Wiskunde

voor het hoger onderwijs

DEEL 1

Noordhoff Uitgevers

Th.M. van Pelt
R.B.J. Pijlgroms
W.V. Smeets
J.L. Walter

Zevende druk

Wiskunde voor het hoger onderwijs

Deel 1

Wiskunde voor het hoger onderwijs Deel 1

Th.M. van Pelt

R.B.J. Pijlgroms

W.V. Smeets

J.L. Walter

Noordhoff Uitgevers Groningen/Houten

Ontwerp omslag: G2K designers Groningen/Amsterdam
Omslagillustratie: G2K designers Groningen/Amsterdam

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Hoger Onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen, e-mail: info@noordhoff.nl

4 5 6 7 8 / 14 13 12 11 10

ISBN (ebook) 978 90 01 84846 0
ISBN 978 90 01 06745 8
NUR 123

Aan de student – Wiskunde?

Dit boek hebben we geschreven met jou voor ogen, niet in de eerste plaats voor de docent. Het voorwoord bestemd voor de docenten staat dan ook verderop in deze inleiding.
Wij hebben ons best gedaan om te laten zien dat wiskunde een nuttig en handig stuk gereedschap is.

In je toekomstig beroep en in de vakliteratuur – of deze nu technisch of economisch van aard is – blijkt wiskunde een belangrijk middel te zijn om er processen en situaties uit de praktijk mee te beschrijven. Wiskundige begrippen en formules spelen dan ook vaak de rol van communicatiemiddel. Zo is een *afgeleide* van een grootheid niets anders dan een maat voor de verandering van die grootheid in de tijd of de ruimte en dat begrip kom je bijna overal tegen waar wiskunde wordt toegepast. Een *integraal* is een vaak voorkomend begrip om ingewikkelde processen stap voor stap te beschrijven en te berekenen.

Over deze twee kernbegrippen, *afgeleide en integraal*, gaat dit boek. Ze zijn de basis van wat men de *hogere wiskunde* noemt, ook wel *differentiaal- en integraalrekening*. (Engelse leerboeken hierover hebben vaak het woord *calculus* in de titel.)
Het eerste hoofdstuk, hoofdstuk 0, begint nogal eenvoudig. Wat rekenen met letters, zo lijkt het. Maar het is belangrijk dat je die rekenvaardigheden goed onder de knie krijgt. Natuurlijk kan de computer je tegenwoordig veel saai rekenwerk uit handen nemen: dat gebeurt dan ook in dit boek. Maar ook dan is beheersing van de basisbegrippen en basisvaardigheden noodzakelijk, evenals in de meeste beroepsgerichte vakken.
In hoofdstuk 1 staan alle oude en enkele nieuwe wiskundige begrippen bij elkaar die je nodig hebt om de differentiaal- en integraalrekening goed te kunnen toepassen in de daarop volgende hoofdstukken. Een echt nieuw onderwerp vormen de complexe getallen, en wellicht ook rijen en reeksen.
In hoofdstuk 2 zijn alle onderwerpen en toepassingen te vinden die verband houden met het begrip *afgeleide*. Het onderwerp is niet nieuw; de verdieping en een aantal toepassingen zijn wel nieuw.
Hoofdstuk 3 gaat over het oplossen van ingewikkelde, niet-lineaire vergelijkingen met één onbekende, waarbij je de computer dient te gebruiken. Bij twee van de behandelde methoden wordt gebruik gemaakt van de differentiaalrekening. Deze stof is in de vooropleidingen niet aan bod gekomen.
In hoofdstuk 4 vind je het voor de meeste propedeuse-studenten nieuwe onderwerp *integraalrekening*. De theorie wordt opgebouwd vanuit het begrip *oppervlakte*, net zoals dat gebeurde bij het ontstaan van dit onderdeel van de wiskunde. Theorie, oefeningen en toepassingen komen ook hier alledrie aan bod.

Elk hoofdstuk is opgedeeld in leereenheden.
Iedere leereenheid begint met een praktijkvoorbeeld. Soms zal dat voorbeeld niet direct in verband staan met jouw toekomstig beroep of jouw opleiding. Maar bedenk wel dat beroepen niet zo netjes zijn ingedeeld als de opleidingen in het hbo. Later kun je in soorten werkzaamheden verzeild raken waarvan je nu nog geen idee hebt. Veel beroepen zijn multidisciplinair.

In de studiewijzer hierna lees je hoe je volgens de schrijvers (die allemaal wiskundeles geven) het beste de stof kunt leren beheersen, en ook hoe je het uitwerkingenboek het beste kunt gebruiken.

We vinden het belangrijk je te laten zien dat wiskunde gewoon mensenwerk is, dus werk van mensen die om praktische redenen iets slims bedachten. Bijvoorbeeld om veel saai rekenwerk te ontlopen of om iets zeker te willen weten. Vandaar de historische intermezzo's. Overigens, in de bloeitijd van de wiskunde uit dit boek, de 17de en de 18de eeuw, genoot de wiskunde meer aanzien dan tegenwoordig, vanwege de mooie opbouw en de juistheid van de uitspraken die het vak voortbracht. Wiskunde had toen nog de status van een 'leer der zekerheden'. Men noemde wiskunde in die tijd *Wisconst*. Dat woord is afkomstig van de Nederlander Simon Stevin, en betekende letterlijk 'Zekerheidskunst'. Nederlands is overigens bijna de enige taal ter wereld met een eigen woord voor wiskunde. In de meeste landen wordt een variant op het oud-Griekse woord *mathema* gebruikt dat 'les' of 'wetenschap' betekende (Engels: mathematics, Duits: Mathematik, Spaans: matemáticas, enzovoort).

Om een lang verhaal kort te maken: we hebben een boek willen maken waardoor de aardigheid en het nut van de wiskunde duidelijk worden. Je moet wel zelf de tijd nemen om door oefening de nodige vaardigheden op te bouwen. Als je dat doet met dit boek, en je docent helpt je nog een handje, dan zul je zien dat het loont met wiskunde bezig te zijn en dat het nog leuk kan zijn ook!

Wiskunde? ... Wis en waarachtig!

Voorjaar 2006

De auteurs.

Studiewijzer

Dit boek is gemaakt om zelfstandig mee te werken. Het is dan ook meer een werkboek dan een traditioneel studieboek. Ga er dan ook zo mee om: probeer de voorbeelden te begrijpen en de daarop volgende opdrachten zelf te maken. *Leren is doen!*

Het boek heeft vijf hoofdstukken. Ieder hoofdstuk bestaat uit 3 tot 6 leereenheden. De docent zal zeker een keuze maken voor dié eenheden die voor jou van betekenis zijn. De leereenheden zijn onderverdeeld in paragrafen, die nauw op elkaar aansluiten.
In schema is de opbouw per hoofdstuk als volgt:

Hoofdstuk 1
Inleidende Praktijksituatie
- Leereenheid 1.1
  - Praktijksituatie
    - Paragraaf 1.1.1
      - Paragraaf 1.1.2
        - Paragraaf 1.1.3
          - Toets leereenheid 1.1
- Leereenheid 1.2
- Leereenheid 1.3
- Leereenheid 1.4
  - Praktijksituatie
    - Paragraaf 1.4.1
      - Paragraaf 1.4.2
        - Paragraaf 1.4.3
          - Toets leereenheid 1.4

Samenvatting
Eindtoets hoofdstuk 1

Probeer steeds de stof per paragraaf te beheersen en af te sluiten met de bijbehorende vraagstukken. Als dat nog niet zo goed lukt, ga dan niet verder met de volgende paragraaf, maar ga op zoek naar hulp om na te gaan wat er nog aan schort.
Beoordeel jezelf per paragraaf!
Om te controleren of je een hele leereenheid hebt begrepen, kun je de toets maken die aan het einde van iedere leereenheid is opgenomen. Lees voordat je daaraan begint, de samenvatting even door; dat helpt je om wat afstand te nemen en te overzien waar het nu in hoofdlijnen op neer komt in die leereenheid.
Als in het lesplan van jouw opleiding een heel hoofdstuk wordt voorgeschreven, maak dan ook de eindtoets daarvan. Als dat lukt, zit je op het niveau van je proefwerk of tentamen.

De hulp van je medestudenten en je leraar is onmisbaar. Van je leraar hoor je wat je precies uit dit boek moet leren en hij of zij zal je op weg helpen in de stof. Je medestudenten zullen tegen vergelijkbare problemen als jij aanlopen. Twee weten meer dan een. Maak daar gebruik van. Als je iets niet begrijpt, laat het er dan niet bij zitten en denk niet bij je zelf: het komt nog wel, maar vraag het aan je leraar of je medestudenten. Iets leren gaat nu eenmaal nooit vanzelf. Leren betekent kennis veroveren, door zelf iets te doen: erover te praten en ermee te oefenen.

Mindmap

Op een aantal plekken in het boek is aan het einde van een leereenheid een zogenoemde *mindmap* opgenomen. Deze paginagrote schema's geven een visueel overzicht van een hoeveelheid leerstof. De (vrij losse) regels voor het opstellen van deze ideale hulpmiddelen voor het samenvatten, memoriseren, leren en herhalen van samenhangende delen van de lesstof zijn op vele plekken op het wereldwijde web te vinden.

In het uitwerkingenboek staan de uitwerkingen van bijna alle opdrachten, vraagstukken en toetsen. Heel verleidelijk dus, maar wel erg dom, om snel te gaan lezen hoe de opgaven gemaakt kunnen worden. Dat mag wel, maar je moet het eerst zelf geprobeerd hebben, anders begrijp je het belang van de aanwijzing of de eerste stap van de uitwerking toch niet en leer je er niets van.

Lees elke inleiding: daarin staan beknopt de inhoud en het nut van een hoofdstuk of leereenheid. In de verantwoording van ieder hoofdstuk is vastgelegd wat het nut en het doel van het gehele hoofdstuk is. Ter verduidelijking is er telkens een praktijkvoorbeeld gegeven.

Een mens onthoudt:
10% van wat hij hoort
20% van wat hij ziet
80% van wat hij doet

Veel plezier en succes met het *doen* van wiskunde.

Verklaring van de margetekens

geschat aantal studiebelastingsuren

computeralgebra: theorie en/of -vraagstuk(ken)

Aan de docent – Woord vooraf bij de zevende druk

De positie en de rol van het vak wiskunde in het hoger onderwijs en daarbuiten blijft aan veranderingen onderhevig. Wat is dat niet?
Naast de voortdurende inhoudelijke veranderingen in het voorbereidend wiskundeonderwijs is er nog de groei in het aantal verschillende instromen in het hbo die om aandacht vragen bij het verzorgen van het vak wiskunde. Hbo-opleidingen worden daardoor geconfronteerd met een grote variatie in kennis en vaardigheden bij de instromende studenten. Een greep uit die instroom: havo met verschillende profielen en keuzevakken, variabele schoolexamens voor havo- en vwo-leerlingen, het bve-onderwijs (beroepsonderwijs en volwasseneneducatie), de zij-instromers aan snijvlakopleidingen, enz.

Veel andere ontwikkelingen met invloed op vorm, omvang en inhoud via het wiskundeonderwijs vergen voortdurende aanpassing van de leermiddelen. Wij denken aan:

- de veranderingen in de inhoud van het mbo- en havo-wiskundeonderwijs, wat onontkoombaar leidt tot een stapje terug in diepgang en complexiteit van de hbo-wiskunde;
- de brede invoering van projectengestuurd en thematisch onderwijs in het hbo met het bijbehorende vraaggestuurde flankerende wiskundeonderwijs;
- de noodzakelijke aanpassing van didactische werkvormen, waardoor het zelfstandig werken, en wellicht ook het zelfstandig leren, kan worden gestimuleerd;
- het terugdringen van de directe contacttijd student-docent;
- de geleidelijk op gang komende invoering van de onwaarschijnlijk goede computeralgebraprogramma's die veel parate kennis overbodig lijken te maken;
- het – zoal niet op school dan toch altijd thuis – terbeschikking staande fantastische hulpmiddel: het spreadsheetprogramma;
- het aantrekkelijker maken van technische studies voor meisjes.

Al deze aspecten zijn voor ons voldoende aanleiding om onze (en uw) methode opnieuw aan te passen. Eerdere wijzigingen zijn consistenter doorgezet. Maar er is meer. In de volgende lijst staan beknopt alle essentiële ingrediënten waarmee de auteurs inspelen op de hierboven geschetste problematiek en ontwikkelingen.

- de onderwerpen worden waar mogelijk vanuit alledaagse praktijkvoorbeelden opgebouwd;
- opdrachten in de leer-/leesteksten zijn de motor achter de leeractiviteiten geworden, het aantal is uitgebalanceerd;
- de hoofdstukken zijn ingedeeld in logisch samenhangende, studeerbare leereenheden: hieruit kunnen gemakkelijk opleidingsgerichte keuzes worden gemaakt;
- ieder hoofdstuk en iedere leereenheid begint met een verantwoording van de leerstof;
- leereenheden bestaan uit een aantal paragrafen die worden afgesloten met vraagstukken. Aan het begin van iedere leereenheid wordt ook een schatting van het gemiddeld aantal studiebelastingsuren aangegeven;

- leereenheden worden afgesloten met een terugblik en met een toets; hoofdstukken worden afgesloten met een geïntegreerde eindtoets;
- computeralgebrapakketten en spreadsheetprogramma's worden ingezet als de berekeningen met de hand niet meer lonend of onmogelijk zijn;
- de methode is bruikbaar voor *Derive- Maple-*, en *Mathematica*-gebruikers;
- het aantal complexe vraagstukken en bewijzen van stellingen is sterk gereduceerd; een aantal complexere toepassingen is toegevoegd, mede met het oog op projectopdrachten;
- in het uitwerkingenboek is het aantal uitwerkingen iets verminderd, van elke soort vraagstukken is echter wel minstens één uitwerking aanwezig;
- het uitwerkingenboek heeft een nieuw laatste hoofdstuk bestaande uit een bloemlezing van opgaven die gemaakt kunnen worden met computeralgebra of een spreadsheetprogramma. De uitwerkingen worden gegeven in de docentenhandleiding op de website www.

In deze druk is de lay-out en het format verder verbeterd. Onze speciale dank gaat hierbij uit naar de uitgever en zijn redactiemedewerkers.

Wij zijn van mening dat dit boek door zijn structuur zeer flexibel is en uitermate geschikt voor gebruik in de vele leerwegen die ons onderwijs tegenwoordig vraagt. De student kan met dit boek zelf meer sturing aan het eigen leerproces geven, meer inzicht opbouwen in het nut van de wiskunde en naar verwachting meer zelfstudietijd in zijn/haar wiskundestudie stoppen. De (wat terugtredende) docent (lees: coach) zal erop moeten toezien dat dat gebeurt en, mocht dat niet gebeuren, moeten inspringen om de leeractiviteiten te sturen. Daarmee is de rol van de docent in het leerproces van de studenten belangrijker geworden, en veel boeiender. Dit boek helpt de docent om deze nieuwe rol mogelijk en aantrekkelijk te maken. Blijft overeind: de student is aan zet.

Een bijzonder woord van dank richten de auteurs aan studenten van de Haagse Hogeschool voor hun ingebrachte illustraties bij de titels van enkele leereenheden.

Voorjaar 2006

De auteurs:
Theo van Pelt, Avans Hogeschool, Tilburg
Rom Pijlgroms, Hogeschool van Amsterdam
Wim Smeets, Hogeschool van Amsterdam
Jan Walter, Saxion Hogeschool Enschede

Over de auteurs

Theo van Pelt studeerde MO-wiskunde aan de Katholieke Leergangen te Tilburg. Hij heeft negen jaar wiskunde gegeven in het voortgezet onderwijs. Thans is hij verbonden aan de Hogeschool Brabant als docent wiskunde, statistiek, informatica en bedrijfseconomie. Tevens is hij tot 2001 als onderwijskundig medewerker werkzaam geweest bij verschillende opleidingen van de Avans Hogeschool.

Rom Pijlgroms na de HTS-Elektrotechniek, beëindigde hij zijn studie Theoretische Natuurkunde aan de Universiteit van Amsterdam met een promotie over relativistische golfvergelijkingen (1980). Tot 2004 was hij als docent verbonden aan – wat nu heet – het Instituut Informatica van de Hogeschool van Amsterdam. Hij doceert wiskunde, statistiek, informatica, intelligente systemen en fuzzy logic.

Wim Smeets studeerde wis- en natuurkunde aan de Universiteit van Amsterdam. Aan de Hogeschool van Amsterdam vervulde hij naast zijn docentschap verschillende functies binnen de organisatie. Hij is nu nog actief bij de aansluitingscursus wiskunde voor de technische opleidingen. Zijn interesse ligt vooral bij de toepassingen van de wiskunde, waarbij gebruik gemaakt wordt van computers, zoals discrete en numerieke wiskunde en statistiek.

Jan Walter studeerde toegepaste wiskunde aan de Universiteit Twente. Na zijn studie werd hij docent wiskunde en informatica aan de HTS te Hengelo (die inmiddels is opgegaan in de Saxion Hogeschool Enschede). Momenteel is hij als docent wiskunde en opleidingscoördinator Vastgoed en Makelaardij verbonden aan Academie Ruimtelijke Ontwikkeling en Bouw van de Saxion Hogescholen.

Inhoud

Hoofdstuk 3
Het oplossen van niet-lineaire vergelijkingen *279*

Hoofdstuk 4
Integraalrekening *337*

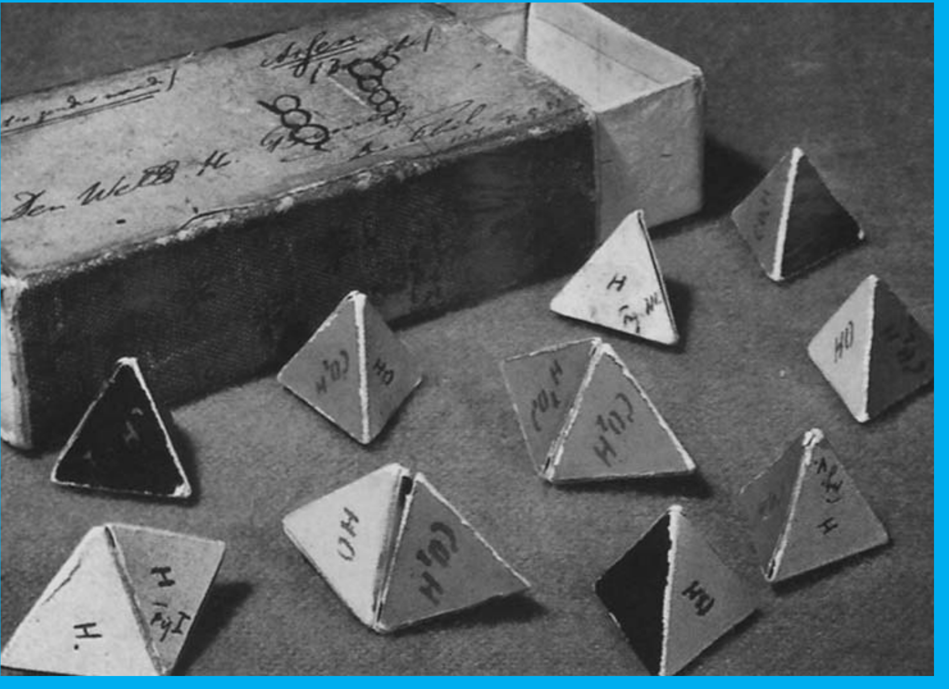
0 Basiswiskunde

Als je loopt, loop dan;
als je zit, zit dan.
En zit vooral niet te wiebelen.
[Zen]

Wiskunde is voor de meesten van jullie een vak waarmee concrete problemen uit de beroepspraktijk kunnen worden opgelost. Daarbij moet soms veel worden gerekend met letters en wiskundige functies. In je vooropleiding heb je dat ook al ervaren, maar in het hoger onderwijs geldt dat nog sterker. De toestandsvergelijking voor een ideaal gas is niet meer eenvoudig $pV = RT$, maar $(p + a/V^2)(V - b) = RT$; als je dan p moet uitdrukken in V en T, dan is dat een stuk lastiger dan in $pV = RT$. Trillingen die uitdempen hebben een vergelijking voor de uitwijking u, die bijvoorbeeld gelijk kan zijn aan $u(t) = A \cdot 2^{-t} \cdot \sin(2\pi t)$. Een schets van u als functie van t is nu

moeilijker dan van een 'gewone' bekende harmonische trilling $A \cdot \sin(2\pi t)$. Om zo'n grafiek van $u(t) = A \cdot 2^{-t} \cdot \sin(2\pi t)$ later, in de volgende hoofdstukken, te kunnen maken, heb je de basiswiskunde nodig.

Een onderzoeker voert vaak experimenten uit ten behoeve van zijn onderzoek. Wanneer de resultaten van het onderzoek zijn uit te drukken in een verklarende variabele en een te verklaren variabele worden deze resultaten uitgezet in een rechthoekig assenstelsel.
Om het proces te kunnen beschrijven moet daarna gezocht worden naar het functievoorschrift dat het verband tussen deze variabelen weergeeft.
Om al dit soort redenen is het nuttig de basiswiskunde goed te beheersen.
Bijna alle stof uit dit hoofdstuk heb je al eens in je vooropleiding gehad. De behandeling van de stof is dan ook soms erg beknopt, omdat we ervan uitgaan dat je de eigenschappen en formules alleen hoeft op te frissen. De opdrachten, voorbeelden en vraagstukken zijn er om de basisvaardigheden verder te oefenen.
Mocht je toch nog moeite hebben met sommige onderwerpen in dit hoofdstuk, bestudeer dan in overleg met je lerares of je leraar de overeenkomstige hoofdstukken uit deel 0 van deze serie.



Leereenheid 0.1

Elementaire algebra

Deze leereenheid zal, afhankelijk van jouw voorkennis, 6 tot 10 klokuren in beslag nemen.

In deze leereenheid ga je veel oefenen met breuken, merkwaardige producten en oneigenlijke machten. Veel nieuwe theorie kom je in deze leereenheid niet tegen. Mocht je moeilijkheden ondervinden met de theorie, vraag dan aan je leraar of je delen van de hoofdstukken 1 tot en met 7 uit deel 0 van deze serie alsnog moet opfrissen.

Hiernaast geven we een eenvoudig voorbeeld ter illustratie om de zin van deze leereenheid aan te geven.

Een cilinder met straal r en hoogte h (beide in cm) heeft een totale oppervlakte van $2\pi rh + 2\pi r^2$ [cm^2].

Als we willen weten hoeveel de totale inwendige oppervlakte afneemt als r afneemt met c [cm], dan moeten we berekenen hoe groot het verschil is tussen $2\pi rh + 2\pi r^2$ en $2\pi(r-c)h + 2\pi(r-c)^2$.

Opdracht **1** Als we in voorgaand voorbeeld de straal en de hoogte af laten nemen met c [cm], laat dan zien dat het verschil in volume gevonden wordt door te berekenen: $\pi r^2 h - \pi(r-c)^2(h-c)$.

0.1.1 Verzamelingen van getallen en het symbool ∞

Verzamelingen van getallen

Voordat we de onderwerpen breuken, merkwaardige producten en oneigenlijke machten gaan bespreken, eerst iets in zijn algemeenheid over getallen.

We houden in dit boek een vaste notatie aan voor deelverzamelingen van de reële getallen. Hiermee kunnen we snel en duidelijk wiskundige eigenschappen beschrijven en oplossingen van ongelijkheden makkelijk aangeven.

$\mathbb{N}$ is de verzameling van alle *natuurlijke* getallen, in verzamelingnotatie:
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

$\mathbb{N}^+$ is de verzameling van alle *positieve natuurlijke* getallen, in verzamelingnotatie:
$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$\mathbb{Z}$ is de verzameling van alle *gehele* getallen:
$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, -4, \ldots\}$

Hiermee staat vast dat het getal *nul* niet positief en niet negatief is.
Deze gehele getallen ($\mathbb{Z}$) worden in de computerwereld 'integers' genoemd.

Opdracht **2** Onderzoek of ieder getal uit $\mathbb{N}$ ook in $\mathbb{Z}^+$ zit.

$\mathbb{Q}$ is de verzameling van alle breuken (*rationale* getallen); $\mathbb{Q}$ bezit de gebroken getallen maar ook alle gehele getallen.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, \text{ met alle } p \text{ en } q \text{ in } \mathbb{Z}, \text{ en } q \neq 0 \right\}$$

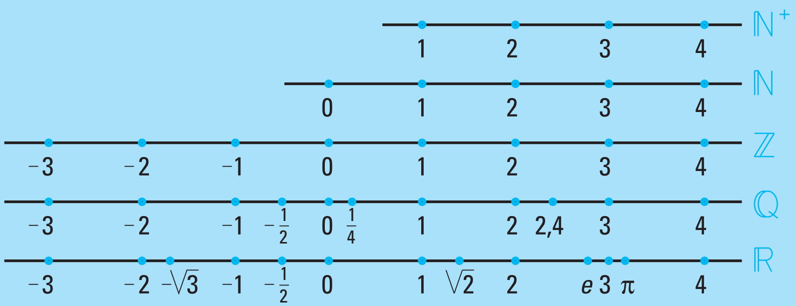
$\mathbb{Q}^+$ is de verzameling van alle positieve getallen uit $\mathbb{Q}$
$\mathbb{Q}^-$ is de verzameling van alle negatieve getallen uit $\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$ is de verzameling van alle reële getallen. Alle elementen uit $\mathbb{R}$ zijn op een *getallenrechte* af te beelden en omgekeerd hoort bij ieder punt op de getallenrechte precies één getal uit $\mathbb{R}$ (zie figuur 0.1). Reële getallen zijn dus getallen als $\sqrt{2{,}8}$, π, ${}^2\log 6{,}3$ en het getal e, dat we later nog zullen leren kennen. Ook bij reële getallen maken we onderscheid tussen positieve en negatieve getallen:
$\mathbb{R}^+$ is de verzameling van alle positieve reële getallen.
$\mathbb{R}^-$ is de verzameling van alle negatieve reële getallen.
Wanneer we de verzameling $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^-$ bij elkaar voegen, krijgen we de verzameling $\mathbb{R}$ waar het getal 0 uit weggelaten is. Notatie: $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Opdracht **3** Ga na of de volgende bewering juist is: alle getallen uit $\mathbb{Z}$ komen ook voor in $\mathbb{R}$.

We komen ook soms de notatie tegen voor de verzameling van alle positieve reële getallen met het getal 0, genoteerd als $\mathbb{R}^+_0$.

Figuur 0.1 **De getallenrechte**



Opdracht **4** Ga na of de volgende bewering juist is: $\mathbb{Q}^+$ is een deelverzameling van $\mathbb{R}^+_0$.

We beschouwen a in $\mathbb{R}$ en b in $\mathbb{R}$. We weten dat geldt:

$$\frac{a}{b} = p \Leftrightarrow a = bp, \text{ als tenminste } b \neq 0 \text{ is} \qquad [1]$$

Deze eigenschap is, hoe eenvoudig ook, erg belangrijk in de reële getallen. Uit die eigenschap volgt:

1 $\frac{0}{b} = 0 \quad (b \neq 0)$

2 $\frac{a}{0}$ is onmogelijk als $a \neq 0$

3 $\frac{0}{0}$ is onbepaald

Opdrachten **5** Onderbouw eigenschap 2 door [1] te gebruiken.

Aanwijzing:

$\frac{a}{0} = p$ leidt tot ongelukken als we [1] toepassen.

6 Onderbouw eigenschap 3 door $\frac{0}{0}$ gelijk te stellen aan p en vervolgens [1] toe te passen.

Delen door 0 levert dus problemen op. We zullen de notaties $\frac{a}{0}$ en $\frac{0}{0}$ dan ook niet meer gebruiken.

Het symbool ∞

Het symbool ∞ wordt vaak *bij* de beschrijving van berekeningen gebruikt, nooit *in* berekeningen. Het is geen symbool voor een getal, maar het geeft aan dat een zekere getalwaarde onbegrensd zal toenemen.

Zo zal de waarde van $\frac{a}{b}$, als b steeds kleiner wordt gekozen, onbegrensd toenemen (als $a \neq 0$ is). Een veelgebruikte beschrijving hiervoor is:

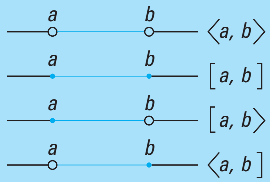
$$\lim_{b \to 0} \frac{a}{b} = \infty$$

Belangrijk is dat ∞ *geen* getal is. We kunnen er dus ook niet mee rekenen. Uitdrukkingen als $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ enz. zijn dus *zinloos*. Net als $\frac{0}{0}$ noemt men die uitdrukkingen wel 'onbepaalde vormen'.

Intervallen

Sommige deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn zogenaamde *intervallen,* d.w.z. 'aaneengesloten delen' van $\mathbb{R}$. Voor a en b in $\mathbb{R}$ en $a < b$ definiëren we een viertal intervallen (zie figuur 0.2).

Figuur 0.2 **Eindige intervallen**



Definitie

Een open interval is een deelverzameling van $\mathbb{R}$ die bestaat uit de elementen x in $\mathbb{R}$ waarvoor geldt $a < x < b$. Notatie: $\langle a, b \rangle$

In verzamelingsymbolen:

$\langle a, b \rangle = \{x$ **in** $\mathbb{R}$ **met de eigenschap dat** $a < x < b\}$
$\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Definities

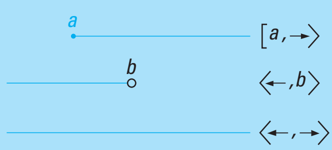
Een *gesloten interval, notatie* $[a, b]$, is een deelverzameling van $\mathbb{R}$ die bestaat uit de elementen x in $\mathbb{R}$ waarvoor geldt $a \leqq x \leqq b$.

Een *half-open interval,* en wel links gesloten en rechts open, notatie $[a, b\rangle$, is een deelverzameling van $\mathbb{R}$ die bestaat uit de elementen x in $\mathbb{R}$ waarvoor geldt $a \leqq x < b$.

Een *half-open interval,* maar nu links open en rechts gesloten, notatie $\langle a, b]$, is een deelverzameling van $\mathbb{R}$ die bestaat uit de elementen x in $\mathbb{R}$ waarvoor geldt $a < x \leqq b$.

Onder de lengte van deze zogenoemde *eindige* intervallen verstaan we het getal $b - a$.

Figuur 0.3 **Oneindige intervallen**



We kennen ook *oneindige* (onbegrensde) intervallen. Het ontbreken van een grensgetal geven we aan met een pijltje (zie ook figuur 0.3).

We onderscheiden de volgende oneindige intervallen:

1 het interval $[a, \rightarrow\rangle$, bezit alle reële getallen x waarvoor geldt dat $x \geqq a$
2 het interval $\langle \leftarrow, b]$, dat alle reële getallen x bevat waarvoor geldt dat $x \leqq b$
3 het interval $\langle \leftarrow, \rightarrow\rangle$, dat alle reële getallen uit $\mathbb{R}$ bezit (dit interval is gelijk aan $\mathbb{R}$ zelf)

Voorbeeld 0.1
Het domein van $\sqrt{x-9}$ is $[9, \rightarrow\rangle$. Er geldt namelijk $x - 9 \geq 0$ of $x \geq 9$. Het bereik is $[0, \rightarrow\rangle$. De kleinste waarde $y = 0$ wordt bereikt als $x = 9$. Voor elke andere waarde van x uit $[9, \rightarrow\rangle$ is $y > 0$.

Voorbeeld 0.2
Het domein van $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ is $[-3, 3]$. Hier geldt: $9 - x^2 \geq 0$ ofwel $9 \geq x^2$. Eerst lossen we op: $9 = x^2$. Dit is voor $x = -3$ of voor $x = 3$. Omdat $x^2 \leq 9$ geldt: $-3 \leq x \leq 3$.
Het bereik van $f(x)$ is $[0, 3]$. De kleinste waarde $f(x) = 0$ wordt bereikt als $x = -3$ of $x = 3$. Voor elke andere waarde van x uit $[-3, 3]$ is $9 - x^2 > 0$, maar $9 - x^2 \leq 9$. Dus voor elke andere waarde van x ongelijk aan 0 uit $[-3, 3]$ geldt:
$\sqrt{9-x^2} > 0$ en $\sqrt{9-x^2} \leq 3$.

Vraagstukken

0.1 Ga na welke van de volgende beweringen juist zijn. Als ze niet juist zijn, geef dan de juiste bewering als dat mogelijk is.

a $\mathbb{N}$ is een deel van $\mathbb{Q}$

b $\mathbb{Z}^+$ is een deel van $\mathbb{N}$

c $\mathbb{R}^+$ vormt samen met $\mathbb{R}^-$ de verzameling $\mathbb{R}$

d $\dfrac{0}{0} = 1$

e De oplossing van de vergelijking $x^2 = -x$ kan genoteerd worden als $\{-1, 1\}$

f Het domein van de functie f gedefinieerd door $f(x) = \sqrt{9-x}$ is $\langle \leftarrow, 9]$

g Het domein van de functie f gedefinieerd door $f(x) = \sqrt{x^2-9}$ is $[-3, 3]$

h Het bereik van de functie f gedefinieerd door $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ is $\mathbb{R}$

i $\langle a, b]$ samen met $\langle b, c\rangle$ is gelijk aan $\langle a, c\rangle$

j $\langle a, a\rangle$ bevat alleen het getal a

0.2 Ga na welke van de volgende beweringen juist zijn. Als ze niet juist zijn, geef dan, indien mogelijk, de juiste bewering:

a Als $y = x^2 + 1$ en x in $[1, 4]$, dan y in $[1, 16]$

b Als $s = t^2 - 4$ en t in $[-3, 4]$, dan s in $[-4, 12]$

c Als $v = 3 - w$ en w in $[-6, 0]$, dan v in $[-3, 3]$

d Als $p = \sqrt{16-q^2}$ en q in $[-1, 2]$ dan p in $[\sqrt{12}, 4]$

0.1.2 Merkwaardige producten, ontbinden in factoren

Bij het uitwerken van producten heb je waarschijnlijk gewerkt met vermenigvuldigingstabellen. $(a+2)(a-3)$ kun je dan uitrekenen met behulp van tabel 0.1: De uitkomst krijg je door de gelijksoortige termen uit het gekleurde gebied van de tabel bij elkaar op te tellen. Hier is dat: $a^2 - a - 6$.

Tabel 0.1 **Vermenigvuldigingstabel**

x	a	2	
a -3	a^2 $-3a$	$2a$ -6	+
	$a^2 - 3a$	$+2a - 6 =$	+
	$a^2 - a - 6$		

Opmerking
Bij het product $a \cdot b$ worden a en b de factoren genoemd. Bij het voorgaande $(a+2)(a-3)$ zijn $(a+2)$ en $(a-3)$ de factoren.

Bij producten zoals hiervoor aangegeven kom je vaak drie bijzondere producten tegen. Het resultaat van die producten is een veelterm, die een opvallende (merkwaardige) structuur laten zien. Ze worden *merkwaardige producten* genoemd en kunnen vanwege hun opvallende resultaat versneld uitgerekend worden. We noemen ze hier:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Overigens kunnen a en b in andere formules ook andere letters zijn.

Voorbeeld 0.3
$(10x - 5y)(10x + 5y) = 100x^2 - 25y^2$
$(p + 2q)^2 = p^2 + 4pq + 4q^2$
$(u - 8v)^2 = u^2 - 16uv + 64v^2$

Opdracht **7** Bepaal $(u + 8v)^2$ en $(k - 2l)(2l + k)$ door gebruik te maken van merkwaardige producten.

Omgekeerd kunnen veeltermen in sommige gevallen weer teruggebracht worden tot een product van factoren (ook wel ontbinden in factoren genoemd). De meest voorkomende gevallen zijn, weer in hun eenvoudigste vorm:

1 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
2 $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
3 $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

Andere ontbindingen in factoren zijn:
4 $ab + ac + ad = a(b+c+d)$
5 $a^2 + (p+q)a + pq = (a+p)(a+q)$
6 $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$
7 $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$

Voorbeelden 0.4
$100a^2 - b^2 = (10a)^2 - b^2 = (10a+b)(10a-b)$ (regel 1)
$x^2 + 17x + 30 =$ (regel 5)

Het product is 30 en de som is 17. De gezochte getallen zijn positief!
We maken een tabel voor alle vermenigvuldigingen met als uitkomst 30.

Product $? \times ? = 30$	**Som** $? + ? = 17$	?
$1 \times 30 = 30$	$1 + 30 = 31$	voldoet niet
$2 \times 15 = 30$	$2 + 15 = 17$	STOP! De getallen zijn 2 en 15

Dus $x^2 + 17x + 30 = (x + 2)(x + 15)$.
$x^2 - 4x - 32 =$ (regel)
Het product is –32 en de som is –4. Van de gezochte getallen is de een positief en de ander negatief!
We maken een tabel voor alle vermenigvuldigingen met als uitkomst –32.

Product $? \times ? = -32$	**Som** $? + ? = -4$	?
$1 \times -32 = -32$	$1 + -32 = -31$	voldoet niet
$2 \times -16 = -32$	$2 + -16 = -14$	voldoet niet
$4 \times -8 = -32$	$4 + -8 = -4$	STOP. De getallen zijn 4 en –8

Dus $x^2 - 4x - 32 = (x + 4)(x - 8)$.
$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$ (regel 7)
$4p^2 - 12p + 9 = (2p)^2 - 2 \cdot 2p \cdot 3 + (3)^2 = (2p - 3)^2$ (regel 3)

Vraagstukken **0.3** Bereken met behulp van merkwaardige producten:

a $(x + 2y)(x - 2y)$

b $(3x + 2y)(3x - 2y)$

c $\left(-\frac{1}{3}a^3 - 3\right)^2$

d $-(x^2 - 2)(x^2 + 2)$

e $(p^2 + 1)(p^2 - 1)$

f $(a^2 + 3)(a^2 - 2)$

g $\left(2p^3 - \frac{1}{2}p^2\right)^2$

h $(a + b + 2c)(a + b - 2c)$

i $(x^2y^2 - y^2)(y^2 - x^2y^2)$

j $\left(a - \frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{2}b + a\right)\left(a^2 - \frac{1}{4}b^2\right)$

0.4 Ontbind in factoren (zo mogelijk):

a $am + an - pm - pn$

b $x^2 - 3x + 2$

c $25p^2 - 49q^2$

d $s^2 - 10s + 25$

e $4s^2 - 20s + 25$

f $x^4 - 3x^2 + 2$

g $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

h $9x^2 + 2 + \dfrac{1}{9x^2}$

i $\left(2p + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$

j $\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{2}{ab} + \dfrac{1}{b^2}$

k $(9x^2 + 6xy + y^2) - 9$

0.5 a Laat zien dat $(a - c)^2 - (3c)^2$ gelijk is aan $(a + 2c)(a - 4c)$

b Is de volgende bewering juist?
$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - c^4 = (a^2 - b^2)^2 - (c^2)^2$,

waaruit volgt dat:
$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - c^4 = (a^2 - b^2 + c^2) \cdot (a^2 - b^2 - c^2)$

0.6 Ontbind (zo mogelijk) in factoren:

a $a^4 - 9$

b $4a^8 - 12a^4 + 9$

c $a^{10} - b^{10}$

d $a^3 - ab^2$

e $a^{11} - ab^{10}$

f $9a^8 - 15a^4 + 6{,}25$

g $x^{2p} - 2x^p + 1$

h $(a + b)^2 - (c + d)^2$

i $(p^2 + 2p + 4)^2 - (2p^2 + 3p - 1)^2$

0.7 a Bereken zonder rekenmachine $100{,}02 \cdot 99{,}98$

b Idem $52 \cdot 48$

c Idem $0{,}201 \cdot 0{,}199$

0.8 Als de ribbe van een kubus toeneemt van L [cm] tot $L + d$ [cm], hoeveel neemt de inhoud van de kubus dan toe?

0.9 a Onderzoek zelf dat het verschil van $2\pi rh + 2\pi r^2$ en $2\pi(r - c)h + 2\pi(r - c)^2$ uit de inleiding van leereenheid 0.1 gelijk is aan $2\pi ch + 4\pi rc - 2\pi c^2$. Maak hierbij gebruik van de theorie over merkwaardige producten.

b Toon aan dat het verschil $\pi r^2h - \pi(r - c)^2(h - c)$ uit opdracht 1 gelijk is aan $\pi c^3 - \pi c^2h - 2\pi c^2r + 2\pi chr + \pi cr^2$.

0.1.3 Breuken, machten, staartdelingen, nogmaals ontbinden in factoren

Rekenregels

1 $-\dfrac{a}{b}=\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{-b}$ $(b\neq 0)$

2 $\dfrac{pa}{pb}=\dfrac{a}{b}$ $(b\neq 0,\ p\neq 0)$

Opdracht 8 Ga na of de uitdrukking $\dfrac{p+a}{p+b}$ verder te vereenvoudigen is.

3 $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}$ $(b\neq 0,\ c\neq 0,\ d\neq 0)$; of $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{bd\cdot\frac{a}{b}}{bd\cdot\frac{c}{d}}=\dfrac{ad}{bc}$

Bewerkingen met breuken

Als we breuken willen optellen (of aftrekken), moeten we ze gelijknamig maken. Daarbij zorgen we ervoor dat in de nieuwe noemer het product van de hoogste machten uit de oorspronkelijke noemers voorkomen. (Dit wordt ook wel het *kleinste gemeenschappelijke veelvoud*, kgv, genoemd.)

Voorbeelden 0.5

1 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}=$

De nieuwe noemer van de breuken is het *kleinst gemene veelvoud* van 2, 3 en 5, kort genoteerd met kgv(2, 3, 5) = 2·3·5. Dus de optelling wordt:

$$\frac{1\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{5}}{2\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{5}}+\frac{1\cdot\boxed{2}\cdot\boxed{5}}{\boxed{2}\cdot 3\cdot\boxed{5}}+\frac{1\cdot\boxed{2}\cdot\boxed{3}}{\boxed{2}\cdot\boxed{3}\cdot 5}=\frac{15+10+6}{30}=\frac{31}{30}$$

2 $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}=$

De nieuwe noemer van de breuken is kgv(4, 6) = kgv(2^2, 2·3) = 2^2·3. Dus de optelling wordt:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1\cdot\boxed{3}}{2^2\cdot\boxed{3}}+\frac{1\cdot\boxed{2}}{2\cdot 3\cdot\boxed{2}}=\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{5}{12}$$

3 $\dfrac{7}{s}+\dfrac{2}{t}-\dfrac{3}{u}=$

De nieuwe noemer van de breuken is kgv(s, t, u) = $s\cdot t\cdot u$. Dus de optelling wordt:

$$\frac{7}{s}+\frac{2}{t}-\frac{3}{u}=\frac{7\cdot t\cdot u}{s\cdot t\cdot u}+\frac{2\cdot s\cdot u}{s\cdot t\cdot u}-\frac{3\cdot s\cdot t}{s\cdot t\cdot u}=\frac{7tu+2su+3st}{stu}$$

4 Kgv$(p^2q, pq, q^2) = p^2q^2$. Dus:

$$\frac{1}{p^2q} + \frac{2}{pq} - \frac{3}{q^2} = \frac{q}{p^2q^2} + \frac{2pq}{p^2q^2} - \frac{3p^2}{p^2q^2} = \frac{q + 2pq - 3p^2}{p^2q^2}$$

5 $$\frac{a}{a^2-4} + \frac{2}{(a-2)^2} = \frac{a}{(a-2)(a+2)} + \frac{2}{(a-2)^2} =$$

$$\frac{a(a-2)}{(a-2)^2(a+2)} + \frac{2(a+2)}{(a-2)^2(a+2)} =$$

$$\frac{a^2 - 2a + 2a + 4}{(a-2)^2(a+2)} = \frac{a^2+4}{(a-2)^2(a+2)}$$

Opdracht **9** Ga zelf na dat:

$$x + \frac{2}{(x-1)} - \frac{x}{(x-2)} = \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 4}{(x-1)(x-2)}$$

Vraagstuk **0.10** Schrijf de volgende breuken zo eenvoudig mogelijk.

a $\dfrac{p^3a}{pb}$

b $\dfrac{x+y}{y^3} - \dfrac{1}{y^2}$

c $\dfrac{2}{a+1} - \dfrac{2}{a-1}$

d $\dfrac{2}{a^2-1} - \dfrac{2}{a-1}$

e $\dfrac{2}{a^2-1} - \dfrac{2}{a^2+1}$

f $x - \dfrac{x}{x-1}$

Staartdelingen

We kunnen een quotiënt, de uitkomst van een deling, van twee veeltermen bepalen met een staartdeling.

Voorbeelden 0.6

1 Bepaal: $\dfrac{2x^3 - 5x^2 + 7x - 4}{x - 1}$

Oplossing:

$$\begin{array}{l} x - 1 / 2x^3 - 5x^2 + 7x - 4 \backslash 2x^2 - 3x + 4 \\ \qquad\quad \underline{2x^3 - 2x^2} \; - \\ \qquad\qquad\quad -3x^2 + 7x \\ \qquad\qquad\quad \underline{-3x^2 + 3x} \; - \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 4x - 4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{4x - 4} \; - \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

De deling levert dus:

$$\frac{2x^3 - 5x^2 + 7x - 4}{x - 1} = 2x^2 - 3x + 4$$

Dit is een voorbeeld van een zogeheten *opgaande deling*, waarbij de *rest* gelijk is aan nul.

2 Bepaal: $\dfrac{-4x^4 + x^3 - 5x^2 + 6}{2x^2 + 1}$

Oplossing:

$$\begin{array}{l}
2x^2 + 1 / -4x^4 + x^3 - 5x^2 + 6 \backslash -2x^2 + 0{,}5x - 1{,}5 \\
\qquad\quad -4x^4 \qquad - 2x^2 \\
\qquad\quad \overline{\qquad\qquad\qquad\quad} - \\
\qquad\qquad\qquad x^3 - 3x^2 \\
\qquad\qquad\qquad x^3 \qquad + 0{,}5x \\
\qquad\qquad\qquad \overline{\qquad\qquad\qquad} - \\
\qquad\qquad\qquad\quad - 3x^2 - 0{,}5x + 6 \\
\qquad\qquad\qquad\quad - 3x^2 \qquad\quad - 1{,}5 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \overline{\qquad\qquad\qquad\quad} - \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 0{,}5x + 7{,}5
\end{array}$$

De uitkomst is nu:

$$\frac{- 4x^4 + x^3 - 5x^2 + 6}{2x^2 + 1} = -2x^2 + 0{,}5x - 1{,}5 + \frac{- 0{,}5x + 7{,}5}{2x^2 + 1}$$

Dit is een zogeheten *niet opgaande deling*, waarbij de *rest niet gelijk* is aan nul.

Opdracht **10** Ga met een staartdeling na dat $\dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$ gelijk is aan $x^2 + 3x + 9$.

Herschrijf daartoe de breuk in de vorm $\dfrac{x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 27}{x - 3}$.

Ontbinden in factoren en staartdelingen

De veelterm $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ is te ontbinden in factoren:

$f(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$

Opdracht **11** Ga na dat deze ontbinding juist is, door de haakjes weer weg te werken.

Het is duidelijk dat $f(x) = 0$ voor $x = 1$, $x = -2$ en $x = 3$.

Als we dus de nulpunten van een willekeurige veelterm $f(x)$ zouden weten, dan kunnen we de ontbinding in factoren gemakkelijk vinden. Om één nulpunt van $f(x)$ te vinden, proberen we steeds enkele waarden van x en vullen die in $f(x)$ in om te zien of $f(x)$ nul is.
In ons geval is $f(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$, dat wil zeggen $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ bevat de factor $x - 1$. De andere factoren vinden we vaak door nu eerst een staartdeling uit te voeren van $(x - 1)$ op $f(x)$:

$$\begin{array}{l}
x - 1 / x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \backslash x^2 - x - 6 \\
\qquad\quad x^3 - \ \ x^2 \\
\qquad\quad \overline{\qquad\quad} - \\
\qquad\qquad - x^2 - 5x \\
\qquad\qquad - x^2 + \ \ x \\
\qquad\qquad \overline{\qquad\qquad} - \\
\qquad\qquad\qquad - 6x + 6 \\
\qquad\qquad\qquad - 6x + 6 \\
\qquad\qquad\qquad \overline{\qquad\qquad} - \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Dus: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6)$

Ten slotte ontbinden we nog:

$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$

Het eindresultaat is:

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$

Opdracht **12** Ga na dat $x = -1$ een nulpunt is van $x^3 + 5x^2 - 13x + 7$ en ontbind de veelterm daarna in factoren.

Vraagstukken **0.11** Schrijf de volgende breuken zo eenvoudig mogelijk:

a $\dfrac{p^3a}{pb}$

b $\dfrac{3a^2(b+c)^3}{12a(b+c)^4}$

c $\dfrac{2}{p} + \dfrac{3}{q}$

d $\dfrac{x+y}{y^3} - \dfrac{1}{y^2}$

e $\dfrac{2}{a+1} - \dfrac{2}{a-1}$

f $\dfrac{2}{a^2-1} - \dfrac{2}{a-1}$

g $\dfrac{2}{a^2-1} - \dfrac{2}{a^2+1}$

h $x - \dfrac{x}{x-1}$

0.12 Bepaal met een staartdeling:

a $\dfrac{x^6 - 3x^4 + 2x^2 - 6}{x^2 - x - 1}$

b $\dfrac{x^4 - 1}{x + 1}$

0.13 **a** $\dfrac{2a}{a+b} + \dfrac{\frac{1}{2}a}{a-b}$

b $\dfrac{1}{p(p-1)} - \dfrac{2p}{(p-1)}$

c $\dfrac{1}{p(p-1)} - \dfrac{2p}{(p+1)(p-1)}$

d $\dfrac{p^3}{p-3} + \dfrac{27}{3-p}$; vereenvoudig het resultaat met behulp van een staartdeling

e $\dfrac{1}{(a-b)(b-c)} - \dfrac{1}{(b-c)(c-a)} + \dfrac{1}{(a-c)(a-b)}$

f $\dfrac{1}{x^2-x} - \dfrac{x}{x^2-1}$

g $\dfrac{y^2-xy}{x^2-xy} \cdot \dfrac{x^2+xy}{y^2+xy}$

h $\dfrac{3a-9}{a^2+2a-15}-\dfrac{2a-8}{a^2-6a+8}+\dfrac{3a-7}{a^2+3a-10}$

i $\dfrac{1-\dfrac{1-\frac{1}{a}}{a}}{1-\dfrac{1+\frac{1}{a}}{a}}$

0.14 Vereenvoudig de volgende breuken en producten:

a $\dfrac{3p^8-4p^7q^2}{8p^6-3p^5q^2}$

b $\dfrac{(a-b)^2-a^2-b^2}{ab}$

c $\left(\dfrac{1}{a+\sqrt{b}}\right)\left(1+\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right)$ $(b>0)$

d $\left(\dfrac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}\right)\left(\dfrac{a^2-b}{a^2+b}\right)$ $(b>0)$

0.15 Bepaal met een staartdeling:

a $\dfrac{x^4+4x^3-15x^2-34x-24}{x^2+x-12}$

b $\dfrac{x^8-256}{x^2-4}$

0.16 Ontbind zo ver mogelijk in factoren. Tip: gebruik de relatie tussen nulpunten van een veelterm en haar ontbinding.

a $2x^3+5x^2-3$
b $x^3+9x^2+15x-25$
c $x^3-9x^2+26x-24$

0.1.4 Gebroken vergelijkingen

Als in vergelijkingen met meerdere breuken de onbekende ook in de noemer van een breuk voorkomt, dan is het vaak verstandig de vergelijking te herleiden tot één breuk van het type:

$$\frac{a}{b}=0$$

We maken de breuken dan eerst gelijknamig en tellen ze daarna op totdat de breuk $\frac{a}{b}$ ontstaat.

Een breuk $\frac{a}{b}$ is gelijk aan 0 als $a=0$ en $b \neq 0$.

Uit deze voorwaarden kan de onbekende gevonden worden, die in a en/of b zit.

Een andere veelgebruikte methode is de breuken 'weg te werken' door ze met het kleinst gemene veelvoud, het kgv, van hun noemers te vermenigvuldigen. Beide methoden zullen hierna in de voorbeelden worden uitgewerkt.

Leonardo Da Vinci (1452–1519)

De meeste onderwerpen uit dit boek zijn in ons Westerse cultuurgebied beschreven in de tijdsperiode van de 16de tot en met de 19de eeuw. In de middeleeuwen, die daaraan voorafgingen, stond de 'wiskunde' als praktische rekenkunst ten dienste van de landmeting, de sterrenkunde, de scheepvaart en de handel. Daarnaast hield men zich in de middeleeuwen bezig met het oplossen van derde- en vierdegraadsvergelijkingen zoals $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ (Fibonacci, 1225). Deze vergelijkingen vond men bij het zoeken naar oplossingen van praktische problemen, maar ook bij prijsvragen, waarmee veel geld te verdienen was. Oplossingen van dit soort vergelijkingen werden dan ook angstvallig geheim gehouden; en zo schoot het met de ontwikkeling van de wiskunde natuurlijk niet op.
Hierin kwam verandering toen de natuurwetenschap opleefde (ordening natuurwetten, getallentheorie, logica).
Leonardo da Vinci (1452–1519) drukte het als volgt uit: 'Wie de mathematische zekerheden versmaadt, voedt zich met warwetenschap en zal nooit het zwijgen weten op te leggen aan de tegenstrijdigheden van sofisterij, van welke men slechts een eeuwig marktgeschreeuw leert.'
In de overgangstijd van verwarring naar ordening publiceerde Michaël Stifel in 1544 zijn boek 'Arithmetica Integra' (complete rekenkunde) met daarin onder andere positieve en negatieve getallen, irrationale getallen, vergelijkingen en de driehoek van Pascal (tot en met de 17de rij), zie leereenheid 1.2. Deze Stifel voorspelde overigens ook dat op 3 oktober 1533 de wereld zou vergaan. Teleurgestelde en geruïneerde volgelingen maakten hem het leven daarna erg lastig.

Voorbeelden 0.7

1 Los op in $\mathbb{R}$: $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{5}{x-2} = \dfrac{4}{1-x}$

Oplossing:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{5}{x-2} - \frac{4}{1-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{5}{x-2} + \frac{4}{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{x-1} + \frac{5}{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(x-2) + 5(x-1)}{(x-1)(x-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 10x - 15 = 0 \text{ met } x \neq 1, x \neq 2$$

De oplossing is $x = \frac{3}{2}$.

Een alternatieve aanpak: $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{5}{x-2} = \dfrac{4}{1-x} \Leftrightarrow$

$\{kgv(x-1,\ x-2,\ 1-x) = kgv\big(x-1,\ x-2,\ -(x-1)\big) = (x-1)(x-2)\}$

$(x-1)(x-2)\cdot\dfrac{1}{x-1}+(x-1)(x-2)\cdot\dfrac{5}{x-2}=(x-1)(x-2)\dfrac{-4}{x-1}$,

met $x\neq 1,\ x\neq 2\ \Leftrightarrow\ 1(x-2)+5(x-1)=-4(x-2)\ \Leftrightarrow\ 6x-7=-4x+8$,

$x\neq 1, x\neq 2$

$10x=15,\ x\neq 1,\ x\neq 2\ \Leftrightarrow\ x=1\dfrac{1}{2}$

2 Los op in $\mathbb{R}$: $\dfrac{x^2}{x-3}=1+\dfrac{9}{x-3}$

Oplossing:

$$\frac{x^2}{x-3}=1+\frac{9}{x-3}\ \Leftrightarrow\ \{\text{op 0 herleiden}\}\ \frac{x^2}{x-3}-1-\frac{9}{x-3}=0$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{x^2}{x-3}-\frac{x-3}{x-3}-\frac{9}{x-3}=0$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{x^2-(x-3)-9}{x-3}=0$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{x^2-x-6}{x-3}=0\ \Leftrightarrow\ x^2-x-6=0 \text{ en } x\neq 3$$

$$\Leftrightarrow\ (x+2)(x-3)=0 \text{ en } x\neq 3$$

De oplossing is $x=-2$.

Een alternatieve aanpak:

$$\frac{x^2}{x-3}=1+\frac{9}{x-3}\ \Leftrightarrow\ (x-3)\frac{x^2}{x-3}=1(x-3)+(x-3)\frac{9}{x-3},\ x\neq 3$$

$$\Leftrightarrow\ x^2=x-3+9,\ x\neq 3\ \Leftrightarrow\ x^2-x-6=0,\ x\neq 3$$

$$(x+2)(x-3)=0,\ x\neq 3\ \Leftrightarrow\ x=-2$$

3 Als gegeven is dat $\dfrac{b}{a}=b+\dfrac{c}{a}$ met $a\neq 0$, en de vraag is: wat is a, uitgedrukt in b en c?, dan lossen we a zo handig mogelijk op:

$$\frac{b}{a}=b+\frac{c}{a}\ \Leftrightarrow\ \frac{b}{a}-\frac{c}{a}=b$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{b-c}{a}=b$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{a}{b-c}=\frac{1}{b}$$

$$\Leftrightarrow\ a=\frac{b-c}{b}$$

Een alternatieve aanpak: $\dfrac{b}{a}=b+\dfrac{c}{a}\ \Leftrightarrow\ a\cdot\dfrac{b}{a}=ab+a\cdot\dfrac{c}{a}$, met $a\neq 0$

$\Leftrightarrow\ b=ab+c$, met $a\neq 0 \Leftrightarrow ab=b-c$, met $a\neq 0\ \Leftrightarrow\ a=\dfrac{b-c}{b}$, met $a\neq 0$

Vraagstukken **0.17** Los de volgende gebroken vergelijkingen op in $\mathbb{R}$:

a $\dfrac{3x-1}{3x+1}+1=0$

b $\dfrac{x^2}{x-2}+1=\dfrac{1-x}{x-2}$

c $\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x+4}{x+2}$

d $\dfrac{x^2}{x+4}=\dfrac{16}{x+4}$

e $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+2x+1}=\dfrac{x+4}{x+1}$

0.18 Los de volgende gebroken vergelijkingen op in $\mathbb{R}$:

a $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{3}{2}$

b $\dfrac{x-2}{x+1}+\dfrac{x+1}{x-2}=-2\tfrac{1}{2}$

c $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{1-x}$

d $\dfrac{6x^2-13x+6}{3x-2}=0$

e $\dfrac{(2x-3)(x-2)}{2x^2-7x+6}=1$

0.19 Druk in de volgende vraagstukken a uit in de overige variabelen:

a $\dfrac{b}{a}=1-\dfrac{c}{a}$

b $\dfrac{a}{b}+a=\dfrac{b}{c}$

c $\dfrac{c}{a-b}=\dfrac{d}{a-e}$

d $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$

e $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{d}=0$

f $u=\dfrac{ap}{m(a-1)}+\tfrac{1}{2}v^2$

0.1.5 Oneigenlijke machten

We noemen de uitdrukking a^n een macht van a met het *grondtal* a en de *exponent* n. Voor n in $\mathbb{N}^+$ is de betekenis van a^n:

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n factoren a)

Als p in $\mathbb{R}$ maar niet in $\mathbb{N}^+$, dan heet a^p een *oneigenlijke macht* van a.

Zo zijn $9^{\frac{1}{2}}$, $a^{2\frac{1}{3}}$, 4^{-2}, $b^{-\sqrt{3}}$ voorbeelden van oneigenlijke machten. Je bent ze wel eens tegen gekomen, zoals bijvoorbeeld: 1 mm = 10^{-3} m. Sommige van die oneigenlijke machten zijn met definities en rekenregels verder te herleiden. Hierna volgen enkele voorbeelden waarin die herleiding wordt toegepast.

Definities

1 $a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$

2 $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p} \quad (p \text{ in } \mathbb{R}, a > 0)$

3 $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad (p \text{ in } \mathbb{Z}, q \text{ in } \mathbb{N}^+, a > 0)$

Rekenregels

Voor alle p, q in $\mathbb{R}$ en $a, b > 0$ geldt:

4 $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

5 $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

6 $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

7 $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$

Voorbeelden 0.8

1 We weten dat geldt: $\sqrt{9} = 3$. Met de rekenregels en definities geldt:
$\sqrt{9} = (9)^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 3^1 = 3$

2 $\sqrt[3]{8^5} = \{\text{definitie } 3\}\ 8^{\frac{5}{3}} = (2^3)^{\frac{5}{3}} = \{\text{rekenregel } 6\}\ 2^5 = 32$

3 $\dfrac{(3^{-2})^{\frac{1}{2}} \cdot 5^3}{3^{-4} \cdot (5^2)^4} = \{\text{rekenregel } 6\}\ \dfrac{3^{-1} \cdot 5^3}{3^{-4} \cdot 5^8} = \{\text{rekenregel } 5\}\ \dfrac{3^3}{5^5}$

4 $\dfrac{a^2\sqrt[3]{a^2}\, b^3\sqrt[5]{b^2}}{a^{\frac{2}{3}}\, b\sqrt[5]{b^3}} = \{\text{definitie } 3\}\ \dfrac{a^2 \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot b^3 \cdot b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{2}{3}} \cdot b \cdot b^{\frac{3}{5}}} = \{\text{rekenregel } 4\}\ \dfrac{a^{2\frac{2}{3}}\, b^{3\frac{2}{5}}}{a^{\frac{2}{3}}\, b^{1\frac{3}{5}}}$
$= \{\text{rekenregel } 5\}\ a^2 b^{1\frac{4}{5}} = \{\text{definitie } 3\}\ a^2 b \sqrt[5]{b^4}$

5 $(-8)^{\frac{5}{2}} = \left((-8)^{\frac{1}{2}}\right)^5 = \left(\sqrt{-8}\right)^5$ heeft geen betekenis, omdat $\sqrt{-8}$ geen reëel getal is.
Alternatief: $(-8)^{\frac{5}{2}} = \left((-8)^5\right)^{\frac{1}{2}} = (-32\ 768)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-32\ 768}$ en deze wortel bestaat niet.

Opmerking: vermenigvuldigen, delen, enzovoort worden operaties genoemd. Voor situaties waarin die operaties gecombineerd voorkomen geldt een bepaalde volgorde waarin ze moeten worden uitgevoerd: Haakjes, dan Machtsverheffen / Worteltrekken, dan Vermenigvuldigen / Delen en tot slot Optellen / Aftrekken. De betekenis van / is dat de operaties gelijkwaardig zijn. Ze worden in dat geval in volgorde van links naar rechts uitgevoerd. Ezelsbruggetje voor de genoemde volgorde: Hare Majesteit Wacht Vele Dagen Op Antwoord.

Vraagstukken

0.20 Herleid en schrijf zonder oneigenlijke machten:

a $(p^2q^{-3})^4$

b $(v^2w^{-3})^{-1} \cdot w^{-2}$

c $\dfrac{r^3s^{-4}}{r^{-2}s^5}$

d $\dfrac{(ab^2)^3a^{-5}b}{a^4b^6}$

e $(a^{-1}b^{-2}c^{-3})^{-1} \cdot (a^{-3}b^{-2}c^{-3})^2$

f $\dfrac{2 \cdot 2^{-4} \cdot 4 \cdot (2^{-2}) \cdot \frac{1}{2}}{2^2 \cdot (2^{-3} \cdot 2^2)^{-2}}$

g $\dfrac{(-2^2x^{-2}y^{-3}) \cdot (x^{-1}y^0)^{-1}}{(xy^2z^0)^{-2}}$

0.21 Schrijf als oneigenlijke macht:

a $\sqrt[3]{a^4}$

b $a\sqrt[3]{a}$

c $a^2\sqrt[3]{a}$

d $a\sqrt[3]{a^2}$

e $\dfrac{1}{x\sqrt{x}} \cdot \dfrac{x^2}{x^{-1}\sqrt[4]{x^3}}$

f $\dfrac{\sqrt[15]{b^2}}{\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[5]{b^3}}$

0.22 Bereken $2^{x-1} - 2 \cdot 2^x + 2^2 \cdot 2^{x+1}$ voor:

a $x = 0$
b $x = 1$
c $x = 2$

0.23 Los x op uit: $2^2 + 3 \cdot 2^{-2} - \frac{3}{4} = 2^x$

0.24 Los op in $\mathbb{R}$:

a $\left(\sqrt{3}\right)^{x-1} = \frac{1}{3}$

b $\sqrt{2^{2x+3}} = (\frac{1}{4})^{2-x}$

0.25 Schrijf zo eenvoudig mogelijk:

a $\sqrt[3]{\dfrac{8x^6y^{-3}}{27(xy^2z^0)^{-3}}}$

b $\sqrt[5]{\left(\dfrac{a^2}{b^2} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{c^3}}\right)^6}$

0.26 **a** Hoeveel is 10% van 10^{-10}?
b Hoeveel is 1% van 10^6?

0.27 Maak aannemelijk, door twee keer te kwadrateren, dat $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{50}$ (een formule uit de 11de eeuw).

0.1.6 Vierkantsvergelijkingen

De algemene vorm van een vierkantsvergelijking (v.k.v.) is:

$ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

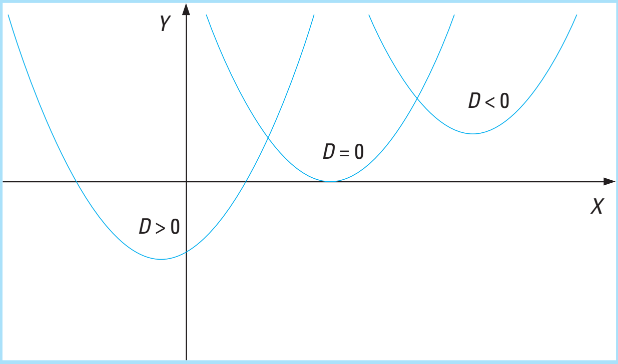
Voor de reële oplossingen x_1 en x_2 van deze vergelijking geldt volgens de *abc-formule*:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

We noemen $b^2 - 4ac$ de *discriminant*, kort weergegeven met D. (Letterlijk: hij die onderscheid maakt.) Deze D geeft aan of een v.k.v. 2, 1 of geen reële oplossingen heeft:

$D > 0$ 2 verschillende oplossingen;
$D = 0$ 2 gelijke oplossingen, dus in feite 1 oplossing;
$D < 0$ geen reële oplossingen.

Figuur 0.4 **De drie te onderscheiden situaties voor *D***



De drieterm $ax^2 + bx + c$ is te ontbinden in $a(x - x_1)(x - x_2)$ als x_1 en x_2 de oplossingen zijn van de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$.

Voorbeeld 0.9
We willen $3x^2 + 14x - 5 = 0$ ontbinden zoals hiervóór is bedoeld. Met de *abc*-formule vinden we als nulpunten de waarden $x_1 = \frac{1}{3}$ en $x_2 = -5$, zodat $3x^2 + 14x - 5 = 3(x - \frac{1}{3})(x + 5)$.

Opdracht 13 Ga na dat $x_1 = \dfrac{1}{3}$ en $x_2 = -5$ oplossingen zijn van voorgaande vierkantsvergelijking.

Vraagstukken 0.28 Los de volgende vergelijkingen $f(x) = 0$ op in $\mathbb{R}$ met behulp van de *abc*-formule, als $f(x)$ gelijk is aan:

a $x^2 - 7x + 12$
b $2x^2 - 7x + 6$
c $1\frac{1}{2}x^2 + 2\frac{1}{2}x - 1$
d $72x^2 - 145x + 72$

0.29 Schrijf $f(x)$ in de vorm $a(x - x_1)(x - x_2)$ met behulp van de resultaten uit vraagstuk 0.28.

0.30 Los de volgende vergelijkingen op in $\mathbb{R}$:

a $(2x - 1)^2 = 2x - 1$

b $x^2 = 5a^2$

c $x^2 + x - 1 = 0$

d $\dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{1}{x^2-4}$

0.31 **a** Stel de v.k.v. op waarvan de oplossingen zijn: $x_1 = -2$ en $x_2 = 3$.
b Van de v.k.v. $x^2 - px = 6$ is één van de oplossingen gelijk aan 3.
Bereken p en de andere oplossing.
c De v.k.v. $9x^2 + mx + 1$ heeft twee gelijke oplossingen.
Bereken m en de oplossingen x_1 en x_2.

0.32 Voor welke waarden van k heeft het volgende stelsel één oplossing?

$$\begin{cases} x + y = k \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

0.33 De vergelijking $ax^2 - a\sqrt{2} \cdot x + 1 = 0$ heeft twee gelijke oplossingen.
Bereken a en de oplossingen.

0.34 Van een positief en een negatief getal is de som gelijk aan 5 en het product gelijk aan -24.
Bereken die getallen.

Samenvatting

Je hebt voldoende ervaringen met de algebraïsche vaardigheden opgedaan; je ziet dat het ontbinden in factoren voorkomt in het oplossen van gebroken lineaire vergelijkingen en dat het werken met (oneigenlijke) machten in allerlei berekeningen overal voorkomt. Intervallen helpen je om snel aan te geven welke waarden de variabelen mogen en kunnen aannemen. Maak de volgende oefentoets. Als je daar een voldoende voor scoort, heb je binnen jouw opleiding voldoende kennis om verder te gaan met de volgende leereenheid.

Toets

1 Men vergroot een bol met een straal van r [cm] door de straal met p [cm] te laten toenemen. Hoeveel kubieke centimeter neemt de inhoud van de bol dan toe, uitgedrukt in r en in p (de inhoud van een bol met straal r is $\frac{4}{3}\pi r^3$)?

2 Ontbind zo ver mogelijk in factoren: $a^4 - 5a^2 + 4$

3 Ontbind in factoren: $x^3 - 7x + 6$

4 Los op in $\mathbb{R}$: $\dfrac{2x-1}{x-1} - \dfrac{3x-1}{x+1} = \dfrac{4}{3}$

5 Gegeven: $\dfrac{4c}{a-3b} - \dfrac{d}{a+2g} = 0$. Druk a uit in de overige grootheden.

6 Schrijf zo eenvoudig mogelijk als oneigenlijke machten van a, b en c:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a^{-3}b^{-2}}{\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[4]{c^{-3}}}\right)^{4}}$$

7 Los x op uit: $\sqrt{3^{-x+1}} = (\frac{1}{9})^{3+x}$

8 Los op:

a $14x^2 - 5x - 1 = 0$

b $x^4 - 21x^2 + 20 = 0$

9 Druk a uit in c als $a^2 + 2ac - c^2 = 0$.

10 De remweg R van een auto die met een snelheid v [km/h] rijdt, is bij een nat wegdek gelijk aan $R = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{v}{10}\right)^{2,1}$.

De politie is evenwel meer geïnteresseerd in de snelheid van de auto dan in de remweg. Uit de opgemeten remweg R kan de snelheid v altijd gevonden worden. Druk v uit in R.

11 De tweetermen $x^n - 1$ met n een geheel getal zijn voor wiskundigen erg belangrijk. Onder meer bij de constructie van regelmatige n-hoeken of equivalent het verdelen van een cirkelomtrek in n gelijke delen. Deze uitdrukkingen zijn dan ook uitvoerig bestudeerd. Daarbij viel het al gauw op dat als je tweetermen ontbond in factoren met gehele getallen als coëfficiënten, geen enkele coëfficiënt groter dan 1 was. Zo geldt bijvoorbeeld:

$x - 1 = x - 1$
$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$
$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$
$x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$
$x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$
$x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
…

De factoren werden opgenomen in handboeken en tabellenboeken en men probeerde te bewijzen – zonder ze stuk voor stuk te ontbinden – dat deze eigenschap geldig zou zijn voor elke waarde van n, hetgeen maar niet lukken wilde. In 1938 daagde de Sovjet-wiskundige N.G. Cherbotarov de wiskundige wereld uit deze kwestie voor eens en voor altijd op te lossen. De oplossing werd gevonden door V. Ivanov en in 1941 gepubliceerd in het tijdschrift *Uspekhi matematicheskikh nauk* (Successen van de mathematische wetenschappen). Hij vond een gehele waarde van n – iets groter dan 100 – waarbij een van de coëfficiënten van een factor gelijk was aan 2. Men kon ophouden met zoeken naar een bewijs voor alle n.

Als je gevraagd wordt deze waarde van n te achterhalen, dan kun je in plaats van die zelf uit te rekenen of in de bibliotheek op te zoeken in het genoemde tijdschrift, tegenwoordig veel beter een computeralgebrapakket gebruiken.

Welke waarde van n had Ivanov gevonden?

Aanwijzing:
De computeralgebrapakketten *Derive*, *Maple* en *Mathematica* kunnen ontbinden in factoren:
Derive: Author: `x^2-1;`Factor, Rational geeft: `(x+1)(x-1)`
Maple: `factor(x^3-1);` geeft: `(x-1)(x²+x+1)`
Mathematica: `Factor(x^4-1);` geeft: `(-1+x)(1+x)(1+x²)`