wis wijs

Fred Pach en Hans Wisbrun

Wiskunde als voorbereiding op de voortgezette studie

Derde druk

Noordhoff Uitgevers

Wiswijs

Wiswijs

Wiskunde als voorbereiding op de voortgezette studie

auteurs

Drs. A.J. Pach

Drs. J.F.M. Wisbrun

Derde druk

Noordhoff Uitgevers Groningen/Houten

Ontwerp binnenwerk en omslag: Studio Frank & Lisa, Groningen
Omslagillustratie: Getty Images
Opmaak: The DocWorkers, Almere

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Hoger Onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen, e-mail: info@noordhoff.nl

2 / 13

Deze uitgave is gedrukt op FSC-papier.

ISBN (ebook)978-90-01-84293-2
ISBN 978-90-01-78853-7
NUR 123

Voorwoord

Dit is een boek voor volwassenen.
Niet dat er één onvertogen woord in staat, maar bij het schrijven stond ons wel steeds een volwassen cursist voor ogen. Een cursist die het geheel, of voor een deel, van zelfstudie moet hebben. Een cursist die geen behoefte heeft aan overbodige franje. Die de essentiële zaken kort en duidelijk op een rijtje wil hebben, maar ook weer geen genoegen neemt met het openzetten van de trukendoos. Hij of zij wil wel weten waarom de wiskunde is zoals ze is. Maar dan zonder omhaal van woorden.
Voor die cursist is dit boek.

Het boek heeft een duidelijke structuur, met als vaste elementen:
- indeling in afgebakende blokken;
- drie blokken met de basisstof;
- een blok met appendices; in een compactere stijl, voor wie meer nodig heeft.

En per hoofdstuk:
- inleiding;
- expliciete opsomming van de noodzakelijke voorkennis, met verwijzing naar voorafgaande paragrafen;
- veel uitgewerkte voorbeelden;
- tussen de tekst verwijzingen naar opgaven en naar voorafgaande theorie;
- waarschuwingen (‘pas op’) voor veelgemaakte fouten;
- samenvattingen (wat moet je nu kennen en kunnen?);
- opgaven met, achterin het boek, van iedere opgave antwoord en separaat de volledige uitwerking;
- extra opgaven die integratie van het geleerde beogen; na de samenvatting wordt hiernaar verwezen.

Achterin staan:
- trefwoordenregister;
- symbolenregister.

Op de website www.wiswijs.noordhoff.nl zijn oefentoetsen te vinden bij elk hoofdstuk, met uitgebreide feedback.

Het boek is ontstaan vanuit een (mondelinge) opfriscursus wiskunde voor studenten aan de Open Universiteit. In de praktijk bleek dat ook mensen zonder veel voorkennis met het materiaal uit de voeten konden. Later gingen ook veel studenten die zich voorbereidden op een studie aan andere universiteiten het boek gebruiken (Universiteit van Amsterdam, Vrije Universiteit, Katholieke Universiteit Leuven, . . .). Wiswijs heeft zich sinds zijn ontstaan in 1990 meer dan voldoende bewezen.

Sindsdien zijn aanpassingen gedaan op grond van ons eigen voortschrijdend inzicht in de wiskunde en hoe deze kan worden geleerd.
Zo is het scala aan functies dat wordt behandeld, uitgebreid. Ook is er meer aandacht gekomen voor toepassingen van de wiskunde, vooral in hoofdstuk 9.
Een belangrijke aanvulling bij deze druk is de ondersteunende website www.wiswijs.noordhoff.nl. De daar aangeboden oefentoetsen zijn tot stand gekomen op basis van ervaringen van diverse docenten die met Wiswijs werken. Onze dank gaat hiervoor uit naar Eva Lobach, docent en onderzoeker Faculteit der Maatschappij- en gedragswetenschappen, afdeling Psychologie, Universiteit

van Amsterdam; Luc van Baest, docent Departement Methoden en Technieken van Onderzoek, Faculteit Sociale Wetenschappen, Universiteit van Tilburg; Bert Esmeijer, docent voorbereidingscursussen Wiskunde, Open Universiteit Nederland.

Wat in de eerste drie blokken wordt behandeld, is ongeveer de stof van de eerste drie klassen (de onderbouw) van het havo/vwo, maar dan beperkt tot de algebra/analyse-lijn. Geen meetkunde, geen goniometrie. De appendices gaan over enkele veelgevraagde onderwerpen die in het havo/vwo in de hogere klassen worden behandeld.

Zelf zien wij als voornaamste doelgroepen:

- mensen die zich voorbereiden op een studie aan een universiteit (vooral: sociale wetenschappen, bedrijfskunde, economie, informatica);
- studenten aan universiteiten die voor hun studie basiskennis van de wiskunde nodig hebben;
- studenten in het voortgezet algemeen volwassenenonderwijs (vavo);
- studenten economie in het (hoger) beroepsonderwijs;
- cursisten van bepaalde bedrijfsopleidingen.

Tot slot nog dit: er is geruime tijd geaarzeld over de verschillende mogelijke aanspreekvormen. ‘U’ is wat formeel, ‘je’ misschien te joviaal en ‘we’ (‘We voeren nu dit of dat in’) suggereert dat wiskunde alleen iets is dat ooit door geleerde mensen is bedacht en niet een activiteit van de cursist zelf. Uiteindelijk is voor ‘je’ gekozen, omdat wij onze eigen cursisten ook zo aanspreken én om te benadrukken dat wiskunde, in onze ogen, vooral iets is wat de cursist zelf maakt. Daarbij wensen we je veel succes.

Amsterdam, voorjaar 2010

Fred Pach & Hans Wisbrun

Inhoud

Blok 2

Eerstegraads

Blok 3

Tweedegraads en verder

Appendix D Kansberekening en combinatoriek

Studieaanwijzingen

De gebruikers van dit boek vormen een nogal heterogene groep. Er zitten mensen bij met veel voorkennis en mensen die ‘van niets weten’. Voor de eerste groep dient de inhoud van dit boek om hun wiskundekennis op te frissen, voor de tweede groep om zich in korte tijd enige basiskennis eigen te maken. Ieder maakt zo op zijn eigen wijze gebruik van dit boek.

Het belangrijkste teken in dit boek is ⇢ . Het is het verwijsteken. Het verwijst ofwel naar opgaven, ofwel naar voorkennis die op dat moment wenselijk wordt geacht. Afhankelijk van je wiskundevoorgeschiedenis kun je dat teken volgen of negeren.

De meeste voorkennis wordt in het boek zelf aangedragen. Een verwijzing daarnaar gaat dan ook altijd naar bepaalde paragrafen in het boek. Heb je het boek vanaf het allereerste begin hoofdstuk voor hoofdstuk bestudeerd, dan is terugbladeren meestal niet nodig. Hooguit zou je dat kunnen doen om je geheugen even op te frissen. Ben je echter ergens middenin het boek begonnen (bijvoorbeeld bij de Appendices) en kom je bij een begrip dat je niet meer kent, dan kun je - via dat verwijsteken - het beste even terugduiken.

Ook verwijstekens naar opgaven kun je al dan niet volgen. Zijn de theorie en de voorbeelden die vóór (en soms na) zo’n teken staan gesneden koek voor je, dan kun je het negeren. Heb je twijfels of je het wel echt in de vingers hebt, dan kun je het beste direct de opgave(n) waarnaar verwezen wordt maken en je antwoorden, achter in het boek, controleren. Zijn ze goed, dan ga je weer terug naar waar je gebleven was. Als je niet van veel bladeren houdt, kun je natuurlijk ook het maken van de opgaven tot na het bestuderen van de samenvatting bewaren. Dan doe je alles ineens.

Van belang is nog dat er direct na de samenvatting van een hoofdstuk verwezen wordt naar opgaven die een iets hogere moeilijkheidsgraad hebben. Kun je die aan, dan beheers je het hoofdstuk helemaal. Lukt het niet, ook geen ramp. Als je de uitwerkingen achterin dan maar begrijpt, dat is dan het minimum.

De opgaven bij elk hoofdstuk staan steeds aan het eind van dat hoofdstuk. Alle antwoorden staan bij elkaar achter in het boek, en ook de volledige uitwerkingen. De meeste mensen hebben iets van luiheid in zich. Daarom is het gedeelte met uitwerkingen zo verleidelijk. Maak er echter een verstandig gebruik van. Niet bij iedere hobbel tijdens het maken van de opgaven direct naar de uitwerkingen grijpen. Blijven worstelen en uiteindelijk je eigen antwoord met dat achter in het boek vergelijken. Klopt het, zoveel te beter. Klopt het niet, eerst nog maar eens proberen. Kijken waar je fouten zou kunnen hebben gemaakt. Pas in laatste instantie, als je het echt niet meer weet, naar de uitwerkingen. Die vormen alleen een soort vangnet. Van je fouten leer je, zoals bekend, het meest.

Overigens staat er in de uitwerkingen meestal maar één mogelijke (en uiteraard goede) oplossingsmethode. Als jij het juiste antwoord hebt, maar een andere oplossingsmethode, dan wil dat niet zeggen dat je het fout hebt gedaan. Raadpleeg in zo’n geval bij twijfel een deskundige, een docent bijvoorbeeld.

Weet je op een gegeven moment echt niet meer waar het over gaat in de tekst, probeer dan - als er geen verwijsteken staat - zelf een trefwoord of trefwoorden op te sporen daar waar je het spoor bijster bent geraakt. Via het trefwoordenregister (of via het symbolenregister) kun je weer op de juiste weg raken.

Als je denkt dat je een hoofdstuk beheerst, maak dan een bijbehorende toets op www.wiswijs.noordhoff.nl. Je antwoorden kun je online laten nakijken en je krijgt daarbij een score, uitleg bij de vragen die je niet goed had en een gedetailleerd studieadvies. Desgewenst kun je over hetzelfde hoofdstuk nog een nieuwe toets maken.

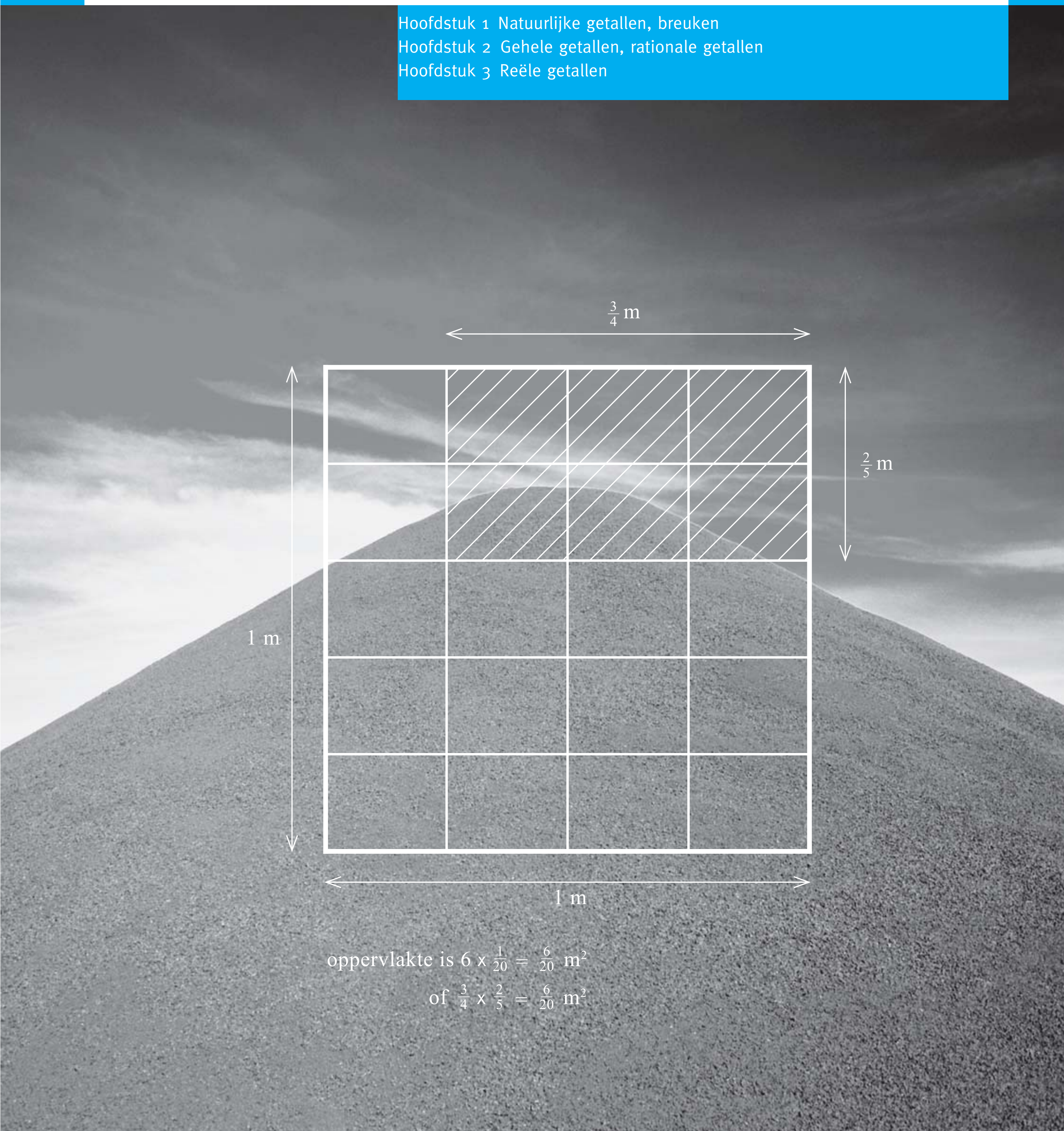
Rest ons nog de wijsheid uit te dragen dat wiskunde niet iets is wat je tot je neemt, maar iets wat je doet.

Fred Pach & Hans Wisbrun

Blok 1

Getallen

Hoofdstuk 1 Natuurlijke getallen, breuken
Hoofdstuk 2 Gehele getallen, rationale getallen
Hoofdstuk 3 Reële getallen



1 Natuurlijke getallen, breuken

1.0 Inleiding

Dit hoofdstuk begint in paragraaf 1.1 met het rekenen met de getallen 0, 1, 2, 3, enzovoort. Dat heb je op de lagere school ook geleerd, alleen wordt er nu wat meer structuur aangebracht en dat biedt houvast als het later over moeilijker zaken gaat.

In paragraaf 1.2 wordt het rekenen met breuken nog eens doorgenomen, om je geheugen op te frissen.

In paragraaf 1.3 komt aan de orde waarom in de wiskunde niet alleen met getallen, maar vaak ook met letters wordt gerekend.

Voorkennis
Voor dit hoofdstuk hoef je alleen een klein beetje te kunnen rekenen, meer niet.

1.1 Natuurlijke getallen

Een van je eerste ervaringen met wiskunde is vermoedelijk het tellen. De getallen waarmee je dingen kunt tellen worden de natuurlijke getallen genoemd. De afspraak is dat het getal 0 daar ook bij hoort. Dus de *natuurlijke getallen* zijn de getallen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, enzovoort.

natuurlijk getal

Het is vaak handig om een aantal losse dingen samen als een geheel op te vatten. Zo'n geheel wordt een *verzameling* genoemd.

verzameling

Zo kun je praten over de verzameling van de natuurlijke getallen, en omdat die zo vaak gebruikt wordt, heeft die verzameling een eigen, vast, symbool: $\mathbb{N}$ (uitspraak: als een gewone letter N, geschreven met een dubbele dwarsstreep).

$\mathbb{N}$

Je kunt een verzameling soms ook zo noteren dat nog te zien is welke dingen erin zitten: schrijf al die dingen achter elkaar op, met komma's ertussen, en zet het geheel tussen accolades.

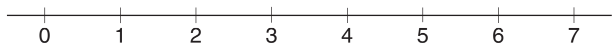
$\{\ldots, \ldots, \ldots\}$
$=$

Dus $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ \ldots\}$.
De drie puntjes betekenen enzovoort. Het symbool $=$ (uitspraak: 'is' of 'is gelijk aan') wordt bij verzamelingen net zo gebruikt als bij getallen.

Opgave 1

getallenlijn

Je kunt de natuurlijke getallen weergeven op de *getallenlijn*. Trek een rechte lijn, zet ergens een dwarsstreepje dat het getal 0 voorstelt en vervolgens op een bepaalde afstand, bijvoorbeeld 1 cm, een streepje dat het getal 1 voorstelt. Dan op vaste afstanden streepjes die de andere natuurlijke getallen voorstellen. Hoe groter een getal, des te meer het naar rechts ligt.



Zo ligt 5 rechts van 3, want 5 is groter dan 3. En 0 ligt links van 4, want 0 is kleiner dan 4.

Opgave 2

$>$
$<$

Voor de uitdrukking 'is groter dan' en 'is kleiner dan' worden de symbolen $>$ en $<$ gebruikt.

Voorbeelden

$5 > 3$ (uitspraak: 'vijf is groter dan drie')
$0 < 4$ (uitspraak: 'nul is kleiner dan vier')

Opmerking
Beide symbolen wijzen met de smalle kant (punt) naar het kleinste getal en met de brede kant (opening) naar het grootste. Als ezelsbruggetje, om ze uit elkaar te houden, kun je onthouden dat er van $<$ makkelijk een **K**, van '**K**leiner dan', te maken is.

$\neq$

Als je van twee getallen wilt aangeven dat ze niet aan elkaar gelijk zijn, gebruik je het symbool $\neq$.

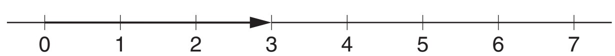
Voorbeeld

$5 \neq 3$ (uitspraak 'vijf is ongelijk aan drie')

Hierboven werd elk natuurlijk getal voorgesteld door een punt (in de figuur voor de duidelijkheid aangegeven door een dwarsstreepje) op de getallenlijn. Je kunt een getal ook voorstellen door een pijltje langs de getallenlijn dat begint bij 0 en eindigt bij het bewuste getal. Zo'n voorstelling suggereert een beweging: zoveel stappen naar rechts.

Voorbeeld

Het getal 3:



Voor de duidelijkheid teken je zo'n pijltje meestal iets boven de getallenlijn:

Optellen

optellen
som

Je kunt twee getallen bij elkaar *optellen*. Je krijgt dan de *som* van die getallen.

Voorbeeld

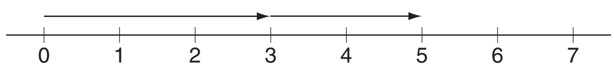
5 is de som van 3 en 2. In symbolen:
$3 + 2 = 5$ (uitspraak: ‘drie plus twee is vijf’)

term

De getallen die je bij elkaar optelt worden de *termen* van die optelling genoemd.

Van een optelling kun je een plaatje maken op de getallenlijn.

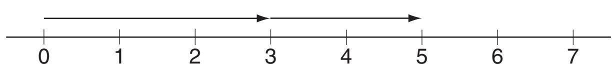
Bekijk bijvoorbeeld de optelling $3 + 2$.
De 3 stel je op de gebruikelijke manier voor door een pijltje dat in het punt 0 begint en in het punt 3 eindigt. De 2 zou een pijltje vanuit 0 naar rechts zijn met lengte 2.
Nu pak je dat laatste pijltje als het ware op en verplaats je het zó dat het ‘kop-staart’ komt te liggen met het pijltje dat de 3 voorstelt.
Het tweede pijltje eindigt nu bij het getal 5, de som van 3 en 2.



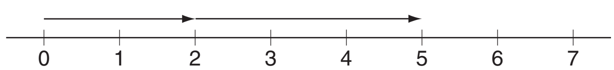
(Eerst 3 stappen naar rechts en daarna 2 stappen naar rechts is samen 5 stappen naar rechts.)

Met deze voorstelling is mooi te illustreren dat $3 + 2$ hetzelfde is als $2 + 3$, dus $3 + 2 = 2 + 3$.

$3 + 2$:



$2 + 3$:



Als je twee willekeurige (natuurlijke) getallen voorstelt door de letters a en b, dan geldt altijd (dat wil zeggen: welke getallen je ook voor a en b invult) dat:

Eigenschap
$a + b = b + a$

wisseleigenschap
commutatieve eigenschap

Deze eigenschap noemen we de *wisseleigenschap* van de optelling of, wat deftiger, de *commutatieve eigenschap*.

Soms moeten er meer dan twee getallen bij elkaar worden opgeteld, bijvoorbeeld $2 + 3 + 6$. Doorgaans gebeurt dat in de volgorde waarin de termen staan, dat wil zeggen van links naar rechts werkend. In het voorbeeld dus bij 2 eerst 3 optellen (tussensom 5) en vervolgens bij die tussensom weer 6

optellen, uitkomst 11.
$2 + 3 + 6 = 5 + 6 = 11$

Pas op

De hele uitdrukkingen links en rechts van een =-teken moeten gelijk zijn aan elkaar. Zo is hierboven $2 + 3 + 6$ hetzelfde als $5 + 6$.
Schrijf niet (als je moet aangeven hoe je $2 + 3 + 6$ moet uitrekenen):
$2 + 3 = 5 + 6 = 11$ (hoewel dat hardop voorgelezen met de juiste intonatie best duidelijk is). Immers $2 + 3$ is niet hetzelfde als $5 + 6$.

Afspraak

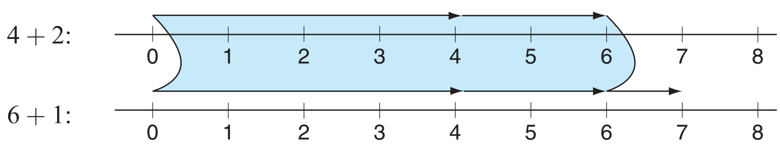
Als je bij berekeningen wilt aangeven dat er van de gebruikelijke volgorde moet worden afgeweken, gebruik je haakjes.

Voorbeeld

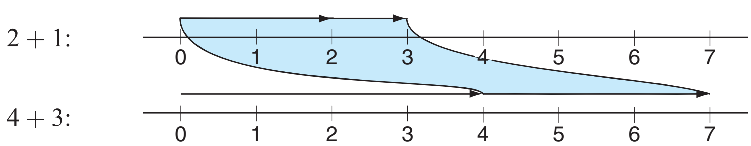
$4 + (2 + 1)$
Dit betekent: eerst 1 bij 2 optellen (tussensom 3) en vervolgens deze tussensom weer bij 4 optellen, uitkomst 7.

Hoewel afspraak is dat we van links naar rechts werken en de betekenis van $4 + 2 + 1$ dus ondubbelzinnig vastligt, kun je voor de duidelijkheid toch wel haakjes schrijven: $(4 + 2) + 1$.
Het tekeningetje hieronder illustreert dat $(4 + 2) + 1 = 4 + (2 + 1)$.

$(4 + 2) + 1$



$4 + (2 + 1)$



Als je willekeurige (natuurlijke) getallen voorstelt door de letters a, b en c, dan geldt algemeen:

Eigenschap

$(a + b) + c = a + (b + c)$

schakeleigenschap
associatieve eigenschap

Deze eigenschap noemen we de *schakeleigenschap* van de optelling, of ook wel de *associatieve eigenschap*.

Herhaald toepassen van de wissel- en schakeleigenschap heeft tot resultaat dat je bij een optelling van een aantal termen elke volgorde van optellen mag gebruiken. Dat dat mag, wist je natuurlijk al lang.

Voorbeeld

$$28 + 63 + 72 + 37 = (28 + 72) + (63 + 37) = 100 + 100 = 200$$

Opmerking

In bovenstaande ‘gezond-verstand-notatie’ zitten in feite nog wat stappen verstopt:

$$28 + 63 + 72 + 37 \underset{\boxed{\text{schakel-eigenschap}}}{=} 28 + (63 + 72) + 37 \underset{\boxed{\text{wissel-eigenschap}}}{=} 28 + (72 + 63) + 37 =$$

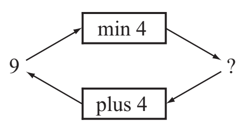
$$\underset{\boxed{\text{schakel-eigenschap}}}{=} (28 + 72) + (63 + 37) = \ldots$$

Opgave 3

Aftrekken

aftrekken
verschil

Als je 4 *aftrekt* van 9 krijg je 5. Het getal 5 heet het *verschil* van 9 en 4. In symbolen: $9 - 4 = 5$ (uitspraak: ‘negen min vier is vijf’).
Aftrekken is gekoppeld aan optellen: om $9 - 4$ uit te rekenen, kun je ook bedenken bij welk getal je 4 moet optellen om 9 te krijgen.



$9 - 4 = ?$

$? + 4 = 9$

Hier moet 5 staan, dus hier ook.

Opgave 4

Vermenigvuldigen

vermenigvuldigen
product

Je kunt twee natuurlijke getallen ook met elkaar *vermenigvuldigen*.
Je krijgt dan het *product* van die getallen.
Vermenigvuldigen is niets anders dan herhaald optellen. Zo is 5×4, het product van 5 en 4, hetzelfde als $\underbrace{4 + 4 + 4 + 4 + 4}_{\text{5 termen}}$.

factor

Dus 5×4 $(= 4 + 4 + 4 + 4 + 4) = 20$ (uitspraak: ‘vijfmaal vier is twintig’).
5 en 4 heten de *factoren* van het product.

Zo is ook $4 \times 1 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$.
Ook is $1 \times 4 = 4$, hoewel je daarbij moeilijk van herhaald optellen kunt spreken: er is maar één term 4.
En natuurlijk is $4 \times 0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$.
Bij 0×4 valt er helemaal niets meer op te tellen. We spreken af dat

Afspraken

$0 \times 4 = 0$
en ook
$0 \times 0 = 0$

Voor de vermenigvuldiging van (natuurlijke) getallen geldt weer de wisseleigenschap:

Voorbeeld

$4 \times 5 = 5 \times 4$

Opmerking
De hierboven genoemde speciale gevallen 1×4 $(= 4 \times 1)$ en 0×4 $(= 4 \times 0)$ zijn ook te begrijpen met deze eigenschap.
Maar $0 \times 0 = 0$ niet, dat is echt een aparte afspraak.

Ook geldt de schakeleigenschap:

Voorbeeld

$(3 \times 2) \times 4 = 3 \times (2 \times 4)$, want
$6 \times 4 = 3 \times 8$

Algemeen geldt als a, b en c willekeurige (natuurlijke) getallen zijn:

Eigenschappen

$a \times b = b \times a$	(wisseleigenschap)
$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$	(schakeleigenschap)

Afspraak
Omdat de letter x en het teken van vermenigvuldiging $\times$ nogal op elkaar lijken wordt vaak een $\cdot$ gebruikt (in computer-kringen ook vaak een $*$) om een vermenigvuldiging aan te geven. Zelfs wordt, zolang er van verwarring geen sprake kan zijn, het vermenigvuldigingsteken vaak weggelaten.

$a \cdot b$
ab

Dus in plaats van $a \times b$ kun je ook $a \cdot b$ of ab tegenkomen.
Daarmee worden de eigenschappen van de vermenigvuldiging:
$ab = ba$
$(ab)c = a(bc)$

→ **Opgave 5**

Delen

delen
quotiënt
deeltal
deler

Als je 15 *deelt* door 3 krijg je 5. Die uitkomst 5 heet het *quotiënt* van 15 en 3. In symbolen: $15 : 3 = 5$ (uitspraak: ‘vijftien gedeeld door drie is vijf’). Bij de deling $15 : 3$ heet 15 het *deeltal* en 3 de *deler*.

Delen is gekoppeld aan vermenigvuldigen. Om $15 : 3$ uit te rekenen, kun je ook bedenken welk getal je 3 maal moet nemen om 15 te krijgen.

$15 : 3 = ?$

$3 \times ? = 15$

Hier moet 5 staan, dus hier ook.

Pas op

Delen door 0 kan niet. Want bijvoorbeeld $15 : 0$ zou een getal moeten zijn waarvan het product met 0 weer 15 is. Maar vermenigvuldigen met 0 levert altijd 0 op, nooit 15. Zo bekeken zou bij $0 : 0$ iedere uitkomst goed zijn. Ook dat is niet erg bruikbaar.

Opgave 6

Opmerking

Hierboven zagen we dat $3 \times 5 = 15$ en $15 : 3 = 5$. Deze twee zijn te combineren tot $(3 \times 5) : 3 = 5$. Met andere woorden: als je eerst met 3 vermenigvuldigt en daarna door 3 deelt, ben je weer 'terug bij af'.
Dat geldt ook wanneer je eerst (haakjes!) deelt en dan vermenigvuldigt: $3 \times (15 : 3) = 15$.

Combinaties van bewerkingen

Bekijk de uitdrukking $3 + 2 \times 5$. Wanneer je de bewerkingen van links naar rechts zou uitvoeren, zou je krijgen: $3 + 2 \times 5 = 5 \times 5 = 25$. Maar dat is niet de bedoeling. Met $3 + 2 \times 5$ wordt bedoeld $3 + 10 = 13$. Dit is een historisch gegroeide afspraak. Moderne rekenmachines en computerprogramma's werken daar ook mee. Typ maar eens in op je rekenmachine!

Afspraak

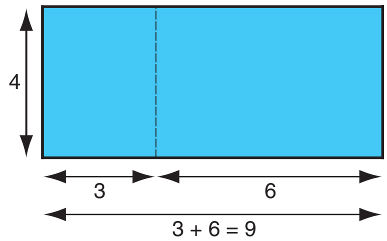
Vermenigvuldigen en delen hebben voorrang boven optellen en aftrekken.
Vermenigvuldigen en delen zijn onderling gelijkwaardig en optellen en aftrekken ook.
Gelijkwaardige bewerkingen worden van links naar rechts uitgevoerd.
(Meer over voorrangsregels in hoofdstuk 2.)

Met haakjes kun je de gewone volgorde wijzigen.

Voorbeeld

$3 + 2 \times 5 = 13$ (vermenigvuldiging gaat voor), maar $(3 + 2) \times 5 = 25$ (haakjes geven optellen voorrang)
$20 : 5 \times 2 = 8$ (eerst delen), maar $20 : (5 \times 2) = 2$
$8 - 2 + 3 = 9$ (eerst aftrekken), maar $8 - (2 + 3) = 3$
Dus: $8 - 2 + 3 = 9$
En: $8 - (2 + 3) = 3$

Bekijk nu de uitdrukking $4 \times (3 + 6)$. Dit is een combinatie van optellen en vermenigvuldigen. Wat tussen haakjes staat moet eerst, dus
$4 \times (3 + 6) = 4 \times 9 = 36$.
Je kunt deze uitdrukking opvatten als de oppervlakte van een rechthoek (oppervlakte rechthoek = lengte maal breedte) met lengte 4 m en breedte $3 + 6 = 9$ m. Zie de figuur hierna.



Je kunt ook zeggen dat de oppervlakte van de rechthoek gelijk is aan de som van de oppervlakten van de twee kleinere rechthoeken in de figuur (van 4 bij 3, respectievelijk 4 bij 6).

Dus: $\underbrace{4 \times (3+6)}_{\text{hele rechthoek}} = \underbrace{(4 \times 3)}_{\text{linker rechthoek}} + \underbrace{(4 \times 6)}_{\text{rechter rechthoek}} = 4 \times 3 + 4 \times 6$

Bij de laatste stap konden we de haakjes weglaten op grond van de voorrangsregels. Ga na dat er zo inderdaad weer 36 uit komt.

Met andere (natuurlijke) getallen gaat het net zo, dus algemeen:

$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot b + a \cdot c$

verdeeleigenschap
distributieve eigenschap

Dit wordt de *verdeeleigenschap* van vermenigvuldigen ten opzichte van optellen genoemd, of ook wel de *distributieve eigenschap*. Om hem makkelijker te onthouden kun je boogjes zetten:

Eigenschap

$a(b+c) = ab + ac$

Met de wisseleigenschap kun je nu beredeneren dat ook bijvoorbeeld

$(2+5) \times 3 = (2 \times 3) + (5 \times 3) = 2 \times 3 + 5 \times 3$

De verdeeleigenschap geldt ook voor vermenigvuldigen ten opzichte van aftrekken.

Voorbeeld

$4 \times (9-6) = (4 \times 9) - (4 \times 6) = 4 \times 9 - 4 \times 6$

Of algemeen:

$a \cdot (b-c) = (a \cdot b) - (a \cdot c) = a \cdot b - a \cdot c$

Korter, met boogjes:

Eigenschap

$a(b-c) = ab - ac$

Opmerking

De verdeeleigenschap kun je vanwege het =-teken ook ‘van rechts naar links lezen’. Je kunt $ab + ac$ of $ab - ac$ dus ook vervangen door $a(b+c)$, respectievelijk $a(b-c)$. De verdeeleigenschap zegt dat je in voorkomende gevallen mag kiezen hoe je iets uitrekent. De ene keer is het handig de eigenschap van links naar rechts te gebruiken, een andere keer juist andersom.

Voorbeeld

Om 8×41 uit te rekenen, doe je in gedachten waarschijnlijk zoiets:

$8 \times 41 = 8 \times (40 + 1) \underset{\uparrow}{=} 8 \times 40 + 8 \times 1 = 320 + 8 = 328$

verdeeleigenschap van links naar rechts

Voorbeeld

Om $13 \times 73 + 13 \times 27$ uit te rekenen kun je natuurlijk eerst apart 13×73 en 13×27 uitrekenen en dat bij elkaar optellen, maar handiger is:

$13 \times 73 + 13 \times 27 \underset{\uparrow}{=} 13 \times (73 + 27) = 13 \times 100 = 1300$

verdeeleigenschap van rechts naar links

Opgave 7 en 8

Opmerking

Hiervoor is al afgesproken dat, zolang er geen verwarring ontstaat, het vermenigvuldigingsteken weggelaten mag worden. Dat geldt als minstens een van de factoren een letter is, maar ook als minstens een van de factoren tussen haakjes staat. Dus in plaats van $4 \times (3 + 6)$ mag je ook $4(3 + 6)$ schrijven.

Ook met delen in plaats van vermenigvuldigen geldt de verdeeleigenschap.

Voorbeeld

$(40 + 100) : 5$ kun je uitrekenen als $140 : 5 = 28$, maar ook als $40 : 5 + 100 : 5 = 8 + 20 = 28$.

Algemeen:

Eigenschappen

$(a + b) : c = a : c + b : c$

$(a - b) : c = a : c - b : c$

Opgave 9

Pas op

Je kunt bij deze eigenschappen deeltal en deler niet verwisselen.

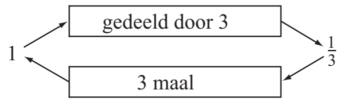
Zo is $36 : (2 + 4)$ niet hetzelfde als $36 : 2 + 36 : 4$.

1.2 Breuken

Als je het natuurlijke getal 15 deelt door het natuurlijke getal 3, krijg je 5; de uitkomst is weer een natuurlijk getal. Bij de meeste delingen van natuurlijke getallen lukt dat niet.

gebroken getal

De deling $1 : 3$ levert geen natuurlijk getal op, maar een *gebroken getal*, namelijk $1 : 3 = \frac{1}{3}$. Voor dit getal $\frac{1}{3}$ geldt dat $3 \times \frac{1}{3} = 1$.



$1 : 3 = \frac{1}{3}$, want

$3 \times \frac{1}{3} = 1$

Bekijk nu de deling 25 : 3. De uitkomst is meer dan 8, want $3 \times 8 = 24$, en minder dan 9, want $3 \times 9 = 27$.
Er komt weer een gebroken getal uit, namelijk $\frac{25}{3}$ (dat is 25 keer $\frac{1}{3}$), dat hetzelfde is als $8\frac{1}{3}$ (dat is $8 + \frac{1}{3}$).

Opmerking
Dit is weer de verdeeleigenschap:
$\frac{25}{3} = 25 : 3 = (24 + 1) : 3 = 24 : 3 + 1 : 3 = 8 + \frac{1}{3} = 8\frac{1}{3}$.

helen uit de breuk halen

Het schrijven van $\frac{25}{3}$ als $8\frac{1}{3}$ heet *helen uit de breuk halen*.

$25 : 3 = \frac{25}{3}$, want

$3 \times \frac{25}{3} = 25$

Opgave 10

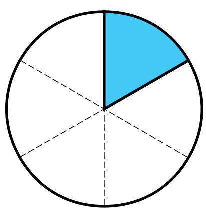
Op deze manier is elke deling van natuurlijke getallen uit te voeren. Naast de natuurlijke getallen krijg je zo de gebroken getallen.

Voorbeelden

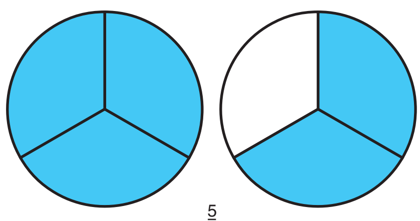
$1 : 8 = \frac{1}{8}$; $14 : 8 = \frac{14}{8}$ of $1\frac{6}{8}$ (uitspraak: ‘één achtste’, ‘veertien achtste’, ‘één zes achtste’)

breuk
noemer
teller

Vormen als $\frac{1}{6}$ en $\frac{5}{3}$ heten *breuken*. Het getal onder de (breuk-)streep heet de *noemer* (hoe groot zijn de stukken) en het getal boven de streep heet de *teller* (hoeveel van die stukken).



$\frac{1}{6}$



$\frac{5}{3}$

De waarde van een breuk is soms een gebroken getal ($\frac{1}{6}$), maar soms ook niet ($\frac{15}{5} = 3$).

Pas op
Wen je aan om breuken met een horizontale streep te schrijven en niet met een schuine: $1\frac{2}{3}$ kan alleen $1 + \frac{2}{3}$ betekenen, maar 1 2/3 kan gemakkelijk als $\frac{12}{3}$ gelezen worden.

Opmerking
De breukstreep zoals in $\frac{25}{3}$ wordt ook vaak gebruikt in plaats van het deelteken (:). Dan zie je geen verschil meer tussen de deling $\frac{25}{3}$ en het (gebroken) getal $\frac{25}{3}$.
Deeltal wordt dan teller genoemd en deler wordt noemer genoemd.
Dit scheelt soms wat haakjes. Zo is $(13+8):(3+4)$ te schrijven als $\frac{13+8}{3+4}$.

Met breukstrepen ziet de verdeeleigenschap er zo uit:

Eigenschappen

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$
$$\frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$$

Opgave 11

Vereenvoudigen

Als je een getal door 8 moet delen, kun je net zo goed eerst door 2 delen en dan nog door 4 delen. Dus $14:8=(14:2):4=7:4$.
Met breuken wordt dit $\frac{14}{8}=\frac{7}{4}$. Je ziet dat zowel teller als noemer door 2 zijn gedeeld.
Zo geldt ook: $\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$ (want $15:12=(15:3):4$). Teller en noemer zijn allebei door 3 gedeeld.
Blijkbaar verandert de waarde van een breuk niet als je de teller en noemer door hetzelfde getal deelt. Zo kun je een breuk *vereenvoudigen*.

vereenvoudigen

Voorbeeld

$\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$ (teller en noemer delen door 6)

Om duidelijker te laten zien wat er gebeurt bij de vereenvoudiging van $\frac{18}{12}$ kun je ook eerst teller en noemer als product schrijven. Door 6 delen komt dan neer op het *wegstrepen* van de factor 6.

wegstrepen

Dus: $\frac{18}{12}=\frac{\overset{1}{\cancel{6}}\times 3}{\underset{1}{\cancel{6}}\times 2}=\frac{3}{2}$

Voorbeeld

$$\frac{72}{40}=\frac{\overset{1}{\cancel{8}}\times 9}{\underset{1}{\cancel{8}}\times 5}=\frac{9}{5}$$

Als je niet direct ziet dat 72 en 40 door 8 deelbaar zijn, dan kun je

bijvoorbeeld eerst door 2 delen: $\frac{72}{40}=\frac{\overset{1}{\cancel{2}}\times 36}{\underset{1}{\cancel{2}}\times 20}=\frac{36}{20}$

Maar dit kan nog eenvoudiger gemaakt worden: $\frac{36}{20}=\frac{\overset{1}{\cancel{4}}\times 9}{\underset{1}{\cancel{4}}\times 5}=\frac{9}{5}$

Pas op

Wegstrepen betekent niet dat, zodra je ergens hetzelfde in teller en noemer ziet staan, je dat zonder meer kunt weghalen.
Dat het volgende fout is zullen de meesten nog wel inzien:

$$\frac{2\cancel{2}}{3\cancel{2}} = \frac{2}{3}$$

Maar ook het volgende is fout: $\frac{\overset{1}{\cancel{2}} + 4}{\underset{1}{\cancel{2}}} = \frac{5}{1} = 5$

(Reken maar eens uit zonder vereenvoudigen.) Correct wegstrepen wil in dit geval zeggen: teller en noemer delen door 2. En als je hier de teller $(2 + 4)$ door 2 deelt, moet je zowel de 2 als de 4 door 2 delen. Als je een som deelt, móet je alle termen delen. Wel goed is dus:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{2}} + \overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = \frac{3}{1} = 3$$ (verdeeleigenschap voor delen) ⇢ § 1.1.

Streep dus niet al te wild weg. Besef dat wegstrepen in wezen betekent: door hetzelfde getal delen.

Je kunt ook andersom werken. Omdat je $\frac{80}{100}$ kunt vereenvoudigen tot $\frac{4}{5}$, geldt ook dat $\frac{4}{5} = \frac{80}{100}$. Teller en noemer zijn met hetzelfde getal (20) vermenigvuldigd. Kennelijk verandert de waarde van een breuk niet als je teller en noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigt.

⇢ **Opgave 12**

Breuken vergelijken

gelijknamig

Het is duidelijk dat $\frac{5}{17} < \frac{6}{17}$, maar of $\frac{4}{7}$ groter of kleiner is dan $\frac{3}{5}$ kun je niet zomaar zien. Daarvoor moet je de breuken *gelijknamig* (met dezelfde noemer) maken: $\frac{4}{7} = \frac{20}{35}$ (teller en noemer maal 5) en $\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$ (teller en noemer maal 7). Nu is duidelijk dat $\frac{4}{7} < \frac{3}{5}$.
De nieuwe noemer moet een veelvoud zijn van beide oude noemers.
Dat hoeft niet altijd hun product te zijn.

Voorbeeld

k.g.v.

Wat is groter, $\frac{5}{6}$ of $\frac{7}{9}$? $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$ en $\frac{7}{9} = \frac{14}{18}$, dus $\frac{5}{6} > \frac{7}{9}$.
18 noemen we het *k.g.v.* (kleinste gemene veelvoud; gemeen betekent gemeenschappelijk) van 6 en 9.

⇢ **Opgave 13**

Breuken optellen en aftrekken

Gelijknamige breuken kun je direct optellen en aftrekken: noemer blijft hetzelfde, tellers optellen of aftrekken.

Voorbeelden

$\frac{1}{6} + \frac{4}{6} = \frac{5}{6}$

$\frac{7}{10} - \frac{5}{10} = \frac{2}{10} \left(= \frac{1}{5}\right)$

Opmerking
Wanneer we de breuken als delingen zien, is dit niets anders dan de verdeeleigenschap, toegepast van rechts naar links:
$\frac{1}{6}+\frac{4}{6}=(1:6)+(4:6)=(1+4):6=5:6=\frac{5}{6}$

Ongelijknamige breuken moet je eerst gelijknamig maken voordat je ze optelt of aftrekt.

Voorbeelden

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$

$\frac{5}{7}-\frac{1}{3}=\frac{15}{21}-\frac{7}{21}=\frac{8}{21}$

$\frac{3}{8}+\frac{5}{12}=\frac{9}{24}+\frac{10}{24}=\frac{19}{24}$

Als er helen voor de breuk staan kun je die apart optellen of aftrekken. Dat berust op de wissel- en schakeleigenschap (die gelden ook voor breuken).

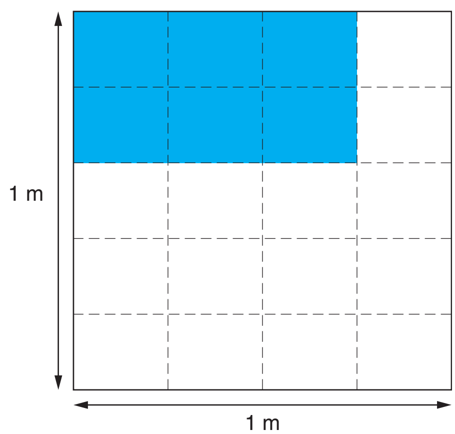
Voorbeelden

$9\frac{2}{5}+2\frac{4}{5}=9+2+\frac{2}{5}+\frac{4}{5}=11+\frac{6}{5}=11+1\frac{1}{5}=12\frac{1}{5}$

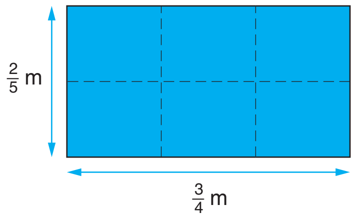
$9\frac{2}{5}-2\frac{4}{5}=9-2+\frac{2}{5}-\frac{4}{5}=7-\frac{2}{5}=6\frac{3}{5}$

Opgave 14

Breuken vermenigvuldigen



Dit vierkant van 1 bij 1 meter heeft als oppervlakte $1 \times 1 = 1$ m^2. Het is verdeeld in $4 \times 5 = 20$ even grote stukjes, dus elk stukje is $\frac{1}{20}$ m^2. We knippen hier een rechthoek uit van $3 \times 2 = 6$ stukjes.



De oppervlakte hiervan is $6 \times \frac{1}{20} = \frac{6}{20}$ m^2 (of $\frac{3}{10}$ m^2). Maar je kunt ook zeggen: de zijden van de uitgeknipte rechthoek zijn $\frac{3}{4}$ m en $\frac{2}{5}$ m, dus de oppervlakte is $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$ m^2.
Conclusie: $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$.
Dus om breuken te vermenigvuldigen kun je de tellers vermenigvuldigen en de noemers vermenigvuldigen. Zorg wel eerst dat er geen helen meer voor staan.

Voorbeelden

$\frac{4}{9} \times \frac{7}{5} = \frac{28}{45}$

$3\frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{10}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{30}{15} = 2$

Algemeen geldt:

Eigenschappen

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Het getal 5 kun je schrijven als $\frac{5}{1}$. De vermenigvuldiging $5 \times \frac{3}{7}$ kun je dus lezen als $\frac{5}{1} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$. Dus alleen de teller van de breuk $\frac{3}{7}$ wordt met 5 vermenigvuldigd.

Voorbeeld

$5\frac{3}{4} \times 7 = \frac{23}{4} \times \frac{7}{1} = \frac{161}{4} (= 40\frac{1}{4})$
Maar je kunt hier ook de verdeeleigenschap gebruiken
$5\frac{3}{4} \times 7 = (5 + \frac{3}{4}) \times 7 = 5 \times 7 + \frac{3}{4} \times 7 = 35 + \frac{21}{4} = 35 + 5\frac{1}{4} = 40\frac{1}{4}$

Dit zijn speciale gevallen van de eigenschap voor het vermenigvuldigen van breuken. Als een breuk met een natuurlijk getal vermenigvuldigd wordt, wordt alleen de teller met dat getal vermenigvuldigd, de noemer niet (die wordt met 1 vermenigvuldigd).

Opgave 15

Deze regel geldt ook andersom. Bijvoorbeeld:

$$\frac{7 \times 12}{3} = 7 \times \frac{12}{3} = 7 \times 4 = 28$$

omgekeerde

Als je van een breuk teller en noemer verwisselt, krijg je het *omgekeerde* van die breuk: $\frac{5}{12}$ en $\frac{12}{5}$ zijn elkaars omgekeerde, $7\ (= \frac{7}{1})$ en $\frac{1}{7}$ ook.
Als je een breuk vermenigvuldigt met zijn omgekeerde, is de uitkomst altijd 1.

Voorbeeld

$\frac{7}{4} \times \frac{4}{7} = \frac{7 \times 4}{4 \times 7} = 1$

Breuken delen

80 kg rijst moet verpakt worden in balen van 5 kg. Hoeveel balen worden dat? $80 : 5 = 16$ balen (want $5 \times 16 = 80$).
6 kg drop moet verpakt worden in zakjes van $\frac{1}{8}$ kg. Hoeveel zakjes worden dat? Uit 1 kg haal je 8 zakjes, dus uit 6 kg haal je $6 \times 8 = 48$ zakjes. Net als boven kun je dit ook schrijven als $6 : \frac{1}{8}$. Blijkbaar is $6 : \frac{1}{8}$ hetzelfde als 6×8 $(= 6 \times \frac{8}{1})$.
Als die drop nu in zakjes van $\frac{3}{8}$ kg verpakt moeten worden? De zakjes zijn nu drie maal zo groot, dus zullen er drie keer zo weinig zakjes gevuld worden.

Dus $6 : \frac{3}{8} = \dfrac{6 \times 8}{3} = 6 \times \frac{8}{3}$

Altijd geldt: delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk. In formule:

Eigenschap

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{ad}{bc}$$

Voorbeeld

$5\frac{1}{2} : 3\frac{3}{4} = \frac{11}{2} : \frac{15}{4} = \frac{11}{2} \times \frac{4}{15} = \frac{44}{30} \left(= \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}\right)$

Opgave 16 en 17

Decimale breuken

Breuken waarvan de noemer 10, 100, 1000, enzovoort is, worden vaak met een komma geschreven:

Voorbeelden

$\frac{7}{10} = 0{,}7$; $2\frac{43}{100}$ (of $\frac{243}{100}$) $= 2{,}43$; $\frac{14}{10\,000} = 0{,}0014$

decimale breuk
decimaal

We noemen dit *decimale breuken*. De cijfers na de komma heten *decimalen*: 0,0014 heeft vier decimalen.

Je kunt ook met decimale breuken rekenen:

Voorbeelden

$5{,}73 - 1{,}5\ (= 5{,}73 - 1{,}50) = 4{,}23$
$0{,}03 \times 0{,}7 = 0{,}021$ (want $\frac{3}{100} \times \frac{7}{10} = \frac{21}{1000}$)
$0{,}36 : 0{,}9 = 0{,}4$ (want $\frac{36}{100} : \frac{9}{10} = \frac{36}{100} \times \frac{10}{9} = \frac{4}{10}$)
$0{,}2 > 0{,}19$ (want $0{,}2 = 0{,}20$)

Opgave 18

Van een decimale breuk kun je weer een gewone breuk maken, die soms nog vereenvoudigd kan worden.

Voorbeelden

$0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

$0{,}008 = \frac{8}{1000} = \frac{1}{125}$

Opgave 19

benadering in ... decimalen nauwkeurig
afronden
$\approx$

Een gewone breuk kun je met een staartdeling of met een rekenmachine omwerken tot een decimale breuk, maar meestal komt het niet precies uit en krijg je alleen een benadering. Zo kan $\frac{3}{7}$ (= 3 : 7) op een rekenmachine 0,428 571 4 worden. Dat is niet precies hetzelfde als $\frac{3}{7}$, maar een *benadering in 7 decimalen nauwkeurig*. Er is dan *afgerond* op 7 decimalen.
In symbolen: $\frac{3}{7} \approx 0{,}428\,571\,4$ (uitspraak: '$\frac{3}{7}$ is ongeveer gelijk aan 0,428 571 4' of '$\frac{3}{7}$ is bij benadering gelijk aan 0,428 571 4').
Je kunt $\frac{3}{7}$ ook in 5 decimalen nauwkeurig benaderen: $\frac{3}{7} \approx 0{,}42857$; of in 3 decimalen: $\frac{3}{7} \approx 0{,}429$. (Let op het afronden: $\frac{3}{7}$ zit tussen 0,428 en 0,429, maar dichter bij 0,429.)

Voorbeelden

$\frac{5}{16} = 0{,}3125$ (precies)

$\frac{2}{3} \approx 0{,}67$ (benadering in twee decimalen; als je doorgaat krijg je 0,66666. . ., de 6 herhaalt zich oneindig vaak; 0,66666. . . wordt ook geschreven als $0{,}\cancel{6}$)

$0{,}\cancel{6}$

$\frac{5}{27} \approx 0{,}1852$ (benadering in vier decimalen; als je doorgaat krijg je 0,185 185 185 . . ., de cijferreeks 185 herhaalt zich oneindig vaak; notatie: $0{,}\cancel{1}8\cancel{5}$)

$0{,}\cancel{1}8\cancel{5}$

Zoals je gemerkt zult hebben, wordt op de rekenmachine in decimale breuken een punt gebruikt in plaats van een komma. Als je zelf decimale breuken invoert, moet je ook de toets met een punt erop gebruiken.
Op het scherm van een rekenmachine is slechts ruimte voor een beperkt aantal cijfers (bijvoorbeeld tien). Dat betekent dat wat je afleest soms al een benadering is.

Opgave 20 en 21

Procenten

%
procent

1% (uitspraak: 'één *procent*') van iets betekent 1 honderdste deel van iets, dus 0,01 maal iets. Dus:

Voorbeelden

$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$; $25\% = 25 \times \frac{1}{100} = \frac{25}{100} = 0{,}25$; $100\% = 1$
$1{,}5\% = 0{,}015$
20% van $65 = 0{,}20 \times 65 = 13$

percentage

Wanneer iets wordt uitgedrukt in procent, spreekt men van een *percentage*. Let erop dat altijd duidelijk moet zijn waarván iets een percentage is.

‰
promille

Soms wordt ook gebruik gemaakt van ‰ (uitspraak: ‘*promille*’), dat betekent duizendste deel.

Voorbeelden

1‰ $= \frac{1}{1000} = 0{,}001$ (dus 1‰ $= 0{,}1\%$)

3‰ $= 3 \times \frac{1}{1000} = \frac{3}{1000} = 0{,}003$

4‰ van $2500 = 0{,}004 \times 2500 = 10$

Opgave 22

Verhoudingen

verhouding

Van een bepaald soort jam zijn twee verpakkingen te koop: een pot van 450 gram en een pot van 600 gram. We zeggen dan dat de *verhouding* tussen de gewichten 3 : 4 is (uitspraak: ‘3 staat tot 4’). Dat betekent dat als je de gewichten op elkaar deelt (450 : 600), de uitkomst hetzelfde is als van de deling 3 : 4, namelijk $\frac{3}{4}$.

evenredig

Als de verhouding tussen de prijzen ook 3 : 4 is (bijvoorbeeld 1,80 euro voor de kleine pot en 2,40 euro voor de grote), dan zegt men dat de prijzen *evenredig* zijn met de gewichten.

In plaats van 3 : 4 zou je de verhouding ook kunnen aangeven met 6 : 8 of 450 : 600 of 1,5 : 2, maar gebruikelijk is om zo klein mogelijke gehele getallen te gebruiken. Dit komt overeen met het vereenvoudigen van breuken.

Als Eva 40 is en haar zoon 8, dan is de verhouding tussen hun leeftijden 5 : 1, want $40 : 8 = 5 : 1 = \frac{5}{1} = 5$. Merk op dat bij een verhouding altijd beide getallen vermeld worden, de 1 wordt dus niet weggelaten.

We kunnen ook praten over de verhouding tussen meer dan twee getallen. Als iemand per week 5 uur sport, 10 uur aan het huishouden besteedt en 30 uur werkt, dan is de verhouding 1 : 2 : 6. Hiermee worden verschillende verhoudingen samengevat: $5 : 10 = 1 : 2$ en $5 : 30 = 1 : 6$, maar ook $10 : 30 = 2 : 6$ $(= 1 : 3)$.

Voorbeeld

Vier boeven verdelen een buit van 80 000 euro in de verhouding 1 : 2 : 3 : 4. Dan krijgen ze 8 000 euro, 16 000 euro, 24 000 euro en 32 000 euro. Reken maar na dat de verhoudingen zo precies kloppen. Om deze bedragen snel te vinden deel je eerst het totaal door $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

omgekeerd evenredig

De verhouding tussen 5 en 2 is het omgekeerde van de verhouding tussen 8 en 20 (want $\frac{5}{2}$ en $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ zijn elkaars omgekeerde). Men zegt dan dat 5 en 2 *omgekeerd evenredig* zijn met 8 en 20.

1.3 Rekenen met letters

variabele

substitueren

In het voorgaande werden getallen soms door letters voorgesteld. Zo'n letter houdt als het ware de plaats in een formule gereserveerd waar nog een getal moet worden ingevuld. We noemen zo'n letter wel een *variabele* of veranderlijke. Je mag in een formule bij verschillende gelegenheden een variabele door verschillende getallen vervangen (*substitueren*), maar als eenzelfde letter meer dan één keer in de formule voorkomt, dan moet daarvoor wel op alle plaatsen hetzelfde getal worden ingevuld.

Voorbeeld

Als je in $xy + 3x$ de x door 7 substitueert en de y door 5, dan krijg je $7 \times 5 + 3 \times 7 = 56$. En als je x door 0 substitueert en y door 8 krijg je $0 \times 8 + 3 \times 0$. Nooit krijg je bijvoorbeeld $4 \times 5 + 3 \times 7$ (want dan heb je voor de x op de eerste plaats 4 ingevuld en op de tweede 7). Wel mag je voor verschillende letters hetzelfde getal invullen, bijvoorbeeld voor x en y allebei 4, dus $4 \times 4 + 3 \times 4 = 28$.

Opmerking
Zoals je al gezien hebt, moet je bij het substitueren soms wat maaltekens ($\cdot$ of $\times$) toevoegen: xy betekent uitsluitend x maal y, maar 75 is iets heel anders dan 7×5 $(= 35)$.

Opgave 23

We gebruiken meestal letters om een plaats aan te geven waar nog iets moet worden ingevuld, maar het kan ook heel goed met stippeltjes, hokjes, vraagtekens, woorden en dergelijke.

Er zijn drie verschillende situaties waarin het handig is letters of iets dergelijks te gebruiken:

- Om een eigenschap of regel te beschrijven die voor alle getallen geldt.

Voorbeelden

$a + b = b + a$ (of: $\square + \triangle = \triangle + \square$)
$a + b - b = a$
$\dfrac{ab}{b} = a \ (b \neq 0)$
Wat je ook voor a en b invult, het klopt altijd.

- Om een vast verband tussen verschillende grootheden te beschrijven.

Voorbeelden

$O = l \times b$
(oppervlakte rechthoek = lengte maal breedte)

$W = p_v - p_i$
met W = winst; p_v = verkoopsprijs; p_i = inkoopsprijs

- Om een getal waar je naar op zoek bent, aan te duiden zolang je het nog niet gevonden hebt.

Voorbeeld

$? + 4 = 9$ (of $x + 4 = 9$)

Zolang je niet weet welke getallen ingevuld moeten worden, kun je een formule met letters erin niet uitrekenen. Wel kun je zo'n uitdrukking zo eenvoudig en overzichtelijk mogelijk schrijven:

gelijksoortige term

- berekeningen met getallen uitvoeren;
- *gelijksoortige termen* (dat wil zeggen met dezelfde letters) bij elkaar nemen;
- letters op alfabet, getalfactoren voorop.

Bij dat overzichtelijk schrijven gebruik je, misschien ongemerkt, de in dit hoofdstuk behandelde wissel-, schakel- en verdeeleigenschappen.

Voorbeelden

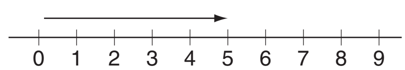
Van	kun je maken:	
$3a + 7 - 1$	$3a + 6$	(schakel)
$3a + 7a - 1$	$10a - 1$	(verdeel)
$3a + 7b - 1$	kan niet eenvoudiger	
$b \cdot 7 + a \cdot 3 - 1$	$3a + 7b - 1$	(wissel)

Opgave 24

1.4 Samenvatting

Wat weet je nu?

De verzameling van de natuurlijke getallen, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ heet $\mathbb{N}$. Getallen kun je weergeven als punten of pijltjes op een getallenlijn.



$>$ betekent 'is groter dan': $7 > 4$
$<$ betekent 'is kleiner dan': $4 < 7$
$\neq$ betekent 'is ongelijk aan': $4 \neq 7$

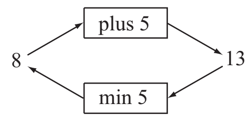
Getallen kun je

bij elkaar optellen:

$\underbrace{8+5}_{\text{termen}} = \underbrace{13}_{\text{som}}$

van elkaar aftrekken:

$\underbrace{13-5}_{\text{termen}} = \underbrace{8}_{\text{verschil}}$



Getallen kun je

met elkaar vermenigvuldigen:

$\underbrace{4 \times 7}_{\text{factoren}} = \underbrace{28}_{\text{product}}$

op elkaar delen:

$\underbrace{28}_{\text{deeltal}} : \underbrace{4}_{\text{deler}} = \underbrace{7}_{\text{quotiënt}}$

$4 \times 7 = 7 + 7 + 7 + 7$
Het teken $\times$ mag je vervangen door $\cdot$ of, als dat geen verwarring geeft, weglaten:
$4 \times 7 = 4 \cdot 7$
$4 \times a = 4 \cdot a = 4a$

Delen door 0 kan niet:
$28 : 0$ en $0 : 0$ bestaan niet.
$28 : 4$ mag je ook schrijven als $\frac{28}{4}$

Voor optellen en vermenigvuldigen gelden de

wisseleigenschap
(commutatieve eigenschap):
$a + b = b + a$
$a \times b = b \times a$

schakeleigenschap
(associatieve eigenschap):
$(a + b) + c = a + (b + c)$
$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

Voor vermenigvuldigen en delen ten opzichte van optellen of aftrekken geldt de verdeeleigenschap (of distributieve eigenschap):

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ $\quad$ $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$
$(b + c) : a = b : a + c : a$ $\quad$ $(b - c) : a = b : a - c : a$

De uitkomst van een deling van twee natuurlijke getallen is soms een natuurlijk getal ($12 : 4 = 3$), maar meestal een gebroken getal ($12 : 5 = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$). Een vorm als $\frac{12}{5}$ heet een breuk, 12 heet de teller en 5 heet de noemer.

Een breuk verandert niet van waarde als je de teller en de noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigt of door hetzelfde getal deelt.

Breuken met dezelfde noemer heten gelijknamig.

$\frac{12}{5}$ en $\frac{5}{12}$ heten elkaars omgekeerde, 12 $(= \frac{12}{1})$ en $\frac{1}{12}$ ook.
$\frac{12}{5} \times \frac{5}{12} = 1$
$12 \times \frac{1}{12} = 1$

Breuken kun je optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen (zie hierna).

Vormen als 2,4 ($= 2\frac{4}{10}$) en 5,1234 ($= 5\frac{1234}{10\,000}$) heten decimale breuken, de cijfers achter de komma heten decimalen.
Gebroken getallen kun je meestal slechts benaderen met decimale breuken: $\frac{3}{11} \approx 0{,}273$ (benadering in 3 decimalen nauwkeurig), je kunt dan oneindig ver doorgaan: $\frac{3}{11} = 0{,}27\,27\,27\,27\ldots$, korter: $0{,}\overline{27}$.

17% $= \frac{17}{100}$ (17 procent)
17‰ $= \frac{17}{1000}$ (17 promille)

De verhouding tussen 240 en 100 is 12 : 5 ('twaalf staat tot vijf'), want $\frac{240}{100} = \frac{12}{5}$. Twee getallenparen met dezelfde verhouding heten evenredig (12 en 5 zijn evenredig met 36 en 15; 12 staat tot 5 als 36 staat tot 15). Omdat $\frac{12}{5}$ en $\frac{15}{36}$ elkaars omgekeerde zijn, heten 12 en 5 omgekeerd evenredig met 15 en 36.

In formules kunnen variabelen (of veranderlijken) voorkomen, meestal aangegeven met een letter. Variabelen kun je door getallen vervangen (substitueren). Eenzelfde letter stelt telkens hetzelfde getal voor.

Wat kun je nu?

Wat?
Drie of meer getallen op een handige manier bij elkaar optellen of met elkaar vermenigvuldigen als er twee bij zijn die samen een mooie uitkomst opleveren.
Hoe?
Met de wissel- en schakeleigenschap zorgen dat de mooie uitkomsten als eerste aan de beurt komen.
Voorbeelden
$379 + 287 + 621 = (379 + 621) + 287 = 1000 + 287 = 1287$
$25 \times 7 \times 2 \times 2 = 25 \times 7 \times (2 \times 2) = 25 \times 7 \times 4 = (25 \times 4) \times 7 =$
$= 100 \times 7 = 700$

Wat?
Een berekening als 13×97 op een handige manier uitvoeren.
Hoe?
97 schrijven als $100 - 3$; verdeeleigenschap:
$13 \times 97 = 13 \times (100 - 3) = 13 \times 100 - 13 \times 3 = 1300 - 39 = 1261$

Wat?
Een berekening als $13 \times 61 + 13 \times 39$ op een handige manier uitvoeren.
Hoe?
Verdeeleigenschap van rechts naar links:
$13 \times 61 + 13 \times 39 = 13 \times (61 + 39) = 13 \times 100 = 1300$

Wat?
Breuken vereenvoudigen.
Hoe?
Teller en noemer delen door hetzelfde getal (als dat lukt).
Voorbeeld

$$\frac{24}{42} = \frac{\overset{1}{\cancel{6}} \times 4}{\underset{1}{\cancel{6}} \times 7} = \frac{4}{7}$$

Wat?
Breuken gelijknamig maken.
Hoe?
Kleinste gemene veelvoud van de noemers zoeken, dit moet de nieuwe noemer worden; per breuk teller en noemer met hetzelfde getal vermenigvuldigen.
Voorbeeld
Maak $\frac{3}{10}$ en $\frac{5}{14}$ gelijknamig. De noemers 10 en 14 hebben als k.g.v. 70.

$\frac{3}{10} = \frac{3 \times 7}{10 \times 7} = \frac{21}{70}$

$\frac{5}{14} = \frac{5 \times 5}{14 \times 5} = \frac{25}{70}$

Wat?
Breuken vergelijken.
Hoe?
Zo nodig gelijknamig maken, dan naar de tellers kijken.
Voorbeeld
$\frac{3}{10} = \frac{21}{70}$, $\frac{5}{14} = \frac{25}{70}$ (zie boven); $21 < 25$, dus $\frac{3}{10} < \frac{5}{14}$

Wat?
Breuken optellen of aftrekken.
Hoe?
Breuken zo nodig gelijknamig maken; noemer blijft hetzelfde, tellers optellen of aftrekken; als er helen voor staan, die apart optellen of aftrekken; breuk zo nodig vereenvoudigen, helen eruit halen.
Voorbeelden
$\frac{5}{14} + \frac{3}{10} = \frac{25}{70} + \frac{21}{70} = \frac{46}{70} = \frac{23}{35}$

$3\frac{2}{3} + 5\frac{3}{8} = 3\frac{16}{24} + 5\frac{9}{24} = 8 + \frac{25}{24} = 9\frac{1}{24}$

Wat?
Breuken vermenigvuldigen.
Hoe?
Zo nodig helen binnen de breuken halen; tellers vermenigvuldigen geeft teller van het product; noemers vermenigvuldigen geeft noemer van het product; breuk zo nodig vereenvoudigen.
Voorbeelden
$2\frac{1}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{45}{28}$ $(= 1\frac{17}{28})$

$2\frac{3}{5} \times 8 = \frac{13}{5} \times \frac{8}{1} = \frac{104}{5}$ $(= 20\frac{4}{5})$

Wat?
Breuken op elkaar delen.
Hoe?
Zo nodig helen binnen de breuken halen; delen is vermenigvuldigen met het omgekeerde van de deler.
Voorbeeld
$2\frac{1}{7} : \frac{3}{4} = \frac{15}{7} : \frac{3}{4} = \frac{15}{7} \times \frac{4}{3} = \frac{60}{21} = \frac{20}{7}$ $(= 2\frac{6}{7})$

Wat?
Substitueren.
Als je een formule kent met letters erin en getallen waardoor die letters gesubstitueerd moeten worden.
Hoe?
Elke letter vervangen door het bijbehorende getal, dezelfde letters altijd door hetzelfde getal; zo nodig haakjes en/of maaltekens toevoegen; wat je dan krijgt verder uitrekenen.
Voorbeeld
In $2ab + 5a$ de a door 7 en de b door 0 substitueren geeft
$2 \times 7 \times 0 + 5 \times 7 = 0 + 35 = 35$

Wat?
Formules met letters erin fatsoeneren.
Hoe?
Berekeningen met getallen uitvoeren; gelijksoortige termen bij elkaar; alfabetisch ordenen.
Voorbeeld
$3y \cdot 7 + 2y \cdot x \cdot 6 + y = 21y + 12xy + y = 12xy + 22y$

→ **Opgave 25 t/m 33**

1.5 Opgaven

1 Welke van de onderstaande getallen zijn natuurlijke getallen?
a 7
b $3\frac{1}{2}$
c 37
d 0
e 0,99
f 100 000

2 Teken een horizontale lijn met twee dwarsstreepjes met 5 centimeter tussenruimte. Schrijf bij het linkerstreepje 0 en bij het rechterstreepje 10. Dit wordt een getallenlijn.
a Zet het streepje waar het getal 1 bij hoort.
b Geef (liefst met een andere kleur) op deze getallenlijn alle natuurlijke getallen aan die kleiner zijn dan 9.

3 Bereken zo handig mogelijk. Schrijf ook tussenstappen op:
a $12 + 35 + 51 + 88 + 14$
b $287 + 359 + 213 + 641$
c $6847 + 2913 + 1153 + 1087$

4 **a** Bereken $97 - 17 - 12$ (van links naar rechts!).
b Bereken $97 - (17 - 12)$ (bewerking tussen haakjes eerst!).
c Geldt voor aftrekken de schakeleigenschap?

5 Bereken zo handig mogelijk. Schrijf ook tussenstappen op:
a $5 \times 57 \times 20$
b $17 \times 14 \times 52 \times 24 \times 0$
c $91 \times 125 \times 8$

6 **a** Bereken $288 : 12 : 6$.
b Bereken $288 : (12 : 6)$.
c Wat kun je hieruit concluderen?

7 Hoeveel is 13×73? Hoeveel is 13×27? Hoeveel is dat samen?

8 Bereken op een handige manier. Schrijf ook de tussenstappen op:
a $18 \times (32 + 18)$
b 98×41
c $312 \times 117 - 12 \times 117$

9 Bereken op een handige manier. Schrijf ook de tussenstappen op:
a $576 : 18 + 324 : 18$
b $4018 : 41$

10 Wanneer je een chocoladereep in drie even grote stukken verdeelt, is elk stuk $\frac{1}{3}$ reep. Dan zijn 25 van zulke stukken $\frac{25}{3}$ reep.
a Beredeneer dat $3 \times \frac{25}{3}$ reep evenveel is als 25 repen.
b Beredeneer dat $\frac{25}{3}$ reep evenveel is als $8\frac{1}{3}$ reep.
c Beredeneer dat $3 \times 8\frac{1}{3}$ reep evenveel is als 25 repen.

11 Bereken $\dfrac{13 + 8}{3 + 4}$

12 Schrijf zo eenvoudig mogelijk:
a $\frac{54}{81}$
b $3\frac{14}{49}$

13 Vul op de stippeltjes $<$, $>$, of $=$ in, zo dat het klopt:
a $\frac{2}{3} \ldots \frac{11}{16}$
b $\frac{13}{15} \ldots \frac{5}{6}$
c $7\frac{36}{100} \ldots 7\frac{9}{25}$
d $2\frac{11}{14} \ldots \frac{17}{6}$

14 Schrijf zo eenvoudig mogelijk:
a $1\frac{7}{8} + 3\frac{5}{8}$
b $\frac{3}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{15}$
c $6\frac{1}{6} - 4\frac{1}{4}$
d $4\frac{24}{84} - \frac{30}{7}$

15 Schrijf zo eenvoudig mogelijk:
a $\frac{7}{6} \times \frac{3}{4}$
b $3\frac{1}{5} \times 5$
c $7\frac{3}{11}(5\frac{1}{12} - \frac{7}{4} - 3\frac{1}{3})$
d $2\frac{1}{7} \times 5\frac{5}{6}$

16 De deling $5\frac{1}{2} : 3\frac{3}{4} = \frac{22}{15}$ kun je controleren door terug te vermenigvuldigen: uit $3\frac{3}{4} \times \frac{22}{15}$ moet $5\frac{1}{2}$ komen.
Ga na dat dat klopt.

17 Schrijf zo eenvoudig mogelijk:
a $\frac{7}{3} : \frac{3}{7}$
b $5\frac{1}{5} : 2$
c $6 : 2\frac{2}{5}$
d $0 : 7\frac{7}{8}$

18 Bereken:
a $1{,}234 + 2{,}666$
b $3{,}2 : 5$
c $5{,}5 \times 0{,}6$
d $2{,}75 + 1{,}7318 + 0{,}25$

19 Schrijf als een gewone breuk. Vereenvoudig indien mogelijk:
a 0,2
b 0,02
c 0,25
d 0,5
e 0,75
f 0,125
g 0,65
h 0,004
i 0,000 001
j 0,875

20 Schrijf als een decimale breuk, zo nodig afgerond op vier decimalen:
a $\frac{1}{8}$
b $\frac{5}{6}$
c $\frac{1}{40}$
d $\frac{2}{7}$
e $\frac{1}{1000}$
f $\frac{7}{9}$

21 Vul op de stippeltjes $<$, $>$, of $=$ in, zo dat het klopt:
a $\frac{10}{3}$ . . . 3,33
b $\frac{49}{8}$ . . . 6,125
c 3,5 . . . 3,4999

22 Vul de juiste getallen in:
a 7% van 50 = . . .
b 120% van 300 = . . .
c . . . % van 80 = 2
d . . . ‰ van 3000 = 9
e 5% van . . . = 12
f 80% van . . . = 480

23 Substitueer a door 5, b door 7 en c door 4 en bereken:
a $a + (bc)$
b $(a + b)c$
c $(ab)(ac)$
d $a(bc)$
e $ab - ac$
f $a(b - c)$
g $\dfrac{ab - 1}{c}$
h $\dfrac{ab - 2}{ac - 2}$

24 Schrijf zo eenvoudig mogelijk:
a $2x \cdot y \cdot 5z$
b $3x + 4x$
c $a + a + b - 2a$

25 **a** Wat is het kleinste natuurlijke getal?
b Bestaat het grootste natuurlijke getal?

26 **a** Maak de volgende berekening af.
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 =$
$(1 + 10) + (2 + 9) + \ldots$

Bereken op dezelfde manier:
b $1 + 2 + \ldots + 14 + 15$
c $51 + 52 + 53 + \ldots + 69 + 70$
d $1 + 2 + 3 + \ldots + 999 + 1000$

27 Schrijf zo eenvoudig mogelijk:
a $3x + 4y + 5x + 2y$
b $x + 3y - 2y + z + 3x$
c $xy + 2z \cdot xy + 3yz - xyz$
d $2a + 1 + 3b - 2$

28 **a** Bereken $\frac{18}{25} \times \frac{35}{12}$ door 18×35 en 25×12 te berekenen, en de zo verkregen breuk te vereenvoudigen.

b Je kunt $\frac{18}{25} \times \frac{35}{12}$ ook anders berekenen:

$$\frac{18}{25} \times \frac{35}{12} = \frac{18 \times 35}{25 \times 12} = \frac{\overset{1}{\cancel{6}} \times 3 \times \overset{1}{\cancel{5}} \times 7}{\underset{1}{\cancel{5}} \times 5 \times \underset{1}{\cancel{6}} \times 2} = \ldots$$

Maak deze berekening verder af.

Bereken op de manier van vraag **b**:

c $\frac{72}{49} \times \frac{28}{27}$

d $\frac{39}{14} : \frac{52}{63}$

29 **a** Substitueer a door 10, b door 4, en c door 2 en bereken: $a + b : c$ en $(a + b) : c$.

b Schrijf $a + b : c$ en $(a + b) : c$ met een breukstreep in plaats van een dubbele punt.

30 Voor welke natuurlijke getallen a met $a < 24$ is de breuk $\frac{a}{24}$ niet te vereenvoudigen?

31 Kir is samengesteld uit 1 deel crème de cassis op 4 delen witte wijn. In witte wijn zit 11,5% alcohol, in crème de cassis 15%.
Hoeveel procent alcohol bevat kir?

schaal

32 Als een kaart *schaal* 1 : 15 000 heeft, dan betekent dat dat de verhouding tussen een afstand op de kaart en de overeenkomstige werkelijke afstand steeds 1 : 15 000 is.

a De afstand tussen twee plaatsen is op de kaart 7 centimeter.
Hoeveel centimeter is die afstand in werkelijkheid?
Hoeveel meter is dat?

b Tussen twee andere plaatsen is de afstand $4\frac{1}{2}$ kilometer.
Hoeveel centimeter is dat? Hoe groot is die afstand op de kaart?

33 **a** Meet met een liniaal hoe dik een munt van 5 cent is.
Je antwoord op vraag **a** is niet erg nauwkeurig. De werkelijke dikte zou best 0,2 of 0,3 milimeter groter of kleiner kunnen zijn.

b Meet met een liniaal hoe hoog een stapeltje van 10 munten van 5 cent is.

c Geef op grond van het antwoord op vraag **b** een nieuwe schatting van de dikte van één munt van 5 cent.

d Neem aan dat je bij vraag **b** even nauwkeurig hebt gemeten als bij vraag **a**.
Wat kun je dan zeggen over je antwoord op vraag **c**? Wat heeft dat met de verdeeleigenschap te maken?