nagaan in hoeverre dit hoofdstuk heeft bijgedragen aan je professionele ontwikkeling ten aanzien van leerlijnen. In deze toets worden de volgende onderdelen gepeild:

- Inzicht in de vier fasen van het hoofdfasenmodel
- Het kunnen ontwerpen van een oefenactiviteit
- Het kunnen verplaatsen in het denkwerk van kinderen
- Inzicht in het gebruik van contexten

OPDRACHT 1.1

Concretiseer een leerlijn

Kies een duidelijk afgebakend leerstofdoel rondom het aanleren van de basisbewerkingen. Bijvoorbeeld het leren splitsen in groep 3, het leren optellen en aftrekken tot 100 in groep 4 of het leren delen als inverse bewerking van het vermenigvuldigen in groep 5.
Beschrijf in eigen woorden, op basis van de vier fasen uit het hoofdfasenmodel, welke activiteiten of opgaven jij denkt dat leerlingen nodig hebben om dit leerstofdoel te behalen. Probeer je heel concreet voor te stellen wat kinderen gaan *doen.* Bekijk daarna een reken-wiskundemethode en vergelijk het aanbod dat jij voor ogen had met het aanbod vanuit de methode.

OPDRACHT 1.2

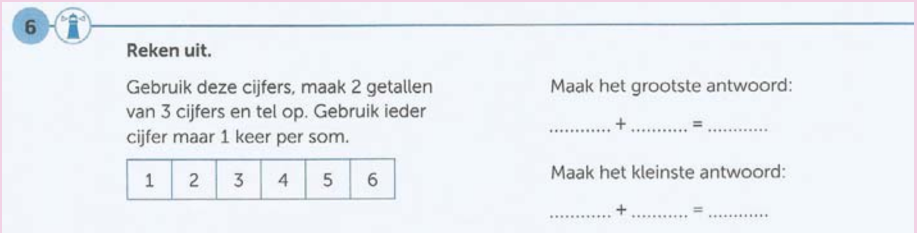
Ontwerp een kris-krasblad

In paragraaf 1.1 *Hoe rijk is jouw rekenkennis?* heb je geoefend met een kris-krasblad. Ontwerp nu zelf zo'n blad voor leerlingen in groep 4 waarbij het de bedoeling is om kinderen actief te laten nadenken over de strategie 'aanvullen of leegmaken tot 10'.
Welke opgaven zet je op het blad?
Welke verbanden moeten de kinderen gaan leggen?
Welke redeneringen hoop je dat de kinderen zullen gaan maken?
Bedenk ook een aantal denkstimulerende vragen die je aan de kinderen zou kunnen stellen tijdens de nabespreking.

1

OPDRACHT 1.3

Welke voorkennis?


6

Reken uit.

Gebruik deze cijfers, maak 2 getallen van 3 cijfers en tel op. Gebruik ieder cijfer maar 1 keer per som.

1	2	3	4	5	6

Maak het grootste antwoord:

.... + ... = ...

Maak het kleinste antwoord:

.... + ... = ...

Uit: *Alles telt Q*, groep 6, blok 2, les 6

In de opgave die je hier ziet, oefenen de kinderen uit groep 6 met het optellen van grote getallen. Ga na welke denkstappen de kinderen moeten maken om deze opgave goed op te lossen. Over welke voorkennis moeten de kinderen beschikken om deze stappen te kunnen maken? Aan welke doelen hebben de kinderen waarschijnlijk gewerkt in de weken voorafgaand aan deze opgave?

OPDRACHT 1.4

Maak een poster

Maak een poster waarmee je aan medestudenten duidelijk kunt maken wat het belang is van contexten binnen het reken-wiskundeonderwijs. Maak hierbij een koppeling met het hoofdfasenmodel. Welke rol kunnen contexten spelen in de begripsvormende fase? En hoe zit dat bij de andere drie fasen van dit model?