P. de Boer / J.C. Meester

Financiële rekenkunde en beslissingscalculaties

Noordhoff Uitgevers

Financiële rekenkunde en beslissingscalculaties

Financiële rekenkunde en beslissingscalculaties

Drs. P. de Boer

Drs. J.C. Meester

Vierde druk

Noordhoff Uitgevers Groningen / Houten

Ontwerp omslag: G2K designers, Groningen
Omslagillustratie: Photodisc

7 / 12

ISBN (ebook) 978-90-01-84853-8
ISBN 978-90-01-09407-2
NUGI 683

Woord vooraf bij de vierde druk

'Financiële rekenkunde en beslissingscalculaties' beoogt op een systematische wijze de leerstof te presenteren voor het vakgebied dat in het hoger economisch onderwijs vaak met 'bedrijfscalculatie' wordt aangeduid.

In het eerste deel van dit boek wordt de financiële rekenkunde behandeld. Financiële rekenkunde heeft betrekking op de technieken die worden toegepast op calculaties waarbij de intrestfactor een rol speelt. Inzicht in deze financiële rekenkunde is van essentiële betekenis bij een groot aantal dagelijkse praktijksituaties. Het gebruik van deze technieken wordt dan ook aan de hand van vele voorbeelden geïllustreerd.

Vervolgens worden de technieken van financiële rekenkunde in het tweede deel toegepast op diverse beslissingscalculaties. Hierbij gaat het om de cijfermatige onderbouwing van besluitvormingsprocessen, vooral met betrekking tot duurzame productiemiddelen. Teneinde de relatie met de bedrijfseconomie te verduidelijken is getracht de diverse onderwerpen zoveel mogelijk in een bedrijfseconomisch kader te plaatsen. Daarnaast worden in dit tweede deel ook enkele beslissingscalculaties behandeld waarbij de intrestfactor buiten beschouwing wordt gelaten, de zogenaamde beslissingen op korte termijn.

Ten opzichte van de derde druk bevat deze vierde druk een aantal wijzigingen, waarbij de hoofdstukindeling overigens niet is veranderd. Deze wijzigingen hebben bijvoorbeeld betrekking op de overgang naar de euro en de invoering van nieuwe belastingpercentages voor de BTW, de inkomstenbelasting en de vennootschapsbelasting. Daardoor zijn sommige voorbeelden en opgaven getalsmatig aangepast. Ook is er nog meer nadruk gelegd op het gebruik van een financiële calculator, met name in de hoofdstukken 3, 4 en 5. De (internationaal geldende) symbolen 'a' en 's' uit de intresttafels worden gemakshalve alleen nog voor notatie-doeleinden gehanteerd. Bij de uitwerking van voorbeelden wordt dus in principe gebruikgemaakt van een financiële calculator.
In hoofdstuk 13 is de appendix over de simplexmethode vervallen. Hoofdstuk 14 is uitgebreid met enkele uitgangspunten voor de bepaling van verkoopprijzen en de methode van 'target costing'. Uiteraard zijn ook de illustraties uit de financiële pers zoveel mogelijk geactualiseerd.

Door de eigen ervaringen als docenten in het hoger economisch onderwijs, is het de stellige overtuiging van de auteurs dat de bestudering van dit vakgebied gepaard dient te gaan met het veelvuldig oefenen in het oplossen van vraagstukken. Per hoofdstuk is dan ook een groot aantal (gedeeltelijk nieuwe of geactualiseerde) opgaven opgenomen.

Tot slot wordt opgemerkt dat wij ons, via de uitgever, uiteraard aanbevolen houden voor opmerkingen en suggesties van gebruikers.

Lochem/Drachten, zomer 2001

P. de Boer
J.C. Meester

Inhoud

1 Financiële rekenkunde

Dit leerboek is met name gericht op het opstellen van calculaties als ondersteuning voor het nemen van beslissingen. In veel situaties betreft dit beslissingen op lange termijn, die dus gevolgen hebben voor de kosten en opbrengsten gedurende een reeks van jaren. Daarbij speelt de factor intrest dus een belangrijke rol. Vandaar dat in dit eerste deel primair aandacht wordt besteed aan de financiële rekenkunde. Financiële rekenkunde heeft betrekking op de technieken van berekeningen met intrest, waardoor de factor tijd op de juiste wijze in de calculaties tot uitdrukking kan worden gebracht.

In dit eerste deel wordt in hoofdstuk 1 eerst aandacht besteed aan berekeningen met enkelvoudige intrest en disconto, waarna deze in hoofdstuk 2 worden geïllustreerd aan de hand van diverse toepassingen. Vervolgens wordt in hoofdstuk 3 samengestelde intrest behandeld, waarbij de eindwaarde en contante waarde van bedragen worden berekend. In hoofdstuk 4 wordt samengestelde intrest toegepast op berekeningen met renten, series periodiek vervallende bedragen. Specifieke onderwerpen zijn daarna de annuïteiten (hoofdstuk 5) en de rentabiliteitswaarde van leningen (hoofdstuk 6).

Enkelvoudige intrest en disconto

1

De financiële rekenkunde houdt zich bezig met berekeningen, waarbij de intrest een belangrijke rol speelt. Intrest is een vergoeding voor het lenen van geld. Indien iemand gedurende een periode een bedrag leent, wordt na afloop van de periode een groter bedrag terugbetaald dan het geleende bedrag. Het verschil is de intrest. Deze prijs voor het lenen van geld gedurende een periode wordt uitgedrukt in een intrestpercentage of intrestvoet. Dit intrestpercentage bestaat uit een (reële) vergoeding voor het geleende kapitaal, vermeerderd met een compensatie voor de verwachte inflatie en een eventuele risicopremie.

■ ■ ■ 1.1 Enkelvoudige en samengestelde intrest

Een geldgever zal eerst dan bereid zijn om enige tijd afstand te doen van financiële middelen, indien er een vergoeding aan intrest tegenover staat. Men spreekt in dit verband over het afstand doen van de tijdvoorkeur van het geld. Hoe langer de geldgever afstand doet van het geld, des te groter is het bedrag aan intrest dat hij als vergoeding wil ontvangen.
De som van de lening en de intrest aan het einde van de periode is voor hem gelijkwaardig aan het bedrag van de lening aan het begin van de periode.

■ Voorbeeld 1.1

Iemand is in het bezit van € 10.000. Hij is bereid om dit bedrag gedurende één jaar uit te lenen tegen 10% intrest.

Lening	€ 10.000
Intrest	- 1.000
Ontvangst na één jaar	€ 11.000

€ 10.000 € 11.000

1 jaar

Na één jaar krijgt hij € 11.000 terug. In dit voorbeeld is € 10.000 aan het begin van het jaar gelijkwaardig aan € 11.000 aan het einde van het jaar. Het totaal van de lening en de intrest ad € 11.000 duidt men aan als de eindwaarde van € 10.000 na één jaar.

Er is sprake van enkelvoudige intrest indien de intrest steeds wordt berekend over het oorspronkelijke bedrag van de lening. De in rekening gebrachte intrest is zelf niet intrestdragend.

■ Voorbeeld 1.2

Een bedrag van € 10.000 wordt gedurende drie jaar uitgeleend tegen 10% enkelvoudige intrest per jaar. Hoe verloopt de eindwaarde in deze drie jaar?

De intrest bedraagt in dit voorbeeld € 1.000 per jaar. De eindwaarde van € 10.000 stijgt hierdoor jaarlijks met € 1.000.

Jaar	*Intrest*	*Eindwaarde*
1	€ 1.000	€ 11.000
2	- 1.000	€ 12.000
3	- 1.000	€ 13.000
	€ 3.000	

Bij enkelvoudige intrestberekeningen kan het intrestpercentage evenredig over delen van het jaar worden verdeeld. In voorbeeld 1.2 is 10% per jaar gelijk aan $2\frac{1}{2}$% per kwartaal. Bij een intrestpercentage van $2\frac{1}{2}$% per kwartaal zal over de gehele periode eveneens € 3.000 intrest worden berekend. Het intrestbedrag van € 3.000 kan eveneens worden berekend met de formule:

$$I = \frac{K \times p \times t}{c}$$

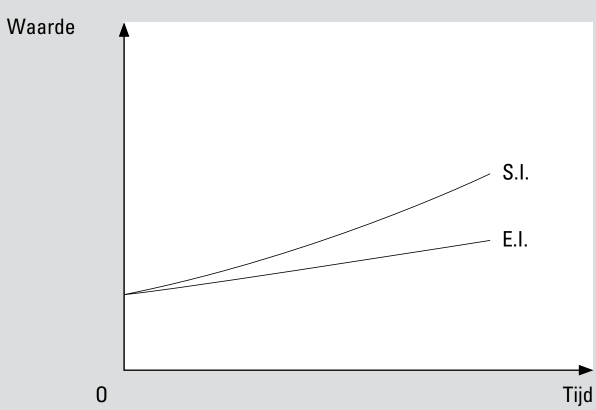
K = kapitaal of het bedrag van de lening
p = intrestpercentage per jaar
t = het aantal perioden
c = 100 indien t is uitgedrukt in jaren
= 1 200 indien t is uitgedrukt in maanden
= 36 000 of 36 500 indien t is uitgedrukt in dagen

Bij samengestelde intrest wordt intrest berekend over het totaal van de oorspronkelijke lening plus de reeds vervallen intrest. In voorbeeld 1.2 zullen intrestbedrag en eindwaarde zich als volgt ontwikkelen indien per jaar 10% samengestelde intrest wordt berekend.

Jaar	*Intrest*			*Eindwaarde*
1	10% van € 10.000	=	€ 1.000	€ 11.000
2	10% van € 11.000	=	€ 1.100	€ 12.100
3	10% van € 12.100	=	€ 1.210	€ 13.310
			€ 3.310	

In geval van samengestelde intrest nemen intrestbedrag en eindwaarde sneller toe dan bij enkelvoudige intrest. De oorzaak hiervan is dat in dit geval over de vervallen intrest eveneens intrest wordt berekend. De berekende intrest wordt aan de schuld toegevoegd. Bij een periode korter dan een jaar wordt veelal enkelvoudige intrest berekend. Is de periode langer dan een jaar, dan is samengestelde intrest meer gebruikelijk. In figuur 1.1 is het verloop van de eindwaarde in de tijd op basis van enkelvoudige *(E.I.)* en samengestelde intrest *(S.I.)* grafisch weergegeven.

Figuur 1.1 **Verloop eindwaarden bij enkelvoudige en samengestelde intrest**



■ ■ ■ 1.2 Gemiddelden

Bij enkelvoudige intrestberekeningen wordt regelmatig gebruikgemaakt van gemiddelden. Een gemiddelde vervangt een aantal grootheden en leidt bij berekeningen tot dezelfde uitkomst als bij gebruik van de oorspronkelijke waarden. In deze paragraaf zullen worden behandeld:

1 het gemiddelde intrestpercentage ($\bar{p}$);
2 het gemiddeld uitstaande kapitaal ($\bar{K}$);
3 de gemiddelde looptijd ($\bar{t}$).

Ad 1 Het gemiddelde intrestpercentage
Het gemiddelde intrestpercentage kan bijvoorbeeld van belang zijn indien men het totale rendement op een aantal leningen wil beoordelen. Een vergelijking met het gemiddelde intrestpercentage van vorige perioden kan eveneens bij de beoordeling worden betrokken.

■ Voorbeeld 1.3
Gedurende een jaar heeft iemand zijn geld op de volgende wijze belegd:

Kapitaal	Intrest-percentage	Aantal maanden
€ 10.000	6	4
€ 20.000	8	6
€ 40.000	9	8

Hij is geïnteresseerd in het gemiddeld rendement dat hij op het belegde vermogen heeft behaald.

Het gemiddelde intrestpercentage wordt berekend met de formule:

$$\bar{p} = \frac{\sum K \times p \times t}{\sum K \times t}$$

Deze formule kan op de volgende wijze worden afgeleid:

$$\text{Intrest} = \frac{K \times p \times t}{1\,200} = \frac{10.000 \times 6 \times 4}{1\,200} = \frac{240.000}{1\,200}$$

$$= \frac{20.000 \times 8 \times 6}{1\,200} = \frac{960.000}{1\,200}$$

$$= \frac{40.000 \times 9 \times 8}{1\,200} = \frac{2.880.000}{1\,200} \quad +$$

$$\frac{\sum K \times p \times t}{1\,200} = \frac{4.080.000}{1\,200} = € \; 3.400$$

Het gaat er bij deze berekening om welk intrestpercentage gemiddeld op de beleggingen is behaald. De voorgaande berekening wordt nogmaals uitgevoerd, waarbij de werkelijke intrestpercentages vervangen worden door $\bar{p}$.

$$\text{Intrest} = \frac{K \times \bar{p} \times t}{1\,200} = \frac{10.000 \times \bar{p} \times 4}{1\,200} = \frac{40.000\bar{p}}{1\,200}$$

$$= \frac{20.000 \times \bar{p} \times 6}{1\,200} = \frac{120.000\bar{p}}{1\,200}$$

$$= \frac{40.000 \times \bar{p} \times 8}{1\,200} = \frac{320.000\bar{p}}{1\,200} \quad +$$

$$\frac{\sum K \times \bar{p} \times t}{1\,200} = \frac{480.000\bar{p}}{1\,200} = € \; 3.400$$

Beide uitkomsten moeten leiden tot hetzelfde intrestbedrag, zodat geldt:

$$\frac{4.080.000}{1\,200} = \frac{480.000\bar{p}}{1\,200}$$

$$\bar{p} = \frac{4.080.000}{480.000} = 8{,}5 = \frac{\sum K \times p \times t}{\sum K \times t}$$

Ad 2 Het gemiddeld uitstaande kapitaal

Op overeenkomstige wijze kan de formule voor het gemiddeld kapitaal worden afgeleid:

$$\bar{K} = \frac{\sum K \times p \times t}{\sum p \times t}$$

Het gemiddeld uitstaande kapitaal in voorbeeld 1.3 is:

$$\bar{K} = \frac{10.000 \times 6 \times 4 + 20.000 \times 8 \times 6 + 40.000 \times 9 \times 8}{6 \times 4 + 8 \times 6 + 9 \times 8} =$$

$$= \frac{4.080.000}{144} = € \; 28.333{,}33.$$

Ad 3 De gemiddelde looptijd

De gemiddelde looptijd is de periode gedurende welke de verschillende kapitalen gemiddeld uitstaan. De formule voor de gemiddelde looptijd is:

$$\bar{t} = \frac{\sum K \times t \times p}{\sum K \times p}$$

$$\bar{t} = \frac{10.000 \times 6 \times 4 + 20.000 \times 8 \times 6 + 40.000 \times 9 \times 8}{10.000 \times 6 + 20.000 \times 8 + 40.000 \times 9} =$$

$$= \frac{4.080.000}{580.000} = 7{,}03 \text{ maanden.}$$

De hiervoor besproken gemiddelden zijn voorbeelden van een gewogen gemiddelde. Bij de berekening van bijvoorbeeld de gemiddelde looptijd is rekening gehouden met de grootte van de kapitalen en de hoogte van de intrestvoet. Indien er sprake is van gelijke kapitalen en één intrestvoet, kan voor de berekening van de gemiddelde looptijd worden volstaan met een ongewogen gemiddelde.

De formule $\dfrac{\sum K \times p \times t}{\sum K \times p}$ wordt dan $\dfrac{\sum t}{n} = \dfrac{4 + 6 + 8}{3} = 6$ maanden.

1.3 Gemiddelde vervaldag of uniformdatum

Aan het einde van de gemiddelde looptijd bevindt zich de gemiddelde vervaldag, ook wel uniformdatum genoemd. Op dit tijdstip kunnen bedragen worden verrekend, zonder dat intrest in rekening behoeft te worden gebracht.

De bepaling van deze uniformdatum kan van belang zijn als men wederzijdse vorderingen en schulden met elkaar wil verrekenen. Uiteraard dienen de partijen dan wel eenzelfde intrestvoet te hanteren.

Voorbeeld 1.4

A heeft te vorderen van B:	€ 10.000	per 29 januari
	€ 5.000	per 16 februari
A is verschuldigd aan B:	€ 20.000	per 10 februari
	€ 3.000	per 18 maart

Bereken de gemiddelde looptijd van de vier kapitalen, waarbij een maand gemakshalve op 30 dagen wordt gesteld.

Oplossing
Aangenomen wordt dat A de berekening uitvoert. De vorderingen van A op B worden dan beschouwd als positieve bedragen, de schulden van A aan B worden als negatieve bedragen in de berekening opgenomen. Als volstrekt willekeurige uitgangsdatum wordt voorts 1 januari gekozen.

+ € 10.000 staat uit van 1/1 tot 29/1 = 28 dagen
+ € 5.000 staat uit van 1/1 tot 16/2 = 45 dagen
– € 20.000 staat uit van 1/1 tot 10/2 = 39 dagen
– € 3.000 staat uit van 1/1 tot 18/3 = 77 dagen

$$\bar{t} = \frac{10.000 \times 28 + 5.000 \times 45 - 20.000 \times 39 - 3.000 \times 77}{10.000 + 5.000 - 20.000 - 3.000}$$

$$\bar{t} = \frac{-506.000}{-8.000} = +\,63{,}25 \text{ dagen.}$$

De uniformdatum ligt nu 63,25 dagen na 1 januari. Indien A deze datum vaststelt (hij heeft per saldo een schuld) zal er op hele dagen naar boven worden afgerond. De uniformdatum wordt in dit geval 1 januari + 64 dagen = 5 maart.
Dit betekent, dat bij betaling van het saldo van A (een schuld van € 8.000) precies op de hiervoor berekende datum, geen intrest behoeft te worden gecalculeerd.

Stel echter, dat A op 17 maart afrekent, dan dient hij aan B te betalen op basis van bijvoorbeeld 7%:
$€\ 8.000 + \frac{12}{360} \times 0{,}07 \times €\ 8.000 = €\ 8.018{,}67$.

■ ■ ■ 1.4 Intrest en disconto

Intrest is omschreven als de vergoeding voor het lenen van geld. De verrekening van de intrest kan op verschillende tijdstippen gebeuren.
a Aan het einde van de periode. In dit geval spreekt men van intrest. De intrest wordt uitgedrukt in een percentage van het beginbedrag.
b Aan het begin van de periode. Gaat men ervan uit dat de vergoeding voor het gebruik van geld aan het begin van de periode wordt verrekend, dan is er sprake van disconto. Dit disconto wordt uitgedrukt in een percentage van het eindbedrag.

Indien enkelvoudige intrest in rekening wordt gebracht, vindt na afloop van de periode terugbetaling van de lening en de intrest plaats.

lening lening + intrest

periode

Indien disconto wordt berekend, ontvangt de geldlener het bedrag van de lening verminderd met het discontobedrag. Aan het einde van de periode wordt het bedrag van de lening terugbetaald.

lening -/- disconto lening

periode

■ Voorbeeld 1.5
Een bedrag van € 100 wordt gedurende één jaar uitgeleend tegen:
a 6% intrest
b 6% disconto.
In beide gevallen wordt € 6 vergoeding in rekening gebracht.

a
beginbedrag eindbedrag
€ 100 intrest € 6 € 106

b
beginbedrag eindbedrag
€ 94 disconto € 6 € 100

■ ■ ■ 1.5 Equivalente intrest- en discontopercentages

Zowel voor het intrestpercentage als het discontopercentage wordt in de financiële rekenkunde het symbool p gebruikt. Indien 6% intrest of disconto in rekening wordt gebracht, dan geldt: $p = 6$. Dit is de intrest- of discontovergoeding per € 100 kapitaal. Nu is p% intrest niet gelijk aan p% disconto. Met behulp van de volgende voorbeelden zal dit worden toegelicht.

■ Voorbeeld 1.6

Een bedrag van € 100 wordt gedurende één jaar uitgeleend tegen 6% intrest. Hoeveel procent disconto wordt in rekening gebracht?

€ 100 intrest € 6 € 106

In geval van disconto bedraagt de lening € 106. Het disconto is € 6. Het discontopercentage is $\frac{6}{106} \times 100 = 5{,}66$. Het equivalent van 6% intrest is 5,66% disconto.

	intrest	disconto
In algemene termen:	p	$\dfrac{p}{100 + p} \times 100$

■ Voorbeeld 1.7

Een bedrag van € 100 wordt gedurende één jaar uitgeleend tegen 6% disconto. Hoeveel procent intrest wordt in rekening gebracht?

€ 94 disconto € 6 € 100

Voor de intrestberekening is de lening € 94, waarover € 6 intrest wordt berekend. Het intrestpercentage is $\frac{6}{94} \times 100 = 6{,}38$. Het equivalent van 6% disconto is 6,38% intrest.

	disconto	intrest
In algemene termen:	p	$\dfrac{p}{100 - p} \times 100$

■ ■ ■ 1.6 De enkelvoudige intrestmethode

Het intrestpercentage (p) geeft de vergoeding aan intrest weer per € 100 van een geldlening. In de financiële rekenkunde is het gebruikelijk om te werken met het intrestperunage; dit is de vergoeding aan intrest per € 1 van een geldlening. Het symbool voor het intrestperunage is i. In geval van 6% intrest geldt:

Intrestpercentage = $p = 6$. Dit is € 6 intrest per € 100.

Intrestperunage = $\dfrac{p}{100} = i = 0{,}06$. Dit is € 0,06 intrest per € 1.

Met behulp van het intrestperunage kan de eindwaarde van een bedrag worden berekend.

■ **Voorbeeld 1.8**

Een bedrag van € 5.000 staat gedurende drie maanden uit tegen 2% enkelvoudige intrest per maand. Bij een intrestperunage van 2% geldt $i = \frac{2}{100} = 0{,}02$. In het volgende overzicht is aangegeven hoe de eindwaarde wordt berekend.

Periode	*Berekening eindwaarde*	
1 maand	€ 5.000 (1 + 0,02)	= € 5.000 × 1,02 = € 5.100
2 maanden	€ 5.000 (1 + 2 × 0,02)	= € 5.000 × 1,04 = € 5.200
3 maanden	€ 5.000 (1 + 3 × 0,02)	= € 5.000 × 1,06 = € 5.300

De eindwaarde (E) na één maand wordt dus gevonden door het beginkapitaal (C) te vermenigvuldigen met $(1 + i)$, na twee maanden met $(1 + 2i)$ enzovoort.

Algemeen: $E_n = C \times (1 + ni)$, waarbij $(1 + ni)$ de eindwaarde is van € 1 na n perioden tegen p% intrest per periode.

Omgekeerd is het beginbedrag te bepalen door de uitkomst te berekenen van $C = \dfrac{E_n}{1 + ni}$

■ ■ ■ 1.7 De enkelvoudige discontomethode

Het discontoperunage geeft de vergoeding aan disconto per € 1 van een lening aan. Het symbool voor het discontoperunage is d. Bij disconto wordt de vergoeding voor het gebruik van geld aan het begin van de periode verrekend.
Hoe langer men een bedrag leent, des te minder men netto ontvangt. Het bedrag dat men op deze wijze netto ontvangt kan met behulp van het discontoperunage worden berekend.

■ **Voorbeeld 1.9**

Iemand leent € 10.000 gedurende één maand, twee maanden, drie maanden tegen 1% disconto per maand. Hoeveel ontvangt hij in elk van de gevallen netto?

Bij een discontopercentage van 1% is $d = 0{,}01$. De relatie tussen de lening en het netto bedrag dat wordt ontvangen is in het volgende overzicht weergegeven.

Periode	*Berekening beginbedrag*	
1 maand	€ 10.000 (1 – 0,01)	= € 10.000 × 0,99 = € 9.900
2 maanden	€ 10.000 (1 – 2 × 0,01)	= € 10.000 × 0,98 = € 9.800
3 maanden	€ 10.000 (1 – 3 × 0,01)	= € 10.000 × 0,97 = € 9.700

Bij één maand wordt het netto bedrag (C) dus gevonden door het eindbedrag (E) te vermenigvuldigen met $(1 - d)$, bij twee maanden met $(1 - 2d)$ enzovoort.

Algemeen: $C = E_n \times (1 - nd)$, waarbij $(1 - nd)$ het netto bedrag is indien € 1 wordt geleend gedurende n perioden tegen d% disconto per periode.