
UITWERKINGEN

Deel B

Wiskunde

voor het hoger onderwijs

Sieb Kemme
Caroline van Koolen
Theo van Pelt
Harmen Timmer
Jan Walter

Achtste editie



Noordhoff Uitgevers

Wiskunde voor het hoger onderwijs

Deel B Uitwerkingen

Wiskunde voor het hoger onderwijs

Deel B Uitwerkingen

Sieb Kemme (eindredactie)
Wim Groen
Caroline Koolen
Theo van Pelt
Harmen Timmer
Jan Walter

Achtste druk

Noordhoff Uitgevers Groningen/Houten

Ontwerp omslag: Studio Frank & Lisa, Groningen
Omslagillustratie: Getty images
Opmaak en tekenwerk: Educatieve Adviezen Kemme BV

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Hoger Onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen, e-mail: info@noordhoff.nl

0 1 2 3 4 5 / 14 13 12 11 10

© 2010 Noordhoff Uitgevers bv Groningen/Houten, The Netherlands.

Behoudens de in of krachtens de Auteurswet van 1912 gestelde uitzonderingen mag niets uit deze uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever. Voor zover het maken van reprografische verveelvoudigingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16h Auteurswet 1912 dient men de daarvoor verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Reprorecht (postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.reprorecht.nl). Voor het overnemen van gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet 1912) kan men zich wenden tot Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.stichting-pro.nl).

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

ISBN (ebook) 978-90-01-84759-3
ISBN 978-90-01-76439-5
NUR 918

Voorwoord

Dit uitwerkingenboek bevat de uitwerkingen van alle oefeningen en oefentoetsen bij *deel B* van de serie *Wiskunde voor het hoger onderwijs*.

Het hoofdboek

Het hoofdboek van de serie *Wiskunde in het hoger onderwijs, deel B* bevat de theorie en de oefeningen. De linkerpagina's zijn consequent gereserveerd voor de theorie en de rechterpagina's voor de bijbehorende oefeningen.

Theorie en oefeningen staan altijd direct bij elkaar. Dit maakt een zelfstandige en actieve manier van studeren mogelijk.

Sommige hoofdstukken bevatten een afsluitende paragraaf met *Toepassingen*.

De laatste twee paragrafen van elk hoofdstuk zijn gereserveerd voor het verwerken van de leerstof. In *Hoofdzaken* staan de onderwerpen kort samengevat die aan het eind van het hoofdstuk paraat moeten zijn.

Met een *Toets* over het hele hoofdstuk kan zelfstandig worden nagegaan in hoeverre de stof daadwerkelijk beheerst wordt.

Ondersteuning met ICT

Een inlogcode geeft toegang tot de website waarop extra oefeningen met antwoorden te vinden zijn. Deze extra stof is bedoeld om nog snel even te oefenen, bijvoorbeeld kort voor een tentamen.

De serie Wiskunde voor het hoger onderwijs

De vernieuwde serie *Wiskunde voor het hoger onderwijs* is opgebouwd uit de delen A, B en C. *Deel A* is bestemd voor de overgang van havo/mbo naar het HBO en bevat de nodige elementaire wiskundige kennis en vaardigheden die nodig zijn om met succes aan een studie op het HBO te beginnen.

Deel B biedt, naast een uitbreiding van het wiskundige arsenaal, een steviger wiskundige basis, uitgewerkt in praktische toepassingen.

De *delen C* bevatten, per afzonderlijk katern, wiskunde zoals die wordt toegepast in verschillende afstudeerrichtingen.

Het gebruik van de computer

Voorop staat telkens een begripsmatige beheersing van de stof, gecombineerd met een handmatige beheersing van de vaardigheden. Maar bij het numerieke werk is de inzet van de computer onontbeerlijk. Hierbij is gekozen voor de inzet van *Excel* als gebruikelijk rekenmiddel in het toekomstige beroep. Voor het laten tekenen van grafieken, in het vlak en in de ruimte, is gekozen voor het programma *WINPLOT*. Dit is als shareware van het web te downloaden.

Inhoud

Hoofdstuk 1 Vectoren

- 1.1 Vectoren in \mathbf{R}^2 en \mathbf{R}^3 8
 - 1.2 Bewerkingen met vectoren 10
 - 1.3 Lengte en inwendig product 11
 - 1.4 De hoek tussen twee vectoren 13
 - 1.5 Uitwendig product 14
 - 1.6 Toepassen: Uitwendig product 16
 - 1.7 Vectorfuncties 17
 - 1.8 Toepassen: Vectorfuncties 18
- Toets 20

Hoofdstuk 2 Matrices

- 2.1 Wat zijn matrices? 21
 - 2.2 Optellen en scalair vermenigvuldigen 22
 - 2.3 Matrices en vectoren 23
 - 2.4 Matrixvermenigvuldiging 23
 - 2.5 De inverse matrix 25
 - 2.6 Stelsels lineaire vergelijkingen oplossen 26
 - 2.7 Toepassen: Transformaties en matrices 28
- Toets 29

Hoofdstuk 3 Uitbreiding functies

- 3.1 Samengestelde functies 31
 - 3.2 Inverse functies 32
 - 3.3 Formule van de inverse bepalen 33
 - 3.4 Cyclometrische functies 34
 - 3.5 De e-macht en de natuurlijke logaritme 36
 - 3.6 De absolute waarde 37
 - 3.7 Toepassen: De kettinglijn 41
- Toets 43

Hoofdstuk 4 Limieten

- 4.1 Het begrip limiet 45
 - 4.2 Standaardlimieten en rekenregels 48
 - 4.3 Limieten voor x naar oneindig 50
 - 4.4 Oneindige limieten 52
 - 4.5 Dominante functies 54
 - 4.6 Limieten van rijen 55
 - 4.7 Meetkundige rijen 56
 - 4.8 Partiële sommen 58
 - 4.9 De som van een meetkundige rij 59
 - 4.10 Toepassen: Financieel rekenen 61
- Toets 62

Hoofdstuk 5 Differentiëren

- 5.1 Rekenregels en standaardafgeleiden 64
 - 5.2 De tweede afgeleide 67
 - 5.3 Hogere afgeleiden 70
 - 5.4 De stellingen van L'Hôpital 71
 - 5.5 De reeksen van MacLaurin en Taylor 73
 - 5.6 Toepassen: Kromming en kromtestraal 74
- Toets 76

Hoofdstuk 6 Numerieke methoden 1

- 6.1 De halveringsmethode 79
 - 6.2 Rekenwerk met de halveringsmethode 82
 - 6.3 De methode van Newton-Raphson 84
 - 6.4 Rekenwerk met Newton-Raphson 86
 - 6.5 Herhaalde substitutie 88
 - 6.6 Convergentie en foutenanalyse 89
 - 6.7 Toepassen: Oppervlakte; Investerings 91
- Toets 94

Hoofdstuk 7 Functies van meer variabelen

- 7.1 $z = f(x, y)$ 96
- 7.2 Partiële afgeleiden 97
- 7.3 Hogere partiële afgeleiden 98
- 7.4 Differentialen 101
- 7.5 De totale differentiaal 102
- 7.6 Impliciete functies 104
- 7.7 Toepassen: Niveaukrommen 106
- Toets 108

Hoofdstuk 8 Complexe getallen

- 8.1 Het getal i 111
- 8.2 Rekenen met complexe getallen 113
- 8.3 Modulus, argument en poolvorm 115
- 8.4 De exponentiële vorm 118
- 8.5 Werken met de exponentiële vorm 119
- 8.6 Machten en wortels 121
- 8.7 Toepassen: Complexe impedantie 126
- Toets 128

Hoofdstuk 9 Primitiveren

- 9.1 Rekenregels en standaardintegralen 131
- 9.2 De substitutiemethode 132
- 9.3 Partiële integratie 135
- 9.4 Gebroken functies 1 138
- 9.5 Gebroken functies 2 141
- 9.6 Integralen van goniometrische functies 144
- 9.7 Differentiaalvergelijkingen 146
- 9.8 Toepassen: Differentiaalvergelijkingen 147
- Toets 149

Hoofdstuk 10 Integreren

- 10.1 De bepaalde integraal 151
- 10.2 Oneigenlijke integralen 153
- 10.3 De inhoud van omwentelingslichamen 154
- 10.4 De booglengte van een kromme 155
- 10.5 De oppervlakte van omwentelingslichamen 158
- 10.6 Het z waartepunt van massapunten op één lijn 158
- 10.7 Het zwaartepunt van een vlakke homogene plaat 160
- 10.8 Arbeid 161
- 10.9 Hydrostatische kracht en vloeistofstroom 163
- Toets 164

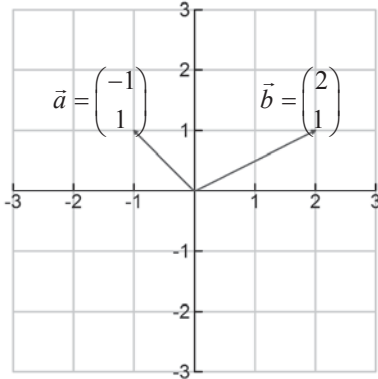
Hoofdstuk 11 Numerieke methoden 2

- 11.1 De trapeziumregel 167
- 11.2 De regel van Simpson 168
- 11.3 Lijnelementen en richtingsvelden 169
- 11.4 De methode van Euler 170
- 11.5 De methode van Heun 172
- 11.6 Toepassen: Dynamische systemen 175
- Toets 176

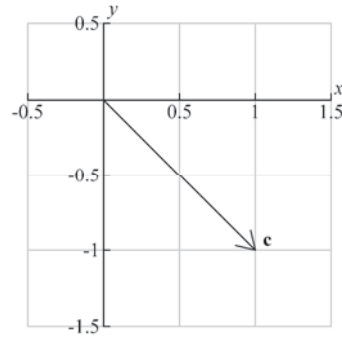
1 Werken met vectoren

1.1 Vectoren in R^2 en R^3

1a Zie figuur.



c



b $2 \cdot \vec{a} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot -1 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

d $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2a $2 \cdot \vec{a} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

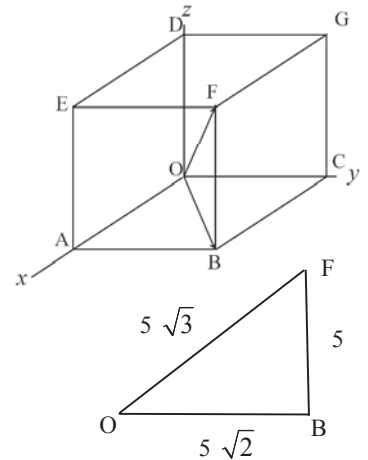
b $\vec{c} = -\vec{b} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot -1 \\ -1 \cdot 2 \\ -1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

3a $OC = 5, CB = 5$

$OB^2 = OC^2 + CB^2 \rightarrow OB = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

b $OF^2 = OB^2 + BF^2 \rightarrow OF = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

c $\sin(\angle FOB) = \frac{BF}{FO} = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
 $\angle FOB = \sin^{-1}(\frac{1}{3}\sqrt{3}) \approx 35,3^\circ$



4a Schrijf de vectoren in de vorm $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, oftewel: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b \overrightarrow{EF} : Coördinaten beginpunt is (2,0,4) met de kentallen $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$;

\overrightarrow{EA} : Coördinaten beginpunt is (2,0,4) met de kentallen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$;

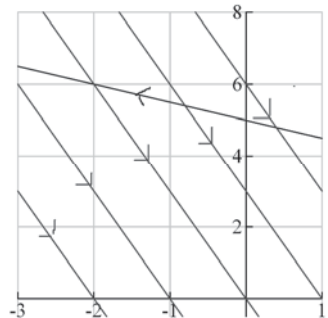
\overrightarrow{ED} : Coördinaten beginpunt is (2,0,4) met de kentallen $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

\overrightarrow{DF} : Coördinaten beginpunt is (0,0,4) met de kentallen $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$;

\overrightarrow{DB} : Coördinaten beginpunt is (0,0,4) met de kentallen $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$

c
$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

5a Zie figuur.
Pijlen naar rechtsonder: het magnetische veld.
Pijl naar linksboven: de stroomintensiteit.



1.2 Bewerkingen met vectoren

$$1a \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3+7 \\ 5+2 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$b \quad \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 - (-2) \\ 2 - 4 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$c \quad 2\vec{a} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d \quad 2\vec{b} + 3\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 7 \\ 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 - 6 \\ 4 + 12 \\ 6 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2a \quad \vec{a} + 1\frac{1}{2}\vec{b} - 4\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \cdot 2 \\ 1\frac{1}{2} \cdot 0 \\ 1\frac{1}{2} \cdot (-1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -25\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$b \quad 3(\vec{a} - 2\vec{b}) + 2\vec{c} = 3 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ 18 \end{pmatrix}$$

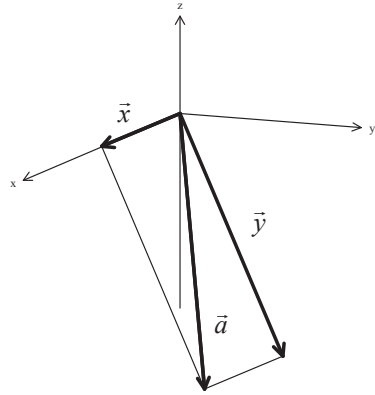
$$3a \quad 2\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \begin{pmatrix} 200 \\ 175 \\ -10 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 87\frac{1}{2} \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$b \quad \vec{y} = \vec{o} - \vec{a} - \vec{b} - \vec{c} - \vec{d} = \begin{pmatrix} -200 \\ -175 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$c \quad \vec{z} = \vec{o} - \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \begin{pmatrix} -280 \\ -215 \\ -150 \end{pmatrix}$$

$$4a \quad \vec{x} + \vec{y} = \vec{a} \rightarrow \vec{y} = \vec{a} - \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b Zie figuur.



$$5 \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6 De resulterende kracht moet $\vec{0}$ zijn. Oftewel, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$

$$\rightarrow \vec{F}_3 = -\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1.3 Inwendig product

$$1a \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$$

$$d \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = -1 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + (-2) \cdot 5 = -21$$

$$b \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 4$$

$$e \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 5$$

$$c \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

$$f \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-3) = 0$$

$$2a \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 1$$

$$\mathbf{b} \quad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 40 \\ -8 \end{pmatrix} = 10 \cdot 16 + 1 \cdot 40 + (-11) \cdot (-8) = 288$$

$$\mathbf{c} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = -2 \cdot (-3) + 1 \cdot (-9) + 5 \cdot 3 = 12$$

$$\mathbf{d} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ -4 \end{pmatrix} \right) = -1 \cdot 5 - 1 \cdot 20 - 1 \cdot 0 = -25$$

$$\mathbf{3} \quad \text{Bijvoorbeeld } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{4} \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{21}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\mathbf{5} \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{17}$$

$$2\vec{a} - 3\vec{b} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ -2-9 \\ 6+3 \end{pmatrix} \rightarrow |2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-11)^2 + 9^2} = \sqrt{203}$$

$$\mathbf{6} \quad \left| \begin{pmatrix} 4 \\ x-2 \end{pmatrix} \right| = 5 \rightarrow \sqrt{4^2 + (x-2)^2} = 5 \text{ beide leden kwadrateren}$$

$$4^2 + (x-2)^2 = 5^2 \rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \text{ ontbinden in factoren}$$

$$(x-5)(x+1) = 0, \rightarrow x_1 = 5 \text{ of } x_2 = -1$$

7a Neem aan dat \vec{a} en \vec{b} tweedimensionale vectoren zijn. Dan geldt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \text{ en } \vec{b} \cdot \vec{a} = b_1 \cdot a_1 + b_2 \cdot a_2 = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\mathbf{b} \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = a_1 \cdot (b_1 + c_1) + a_2 \cdot (b_2 + c_2) = a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot b_2 + a_2 \cdot c_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2. \text{ Oftewel } \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\mathbf{c} \quad \vec{a} \cdot (-\vec{b}) = a_1 \cdot (-b_1) + a_2 \cdot (-b_2) = -a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2$$

$$-\vec{a} \cdot \vec{b} = -a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2 = \vec{a} \cdot (-\vec{b})$$

1.4 De hoek tussen twee vectoren

1 Er geldt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \rightarrow \cos(\alpha) = \frac{-1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{57}} \neq 0$$

Dus de vectoren \vec{a} en \vec{b} staan niet loodrecht op elkaar.

2 Er geldt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \rightarrow 0 = \frac{a \cdot a + 5 \cdot a + 6 \cdot 1}{\sqrt{a^2 + 5^2 + 6^2} \cdot \sqrt{a^2 + a^2 + 1^2}} = \frac{a^2 + 5a + 6}{\sqrt{a^2 + 61} \cdot \sqrt{2a^2 + 1}}$$

Dus de teller is gelijk aan 0: $a^2 + 5a + 6 = 0 \rightarrow (a+3)(a+2) = 0$

$\rightarrow a = -3$ of $a = -2$

3 Stel de vector is $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, dan moet $2a + 2b + 3c = 0$ en $2a + c = 0$.

$$2a = -c \text{ en } -c + 2b + 3c = 2b + 2c = 0.$$

Kies $a = 1$, dan voldoet $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ aan beide voorwaarden.

4 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow -1 \cdot p + p \cdot (-p) + 3 \cdot 2 = 0$

$$-p^2 - p + 6 = 0 \rightarrow (p-2)(p+3) = 0$$

$p = 2$ of $p = -3$

5 Er geldt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \rightarrow \cos(\alpha) = \frac{1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{6}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{6}\right) = 1,40$$

6a $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{s}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\vec{F} \cdot \vec{s}_1 + \vec{F} \cdot \vec{s}_2 + \vec{F} \cdot \vec{s}_3 = 4 \text{ Nm.}$$

b De vector langs de kortste weg van O naar A is $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 + 2 = 4 \text{ Nm.}$$

7 Met bijvoorbeeld $\vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$: W is positief.

Met bijvoorbeeld $\vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$: W is nul.

Met bijvoorbeeld $\vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\vec{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$: W is negatief.

1.5 Uitwendig product

$$1a \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 - (-6) \cdot (-1) \\ -6 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$b \quad (\vec{a} - \vec{b}) \times (3\vec{c}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 9 - (-8) \cdot 6 \\ -8 \cdot 0 - (-1) \cdot 9 \\ -1 \cdot 6 - 5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 93 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$c \quad (-\vec{a} + 2\vec{c}) \times (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-2) - 12 \cdot 1 \\ 12 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-2) \\ -1 \cdot 1 - 0 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -26 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$d \quad (2\vec{a}) \times (-\vec{b} + 5\vec{c}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 13 - (-12) \cdot 11 \\ -12 \cdot (-2) - 2 \cdot 13 \\ 2 \cdot 11 - 8 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 236 \\ -2 \\ 38 \end{pmatrix}$$

$$2a \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_3$$

$$b \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1$$

$$c \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_2$$

$$d \quad (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \times \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3a \quad \vec{a} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot a_3 - a_3 \cdot a_2 \\ a_3 \cdot a_1 - a_1 \cdot a_3 \\ a_1 \cdot a_2 - a_2 \cdot a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \text{ en } -\vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} -b_2 a_3 - (-b_3) a_2 \\ -b_3 a_1 - (-b_1) a_3 \\ a_1 b_2 - (-b_2) a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

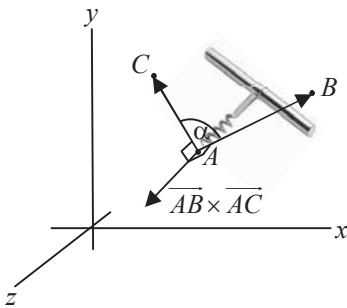
Dus $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$$4a \quad \overline{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \overline{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$b \quad \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b_2 - a_2) \cdot 0 - 0 \cdot (c_2 - a_2) \\ 0 \cdot (c_1 - a_1) - (b_1 - a_1) \cdot 0 \\ (b_1 - a_1) \cdot (c_2 - a_2) - (b_2 - a_2) \cdot (c_1 - a_1) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (b_1 - a_1) \cdot (c_2 - a_2) - (b_2 - a_2) \cdot (c_1 - a_1) \end{pmatrix}$$

c Zie figuur.



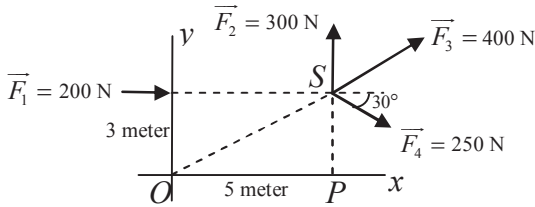
De kurkentrekker draait linksom, oftewel $\overline{AB} \times \overline{AC}$ heeft een positief z kental.

- d Als $(b_1 - a_1) \cdot (c_2 - a_2) - (b_2 - a_2) \cdot (c_1 - a_1) > 0$ wijst $\overline{AB} \times \overline{AC}$ in de positieve z -richting en moet C links van de lijn door A en B liggen.
- e Als $(b_1 - a_1) \cdot (c_2 - a_2) - (b_2 - a_2) \cdot (c_1 - a_1) = 0$, dan liggen \overline{AB} en \overline{AC} in elkaars verlengde, dus C ligt op de lijn door A en B .
- f Als $(b_1 - a_1) \cdot (c_2 - a_2) - (b_2 - a_2) \cdot (c_1 - a_1) < 0$ wijst $\overline{AB} \times \overline{AC}$ in de negatieve z -richting en moet C rechts van de lijn door A en B liggen.

1.6 Toepassen:Uitwendig product

1 $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) \\ (-1) \cdot (-2) - 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

2a $OS = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$



$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 320 \\ 240 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{F}_4 = \begin{pmatrix} 125\sqrt{3} \\ -125 \\ 0 \end{pmatrix}$

a $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -600 \end{pmatrix}$, $\vec{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1200 \end{pmatrix}$, $\vec{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en

$\vec{M}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -375\sqrt{3} - 500 \end{pmatrix}$.

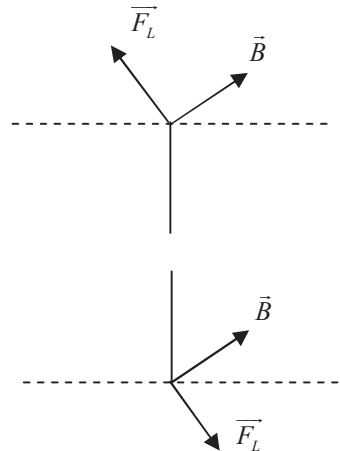
b $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1200 \end{pmatrix}$, $\vec{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 960 \end{pmatrix}$, $\vec{M}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -500 \end{pmatrix}$

3a Zie figuur.

b $|\vec{F}| = h \cdot |\vec{l}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin(\alpha)$

c De Lorentzkrachten staan verticaal en zijn tegengesteld gericht. De Lorentzkracht op de bovenkant van het spoeltje wijst naar boven, en de kracht op de onderkant wijst naar beneden.

d $|\vec{M}| = \frac{1}{2} l \cdot |\vec{F}_L| \cdot \sin(\alpha)$



1.7 Vectorfuncties

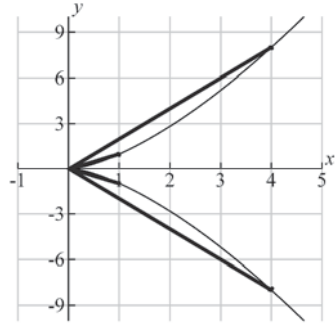
1a $\vec{r}(-2) = \begin{pmatrix} (-2)^2 \\ (-2)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix},$

$\vec{r}(-1) = \begin{pmatrix} (-1)^2 \\ (-1)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0^2 \\ 0^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 1^2 \\ 1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

$\vec{r}(2) = \begin{pmatrix} 2^2 \\ 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

b Zie figuur.



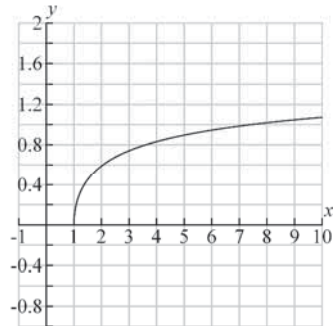
c $x = t^2 \rightarrow t = \sqrt{x}$ of $-\sqrt{x}$
 $y = t^3 \rightarrow y = (\sqrt{x})^3 = x\sqrt{x}$ of $y = (-\sqrt{x})^3 = -x\sqrt{x}$

2a $t \geq 0$. Je kunt geen wortel uit een negatief getal trekken.

b $x = e^{2t} \rightarrow \ln(x) = 2t \rightarrow t = \frac{1}{2} \ln(x)$

$y = \sqrt{t} \rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{2} \ln(x)}$

c Zie figuur.



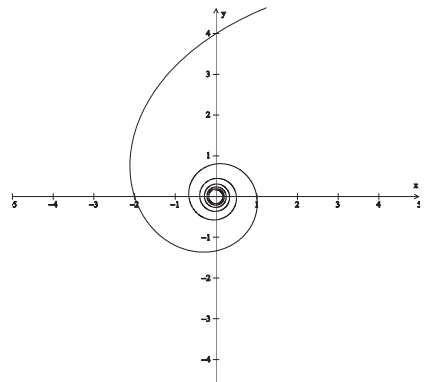
3a $|\vec{r}(t)| = \sqrt{\left(\frac{1}{t} \cos(2\pi t)\right)^2 + \left(\frac{1}{t} \sin(2\pi t)\right)^2} = \frac{1}{t^2} (\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t))$

$\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t) = 1$ dus

$|\vec{r}(t)| = \sqrt{\frac{1}{t^2}} = \frac{1}{t} \quad (t > 0)$

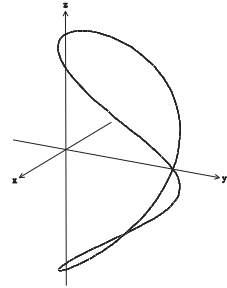
b $|\vec{r}(t)|$ geeft aan dat de lengte van de vector snel afneemt.

De sinus en cosinus functie zorgen voor een draaiing om de y-as.



$$\begin{aligned}
 \mathbf{4a} \quad |\vec{r}(t)| &= \sqrt{(\cos(t)\sin(t))^2 + ((\sin(t))^2)^2 + (\cos(t))^2} \\
 &= \sqrt{(\sin(t))^2 ((\cos(t))^2 + (\sin(t))^2) + (\cos(t))^2} \\
 &= \sqrt{(\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} = \sqrt{1} = 1
 \end{aligned}$$

b Zie figuur.



$$\begin{aligned}
 \mathbf{5a} \quad |\vec{I}(t)| &= \sqrt{(-7\sin(7t))^2 + (7\cos(7t))^2 + 1^2} = \\
 &= \sqrt{(-7)^2(\sin(7t))^2 + 7^2(\cos(7t))^2 + 1^2} = \\
 &= \sqrt{49((\sin(7t))^2 + (\cos(7t))^2) + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{b} \quad \vec{I}(t) \times \vec{B} = \begin{pmatrix} 7\cos(7t) \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - (-7\sin(7t)) \cdot 0 \\ -7\sin(7t) \cdot 1 - 7\cos(7t) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -7(\sin(7t) + \cos(7t)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 |\vec{I}(t) \times \vec{B}| &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-7(\sin(7t) + \cos(7t)))^2} = \\
 &= \sqrt{2 + 49(\sin(7t) + \cos(7t))^2} = \\
 &= \sqrt{51 + 98\sin(7t)\cos(7t)}
 \end{aligned}$$

1.8 Toepassen: Vectorfuncties

$$\begin{aligned}
 \mathbf{1a} \quad |\vec{v}(t)| &= \sqrt{(-R\omega\sin(\omega t))^2 + (R\omega\cos(\omega t))^2} \\
 &= \sqrt{R^2\omega^2((\sin(\omega t))^2 + (\cos(\omega t))^2)} = \sqrt{R^2\omega^2} = R\omega
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\vec{a}(t)| &= \sqrt{(-R\omega^2\cos(\omega t))^2 + (-R\omega^2\sin(\omega t))^2} \\
 &= \sqrt{R^2\omega^4((\cos(\omega t))^2 + (\sin(\omega t))^2)} = \sqrt{R^2\omega^4} = R\omega^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b} \quad \vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) &= R\cos(\omega t) \cdot (-R)\omega\sin(\omega t) + R\sin(\omega t) \cdot R\omega\cos(\omega t) \\
 &= -R^2\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t) + R^2\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) &= -R\omega\sin(\omega t) \cdot (-R)\omega^2\cos(\omega t) + R\omega\cos(\omega t) \cdot (-R)\omega^2\sin(\omega t) \\
 &= R^2\omega^3\sin(\omega t)\cos(\omega t) - R^2\omega^3\sin(\omega t)\cos(\omega t) = 0
 \end{aligned}$$

c Het inwendig product is 0. Dus staan ze loodrecht op elkaar.

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{s}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{s}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{R\cos(\omega t) \cdot (-R)\omega^2\cos(\omega t) + R\sin(\omega t) \cdot (-R)\omega^2\sin(\omega t)}{R \cdot R\omega^2}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{-R^2\omega^2}{R\omega^2} = -1 \rightarrow \alpha = \pi.$$

Oftewel de vectoren hebben een tegengestelde richting.

$$2a \quad |\vec{v}(t)| = \sqrt{(\sin(t))^2 + (\cos(4t))^2 + (\cos(2t))^2}$$

b Hiervoor heb je $\vec{r}(t)$ nodig. Deze wordt gegeven door de snelheidsvector te integreren:

$$\rightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) + C_1 \\ \frac{1}{4}\sin(4t) + C_2 \\ \frac{1}{2}\sin(2t) + C_3 \end{pmatrix}. \text{ De constanten bepalen we m.b.v. } \vec{r}(0):$$

$$\begin{cases} -\cos(0) + C_1 = -1 \rightarrow C_1 = 0 \\ \frac{1}{4}\sin(4 \cdot 0) + C_2 = 1 \rightarrow C_2 = 1 \\ \frac{1}{2}\sin(2 \cdot 0) + C_3 = 2 \rightarrow C_3 = 2 \end{cases} \rightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \frac{1}{4}\sin(4t) + 1 \\ \frac{1}{2}\sin(2t) + 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dus voor } t = \frac{1}{4}\pi \text{ krijg je } \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \text{ De afstand tot de oorsprong}$$

wordt gegeven door $|\vec{r}(t)|$.

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 + \left(2\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{7\frac{3}{4}} \approx 2,78$$

$$3a \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ z''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b \quad \vec{r}(t) \cdot \vec{a}(t) = \sin(t) \cdot (-\sin(t)) + \cos(t) \cdot (-\cos(t)) + t \cdot 0 \\ = -(\sin(t))^2 - (\cos(t))^2 = -1$$

$$c \quad \vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = \cos(t) \cdot (-\sin(t)) + (-\sin(t)) \cdot (-\cos(t)) + 1 \cdot 0 \\ = -\cos(t)\sin(t) + \cos(t)\sin(t) = 0.$$

Het inwendig product is 0. Dus staan ze loodrecht op elkaar.

$$4a \quad a = |\vec{a}(t)| = R\omega^2 \text{ (zie vraag 1a)}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow a = R \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{(2\pi)^2 R}{T^2}$$

$$b \quad F = m \cdot a = m \cdot \frac{(2\pi)^2 R}{T^2}. \text{ Ook geldt } F = G \frac{mM}{R^2}$$

$$\text{Gelijkstellen geeft: } m \cdot \frac{(2\pi)^2 R}{T^2} = G \frac{mM}{R^2} \rightarrow \frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

c Afstand ten opzichte van centrum aarde is:

$$R = \sqrt[3]{\frac{GM \cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,6726 \times 10^{-11} \cdot 5,976 \times 10^{24} \cdot (24 \cdot 60 \cdot 60)^2}{4\pi^2}} \approx 4,224 \times 10^7$$

Afstand ten opzichte van het aardoppervlak is:

$$4,224 \times 10^7 - 6,378 \times 10^6 = 3,586 \times 10^7 \text{ m}$$

Toets

$$1a \quad 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$b \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -21, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = -19$$

$$c \quad |\vec{a}| = \sqrt{14}, \quad |\vec{b} - \vec{c}| = 3\sqrt{10}$$

$$d \quad \vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$2 \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ of } \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

$$3 \quad \text{De cosinus van de hoek tussen de vectoren } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ is } \frac{1}{6}.$$

$$4 \quad W = 10 \cdot 200 \cdot \cos 60 = 1000 \text{ J}.$$

$$5 \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow v = \sqrt{\frac{5}{4} + \cos^2 t}. \quad v \text{ is maximaal voor } t = k \cdot \pi.$$

$$6a \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 6t^2 \\ -3t^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 12t \\ -6t \end{pmatrix}.$$

$$b \quad \vec{r} \cdot \vec{a} = 36t^4 + 6t.$$

$$c \quad \vec{v} \cdot \vec{a} = 18t^3 + 72t^3 + 18t^3 = 108t^3$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{9t^4 + 36t^4 + 9t^4} = 3t^2 \sqrt{6}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{36t^2 + 144t^2 + 36t^2} = 6t\sqrt{6}.$$

$$\cos(\alpha) = \frac{108 \cdot t^3}{18 \cdot 6 \cdot t^3} = 1. \quad (\text{Beide vectoren liggen in elkaars verlengde, de beweging is langs een rechte lijn.})$$