UITWERKINGEN

Deel B

Wiskunde

voor het hoger onderwijs

Sieb Kemme
Caroline van Koolen
Theo van Pelt
Harmen Timmer
Jan Walter

Achtste editie

Noordhoff Uitgevers

Wiskunde voor het hoger onderwijs

Deel B Uitwerkingen

Wiskunde voor het hoger onderwijs

Deel B Uitwerkingen

Sieb Kemme (eindredactie)
Wim Groen
Caroline Koolen
Theo van Pelt
Harmen Timmer
Jan Walter

Achtste druk

Noordhoff Uitgevers Groningen/Houten

Ontwerp omslag: Studio Frank & Lisa, Groningen
Omslagillustratie: Getty images
Opmaak en tekenwerk: Educatieve Adviezen Kemme BV

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Hoger Onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen, e-mail: info@noordhoff.nl

0 1 2 3 4 5 / 14 13 12 11 10

ISBN (ebook) 978-90-01-84759-3
ISBN 978-90-01-76439-5
NUR 918

Voorwoord

Dit uitwerkingenboek bevat de uitwerkingen van alle oefeningen en oefentoetsen bij *deel B* van de serie *Wiskunde voor het hoger onderwijs*.

Het hoofdboek
Het hoofdboek van de serie W*iskunde in het hoger onderwijs, deel B* bevat de theorie en de oefeningen. De linkerpagina's zijn consequent gereserveerd voor de theorie en de rechterpagina's voor de bijbehorende oefeningen. Theorie en oefeningen staan altijd direct bij elkaar. Dit maakt een zelfstandige en actieve manier van studeren mogelijk.
Sommige hoofdstukken bevatten een afsluitende paragraaf met *Toepassingen*.
De laatste twee paragrafen van elk hoofdstuk zijn gereserveerd voor het verwerken van de leerstof. In *Hoofdzaken* staan de onderwerpen kort samengevat die aan het eind van het hoofdstuk paraat moeten zijn.
Met een *Toets* over het hele hoofdstuk kan zelfstandig worden nagegaan in hoeverre de stof daadwerkelijk beheerst wordt.

Ondersteuning met ICT
Een inlogcode geeft toegang tot de website waarop extra oefeningen met antwoorden te vinden zijn. Deze extra stof is bedoeld om nog snel even te oefenen, bijvoorbeeld kort voor een tentamen.

De serie Wiskunde voor het hoger onderwijs
De vernieuwe serie *Wiskunde voor het hoger onderwijs* is opgebouwd uit de delen A, B en C. *Deel A* is bestemd voor de overgang van havo/mbo naar het HBO en bevat de nodige elementaire wiskundige kennis en vaardigheden die nodig zijn om met succes aan een studie op het HBO te beginnen.
Deel B biedt, naast een uitbreiding van het wiskundige arsenaal, een steviger wiskundige basis, uitgewerkt in praktische toepassingen.
De *delen C* bevatten, per afzonderlijk katern, wiskunde zoals die wordt toegepast in verschillende afstudeerrichtingen.

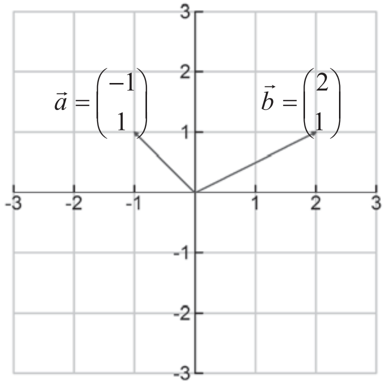
Het gebruik van de computer
Voorop staat telkens een begripsmatige beheersing van de stof, gecombineerd met een handmatige beheersing van de vaardigheden. Maar bij het numerieke werk is de inzet van de computer onontbeerlijk. Hierbij is gekozen voor de inzet van *Excel* als gebruikelijk rekenmiddel in het toekomstige beroep. Voor het laten tekenen van grafieken, in het vlak en in de ruimte, is gekozen voor het programma *WINPLOT*. Dit is als shareware van het web te downloaden.

Inhoud

1 Werken met vectoren

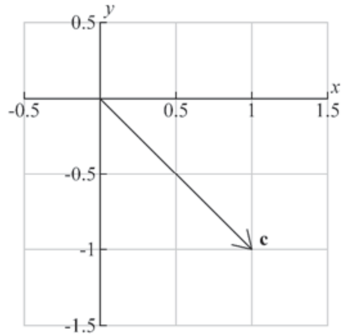
1.1 Vectoren in R^2 en R^3

1a Zie figuur.



b $2 \cdot \vec{a} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot -1 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

c



d $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

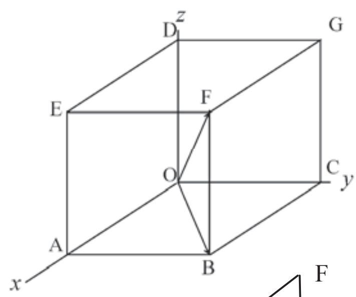
2a $2 \cdot \vec{a} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

b $\vec{c} = -\vec{b} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot -1 \\ -1 \cdot 2 \\ -1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

3a $OC = 5$, $CB = 5$

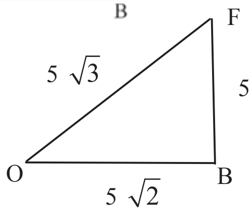
$OB^2 = OC^2 + CB^2 \rightarrow OB = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

b $OF^2 = OB^2 + BF^2 \rightarrow OF = \sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 + 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$



c $\sin(\angle FOB) = \dfrac{BF}{FO} = \dfrac{5}{5\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$\angle FOB = \sin^{-1}(\frac{1}{3}\sqrt{3}) \approx 35{,}3^\circ$



4a Schrijf de vectoren in de vorm $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, oftewel: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

b $\overrightarrow{EF}$ **:** Coördinaten beginpunt is $(2,0,4)$ met de kentallen $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{EA}$ **:** Coördinaten beginpunt is $(2,0,4)$ met de kentallen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$;

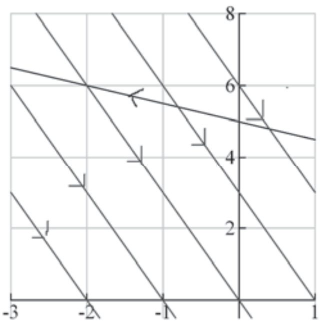
$\overrightarrow{ED}$ **:** Coördinaten beginpunt is $(2,0,4)$ met de kentallen $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{DF}$ **:** Coördinaten beginpunt is $(0,0,4)$ met de kentallen $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{DB}$ **:** Coördinaten beginpunt is $(0,0,4)$ met de kentallen $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$

c $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

5a Zie figuur.
Pijlen naar rechtsonder: het magnetische veld.
Pijl naar linksboven: de stroomintensiteit.



1.2 Bewerkingen met vectoren

1a $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}3+7\\5+2\\1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\7\\4\end{pmatrix}$

b $\vec{b}-\vec{c}=\begin{pmatrix}7-(-2)\\2-4\\3-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-2\\4\end{pmatrix}$

c $2\vec{a}=2\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 3\\2\cdot 5\\2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\10\\2\end{pmatrix}$

d $2\vec{b}+3\vec{c}=\begin{pmatrix}2\cdot 7\\2\cdot 2\\2\cdot 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\cdot -2\\3\cdot 4\\3\cdot -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14-6\\4+12\\6-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\16\\3\end{pmatrix}$

2a $\vec{a}+1\frac{1}{2}\vec{b}-4\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\frac{1}{2}\cdot 2\\1\frac{1}{2}\cdot 0\\1\frac{1}{2}\cdot -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\cdot 1\\4\cdot 1\\4\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-25\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

b $3\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)+2\vec{c}=3\left(\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}2\\2\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\12\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\14\\18\end{pmatrix}$

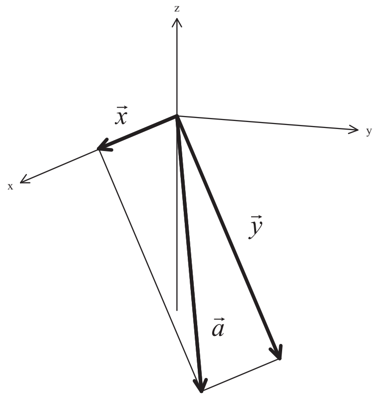
3a $2\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\begin{pmatrix}200\\175\\-10\end{pmatrix}\rightarrow\vec{x}=\begin{pmatrix}100\\87\frac{1}{2}\\-5\end{pmatrix}$

b $\vec{y}=\vec{o}-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}-\vec{d}=\begin{pmatrix}-200\\-175\\10\end{pmatrix}$

c $\vec{z}=\vec{o}-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\begin{pmatrix}-280\\-215\\-150\end{pmatrix}$

4a $\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}\rightarrow\vec{y}=\vec{a}-\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

b Zie figuur.



5 $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-5\\7\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

$\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

6 De resulterende kracht moet $\vec{0}$ zijn. Oftewel, $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=\vec{0}$

$\rightarrow\vec{F_3}=-\vec{F_1}-\vec{F_2}=\begin{pmatrix}-5\\5\\-1\end{pmatrix}$

1.3 Inwendig product

1a $\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=1\cdot(-1)+4\cdot1+2\cdot1=5$

b $\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=1\cdot0+4\cdot1+2\cdot0=4$

c $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=1\cdot0+0\cdot1+1\cdot0=0$

d $\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}=-1\cdot2+3\cdot(-3)+(-2)\cdot5=-21$

e $\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=2\cdot0+(-3)\cdot0+5\cdot1=5$

f $\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}=0\cdot0+2\cdot0+0\cdot(-3)=0$

2a $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}=1\cdot(-3)+1\cdot0+1\cdot4=1$

b $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-9\\0\\12\end{pmatrix}\right)\bullet\begin{pmatrix}16\\40\\-8\end{pmatrix}=10\cdot16+1\cdot40+(-11)\cdot(-8)=288$

c $\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-3\\-9\\3\end{pmatrix}=-2\cdot(-3)+1\cdot(-9)+5\cdot3=12$

d $\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\bullet\left(\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\20\\-4\end{pmatrix}\right)=-1\cdot5-1\cdot20-1\cdot0=-25$

3 Bijvoorbeeld $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ en $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}$.

4 $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+4^2+2^2}=\sqrt{21}$

$|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

5 $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}\rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3^2+2^2+2^2}=\sqrt{17}$

$2\vec{a}-3\vec{b}=\begin{pmatrix}4-3\\-2-9\\6+3\end{pmatrix}\rightarrow|2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-11)^2+9^2}=\sqrt{203}$

6 $\left|\begin{pmatrix}4\\x-2\end{pmatrix}\right|=5\rightarrow\sqrt{4^2+(x-2)^2}=5$ beide leden kwadrateren

$4^2+(x-2)^2=5^2\rightarrow x^2-4x-5=0$ ontbinden in factoren

$(x-5)(x+1)=0$, $\rightarrow x_1=5$ of $x_2=-1$

7a Neem aan dat $\vec{a}$ en $\vec{b}$ tweedimensionale vectoren zijn. Dan geldt:

$\vec{a}\bullet\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2$ en $\vec{b}\bullet\vec{a}=b_1\cdot a_1+b_2\cdot a_2=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2=\vec{a}\bullet\vec{b}$

b $\vec{a}\bullet(\vec{b}+\vec{c})=a_1\cdot(b_1+c_1)+a_2\cdot(b_2+c_2)=a_1\cdot b_1+a_1\cdot c_1+a_2\cdot b_2+a_2\cdot c_2$

$\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{a}\bullet\vec{c}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_1\cdot c_1+a_2\cdot c_2$. Oftewel $\vec{a}\bullet(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{a}\bullet\vec{c}$

c $\vec{a}\bullet(-\vec{b})=a_1\cdot(-b_1)+a_2\cdot(-b_2)=-a_1\cdot b_1-a_2\cdot b_2$

$-\vec{a}\bullet\vec{b}=-a_1\cdot b_1-a_2\cdot b_2=\vec{a}\bullet(-\vec{b})$

1.4 De hoek tussen twee vectoren

1 Er geldt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \rightarrow \cos(\alpha) = \frac{-1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{57}} \neq 0$$

Dus de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ staan niet loodrecht op elkaar.

2 Er geldt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \rightarrow 0 = \frac{a \cdot a + 5 \cdot a + 6 \cdot 1}{\sqrt{a^2 + 5^2 + 6^2} \cdot \sqrt{a^2 + a^2 + 1^2}} = \frac{a^2 + 5a + 6}{\sqrt{a^2 + 61} \cdot \sqrt{2a^2 + 1}}$$

Dus de teller is gelijk aan 0: $a^2 + 5a + 6 = 0 \rightarrow (a+3)(a+2) = 0$

$\rightarrow a = -3$ of $a = -2$

3 Stel de vector is $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, dan moet $2a + 2b + 3c = 0$ en $2a + c = 0$.

$2a = -c$ en $-c + 2b + 3c = 2b + 2c = 0$.

Kies $a = 1$, dan voldoet $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ aan beide voorwaarden.

4 $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \rightarrow -1 \cdot p + p \cdot (-p) + 3 \cdot 2 = 0$

$-p^2 - p + 6 = 0 \rightarrow (p-2)(p+3) = 0$

$p = 2$ of $p = -3$

5 Er geldt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \rightarrow \cos(\alpha) = \frac{1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{6}$$

$\alpha = \cos^{-1}(\frac{1}{6}) = 1,40$

6a $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{F} \bullet \vec{s}_1 + \vec{F} \bullet \vec{s}_2 + \vec{F} \bullet \vec{s}_3 = 4$ Nm.

b De vector langs de kortste weg van O naar A is $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 + 2 = 4$ Nm.

7 Met bijvoorbeeld $\vec{F}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ en $\vec{s}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$: W is positief.

Met bijvoorbeeld $\vec{F}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ en $\vec{s}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$: W is nul.

Met bijvoorbeeld $\vec{F}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ en $\vec{s}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$: W is negatief.

1.5 Uitwendig product

1a $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}4\cdot 2-(-6)\cdot(-1)\\-6\cdot 2-1\cdot 2\\1\cdot(-1)-4\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-14\\-9\end{pmatrix}$

b $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(3\vec{c}\right)=\begin{pmatrix}-1\\5\\-8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\6\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 9-(-8)\cdot 6\\-8\cdot 0-(-1)\cdot 9\\-1\cdot 6-5\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}93\\9\\-6\end{pmatrix}$

c $\left(-\vec{a}+2\vec{c}\right)\times\left(-\vec{b}\right)=\begin{pmatrix}-1\\0\\12\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot(-2)-12\cdot 1\\12\cdot(-2)-(-1)\cdot(-2)\\-1\cdot 1-0\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\-26\\-1\end{pmatrix}$

d $\left(2\vec{a}\right)\times\left(-\vec{b}+5\vec{c}\right)=\begin{pmatrix}2\\8\\-12\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\11\\13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\cdot 13-(-12)\cdot 11\\-12\cdot(-2)-2\cdot 13\\2\cdot 11-8\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}236\\-2\\38\end{pmatrix}$

2a $\vec{e}_1\times\vec{e}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 0-0\cdot 1\\0\cdot 0-1\cdot 0\\1\cdot 1-0\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\vec{e}_3$

b $\vec{e}_2\times\vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1-0\cdot 0\\0\cdot 1-0\cdot 0\\0\cdot 0-1\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{e}_1$

c $\vec{e}_3\times\vec{e}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 0-1\cdot 0\\1\cdot 1-0\cdot 0\\0\cdot 0-0\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\vec{e}_2$

d $(\vec{e}_1+\vec{e}_2)\times\vec{e}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1-0\cdot 0\\0\cdot 0-1\cdot 1\\1\cdot 0-1\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

3a $\vec{a}\times\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2\cdot a_3-a_3\cdot a_2\\a_3\cdot a_1-a_1\cdot a_3\\a_1\cdot a_2-a_2\cdot a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

b $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$ en $-\vec{b}\times\vec{a}=\begin{pmatrix}-b_2a_3-(-b_3)a_2\\-b_3a_1-(-b_1)a_3\\a_1b_2-(-b_2)a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$

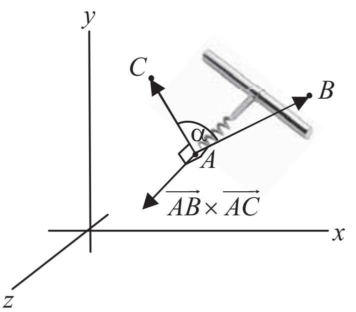
Dus $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

4a $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\0\end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}c_1-a_1\\c_2-a_2\\0\end{pmatrix}$.

b $\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}c_1-a_1\\c_2-a_2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(b_2-a_2)\cdot 0-0\cdot(c_2-a_2)\\0\cdot(c_1-a_1)-(b_1-a_1)\cdot 0\\(b_1-a_1)\cdot(c_2-a_2)-(b_2-a_2)\cdot(c_1-a_1)\end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}0\\0\\(b_1-a_1)\cdot(c_2-a_2)-(b_2-a_2)\cdot(c_1-a_1)\end{pmatrix}$

c Zie figuur.



De kurkentrekker draait linksom, oftewel $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ heeft een positief z kental.

d Als $(b_1-a_1)\cdot(c_2-a_2)-(b_2-a_2)\cdot(c_1-a_1)>0$ wijst $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ in de positieve z-richting en moet C links van de lijn door A en B liggen.

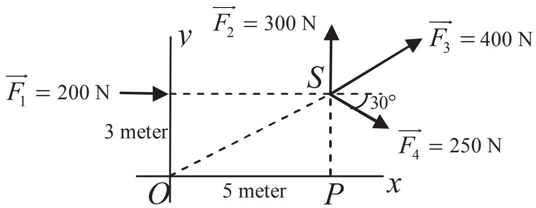
e Als $(b_1-a_1)\cdot(c_2-a_2)-(b_2-a_2)\cdot(c_1-a_1)=0$, dan liggen $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$ in elkaars verlengde, dus C ligt op de lijn door A en B.

f Als $(b_1-a_1)\cdot(c_2-a_2)-(b_2-a_2)\cdot(c_1-a_1)<0$ wijst $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ in de negatieve z-richting en moet C rechts van de lijn door A en B liggen.

1.6 Toepassen:Uitwendig product

1 $\vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot(-1)-3\cdot(-2)\\3\cdot1-(-1)\cdot(-1)\\(-1)\cdot(-2)-5\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$

2a $OS=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$



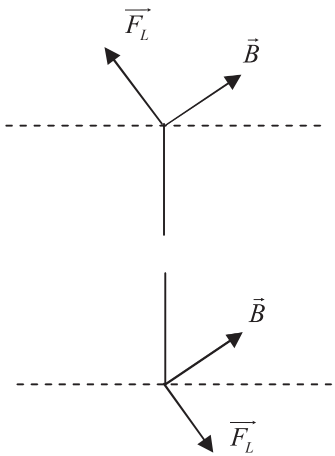
$\vec{F_1}=\begin{pmatrix}200\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{F_2}=\begin{pmatrix}0\\300\\0\end{pmatrix}$, $\vec{F_3}=\begin{pmatrix}320\\240\\0\end{pmatrix}$, $\vec{F_4}=\begin{pmatrix}125\sqrt{3}\\-125\\0\end{pmatrix}$

a $\vec{r}=\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M_1}=\begin{pmatrix}0\\0\\-600\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M_2}=\begin{pmatrix}0\\0\\1200\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ en

$\overrightarrow{M_4}=\begin{pmatrix}0\\0\\-375\sqrt{3}-500\end{pmatrix}$.

b $\vec{r}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M_1}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M_2}=\begin{pmatrix}0\\0\\1200\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\960\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M_4}=\begin{pmatrix}0\\0\\-500\end{pmatrix}$

3a Zie figuur.



b $\left|\vec{F}\right|=h\cdot\left|\vec{I}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|\cdot\sin(\alpha)$

c De Lorentzkrachten staan verticaal en zijn tegengesteld gericht. De Lorentzkracht op de bovenkant van het spoeltje wijst naar boven, en de kracht op de onderkant wijst naar beneden.

d $\left|\overrightarrow{M}\right|=\frac{1}{2}l\cdot\left|\overrightarrow{F_L}\right|\cdot\left|\sin(\alpha)\right|$

1.7 Vectorfuncties

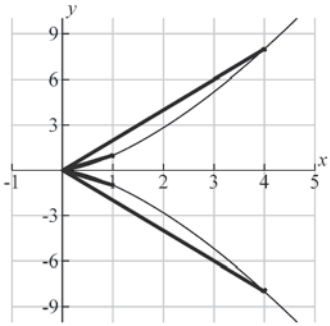
1a $\vec{r}(-2)=\begin{pmatrix}(-2)^2\\(-2)^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix}$,

$\vec{r}(-1)=\begin{pmatrix}(-1)^2\\(-1)^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{r}(0)=\begin{pmatrix}0^2\\0^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{r}(1)=\begin{pmatrix}1^2\\1^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$,

$\vec{r}(2)=\begin{pmatrix}2^2\\2^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$

b Zie figuur.



c $x=t^2 \rightarrow t=\sqrt{x}$ of $-\sqrt{x}$

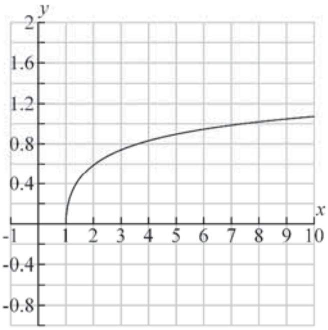
$y=t^3 \rightarrow y=\left(\sqrt{x}\right)^3=x\sqrt{x}$ of $y=\left(-\sqrt{x}\right)^3=-x\sqrt{x}$

2a $t \geq 0$. Je kunt geen wortel uit een negatief getal trekken.

b $x=e^{2t} \rightarrow \ln(x)=2t \rightarrow t=\frac{1}{2}\ln(x)$

$y=\sqrt{t} \rightarrow y=\sqrt{\frac{1}{2}\ln(x)}$

c Zie figuur.

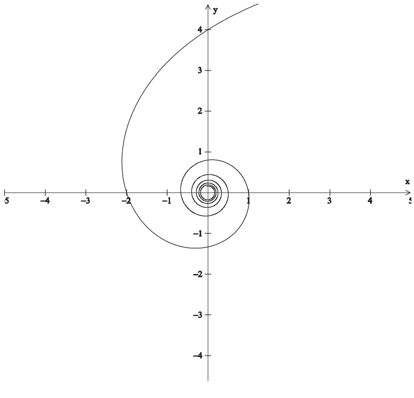


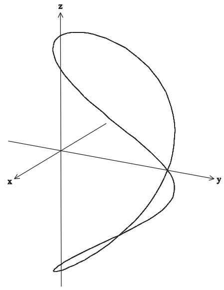
3a $\left|\vec{r}(t)\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{t}\cos(2\pi t)\right)^2+\left(\frac{1}{t}\sin(2\pi t)\right)^2}=\frac{1}{t^2}\left(\cos^2(2\pi t)+\sin^2(2\pi t)\right)$

$\cos^2(2\pi t)+\sin^2(2\pi t)=1$ dus

$\left|\vec{r}(t)\right|=\sqrt{\frac{1}{t^2}}=\frac{1}{t} \quad (t>0)$

b $\left|\vec{r}(t)\right|$ geeft aan dat de lengte van de vector snel afneemt.
De sinus en cosinus functie zorgen voor een draaiing om de y-as.





4a $|\vec{r}(t)| = \sqrt{(\cos(t)\sin(t))^2 + ((\sin(t))^2)^2 + (\cos(t))^2}$

$= \sqrt{(\sin(t))^2((\cos(t))^2 + (\sin(t))^2) + (\cos(t))^2}$

$= \sqrt{(\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} = \sqrt{1} = 1$

b Zie figuur.

5a $|\vec{I}(t)| = \sqrt{(-7\sin(7t))^2 + (7\cos(7t))^2 + 1^2} =$

$= \sqrt{(-7)^2(\sin(7t))^2 + 7^2(\cos(7t))^2 + 1^2} =$

$= \sqrt{49((\sin(7t))^2 + (\cos(7t))^2) + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

b $\vec{I}(t) \times \vec{B} = \begin{pmatrix} 7\cos(7t)\cdot 0 - 1\cdot 1 \\ 1\cdot 1 - (-7\sin(7t))\cdot 0 \\ -7\sin(7t)\cdot 1 - 7\cos(7t)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -7(\sin(7t) + \cos(7t)) \end{pmatrix}$

$|\vec{I}(t) \times \vec{B}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-7((\sin 7t) + \cos(7t)))^2} =$

$= \sqrt{2 + 49(\sin(7t) + \cos(7t))^2} =$

$= \sqrt{51 + 98\sin(7t)\cos(7t)}$

1.8 Toepassen: Vectorfuncties

1a $|\vec{v}(t)| = \sqrt{(-R\omega\sin(\omega t))^2 + (R\omega\cos(\omega t))^2}$

$= \sqrt{R^2\omega^2((\sin(\omega t))^2 + (\cos(\omega t))^2)} = \sqrt{R^2\omega^2} = R\omega$

$|\vec{a}(t)| = \sqrt{(-R\omega^2\cos(\omega t))^2 + (-R\omega^2\sin(\omega t))^2}$

$= \sqrt{R^2\omega^4((\cos(\omega t))^2 + (\sin(\omega t))^2)} = \sqrt{R^2\omega^4} = R\omega^2$

b $\vec{r}(t)\bullet\vec{v}(t) = R\cos(\omega t)\cdot(-R)\omega\sin(\omega t) + R\sin(\omega t)\cdot R\omega\cos(\omega t)$

$= -R^2\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t) + R^2\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t) = 0$

$\vec{v}(t)\bullet\vec{a}(t) = -R\omega\sin(\omega t)\cdot(-R)\omega^2\cos(\omega t) + R\omega\cos(\omega t)\cdot(-R)\omega^2\sin(\omega t)$

$= R^2\omega^3\sin(\omega t)\cos(\omega t) - R^2\omega^3\sin(\omega t)\cos(\omega t) = 0$

c Het inwendig product is 0. Dus staan ze loodrecht op elkaar.

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{s}(t)\bullet\vec{a}(t)}{|\vec{s}|\cdot|\vec{a}|} = \frac{R\cos(\omega t)\cdot(-R)\omega^2\cos(\omega t) + R\sin(\omega t)(-R)\omega^2\sin(\omega t)}{R\cdot R\omega^2}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{-R^2\omega^2}{R\omega^2} = -1 \rightarrow \alpha = \pi.$$

Oftewel de vectoren hebben een tegengestelde richting.

2a $\left|\vec{v}(t)\right| = \sqrt{\left(\sin(t)\right)^2 + \left(\cos(4t)\right)^2 + \left(\cos(2t)\right)^2}$

b Hiervoor heb je $\vec{r}(t)$ nodig. Deze wordt gegeven door de snelheidsvector te integreren:

$\rightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) + C_1 \\ \frac{1}{4}\sin(4t) + C_2 \\ \frac{1}{2}\sin(2t) + C_3 \end{pmatrix}$. De constanten bepalen we m.b.v. $\vec{r}(0)$:

$$\begin{cases} -\cos(0) + C_1 = -1 \rightarrow C_1 = 0 \\ \frac{1}{4}\sin(4\cdot 0) + C_2 = 1 \rightarrow C_2 = 1 \\ \frac{1}{2}\sin(2\cdot 0) + C_3 = 2 \rightarrow C_3 = 2 \end{cases} \rightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \frac{1}{4}\sin(4t) + 1 \\ \frac{1}{2}\sin(2t) + 2 \end{pmatrix}$$

Dus voor $t = \frac{1}{4}\pi$ krijg je $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. De afstand tot de oorsprong wordt gegeven door $\left|\vec{r}(t)\right|$.

$$\left|\vec{r}(t)\right| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 + \left(2\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{7\tfrac{3}{4}} \approx 2,78$$

3a $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ z''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$

b $\vec{r}(t)\bullet\vec{a}(t) = \sin(t)\cdot\left(-\sin(t)\right) + \cos(t)\cdot\left(-\cos(t)\right) + t\cdot 0$

$= -\left(\sin(t)\right)^2 - \left(\cos(t)\right)^2 = -1$

c $\vec{v}(t)\bullet\vec{a}(t) = \cos(t)\cdot\left(-\sin(t)\right) + \left(-\sin(t)\right)\cdot\left(-\cos(t)\right) + 1\cdot 0$

$= -\cos(t)\sin(t) + \cos(t)\sin(t) = 0$.

Het inwendig product is 0. Dus staan ze loodrecht op elkaar.

4a $a = \left|\vec{a}(t)\right| = R\omega^2$ (zie vraag 1a)

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} \rightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{T}$. $\rightarrow a = R\cdot\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 = \dfrac{(2\pi)^2 R}{T^2}$

b $F = m\cdot a = m\cdot\dfrac{(2\pi)^2 R}{T^2}$. Ook geldt $F = G\dfrac{mM}{R^2}$

Gelijkstellen geeft: $m\cdot\dfrac{(2\pi)^2 R}{T^2} = G\dfrac{mM}{R^2} \rightarrow \dfrac{R^3}{T^2} = \dfrac{GM}{4\pi^2}$

c Afstand ten opzichte van centrum aarde is:

$$R = \sqrt[3]{\frac{GM\cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,6726\times 10^{-11}\cdot 5,976\times 10^{24}\cdot(24\cdot 60\cdot 60)^2}{4\pi^2}} \approx 4,224\times 10^7$$

Afstand ten opzichte van het aardoppervlak is:

$4,224\times 10^7 - 6,378\times 10^6 = 3,586\times 10^7$ m

Toets

1a $2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\-5\\14\end{pmatrix}$

b $\vec{a}\bullet\vec{b}=-21$, $\vec{b}\bullet\vec{c}=-19$

c $|\vec{a}|=\sqrt{14}$, $|\vec{b}-\vec{c}|=3\sqrt{10}$

d $\vec{a}\times\vec{c}=\begin{pmatrix}-5\\-5\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{b}\times\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\11\\7\end{pmatrix}$

2 $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$ of $\vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix}$.

3 De cosinus van de hoek tussen de vectoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ en $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ is $\frac{1}{6}$.

4 $W=10\cdot 200\cdot\cos 60=1000$ J .

5 $\vec{v}(t)=\begin{pmatrix}1\\\cos t\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\rightarrow v=\sqrt{\frac{5}{4}+\cos^2 t}$. v is maximaal voor $t=k\cdot\pi$.

6a $\vec{v}(t)=\begin{pmatrix}3t^2\\6t^2\\-3t^2\end{pmatrix}$, $\vec{a}(t)=\begin{pmatrix}6t\\12t\\-6t\end{pmatrix}$.

b $\vec{r}\bullet\vec{a}=36t^4+6t$.

c $\vec{v}\bullet\vec{a}=18t^3+72t^3+18t^3=108t^3$

$|\vec{v}|=\sqrt{9t^4+36t^4+9t^4}=3t^2\sqrt{6}$, $|\vec{a}|=\sqrt{36t^2+144t^2+36t^2}=6t\sqrt{6}$.

$\cos(\alpha)=\dfrac{108\cdot t^3}{18\cdot 6\cdot t^3}=1$. (Beide vectoren liggen in elkaars verlengde, de beweging is langs een rechte lijn.)