Deel A

Wiskunde

voor het hoger onderwijs

Sieb Kemme
Wim Groen
Caroline Koolen
Theo van Pelt
Jan Walter

Noordhoff Uitgevers

Gewijzigde vijfde editie

Wiskunde voor het hoger onderwijs

Deel A

Wiskunde voor het hoger onderwijs

Deel A

Sieb Kemme
Wim Groen
Caroline Koolen
Theo van Pelt
Jan Walter

Eerste druk

Noordhoff Uitgevers Groningen/Houten

Colophon
Ontwerp omslag: The Image Bank, Allan Baxter
Beeldresearch: B en U International Picture Service, Diemen
Opmaak en tekenwerk: Educatieve Adviezen Kemme BV

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Hoger Onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen, e-mail: info@noordhoff.nl

2 / 12

ISBN (ebook) 978-90-01-84086-0
ISBN 978-90-01-70255-7
NUR 918

Voorwoord

Bij effectief onderwijs hoort de mogelijkheid om snel en actief over de belangrijkste informatie kunnen beschikken. “Maak kort en kernachtig duidelijk waar het om gaat en ga direct op het doel af.” Met die gedachte is het nieuwe studiemateriaal van *Wiskunde voor het Hoger Onderwijs* ontwikkeld.

Het hoofdboek
De kern van dit *deel A* is het hoofdboek met de theorie en de oefeningen. De linkerpagina’s zijn consequent gereserveerd voor de theorie en de rechterpagina’s voor de bijbehorende oefeningen. Theorie en oefeningen staan altijd direct bij elkaar. Dit maakt een zelfstandige en actieve manier van studeren mogelijk.
Relevante hoofdstukken bevatten een afsluitende paragraaf met *Toepassingen*.
Aan het eind van elk hoofdstuk staat een paragraaf *Hoofdzaken*. Daarin staan de onderwerpen die aan het eind van het hoofdstuk paraat moeten zijn.
Met een *Toets* over het hele hoofdstuk kan zelfstandig worden nagegaan in hoeverre de stof daadwerkelijk beheerst wordt.

Het uitwerkingenboek
Bij zelfstudie is de mogelijkheid om jezelf te kunnen controleren en corrigeren essentieel. Dat kan alleen als er complete uitwerkingen per oefening beschikbaar zijn. Het uitwerkingenboek voorziet daarin. Het bevat de complete uitwerkingen van alle oefeningen en oefentoetsen.

Ondersteuning met ICT
Met een inlogcode krijgt de student toegang tot de website waarop extra oefeningen met antwoorden te vinden zijn. Deze extra stof is bedoeld om nog snel even te oefenen, bijvoorbeeld kort voor een tentamen.

De serie Wiskunde voor het hoger onderwijs
De nieuwe serie *Wiskunde voor het hoger onderwijs* is opgebouwd uit de delen A en B. *Deel A* is bestemd voor de overgang van havo/mbo naar het HBO en bevat de nodige elementaire wiskundige kennis en vaardigheden die nodig zijn om met succes aan een studie op het HBO te beginnen.
Deel B biedt, naast een uitbreiding van het wiskundige arsenaal, een steviger wiskundige basis, uitgewerkt in praktische toepassingen.

Inhoud

1

1 Algebra

Omstreeks het jaar 820 schreef de wiskundige Al-Chwarizmi een boek over het rekenen met letters: *hisab al-djabr wa al-muqabala*. Zijn systematische en logische aanpak van het oplossen van lineaire en kwadratische vergelijkingen gaf gestalte aan de algebra. Verder leverde hij grote bijdragen aan gebieden als trigonometrie, astronomie en astrologie, geografie en cartografie. Het idee van een algoritme als vaste rekenprocedure in de wiskunde komt bij hem vandaan. Om deze reden wordt hij wel de “grootvader van de informatica genoemd”. Het woord ‘algoritme’ is van zijn naam afgeleid en het woord ‘algebra’ vind je terug in de titel van zijn boek. Op de linkerpagina staat een kopie van een pagina van het boek.

1.1 Haakjes wegwerken

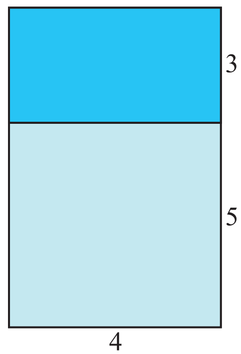
Bij het maken van berekeningen heb je te maken met de volgorde van de bewerkingen. Deze volgorde is:
1 machtsverheffen en worteltrekken in de volgorde waarin ze staan,
2 vermenigvuldigen en delen in de volgorde waarin ze staan,
3 optellen en aftrekken in de volgorde waarin ze staan.

Je kunt haakjes gebruiken om de volgorde van bewerkingen te veranderen. Je rekent dan eerst uit wat tussen haakjes staat.

Voorbeelden

1 $2 + 3 \times 4 = 2 + 12 = 14$
2 $(2 + 3) \times 4 = 5 \times 4 = 20$
3 $2 + 3 - 4 = 5 - 4 = 1$
4 $10 : 2 \times 4 = 5 \times 4 = 20$
5 $2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$
6 $(4 \times 3)^2 = 12^2 = 144$
7 $4 \times \sqrt{9} = 4 \times 3 = 12$
8 $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = 6$
9 $\sqrt{4} \times 9 = 2 \times 9 = 18$

Haakjes wegwerken
De oppervlakte van de rechthoek kun je op twee manieren uitrekenen.
► Je berekent eerst de totale lengtes van de zijden en daarmee de oppervlakte: $4 \times (3 + 5) = 4 \times 8 = 32$;
► Je berekent eerst de oppervlaktes van de kleine rechthoeken en telt die bij elkaar op: $4 \times 3 + 4 \times 5 = 12 + 20 = 32$



Hieraan zie je dat:
$4 \times (3 + 5) = 4 \times 3 + 4 \times 5$.
In de berekening kun je de **haakjes wegwerken** door alle vermenigvuldigingen apart op te schrijven.
Dit geldt ook als er een minteken staat:

$7 \times (12 - 5) = 7 \times 7 = 49$
$7 \times 12 - 7 \times 5 = 84 - 35 = 49$

Dezelfde regels gelden voor formules met letters.

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Voorbeelden

10 $(p + q) \cdot r = r \cdot (p + q) = r \cdot p + r \cdot q = p \cdot r + q \cdot r$
11 $-(s + t) = (-1) \cdot (s + t) = (-1) \cdot s + (-1) \cdot t = -s - t$

Je kunt vergissingen voorkomen door eerst boogjes te zetten bij de producten. Je kunt dan in één keer de uitwerking opschrijven.

Voorbeeld

12 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

× of ·?
Vermenigvuldigingen worden met het ×-teken aangegeven. In de wiskunde is het gebruikelijk om in plaats daarvan een punt · te zetten. Soms wordt zelfs de punt weggelaten, bijvoorbeeld tussen letters die variabelen voorstellen.

1

Oefeningen

1 Bereken in de juiste volgorde.

a $2 + 3 \times 6$

b $(2 + 3) \times 6$

c $1 + 2 - 3 + 4 - 5$

d $6^2 + 3 \times 6^2$

e $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

f $5 + 12 : 3$

g $(6 + 12) : (6 - 12)$

h $2 - 3 \times 4 : 5$

i $3(4(5 + 7) - (6 \times 4))$

j $5^2 - 4^2 - 3^2$

2 Bereken.

a $2 \cdot (-3)^2 + (-3) + 1$

b $3 \cdot (-2)^2 + (-3) \cdot 2^2$

c $3 \cdot (1 - 2 \cdot (-3))^2$

d $3 \cdot (2 - 0{,}5)^2$

e $\sqrt{3^2 + 4^2}$

f $\sqrt{3^2} + \sqrt{4^2}$

g $\left(\sqrt{\sqrt{3+4}}\right)^2$

h $\sqrt{9} - \sqrt{4}$

i $\sqrt{9-4}$

3 Bereken.

a $\dfrac{2 \cdot 0{,}5 - 3}{1 - 3 \cdot 0{,}5}$

b $\dfrac{0{,}3 \cdot 3^2 - 3}{0{,}3}$

c $\dfrac{1 - 4 \cdot 0{,}25}{1 + 4 \cdot 0{,}25}$

d $\dfrac{4^2}{0{,}4^2}$

e $\left(\dfrac{4}{0{,}4}\right)^2$

f $\dfrac{2 + 5^2}{2 \cdot 3^2}$

4 Schrijf zonder haakjes.

a $3(p + 6)$

b $4(3a - 2)$

c $b(b - 4)$

d $6(4 + 7x)$

e $16(-2h - 4)$

f $3e(4 - e)$

g $-(x - 5)$

h $-5(3c + 4)$

i $-s(-s - 5)$

j $-(8 - 4m)$

5 Schrijf zonder haakjes.

a $8(a + b)ab$

b $-(3 + p)(-p)$

c $-((3 + p)(-p))$

d $12pq(r - s - t)$

e $3(x + y) + 3(y + 7z)$

f $3(x + 2y + 7z)$

g $(u(w - (1 - v))$

h $x(1 - y(1 - z))$

6 Bereken de waarde van de volgende uitdrukkingen als $x = 2$.

a $1 - x(1 - x)$

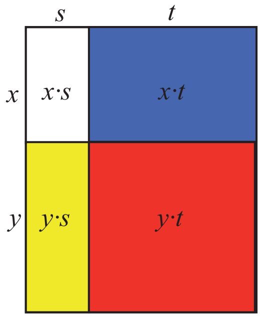
b $1 - x(1 - x(1 - x))$

c $1 - x(1 - x(1 - x(1 - x)))$

d $1 - x(1 - x(1 - x(1 - x(1 - x))))$

e $1 - x(1 - x(1 - x(1 - x(1 - x(1 - x)))))$

1.2 De vermenigvuldigtabel



Met behulp van oppervlaktes in rechthoeken kun je het **wegwerken van haakjes** in ingewikkelder situaties laten zien.
In de figuur kun je aflezen dat:
$(x + y)\cdot(s + t) = x\cdot(s + t) + y\cdot(s + t) = x\cdot s + x\cdot t + y\cdot s + y\cdot t$
Door **haakjes weg** te **werken**, maak je van een product een optelling of aftrekking.

In de volgende **vermenigvuldigtabel** gebeurt hetzelfde.

×	**s**	**t**	+
x	$x\cdot s$	$x\cdot t$	$x\cdot s + x\cdot t$
y	$y\cdot s$	$y\cdot t$	$y\cdot s + y\cdot t$
			$x\cdot s + y\cdot s + x\cdot t + y\cdot t$

Deze methode werkt ook met negatieve getallen.
Bij het vereenvoudigen van het resultaat gebruik je de vermenigvuldigregels voor plus en min:

×	+	−
+	+	−
−	−	+

Voorbeeld

Je kunt de haakjes wegwerken in $(2u - v + 4w)\cdot(-u + 2v - 3w)$ met de tabel.
Let erop hoe je in de tabel met de mintekens werkt. Bij het optellen van het eindresultaat neem je de gelijksoortige termen bij elkaar.

×	$-u$	$2v$	$-3w$	+
$2u$	$-2u^2$	$4u\cdot v$	$-6u\cdot w$	$-2u^2 + 4u\cdot v - 6u\cdot w$
$-v$	$u\cdot v$	$-2v^2$	$3v\cdot w$	$u\cdot v - 2v^2 + 3v\cdot w$
$4w$	$-4u\cdot w$	$8v\cdot w$	$-12w^2$	$-4u\cdot w + 8v\cdot w - 12w^2$
				$-2u^2 + 5u\cdot v - 2v^2 + 11v\cdot w - 10u\cdot w - 12w^2$

Algemeen

Je kunt haakjes wegwerken door de volgende regels toe te passen:

$A(B + C) = A\cdot B + A\cdot C \qquad (A + B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$

$A(B - C) = A\cdot B - A\cdot C \qquad (A - B)\cdot C = A\cdot C - B\cdot C$

$(A + B)(C + D) = A\cdot C + A\cdot D + B\cdot C + B\cdot D$

$(A - B)(C + D) = A\cdot C + A\cdot D - B\cdot C - B\cdot D$

$(A + B)(C - D) = A\cdot C - A\cdot D + B\cdot C - B\cdot D$

$(A - B)(C - D) = A\cdot C - A\cdot D - B\cdot C + B\cdot D$

Hierin zijn A, B en C getallen of formules met letters en getallen.

Oefeningen

1 De vermenigvuldigtabel is gedeeltelijk ingevuld.

$\times$	$2a$	$-3b$	$+$
$-u$			
v			

a Welke vermenigvuldiging kun je uitrekenen met deze tabel?
b Neem de tabel over en bereken daarmee de nieuwe uitdrukking zonder haakjes.

2 Doe hetzelfde als in oefening **1** met behulp van de volgende tabel.

$\times$	$-x$	$3y$	$-z$	$+$
$2x$				
$-y$				

3 Schrijf zonder haakjes.
a $(n-7)(n+3)$
b $(p+2)(2-q)$
c $(x-\frac{1}{2})(x+5)$
d $(7-s)(s+5)$
e $(h-7)(h+7)$
f $(v-7)(3+4)$
g $(b+8)(b+11)$
h $(3+4a)(a+2)$
i $(x+9)^2$
j $(t-4)^2$

4 Schrijf zonder haakjes.
a $(x+4)(x-6)$
b $(2x-y)(2x+y)$
c $(2x+3y)^2$
d $(2x-3y)^2$
e $(3a-2b)(2b+3a)$
f $2p^2(3p+4)$
g $(2t-3)(2t+5)$
h $(3q^2+2p)(q-p)$
i $(2p+5q)(-5q+2p)$
j $-h(2h-6)(2+h)$

5 Schrijf zonder haakjes.
a $(1+x+y)(2+x)$
b $-2p(1-p+q)$
c $(1-h)(1+h+h^2)$
d $(1+t)(1-t-t^2)$
e $(3x-y-2)(x+3y)$
f $(2pq-1)(1-p+q)$
g $(1+s+t)(1-s-t)$
h $(2m-3n+q)(-m+n-2q)$
i $(x+y+z)^2$
j $(a-b+c-d)^2$

6 Schrijf zonder haakjes en vereenvoudig zover mogelijk.
a $(1-x)(1+x)$
b $(1-x)(1+x+x^2)$
c $(1-x)(1+x+x^2+x^3)$
d $(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^{99})$

1

1.3 Merkwaardige producten

Een paar bijzondere herleidingen zul je regelmatig tegenkomen. Ze worden de **merkwaardige producten** genoemd. Je gebruikt ze in twee situaties: om **haakjes weg** te **werken** of om te **ontbinden in factoren**.

De merkwaardige producten om haakjes weg te werken zijn:
- $(x + y)^2 = x^2 + 2\,x \cdot y + y^2$
- $(x - y)^2 = x^2 - 2x \cdot y + y^2$
- $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$
- $(x + p)\,(x + q) = x^2 + (p + q) \cdot x + p \cdot q$

In de oefeningen op de volgende pagina kun je van deze eigenschappen een bewijs geven.

Voorbeelden (haakjes wegwerken)

1 $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$
2 $(1 - p^2)^2 = 1 - 2p^2 + p^4$
3 $99 \cdot 101 = (100 - 1)(100 + 1) = 100^2 - 1 = 9999$
4 $(x + 5)(x + 7) = x^2 + 12 \cdot x + 35$

Bovenstaande merkwaardige producten kun je ook in omgekeerde richting gebruiken. Je voert dan haakjes in en maakt van een optelling of aftrekking van termen weer een product. Dat heet **ontbinden in factoren**.
- $x^2 + 2\,x \cdot y + y^2 = (x + y)^2$
- $x^2 - 2x \cdot y + y^2 = (x - y)^2$
- $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
- $x^2 + (p + q) \cdot x + p \cdot q = (x + p)\,(x + q)$

Voorbeelden (ontbinden in factoren)

5 $4r^2 + 4r + 1 = (2r + 1)^2$
6 $25 - 10p + p^2 = (5 - p)^2$
7 $36a^2 - b^2 = (6a - b)(6a + b)$
8 $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$

In voorbeeld 8 staat een methode om **kwadratische drietermen** te ontbinden. Dit is de **product-som methode**.
Bij $x^2 + ax + b$ zoek je twee getallen p en q zodat $p \cdot q = b$ en $p + q = a$.
Je krijgt dan: $x^2 + ax + b = x^2 + (p + q)\cdot x + p \cdot q = (x + p)(x + q)$.

Voorbeelden

9 $x^2 + 7x + 10 = x^2 + (2 + 5)x + 2 \cdot 5 = (x + 2)(x + 5)$
10 $y^2 + 3y - 10 = y^2 + (5 - 2)y + (-2) \cdot 5 = (y + 5)(y - 2)$
11 $p^2 - 3p + 2 = p^2 + (-1 + -2)p + (-1)(-2) = (p - 1)(p - 2)$

Algemeen

De vier merkwaardige producten kun je gebruiken om haakjes weg te werken of om te ontbinden in factoren (haakjes in te voeren). De product-som methode is een manier om kwadratische drietermen te ontbinden.

1

Oefeningen

1 Bewijs door wegwerken van haakjes.

a $(x + y)^2 = x^2 + 2\,x{\cdot}y + y^2$

b $(x - y)^2 = x^2 - 2x{\cdot}y + y^2$

c $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$

d $(x + p)\ (x + q) = x^2 + (p+q){\cdot}x + p{\cdot}q$

2 Schrijf zonder haakjes.

a $(x+4)(x-6)$

b $(2x-y)(2x+y)$

c $(2x+3y)^2$

d $(2x-3y)^2$

e $(3x-2y)(2y+3x)$

f $(2t-3)(2t-5)$

g $(3q^2+2p)(3q^2-2p)$

h $(s^2+5t)^2$

i $(2p+5q)(-5q+2p)$

j $(u+w+1)^2$

3 Ontbind in zoveel mogelijk factoren met de eerste twee merkwaardige producten.

a a^2+4a+4

b $25+10t+t^2$

c $9x^2-6x+1$

d $2st-s^2-t^2$

e $4w^2+8vw+4v^2$

f $9x^2-30xy+25y^2$

g $q^4+q^2+\dfrac{1}{4}$

h $a^8-6a^4b^2+9b^4$

i $p^2-2\sqrt{2}p+2$

4 Pas het derde merkwaardige product toe op de volgende uitdrukkingen en vereenvoudig zover mogelijk.

a x^4-4a^2

b a^8-b^8

c w^5-w^3

d $(n+1)^2-n^2$

e $(2x+1)^2-(x+2)^2$

f $16t^2-(4t+1)^2$

5 Ontbind in zoveel mogelijk factoren met het vierde merkwaardige product (de product-som methode).

a x^2+3x+2

b $s^2+13s+42$

c p^2-p-42

d q^2+q-42

e $35-2r-r^2$

f $4a^2+2a-12$

6 Herschrijf eerst de volgende vergelijkingen zodat het rechterlid 0 wordt en ontbind daarna het nieuwe linkerlid in factoren.

a $x^2=16$

b $y^2=12-y$

c $t^2+2t=3$

d $2a+15=a^2$

e $p^2+3p-36=4$

f $y^2-8y+16=2y-9$

g $2b^2-12b=8b-42$

h $q^2+3q-51=8q+33$

i $2x^2-5x-12=x+8$

j $y^2-y+7=-2y^2+5y+4$

1

1.4 Eenvoudige vergelijkingen

De balansmethode
Lineaire vergelijkingen en sommige andere vergelijkingen kun je aanpakken met de **balansmethode**. Bij deze methode voer je systematisch links en rechts van het gelijkteken dezelfde bewerking uit tot je de vergelijking hebt omgewerkt tot de vorm *onbekende* = ….
Waarschuwing: als je links en rechts deelt door een term die de onbekende bevat, kun je oplossingen kwijtraken. Ga altijd na of die term ook oplossingen bevat.

Voorbeeld 1

$\frac{1}{3}x-2=3-\frac{1}{2}x$ (links en rechts × 6 om de breuken kwijt te raken)
$2x-12=18-3x$ (links en rechts + $3x$ om x naar links te brengen)
$5x-12=18$ (links en rechts +12 om het getal naar rechts te krijgen)
$5x=30$ (links en rechts delen door 5)
$x=6$

Vergelijkingen van de vorm $A{\cdot}B=0$
Als $A{\cdot}B = 0$ dan is $A = 0$ of $B = 0$. Een vergelijking van de vorm $A{\cdot}B = 0$, waarbij de onbekende zowel in A als in B voorkomt, kun je dus splitsen in de twee vergelijkingen $A = 0$ of $B = 0$

Voorbeeld 2

$(3x+4)(2-x)=0$; $3x + 4 = 0$ of $2 - x = 0$; $x=-\frac{4}{3}$ of $x=2$

Vergelijkingen van de vorm $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$
Onder de voorwaarde dat B ≠ 0 en D ≠ 0 kun je deze vergelijkingen met de balansmethode herschrijven tot $A{\cdot}D = B{\cdot}C$. Als de onbekende voorkomt in B of D, kun je hiermee extra oplossingen krijgen die niet voldoen aan de oorspronkelijke vergelijking. *Controleer dus altijd je antwoorden.*

Voorbeeld 3

$\frac{2x}{x+2}=\frac{x}{4}$ →maal 4→: $\frac{4\cdot 2x}{x+2}=x$ →maal $x + 2$→ $4\cdot 2x=x(x+2)$.
Dus: $8x=x^2+2x$ → $0=x^2-6x$ → $x(x-6)=0$. Je vindt: $x = 0$ of $x = 6$.
Controle in de oorspronkelijke vergelijking: voor $x = 0$ krijg je $0 = 0$,
voor $x = 6$ krijg je $\frac{12}{8}=\frac{6}{4}$, dus beide oplossingen voldoen.

De *abc* - formule
Vergelijkingen van de vorm $ax^2+bx+c=0$ kun je aanpakken met de formule: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Je krijgt twee oplossingen als $D=b^2-4ac>0$ en één oplossing als $D=b^2-4ac=0$. In alle andere gevallen is er geen oplossing. $D=b^2-4ac$ heet de **discriminant**.

Oefeningen

1 Los op met de balansmethode.

a $x-3=12-x$

b $\frac{1}{2}-y=3y+\frac{1}{3}$

c $(7s-2)+7=12$

d $n+(n+1)=n+2$

e $\frac{1}{12}(t+1)=\frac{1}{9}(t+2)$

f $-(-4-3p)+11=(6p-6)-10$

2 Los op.

a $\frac{3}{x}=\frac{2}{x-2}$

b $\frac{x}{3}=\frac{x-2}{2}$

c $x-\frac{1}{x}=0$

d $x+\frac{1}{x}=2$

3 Los op.

a $(p-1)(2+p)=0$

b $(3p-1)(2+4p)=0$

c $(\frac{3}{p}-1)(2+\frac{4}{p})=0$

d $(\frac{3}{p-3}-1)(2+\frac{4}{p-2})=0$

4 Los op.

a $\frac{x}{x-1}=\frac{x-1}{x}$

b $\frac{3x-3}{x-2}=x(x-1)$

c $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{6}$

d $(x-2)^2=(3-2x)^2$

5 Los op.

a $r^2-1=0$

b $r^2-4=0$

c $(r-1)^2-4=0$

d $(r^2-1)^2-4=0$

6 Los op.

a $(s+1)^2=2s+5$

b $3t^2=6t-12$

c $\frac{1}{6}(u+3)^2=\frac{1}{4}u-\frac{1}{3}$

d $(\frac{1}{2}v-\frac{1}{4})^2=\frac{1}{8}v$

7 Los op.

a $\frac{x}{1+x}=2\frac{1}{2}$

b $\frac{x}{1+x}=10\frac{1}{10}$

c $x+\frac{1}{x}=2\frac{1}{2}$

d $x+\frac{1}{x}=10\frac{1}{10}$

1.5 Ontbinden in factoren en vergelijkingen oplossen

Ook de regel $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ kun je andersom gebruiken.
Van $A \cdot B + A \cdot C$ maak je dan $A \cdot (B + C)$. Je hebt in dat geval de vorm $A \cdot B + A \cdot C$ **ontbonden in de factoren** A en $B + C$.
Je zegt ook wel: "Je hebt de factor A **buiten haakjes gehaald**".

1

Hierin stellen A, B en C weer getallen voor of formules met letters en getallen.
Op dezelfde manier geldt: $A \cdot C + B \cdot C = (A + B) \cdot C$.
Nu is C de gemeenschappelijke factor die naar buiten wordt gehaald.
Meestal zet je die factor vooraan, dus:

$$A \cdot C + B \cdot C = (A + B) \cdot C = C \cdot (A + B)$$

Je kunt het resultaat van het buiten haakjes halen altijd weer controleren door de haakjes weg te werken.

Voorbeelden

1. $2x + 2y = 2(x + y)$, de gemeenschappelijke factor 2 is buiten haakjes gehaald.
2. $pq^2 - p^2q + pqr^2 = pq(q - p + r^2)$, nu is pq de gemeenschappelijke factor.
3. $ac + ad + bc + bd = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = (a + b) \cdot (c + d)$, let op de twee stappen die je hier maakt.
4. $r^2 - s^2 = (r - s)(r + s)$, met een merkwaardig product.
5. $x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$, met de product-som methode

Vergelijking oplossen
Soms kun je vergelijkingen handig oplossen door eerst te ontbinden in factoren. Je maakt dan gebruik van de eigenschap dat als $A \cdot B = 0$ dan is $A = 0$ of $B = 0$.

Voorbeeld 6

Om de vergelijking $x^3 - 4x^2 = 0$ op te lossen, ontbind je eerst het linkerlid in factoren: $x^3 - 4x^2 = x^2(x - 4) = 0$

Je krijgt dan: $x^2(x - 4) = 0$ als $x = 0$ of $x = 4$.

Algemeen
De eigenschappen:
- $A \cdot B + A \cdot C = A \cdot (B + C)$
- $A \cdot C + B \cdot C = (A + B) \cdot C$

kun je gebruiken om te **ontbinden in factoren**.
Hierin stellen A, B en C getallen voor of formules met letters en getallen.
Soms kun je een vergelijking handig oplossen door eerst te ontbinden in factoren.
Herken je een merkwaardig product, dan kun je dat direct gebruiken om te ontbinden.

Oefeningen

1 Ontbind in zoveel mogelijk factoren.

a a^2+8a

b $15t^2-75t$

c $12b+48b^2$

d h^2-13h

e $9p^2-72p$

f $28x^2+35x$

g $8q+32$

h $6x^2+24x$

i $-8s-6$

j $10e+60e^2$

2 Ontbind in zoveel mogelijk factoren.

a a^2-12a

b $18t^2-16t$

c $11b+66b^2$

d h^2-14h

e $8p^2+72p$

f $32x^3+8x$

g $-8q+56$

h $5xy^2-45x^2y$

i $12rs^2t+9r^2st+15rst^2$

j $x(x-y)+y(x-y)$

3 Ontbind in zoveel mogelijk factoren.

a $40mn-16n^2$

b $2xy(5-z)+(5-z)^2$

c x^4-x^3+x-1

d $pqr+qrs+rst$

e $(1+h)^2-1-h$

f $(w+3)^3-(w+3)^2$

g $2a+3-(2a+3)^3$

h $a^5b^2c^3+a^2b^3c^5+a^3b^5c^2$

i $x^2+(pq)x+pq+x$

j $25r^2+10r+1$

4 Los op door ontbinden in factoren (zie voorbeeld 6).

a $x^2+6x=0$

b $6g-10g^2=0$

c $3n^2+27n=0$

d $-t^2-8t=0$

e $5x^2-20x=0$

f $4h^2-22h=0$

g $3r-9r^2=0$

h $3p=(1-3p)^2-1$

i $r^3+3r^2=0$

5 Los op door ontbinden in factoren (zie voorbeeld 6).

a $x^2=9x$

b $8g=20g^2$

c $5n^2=-35n$

d $11t=-t^2$

e $-7y^3-56y=0$

f $(x+3)^2=x+3$

g $(1-w)^2+w=1$

h $3p=(1-3p)^2+1$

i $r^3-r=r^2-1$

j $t^3-t^2-t+1=0$

1.6 Breukvormen

1

Breuken van de vorm $\frac{1}{2}, -\frac{11}{17}, \frac{25}{12}, \ldots, \frac{t}{n}$ waarbij t en n gehele getallen zijn, heten een **echte breuk**. Breuken van de vorm $3\frac{1}{2}, -1\frac{11}{17}, 2\frac{5}{12}, \ldots$ heten **gemengde breuken**. De gemengde breuk $3\frac{4}{7}$ kun je schrijven als $3 + \frac{4}{7}$.

De regels voor het rekenen met breuken zijn:

- Een breuk kun je **vereenvoudigen** door teller en noemer door dezelfde factor te delen of met dezelfde factor te vermenigvuldigen.
- **Gelijknamige breuken** hebben dezelfde noemer.

  Gelijknamig maken van $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ geeft $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ en $\frac{c}{d} = \frac{cb}{bd}$.

  (De eerste breuk heb je onder en boven vermenigvuldigd met d, de tweede breuk met b).
- Optellen van **gelijknamige** breuken: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

  (ongelijknamige breuken maak je eerst gelijknamig).
- Vermenigvuldigen van breuken: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

  (de breuken hoeven niet gelijknamig te zijn).
- Delen van breuken: $\dfrac{A}{\frac{p}{q}} = \dfrac{A \cdot q}{\frac{p}{q} \cdot q} = \dfrac{A \cdot q}{p} = A \cdot \dfrac{q}{p}$

  (**Delen door een breuk** is hetzelfde als vermenigvuldigen met zijn omgekeerde.)

Voorbeelden

1 Vereenvoudigen (teller en noemer delen door dezelfde factor):

$$\frac{42x^2y}{126xy^2} = \frac{21xy}{63y^2} = \frac{7x}{21y} = \frac{x}{3y}$$

2 Vereenvoudigen (teller en noemer vermenigvuldigen met dezelfde factor): $\dfrac{15}{2\frac{2}{3}} = \dfrac{15}{\frac{8}{3}} = 15 \cdot \frac{3}{8} = \frac{45}{8} = 5\frac{5}{8}$

3 Gelijknamig maken en optellen: $\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{b}{vb} + \frac{v}{vb} = \frac{b+v}{vb}$

4 Vermenigvuldigen: $\frac{p+q}{r} \times \frac{p}{q+r} = \frac{p(p+q)}{r(q+r)}$

5 Delen door een breuk: $x^2 : \frac{x}{y} = x^2 \times \frac{y}{x} = \frac{x^2y}{x} = xy$

1

Oefeningen

1 Bereken zonder rekenmachine.

a $\dfrac{50}{\frac{1}{4}}$

b $\dfrac{3}{\frac{6}{16}}$

c $\dfrac{10}{-\frac{1}{3}}$

d $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{8}{5}}$

e $\dfrac{1\frac{10}{13}}{2\frac{2}{3}}$

f $\dfrac{1}{0,3}$

g $\dfrac{0,6}{0,4}$

h $\dfrac{1,2}{0,02}$

2 Schrijf de volgende breuken zo eenvoudig mogelijk.

a $\dfrac{b}{\frac{1}{a}}$

b $\dfrac{abc}{\frac{bc}{a}}$

c $\dfrac{\frac{abc}{bc}}{a}$

d $\dfrac{\frac{xy}{z}}{\frac{yz}{x}}$

e $\dfrac{ab+bc}{b}$

f $\dfrac{a^2(a-b)}{a(a-b)}$

g $\dfrac{(x-y)-(x-3y)}{2y}$

h $\dfrac{5x^4y^5z^2}{10x^3y^4z^4}$

3 Schrijf de volgende breuken zo eenvoudig mogelijk.

a $\dfrac{a^2+ab+a}{a}$

b $\dfrac{a^2\cdot ab\cdot a}{a}$

c $\dfrac{p+pq}{q}$

d $\dfrac{ax\cdot ay}{az}$

e $\dfrac{a^3-a}{a^2-1}$

f $\dfrac{3p^2-5p}{\frac{5-3p}{p}}$

4 Schrijf als één breuk.

a $\dfrac{1}{ac}+\dfrac{2}{a}$

b $a+\dfrac{1}{a}$

c $\dfrac{2}{a}-\dfrac{1}{x}$

d $\dfrac{1}{3a^2b}+\dfrac{1}{4ab^2}+\dfrac{1}{5b^3}$

e $\dfrac{x}{\sqrt{y}}+\dfrac{y}{\sqrt{x}}$

f $\dfrac{1}{x(x-1)}-\dfrac{1}{x^2-1}$

g $\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{ab}{(b-a)^2}$

h $5-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{1-x}$

1

1.7 Rekenregels voor machten

Voorbeelden

1 $2^5 = 2\times2\times2\times2\times2 = 32$

2 $7^2 \times 7^3 = (7\times7)\times(7\times7\times7) = 7^5 = 7^{2+3}$

3 $\dfrac{7^5}{7^3} = \dfrac{7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7} = \dfrac{7\times7}{1} = 7^2 = 7^{5-3}$

4 $\dfrac{7^5}{7^5} = \dfrac{1}{1} = 1 = 7^0$

5 $\dfrac{7^3}{7^5} = \dfrac{7\times7\times7}{7\times7\times7\times7\times7} = \dfrac{1}{7\times7} = \dfrac{1}{7^2} = 7^{-2} = 7^{3-5}$

6 $(6^2)^3 = 6^2\times6^2\times6^2 = 6\times6\times6\times6\times6\times6 = 6^6 = 6^{2\times3}$

Rekenregels voor machten
In de voorbeelden zie je de belangrijkste **rekenregels voor machten**.

1 a^n betekent: $a\times a\times\ldots\times a$ (n factoren a) ; a is het **grondtal**, n is de **exponent**.

2 $a^m\times a^n = a^{m+n}$

3 $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

4 $a^0 = 1$

5 $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

6 $(a^m)^n = a^m\times a^m\times\ldots\times a^m = a^{m\cdot n}$

7 $(ab)^n = a^n\times b^n$

8 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Machten met negatieve grondtallen
De regels voor het rekenen met machten van negatieve getallen zijn:

9 $(-a)^n = a^n$ als n een even getal is.
Voorbeeld: $(-2)^2 = (-2)\times(-2) = 4 = 2^2$

10 $(-a)^n = -a^n$ als n een oneven getal is.
Voorbeeld: $(-2)^3 = (-2)\times(-2)\times(-2) = -8 = -\,2^3$

Wetenschappelijke notatie
Grote en kleine getallen schrijf je vaak in de **wetenschappelijke notatie**. De standaardvorm is: $a\cdot10^p$, met a een decimaal getal tussen 1 en 10.

Voorbeeld

7 $12009 = 1{,}2009\cdot10^4$ en $0{,}00012009 = 1{,}2009\cdot10^{-4}$

1

Oefeningen

1 Schrijf zo eenvoudig mogelijk als één macht of als combinatie van machten.

a $3^7 \cdot 3^4$

b $5^2 \cdot 7^3 \cdot 5^4 \cdot 5^3 \cdot 7^4$

c $(3^7)^4$

d $(7 \cdot 11)^8$

e $(4^6 \cdot 6^4)^{-1}$

f $\left(\frac{5}{7}\right)^{11}$

g $\frac{2^{11}}{2^3}$

h $\frac{3^4 \cdot 3^{-2}}{3^7 \cdot 3^{-1}}$

2 Schrijf zo eenvoudig mogelijk als één macht of als combinatie van machten.

a $-a^3 \cdot b^5 \cdot a^2 \cdot -a^7 \cdot -b^6$

b $(-x^4y^2z^5)^7$

c $(-p^2q^5)^3 \cdot (p^5q^3)^6$

d $-\left(-\frac{a^2b^5c^3}{d^4e^3}\right)^5$

e $\left(-\frac{p^3q^7r^2}{pr^5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{p^2qr^4}{q^6r}\right)^3$

3 Schrijf zo eenvoudig mogelijk als één macht of als combinatie van machten.

a $(a-b)^0$

b $\frac{z^8}{z^4} \cdot \frac{z^4}{8}$

c $\left(\frac{a}{b}\right)^0$

d $\frac{x^2y^3}{xy^5}$

e $a - b^0$

f $\frac{(x^2y^3)^2}{(-x)^3}$

g $\left(\frac{a^pb^2}{c^5}\right)^m$

h $\frac{a^{p+1}b^{q+1}}{a^{p-1}b^{q-1}}$

i $\frac{a^{p+3}b^{p+4}}{a^3b^p}$

j $\left(\frac{a^{2p+3}}{a^p}\right)^3$

k $\left(\frac{a^4b^{3p}}{a^4}\right)^{-2}$

4 Schrijf in de wetenschappelijke notatie

a De snelheid van het licht is 300 000 000 m/s

b De massa van een stofdeeltje is 0,000 000 000 753 kg

c $(5 \cdot 10^4) \cdot (6 \cdot 10^5)$

d $(7 \cdot 10^4) \cdot (5 \cdot 10^6) \cdot (3 \cdot 10^2)$

e $(6{,}1 \cdot 10^{-2}) \cdot (3{,}42 \cdot 10^{-8}) \cdot (8{,}125 \cdot 10^{-1})$

5 *De massa van de aarde is:* m = $5{,}976 \cdot 10^{24}$ kg. De massa van de zon is M = $1{,}96 \cdot 10^{30}$kg.
Hoeveel keer zwaarder is de zon ten opzichte van de aarde?

1

1.8 Machten met gebroken exponenten

Voorbeeld 1

Volgens de worteldefinitie geldt: $\left(\sqrt[2]{54}\right)^2 = 54$.

Het getal $\sqrt[2]{54}$ kun je ook schrijven als $54^{\frac{1}{2}}$.
Want: $\left(\sqrt[2]{54}\right)^2 = 54$; maar ook $(54^{\frac{1}{2}})^2 = 54^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 54^1 = 54$.

Wortel als een macht met een gebroken exponent
Worteltrekken is een omgekeerde bewerking van machtsverheffen.
Is a een positief getal ($a > 0$) dan is $\sqrt[n]{a}$ het positieve getal p dat a oplevert als je p tot de n-de macht verheft. Dat betekent: $(\sqrt[n]{a})^n = p^n = a$. Maar ook geldt: $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\times n} = a^1 = a$. Dus geldt: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Dat betekent: de wortel $\sqrt[n]{a}$ kun je ook schrijven als $a^{\frac{1}{n}}$ (een macht met een gebroken exponent).

Verder is $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$, want $(\sqrt[n]{a^p})^n = a^p$ en ook $\left(a^{\frac{p}{n}}\right)^n = a^{\frac{p}{n}\times n} = a^p$.

Alleen positieve grondtallen kun je tot een gebroken macht verheffen.

Rekenregels voor wortels
Alle rekenregels voor machten met gehele exponenten gelden ook voor machten met gebroken exponenten. In het bijzonder:

1 $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$

2 $\sqrt[q]{a \cdot b} = \sqrt[q]{a} \cdot \sqrt[q]{b}$

3 $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Wortels vereenvoudigen
Wortels kun je soms **vereenvoudigen** door machten van het grondtal naar buiten te werken. Je houdt dan over: een getal (of uitdrukking) maal een niet verder te vereenvoudigen wortel.
Bij breuken werk je de wortels uit de noemer weg. Zo kun je makkelijker een schatting maken van de grootte van de breuk.

Voorbeelden

2 $\sqrt{60} = \sqrt{4 \cdot 15} = \sqrt{4} \times \sqrt{15} = 2\sqrt{15} \approx 7{,}75$

3 $\sqrt{60} = (2^2 \times 3 \times 5)^{\frac{1}{2}} = 2 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 2 \times 15^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{15} \approx 7{,}75$

4 $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{3} \approx \frac{1}{3} \times 1{,}7 \approx 0{,}6$

5 $\sqrt[3]{\dfrac{108}{20}} = \sqrt[3]{\dfrac{27}{5}} = \dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}} = \dfrac{3\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{3}{5}\sqrt[3]{25} \approx 1{,}75$

1

Oefeningen

1 Schrijf de getallen onder het wortelteken als macht, vervang de wortel door een gebroken exponent en bereken de uitkomst.

Voorbeeld: $\sqrt[4]{256} = \left(2^8\right)^{\frac{1}{4}} = 2^2 = 4$

a $\sqrt[5]{1024}$

b $\sqrt[3]{216}$

c $\sqrt[3]{243} \times 729^{-\frac{1}{9}}$

d $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[3]{625}$

2 Herleid, indien mogelijk, tot een zo eenvoudig mogelijke vorm (de letters stellen positieve getallen voor).

a $\sqrt{a^2b^2}$

b $\sqrt{a^4 + b^4}$

c $\sqrt[9]{a^{\frac{3}{2}}}$

d $\sqrt{pq} \cdot \sqrt{pq^3}$

e $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$

f $\sqrt[3]{\dfrac{8ab^2}{27(a^{-3}b^2)^{-4}}}$

3 Schrijf met hele of gebroken exponenten (de letters stellen positieve getallen voor).

a $\sqrt{\dfrac{a^2}{b^3c^5}}$

b $\sqrt[3]{\dfrac{p^3q^4}{r^7}}$

c $\dfrac{1}{\sqrt{x^2yz^4}}$

d $\dfrac{s}{\sqrt{s^3}}$

e $\dfrac{\sqrt{p}\sqrt[3]{pq}}{q^2}$

f $\dfrac{1}{\sqrt[3]{p^{-2}q^5r^{-1}}}$

4 Schrijf zo eenvoudig mogelijk (*a*, *b* en *c* zijn positieve getallen):

$$\sqrt{\frac{0{,}16 \cdot a^7b^4}{(a^{-1}c^2)^3}}$$

5 Vereenvoudig zoals in de voorbeelden 2 tot en met 5.

a $\dfrac{5}{2\sqrt{5}}$

b $\dfrac{7}{3\sqrt{14}}$

c $\dfrac{36}{4\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{3}}$

d $\dfrac{5}{\sqrt[3]{3}}$

e $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{36}}$

f $\dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[6]{5}}$

g $\dfrac{28}{\sqrt{15}} \cdot \dfrac{75}{\sqrt{7}}$

h $\dfrac{8}{\sqrt[3]{2}} \cdot \dfrac{30}{\sqrt[4]{5}}$

1

1.9 Omwerken van formules

Voorbeeld 1

In een stroomdraad geldt de wet van Ohm: $U = I \cdot R$. Deze formule geeft het verband tussen de spanning U, de stroomsterkte I en de weerstand R. Met deze formule kun je U direct berekenen als je I en R weet.
Je kunt ook de weerstand R berekenen als je U en I hebt gemeten. In dat geval is het handig om de formule **om te werken** in de vorm: $R = \frac{U}{I}$.

Evenzo kun je met $I = \frac{U}{R}$ de stroomsterkte in een draad berekenen als U en R bekend zijn. Afhankelijk van welke variabele je wilt berekenen, kun je de wet van Ohm dus op drie manieren schrijven.

Voorbeeld 2

Voor een afgesloten hoeveelheid gas geldt de algemene gaswet:

$$\frac{p \cdot V}{T} = \text{constant}$$

Hierin is p de druk in pascal (Pa), V het volume in m^3 en T de temperatuur in graden Kelvin. Je kunt de formule op drie manieren omwerken:

$p = \frac{\text{constante} \cdot T}{V}$ (de druk bij gegeven constante, T en V)

$V = \frac{\text{constante} \cdot T}{p}$ (het volume bij gegeven constante, T en p)

$T = \frac{p \cdot V}{\text{constante}}$ (de temperatuur bij gegeven constante, V en p.

Voorbeeld 3

De bewegingsenergie van een voorwerp is gegeven door: $E = \frac{1}{2}mv^2$, waarin m de massa is van het voorwerp in kg en v de snelheid in m/s.
Bij een gegeven hoeveelheid energie bereken je de snelheid door de formule om te werken zodat je v hebt uitdrukt in de variabelen E en m:

$$mv^2 = 2E \rightarrow v^2 = \frac{2E}{m} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

Voorbeeld 4

De lenzenformule luidt: $\frac{1}{b} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$.

Wil je f berekenen als de waarden van b en v gegeven zijn, dan kun je de formule als volgt omwerken.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v} = \frac{v}{bv} + \frac{b}{bv} = \frac{v+b}{bv}, \text{ dus } f = \frac{bv}{v+b}.$$

Algemeen

Bij het werken met formules komt het regelmatig voor dat je die handiger in een andere vorm kunt schrijven. Bijvoorbeeld bij het oplossen van een vergelijking. Of, als dat handiger is, bij het berekenen van de waarde van een variabele.

Oefeningen

1 Het volume van een bol is gegeven door: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$
Werk de formule om zodat je r kunt berekenen bij gegeven V.

2 Werk de lenzenformule om in een vorm zodat je direct b kunt berekenen als je f en v weet.

3 In een parallelschakeling van twee elektrische weerstanden geldt:
$\frac{1}{R_v} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.
Hierin is R_v de vervangingsweerstand van de weerstanden R_1 en R_2.
Werk deze formule om zodat je R_v direct kunt berekenen.

4 Gegeven is de betrekking $c = \frac{100\sqrt{R}}{m + \sqrt{R}}$.

a Druk m uit in c en R.
b Druk R uit in c en m.

5 Druk b uit in de overige grootheden: $\frac{c}{a-b} = \frac{d}{a-f}$

6 Gegeven is de betrekking: $P = \frac{M^2 \cdot H}{v(M+m) \cdot h}$
Druk m uit in de overige grootheden.

7 Het vermogen van een elektrisch apparaat bereken je met $P = U{\cdot}I$ (P in watt, U in volt en I in ampère).
In combinatie met de wet van Ohm $U = I{\cdot}R$ kun je bij een gegeven vermogen en weerstand de stroomsterkte berekenen die door het apparaat gaat. Geef een formule waarin I is uitgedrukt in P en R.

8 Een voorwerp op hoogte h heeft een zwaarte-energie gegeven door $E_z = m \cdot g \cdot h$. (m is de massa in kg, g de constante van de zwaartekracht in m/s^2 en h de hoogte in m). Als je het voorwerp loslaat, wordt de zwaarte-energie omgezet in bewegingsenergie: $E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ (onder verwaarlozing van de luchtweerstand). Daarmee kun je de snelheid berekenen waarmee het voorwerp op de grond komt.

a Werk beide formules om tot een formule waarin v is uitgedrukt in de overige grootheden.
b Hoe kun je aan het resultaat zien dat in vacuüm twee voorwerpen met ongelijke massa even snel op de grond terechtkomen als ze van dezelfde hoogte worden losgelaten?

1

Hoofdzaken

Je kunt **haakjes wegwerken** door de volgende regels toe te passen:

$A(B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ $\quad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

$A(B - C) = A \cdot B - A \cdot C$ $\quad (A - B) \cdot C = A \cdot C - B \cdot C$

En door twee keer bovenstaande regels toe te passen:

$(A + B)(C + D) = A \cdot C + A \cdot D + B \cdot C + B \cdot D$

$(A - B)(C + D) = A \cdot C + A \cdot D - B \cdot C - B \cdot D$

$(A + B)(C - D) = A \cdot C - A \cdot D + B \cdot C - B \cdot D$

$(A - B)(C - D) = A \cdot C - A \cdot D - B \cdot C + B \cdot D$

Hierin zijn A, B ,C en D getallen of formules met letters en getallen.

De vier **merkwaardige producten** zijn:

$(x + y)^2 = x^2 + 2\,x \cdot y + y^2$

$(x - y)^2 = x^2 - 2x \cdot y + y^2$

$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$

$(x + p)\ (x + q) = x^2 + (p+q) \cdot x + p \cdot q$

De eigenschappen: $A \cdot B + A \cdot C = A \cdot (B + C)$ en $A \cdot C + B \cdot C = (A + B) \cdot C$ kun je gebruiken om te **ontbinden in factoren**.
Hierin zijn A, B en C getallen of formules met letters en getallen.
Herken je een merkwaardig product, dan kun je dat direct gebruiken om te ontbinden.

Een vergelijking van de vorm $\boldsymbol{A \cdot B = 0}$ kun je splitsen in de twee vergelijkingen $A = 0$ of $B = 0$.

Een vergelijking van de vorm $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$ kun je herleiden tot de gedaante $A \cdot D = B \cdot C$. Controleer altijd of de gevonden oplossingen voldoen aan de oorspronkelijke vergelijking.

Vergelijkingen van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ kun je aanpakken met de **abc-formule**: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. De vorm $b^2 - 4ac$ heet de discriminant.

Als $b^2 - 4ac < 0$ heeft de vergelijking geen oplossing.

---

a^n betekent: $a \times a \times a \times \ldots \times a$ (n factoren a)
a is het **grondtal**, n is de **exponent**.
De rekenregels voor machten zijn:

1 $\quad a^m \times a^n = a^{m+n}$

2 $\quad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3 $\quad a^0 = 1$

4 $\quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

5 $\quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$

6 $\quad (ab)^n = a^n \times b^n$

7 $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Toets

1 Bereken met behulp van de merkwaardige producten:

a $(4x+7y)^2$

b $(r-3)(r+3)(r^2+9)$

c $(5+2p)(5-2p)(25-4p^2)$

d $(x+3)(x-5)$

e $(t^3-6)^2$

f $(a+2b-3c)^2$

2 Ontbind in zoveel mogelijk factoren:

a $x^2-15x+26$

b y^4--64y^2

c $1-14t+49t^2$

d $9a^7b+12a^6b^2+4a^5b^3$

e $s^2-4s-21$

f $t^2-9t^4+8t^3$

g p^4-25q^2

h $-2ac-bc+2ad+bd$

3 Schrijf de volgende breuken zo eenvoudig mogelijk:

a $\dfrac{x^2-xy}{y^2-xy}$

b $\dfrac{y^2-xy}{y^2+xy}$

c $\dfrac{(x-y)^2-x^2+y}{xy}$

d $\dfrac{4y^4-9x^2}{2y^2+3x}$

4 Bereken: $\dfrac{3\cdot 10^{-8}\cdot 4\cdot (10^{-2})^{\frac{1}{2}}}{6\cdot (10^{-4}\cdot 10^{2})^{-3}}$

5 Schrijf zo eenvoudig mogelijk als machten:

a $(a^3b^{-1}c^2)^{-1}\cdot(a^{-2}b^2c)^3$

b $\dfrac{(2a^{-3}b^{-2})\cdot(a^{-2}b)^{-1}}{(a^{-1}b)^{-2}}$

6 Schrijf zo eenvoudig mogelijk:

a $\dfrac{b^2\cdot\sqrt[5]{b^4}}{b^3\sqrt[5]{b^3}}$

b $\sqrt[3]{\dfrac{64a^{-18}b^2}{27(a^{-3}b^2)^{-8}}}$

7 Los op (kijk eerst goed wat een handige aanpak is):

a $x^2+5x-6=0$

b $3w+20=100-6w$

c $p^2-30p+125=0$

d $3r^2+2r-1=5-3r+2r^2$

8 Los op:

a $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}=0$

b $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3}=1$

9 Druk a uit in de andere variabelen: $\dfrac{c}{a-b}=\dfrac{d}{a-f}$