

Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen

Tussendoelen Annex Leerlijnen

TAL-team



met
website

Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen



Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen

**Tussendoelen Annex Leerlijnen
Bovenbouw Basisschool**

Frans van Galen
Els Feijs
Nisa Figueiredo
Koeno Gravemeijer
Els van Herpen
Ronald Keijzer

TAL-project
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Noordhoff Uitgevers Groningen/Houten



Productie: Liesbeth Walther, Meryem Tatar
Betty Heijman, Nathalie Kuijpers
Nick Spier
Vormgeving omslag: Noordhoff Uitgevers
Foto's: Frans van Galen

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Hoger Onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen, e-mail: info@noordhoff.nl

Aan de totstandkoming van deze uitgave is de uiterste zorg besteed. Voor informatie die desondanks onvolledig of onjuist is opgenomen, aanvaarden auteur(s), redactie en uitgever geen aansprakelijkheid. Voor eventuele verbeteringen van de opgenomen gegevens houden zij zich aanbevolen.

5 / 11

© 2005 Noordhoff Uitgevers bv Groningen/Houten, The Netherlands.

Behoudens de in of krachtens de Auteurswet van 1912 gestelde uitzonderingen mag niets uit deze uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever. Voor zover het maken van reprografische verveelvoudigingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16h Auteurswet 1912 dient men de daarvoor verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Reprorecht (postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.reprorecht.nl). Voor het overnemen van gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet 1912) kan men zich wenden tot Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.stichting-pro.nl).

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

ISBN (ebook) 978 90 01 84877 4

ISBN 978 90 01 85106 4

NUR 841



Inhoud

Woord vooraf	7
1 Inleiding en overzicht	11
2 Samenhang	27
3 Kerninzichten verhoudingen	43
4 Kerninzichten breuken	63
5 Kerninzichten procenten	89
6 Kerninzichten kommagetallen	107
7 Differentiatie	123
8 Einddoelen en tussendoelen	147



Woord vooraf

Het boek ‘Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen’ is de vierde publicatie in de reeks van het project ‘Tussendoelen Annex Leerlijnen’, kortweg TAL-project genoemd. Eerder verschenen TAL-publicaties over gehele getallen voor de onderbouw van het primair onderwijs, over gehele getallen voor de bovenbouw en over meten en meetkunde voor de onderbouw.

TAL is een door het ministerie van OCW geïnitieerd project. Doel van het TAL-project is om een bijdrage te leveren aan het verbeteren van de kwaliteit van het reken-wiskundeonderwijs door zicht te geven op onderwijsdoelen en leerlijnen, en de samenhangen daartussen.

De opzet van dit boek verschilt in een aantal opzichten van de eerdere publicaties. Dit heeft te maken met het feit dat de onderwerpen – breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen – tot de moeilijkste leerstofonderdelen voor de basisschool behoren. Er is veel onderwijstijd gemoeid met deze leerstofonderdelen en niet zelden is het rendement van deze investering teleurstellend.

In de praktijk leidt dit tot een keuze voor differentiatie in niveaugroepen, temporisering en de roep om minimumdoelen. Onderliggend probleem is echter de uitlijning van de leerstof. Het gaat om veel leerstof die over een beperkt aantal leerjaren moet worden verdeeld, met als gevolg dat van meet af aan tempodruk wordt gevoeld. Hierdoor komt het ontwikkelen van een goede inzichtelijke basis al snel in het gedrang – met name voor de zwakke rekenaars. We kiezen daarom voor een accentverschuiving in de balans van ‘kunnen’ naar ‘begrijpen’. Ons uitgangspunt is dat het investeren in kerninzichten tot een beter rendement leidt.

Uiteraard moet hiervoor ruimte worden gecreëerd. Dit hoeft echter geen inperking van de einddoelen voor alle leerlingen te betekenen. Met het investeren in kerninzichten wordt namelijk een basis gelegd die – op een per leerling verschillende manier – kan worden uitgebouwd. Wij kiezen daarbij voor differentiatie binnen interactief onderwijs aan de hele (heterogene) groep en we achten dit belangrijk genoeg om er een apart hoofdstuk aan te besteden. Het doel van differentiatie binnen interactief onderwijs is uiteindelijk om te bewerkstelligen dat zo veel mogelijk leerlingen een zo hoog



mogelijk niveau bereiken. Het onderwijs zal dan zo moeten worden ingericht dat alle leerlingen de kans krijgen om zich verder te ontwikkelen. We achten het van belang dat daartoe regelmatig situaties worden gecreëerd die leerlingen uitdagen om over moeilijker kwesties na te denken.

Een en ander leidt tot een andere opzet dan die van de eerdere TAL-publicaties. De leerlijnbeschrijving is meer globaal van karakter en het accent ligt op een beschrijving van de didactische kern. Bovendien is gekozen voor een geïntegreerde beschrijving van de doelen in een apart hoofdstuk, in plaats van de doelen en tussendoelen in de lopende tekst op te nemen. Dit is enerzijds gedaan omdat we in deze publicatie de samenhang tussen de verschillende leerstofonderdelen willen benadrukken en anderzijds omdat het gaat om een relatief korte periode aan het eind van de basisschool, wat een vergaande opsplitsing in tussendoelen weinig zinvol maakt.

Aan de totstandkoming van dit boek is een proces vooraf gegaan van experimenteren en discussiëren. De experimenten vonden plaats op een aantal proefscholen, waar speciaal ontworpen lessen als katalysator fungeerden voor gesprekken met leraren uit de bovenbouw. De bredere discussie met leraren, opleiders, begeleiders en andere betrokkenen is gevoerd aan de hand van presentaties en publicaties – waaronder een voorlopige uitwerking van de belangrijkste keuzen in de vorm van een discussienota. Ook werd een website geopend met lesbeschrijvingen, leservaringen en toelichtingen. De vele reacties die we in verschillende settings kregen hebben geleid tot belangrijke verbeteringen. We willen dan ook alle betrokkenen bedanken voor hun inbreng. Een speciaal woord van dank gaat daarbij uit naar de leraren van de proefscholen. Verder noemen we ook de medewerkers van de SLO die vanuit een parallelproject belangrijke bijdragen hebben geleverd.

We hopen dat deze beschrijving van het gebied breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen niet alleen houvast en overzicht biedt, maar ook een inspiratiebron zal zijn voor leraren, studenten, opleiders, begeleiders en andere onderwijsactoren. Alleen via hen kan dit boek de beoogde bijdrage leveren aan de verbetering van de kwaliteit van het reken-wiskundeonderwijs.

TAL-team
Utrecht, december 2005



Website

In dit boek wordt regelmatig verwezen naar lessen die binnen het TAL-project ontworpen werden en die zijn uitgeprobeerd op proefscholen.

De lesbeschrijvingen, lesverslagen en videofragmenten zijn te vinden op www.tal.wolters.nl

1 Inleiding en overzicht

Nadruk op inzicht

‘Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen’ is een complex en lastig gebied. Het programma voor groep 6, 7 en 8 oogt overladen en de doelen lijken slechts haalbaar voor een deel van de leerlingen.

Zijn de doelen voor het reken-wiskundeonderwijs te hoog gesteld? Wie de kerndoelen leest die het Ministerie van Onderwijs heeft vastgesteld ziet dat daar in ieder geval niet bevestigd. Voor de breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen is geformuleerd:

De leerlingen leren structuur en samenhang van aantallen, gehele getallen, kommagetallen, breuken, procenten en verhoudingen op hoofdlijnen te doorzien en er in praktische situaties mee te rekenen.¹

De concrete doelen liggen echter vast in de reken-wiskundemethode en in de toetsen die een school hanteert en het is op dat niveau dat leerkrachten stellen dat het programma voor veel leerlingen niet haalbaar is.

Als oplossing kiezen sommige scholen ervoor om te werken met niveaugroepen die in hun eigen tempo door de stof gaan. Het gevaar van deze aanpak is dat sommige leerlingen nooit toekomen aan bepaalde onderwerpen van groep 7 en 8 en aan het eind van de basisschool bijvoorbeeld nog nauwelijks met procenten en kommagetallen hebben gewerkt. Gezien het belang van procenten en kommagetallen in het dagelijks leven, maar ook gezien de verwachtingen van het voortgezet onderwijs, is dat een ongewenste situatie.

In dit boek wordt een andere oplossing bepleit, namelijk om de nadruk te verleggen van ‘kunnen’ naar ‘begrijpen’. Of misschien kunnen we beter zeggen: nog verder te verleggen, want met de invoering van de moderne reken-wiskundemethoden is al veel nadruk komen liggen op inzicht en begrip. Toch lijken nog steeds hoge eisen te worden gesteld aan het beheersingsniveau, alsof we ervan uitgaan dat alle leerlingen de stof uiteindelijk als een vrij formeel systeem van regels en procedures moeten gaan beheersen. We zullen moeten erkennen dat een groot deel van de leerlingen wel inzichtelijk met breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen kan



leren werken, maar alleen op een concreet niveau, binnen betekenisvolle contexten en met vertrouwde getallen.

Als we het onderwijs richten op het aanleren van rekenprocedures in plaats van op het ontwikkelen van inzicht komt het zwaartepunt te liggen op zelfstandig oefenen. De tijdsdruk die gevoeld wordt – ‘het boek moet uit’ – zorgt ervoor dat leerkrachten te weinig tijd nemen voor klassengesprekken en discussies. Het zijn echter de klassengesprekken en discussies die zorgen voor de verdieping van het inzicht van leerlingen en niet de rijtjes sommen.

De verschuiving die in dit boek bepleit wordt komt erop neer dat minder hoge eisen worden gesteld aan het beheersingsniveau dat leerlingen zouden moeten bereiken. Daar staat tegenover dat hogere eisen gesteld worden aan het redeneren van leerlingen. Concreet leidt dat ook tot een verschuiving in de onderwijstijd, want de nadruk komt te liggen op klassengesprekken en discussies en minder op zelfstandig oefenen. We willen echter benadrukken dat het om relatieve verschuiving gaat: naast ‘begrijpen’ blijft ‘kunnen’ nog steeds belangrijk.

De accentverschuiving die bepleit wordt brengt met zich mee dat we de doelen en tussendoelen van het leerstofgebied willen koppelen aan ‘kerninzichten’ en niet aan te beheersen procedures. We komen daar later op terug.

Verhoudingen

Verhouding als overkoepelend begrip

Het overkoepelende begrip bij het leerstofgebied ‘breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen’ is dat van verhouding. Ook breuken, procenten en kommagetallen beschrijven in zekere zin verhoudingen. Breuken geven de verhouding aan tussen een deel en het geheel. Procenten geven de verhouding tot een bepaald totaal dat op 100 wordt gesteld. Kommagetallen zijn vaak meetgetallen die de verhouding aangeven ten opzichte van een bepaalde maat.

Wanneer we in dit boek spreken over ‘verhoudingen’ verwijzen we soms naar verhouding als als een overkoepelend begrip en soms naar de typische bovenbouwleerstof rond verhoudingen. Met dat laatste bedoelen we – wat grof geformuleerd – het type opgaven waarbij de verhoudingstabel een be-



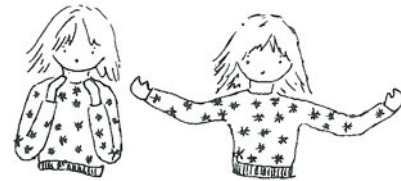
langrijke rol speelt. In hoofdstuk 3 richten we ons met name op die bovenbouwstof, het redeneren met evenredigheden. In dat hoofdstuk staan de verhoudingen als het ware naast de breuken (hoofdstuk 4), procenten (hoofdstuk 5) en kommagetallen (hoofdstuk 6) als onderdeel van het totale leerstofgebied. In de hoofdstukken 1 en 2, waarin we de samenhang binnen het leerstofgebied schetsen, gebruiken we verhouding vooral als een overkoepelend begrip.

Meet- of verhoudingsgetallen

Kinderen nemen al vroeg verhoudingen waar en kunnen deze ook beschrijven, zij het in eerste instantie kwalitatief, zoals het volgende voorbeeld laat zien.

Alexli van zes zit achter in de auto en kijkt naar de vrachtschepen op de rivier. Een van de boten heeft een auto op het dek staan. ‘Dat is pas een grote boot’, zegt ze. Ze laat het zien met haar handen, eerst houdt ze die dicht bij elkaar en daarna heel ver van elkaar: ‘Als de auto zó groot is, dan is de boot zó groot!’

Auto’s zijn groot voor een kind van zes, maar deze boot is nog veel groter. Alexli gebruikt haar handen om de verhouding tussen auto en boot aan te geven. Ze maakt als het ware een afbeelding van de verhouding.



Later leren leerlingen verhoudingen kwantitatief beschrijven, maar niet direct in de vorm van ‘zoveel staat tot zoveel’. Vaak worden verhoudingen gevangen in één getal, zoals in, ‘vijf keer zo groot’, ‘twee keer zo klein’, of ‘drie keer zo duur’. In veel gevallen zit de verhouding nog dieper verborgen, in wat Freudenthal ‘meet-of verhoudingsgetallen’ noemt. Getallen, zo betoogt hij, verschijnen in tal van vormen aan de leerlingen. Hij onderscheidt in dit verband verschillende aspecten van getalbegrip.² Zo kunnen we een onderscheid maken naar:



- Naamgetal. Wanneer getallen als label worden gebruikt, zoals bijvoorbeeld bij busnummers, ‘lijn 14’.
- Telgetal. Wanneer het gaat om de volgorde van de getallen in de telrij en het door- en terugtellen daarbinnen.
- Aantalgetal. Verwijst naar het kardinale aspect; hoeveelheid als kenmerk van een verzameling telbare objecten.
- Meetgetal. Dit is het getalsaspect dat volgens Freudenthal het meest in de praktijk voorkomt. Het gaat in de praktijk vaak over ‘hoe groot’ of ‘hoe duur’ en dergelijke en daarbij worden standaardmaten of andere referenties gebruikt om zaken in perspectief te plaatsen.
- Rekengetal. Dit getalsaspect kunnen we direct associëren met onderwijs; het betreft het werken met getallen los van praktische contexten. Hier gaat het om regels, eigenschappen en relaties tussen getallen. We spreken in dit verband ook wel van onbenoemde getallen.

Bij meten kijk je ‘hoe vaak iets past’. Wanneer een meter bijvoorbeeld zeven keer op een bepaalde lengte past, dan spreken we van 7 meter. Die 7 geeft in feite een verhouding weer, de verhouding tussen de lengte van één meter en de gemeten lengte. Vandaar dat meetgetallen ook verhoudingsgetallen genoemd kunnen worden. Verhoudingsgetallen kunnen expliciet gebonden zijn aan een standaardmaat, maar kunnen ook verwijzen naar andere eenheden, zoals bijvoorbeeld in ‘de helft van de bevolking’, of ‘driekwart reep’. De ‘helft’ en de ‘driekwart’ in deze voorbeelden zijn ook verhoudingsgetallen; eigenlijk zijn breuken in toepassingssituaties vrijwel altijd verhoudingsgetallen. Alles bij elkaar is het niet verwonderlijk dat Freudenthal tot de conclusie komt dat de meeste getallen die we in het dagelijks leven gebruiken meet- of verhoudingsgetallen zijn.

Samenhang en verschillen

Het feit dat breuken, procenten en kommagetallen zo dicht bij elkaar staan maakt het mogelijk om bij het rekenen in alledaagse situaties van de ene vorm over te stappen op een andere en weer terug. Een paar voorbeelden:

- Bij 75% denken we aan driekwart, bij 73% aan ‘bijna driekwart’.
- 59% is ‘59 van de 100’, of ‘bijna 6 van de 10’.
- ‘20 van de 60’ herkennen we als ‘precies $\frac{1}{3}$ ’.
- € 2,50 interpreteren we als $2\frac{1}{2}$ euro.



- Drie keer € 2,50 rekenen we uit via $3 \times 2\frac{1}{2}$ en $7\frac{1}{2}$ interpreteren we daarna weer als € 7,50.

De overstap van de ene vorm naar de andere vorm helpt ons situaties beter te begrijpen en maakt het rekenwerk vaak ook makkelijker. De breuken nemen daarbij een centrale plaats in. Het is essentieel dat leerlingen leren zien hoe breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen onderling samenhangen. Het is de ruggegraat voor het inzicht dat ze moeten ontwikkelen.

Naast de samenhang is het ook belangrijk dat leerlingen de verschillen leren doorzien. Als we zo makkelijk van de ene vorm op een andere kunnen overstappen, waarom gebruiken we breuken, procenten kommagetallen en verhoudingen dan eigenlijk naast elkaar? Is dat alleen een erfenis uit het verleden, of zijn die verschillen nog steeds belangrijk? In hoofdstuk 2 zullen we laten zien hoe die breuken, procenten kommagetallen en verhoudingen ontstaan zijn en hoe ze passen bij verschillende typen situaties en problemen. Ze hebben, chique gezegd, een verschillende fenomenologische basis. Het is belangrijk dat leerlingen de verschillen leren onderkennen en de waarde ervan gaan inzien.

Leerlingen moeten dus enerzijds de samenhang tussen breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen doorzien en kunnen gebruiken, maar ze moeten ook weten waarom je in de ene situatie de ene beschrijvingsvorm gebruikt en in een andere situatie een andere.

Benoemd en onbenoemd

Eerst contextgebonden

Leren rekenen start vanuit redeneren in concrete, praktische situaties. Het werken met getallen is in eerste instantie nog helemaal gebonden aan een specifieke context. Later kunnen getallen los komen van zulke situaties en in het denken van een kind een wereld op zich gaan vormen.

We kunnen dit toelichten door een uitstapje te maken naar het aanvankelijk rekenen. Op een bepaald moment kunnen heel jonge kinderen de vraag ‘Hoeveel is vier erbij vier?’ nog niet beantwoorden, terwijl ze vier blokjes en vier blokjes samen wel als ‘acht’ kunnen benoemen. Voor deze kinderen heeft ‘vier’ nog geen opzichzelfstaande betekenis. Getallen bestaan voor



hen slechts als *benoemde* getallen: vier blokjes, vier knikkers of vier ijsjes. Misschien zouden we overigens beter van ‘benoemende’ getallen kunnen spreken, de getallen worden namelijk gebruikt als een soort bijvoeglijke naamwoorden om hoeveelheden te typeren.

Later ontstaat het besef dat ‘vier erbij vier’ altijd ‘acht’ oplevert, ongeacht waar de getallen naar verwijzen. In de loop van de tijd leert een kind steeds meer relaties tussen getallen en die getallen krijgen daardoor geleidelijk aan betekenis op zich. Bij ‘vier’ denkt een kind dan niet meer in de eerste plaats aan hoeveelheden, maar aan met ‘vier’ verbonden getalrelaties zoals bijvoorbeeld $2 + 2 = 4$, $3 + 1 = 4$, $5 - 1 = 4$, $2 \times 2 = 4$ en $8 : 2 = 4$. Getallen hebben op dat moment geen directe relatie met blokjes of iets dergelijks meer nodig; ze zijn als het ware zelf een object geworden.

Bij breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen moet zich een vergelijkbaar proces voltrekken. We lichten het toe aan de breuken. Ook dat zijn aanvankelijk steeds benoemde getallen, in de zin dat leerlingen weten wat driekwart van een pizza is, of van een chocoladereep of strook. En ook hier moet de overstap gemaakt worden van benoemde getallen naar opzichzelfstaande, niet benoemde getallen. Dat betekent dat ‘driekwart’ raakt ingebed in getalrelaties als $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$, enzovoort. Deze overstap is echter pas zinvol als leerlingen zich voldoende hebben kunnen oriënteren op de betekenis van breuken. In het onderwijs wordt voor deze oriëntatie echter niet altijd voldoende tijd genomen, de overstap wordt dan gemaakt voordat de leerlingen er werkelijk aan toe zijn en voordat zij zelf een netwerk van relaties tussen breuken hebben kunnen vormen. Vaak worden dan vervolgens concrete voorstellingen – zoals breukencirkels – gebruikt om het gat te vullen. Op deze manier wordt de zaak echter op zijn kop gezet. In plaats van dat leerlingen via redeneren en generaliseren ontdekken welke relaties er tussen breuken bestaan, lezen ze die relaties af van een geïdealiseerd model.

De taal die leraar en leerlingen gebruiken kan hier tot misverstanden leiden. Een leerkracht die zegt: ‘Een vierde en een vierde is samen een half’, kan daarbij de relatie tussen opzichzelfstaande, niet benoemde breuken bedoelen, terwijl leerlingen alleen een relatie tussen concrete objecten zien. Voor hen betekent ‘Een vierde en een vierde is samen een half’ hetzelfde als ‘Twee stukjes van een kwart cirkel uit de breukendoos zijn samen even groot als het stukje van een halve cirkel.’ Deze leerlingen bevinden zich voor de breuken nog op het niveau van de benoemde getallen. In het gesprek tussen leraar en leerling wordt dit niet zichtbaar omdat beiden dezelfde taal lijken te spreken.



Opbouwen van een relatienet

Uiteindelijk moeten leerlingen ook kennis ontwikkelen die losstaat van concrete situaties. Ze moeten, met andere woorden, de stap maken naar breuken als niet benoemde getallen. De kennis die ze in de loop van de tijd ontwikkelen over de relaties tussen verschillende soorten breuken noemen we een relatienet.

Waarschijnlijk weten leerlingen eind groep 6 redelijk wat over eenvoudige breuken als ‘helft’, ‘derde’ en ‘kwart’. In de loop van groep 7 en 8 breidt hun kennis van breukenfeitjes zich steeds verder uit. Leerlingen ontwikkelen een relatienet het beste vanuit redeneren en rekenen in contextsituaties, dus vanuit situaties met benoemde breuken. Al doende ontwikkelen leerlingen een relatienet waarmee ze eenvoudige breukenproblemen kunnen oplossen. Het is verstandig om in de opgaven die we hen voorleggen – net als bij het aanvankelijk rekenen – te beginnen met eenvoudige gevallen. Als leerlingen niet te veel verschillende breukrelaties voorgeschoteld krijgen wordt de kans groter dat ze die relaties onthouden en opnemen in het relatienet. Geleidelijk aan kan het relatienet worden uitgebreid. Het tempo waarin dit gebeurt zal van leerling tot leerling verschillen. Op een gegeven moment is de grens echter bereikt, want je kunt niet alle relaties tussen alle mogelijke breuken paraat hebben. Net als bij de natuurlijke getallen moet er op een gegeven moment een overstap gemaakt worden naar procedures.

We moeten erkennen dat sommige leerlingen die overstap niet zullen kunnen maken. Het lukt hen wel om opgaven met eenvoudige breuken op te lossen, maar dat doen ze dan vanuit de specifieke relaties die ze kennen en niet op grond van algemene rekenprocedures. In onze ogen is het ook niet noodzakelijk dat alle leerlingen de overstap maken. Wel zouden alle leerlingen de gelegenheid moeten krijgen om over algemene procedures voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van breuken na te denken. Situaties die aanleiding kunnen geven tot het ontwikkelen van procedures zouden regelmatig terug moeten komen. Dat biedt leerlingen die de eerste keren niet aangehaakt hebben de kans om dat alsnog te doen, maar bovendien geldt voor alle leerlingen dat één keer uitvinden of snappen hoe het zit niet voldoende is. Ook voor betere leerlingen geldt dat ze hetzelfde vaak een paar keer moeten begrijpen voordat het beklijft.

Het hierboven geschetste onderscheid tussen benoemde getallen en niet benoemde getallen geldt niet alleen voor breuken, maar ook voor verhoudin-

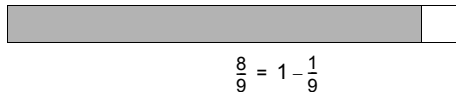
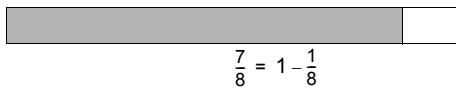


gen, kommagetallen en procenten. De ontwikkeling van ‘benoemd’ naar ‘onbenoemd’ geldt voor alle getallen; het gaat in de kern om hetzelfde proces als wat in de TAL-brochure ‘Hele Getallen Onderbouw Basisschool’³ wordt beschreven met de trits ‘contextgebonden’, ‘objectgebonden’ en ‘puur tellen en rekenen’.

Modellen

In het leerproces spelen modellen een belangrijke rol. In eerste instantie liggen de modellen nog heel dicht bij contextsituaties. Een banketstaaf die moet worden verdeeld kan worden voorgesteld als een strook, of een strookje papier dat moet worden gevouwen is zelf de context. In de beginperiode nemen leerlingen hun tekening soms letterlijk, wanneer twee strookjes van een kwart samen toevallig langer zijn dan een strookje van een half, dan is een vierde plus een vierde voor hen meer dan een half. Het tekenen van een strook, getallenlijn, cirkel en dergelijke dient echter om het redeneren te ondersteunen.

Na verloop van tijd kunnen leerlingen ook redeneren aan de hand van modellen buiten een concrete contextsituatie om. Ze kunnen bijvoorbeeld bedenken dat $\frac{3}{5}$ meer is dan $\frac{1}{2}$ omdat $\frac{3}{5}$ een strook verdeelt in een groot stuk en een klein stuk. Modellen ontwikkelen zich langzamerhand tot op zichzelfstaande hulpmiddelen voor het redeneren over breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen. De band met concrete situaties blijft echter van groot belang. Leerlingen moeten zich bijvoorbeeld achter het opdelen van een strook een concrete verdeelsituatie kunnen voorstellen.



Er is verschil tussen het modelgebruik zoals we dat hier schetsen en het werken met kant-en-klare modellen zoals breukenstokken en houten breukencirkels. Op zich is het werken met zulk concreet materiaal niet verkeerd, maar de kans bestaat dat het *aflezen* van relaties de plaats inneemt van het *redeneren* over relaties. $\frac{8}{9}$ is dan bijvoorbeeld meer dan $\frac{7}{8}$ omdat leerlingen zien dat het meer is en niet op grond van een redenering. De redenering bij $\frac{8}{9}$ en $\frac{7}{8}$ zou bijvoorbeeld kunnen zijn dat elk van deze breuken bijna 1 is, maar $\frac{1}{9}$ is kleiner dan $\frac{1}{8}$.

Globaal gesproken kunnen we zeggen dat modellen zich ontwikkelen van



modellen van concrete situaties tot modellen voor het redeneren. Tegelijkertijd ontwikkelt zich – ondersteund door de modellen – een netwerk aan getalrelaties. Als zo'n relatienet is gevormd betekent dat op zich weer dat de modellen op een ander niveau gebruikt kunnen worden

In dit boek leggen we de nadruk op het gebruik van de dubbele strook en de dubbele getallenlijn.

Dat wil niet zeggen dat andere modellen niet aan bod moeten komen, maar het heeft voordelen om deze twee modellen centraal te stellen. Deze modellen brengen namelijk via de twee schalen heel

duidelijk de relatie met de grootheid waar het om gaat in beeld. Een voorbeeld is de procentenstrook die hiernaast staat. De ene schaal geeft de aantallen – bijvoorbeeld ondervraagden – en de andere schaal de percentages. Op de rol van modellen gaan we verder in in hoofdstuk 2.



Geleid heruitvinden

Als we leerlingen inzicht bij willen brengen mogen we ook fundamentele vragen over de functie van breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen niet uit de weg gaan. Voorbeelden van zulke vragen zijn:

- Waarom gebruiken we naast breuken ook procenten?
- Wat is het voordeel van kommagetallen boven breuken?
- Wat hebben verhoudingen en breuken met elkaar te maken?
- Wat hebben verhoudingen en procenten met elkaar te maken?

Het is dit soort vragen dat de basis legt voor een echt begrip van wat breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen zijn. In plaats van de vragen achteraf te stellen als leerlingen al bekend zijn met de onderwerpen, lijkt het ons beter om ze te gebruiken als uitgangspunt voor de introductie van deze getallen. Het komt erop neer dat we kinderen kommagetallen en procenten als het ware opnieuw laten uitvinden.

Om dit proces aan te duiden spreken we van ‘geleid heruitvinden’. Wiskunde is stukje bij beetje uitgevonden; de mensheid heeft er duizenden jaren over gedaan. Voor een deel gaat het hierbij om zaken die voor ons nu zó vanzelfsprekend zijn dat we niet eens beseffen dat er iets aan uit te vinden



viel. Neem het cijfer nul. We hebben de nul nodig om een onderscheid te maken tussen bijvoorbeeld 103 en 13. Toch is de nul vermoedelijk pas rond 600 na Christus in India uitgevonden. De Romeinen gebruikten bijvoorbeeld nog aparte symbolen – C en X – om een onderscheid te maken tussen 100 en 10. Op zich is dat ook een duidelijk systeem, maar berekeningen met Romeinse cijfers zijn veel lastiger dan met onze ‘Arabische’ cijfers.

Op een vergelijkbare manier is de stap van breuken naar kommagetallen een enorme uitvinding geweest. Het is niet een uitvinding die door één iemand is gedaan, maar onze landgenoot Simon Stevin (1548-1620) was een van degenen die de voordelen van tiendelige breuken zag en er veel aan heeft bijgedragen dat ze gebruikt gingen worden.

Het principe van het geleid heruitvinden – of ‘guided reinvention’ – ontleen we aan Freudenthal.⁴ Volgens hem moeten we het onderwijs zó vormgeven dat we leerlingen de kans geven om de uitvindingen van onze voorouders als het ware nog eens over te doen. Natuurlijk moet dat niet te letterlijk worden genomen, want we kunnen van gewone basisschoolleerlingen niet verwachten dat ze iets doen waar de mensheid eeuwen voor nodig heeft gehad. Onder leiding van de leerkracht kunnen leerlingen echter wel een proces doormaken waarin ze bijvoorbeeld zelf ontdekken dat kommagetallen handig zijn en waarom ze dat zijn. Omdat de leerkracht een essentiële rol speelt spreken we van ‘geleid heruitvinden’.

Kerninzichten

Appels	
prijs per kilo € 1,20	gewicht 0,762 kg
Uw prijs € 	

Wij bepleiten in dit boek een verschuiving in het onderwijs van ‘kunnen’ naar ‘begrijpen’. In latere hoofdstukken zullen we proberen te beschrijven wat het precies is dat leerlingen moeten begrijpen en in dat verband spreken we van ‘kerninzichten’. Hier willen we toelichten wat we onder kerninzichten verstaan. Als voorbeeld nemen we de volgende opgave.

De prijssticker op een zak appels laat zien wat het gewicht is van de appels en wat ze per kilo kosten. Er zit echter een vlek op de uiteindelijke prijs. Wat zou je ongeveer moeten betalen?



Wie ziet dat hier een vermenigvuldiging moet worden uitgerekend, namelijk $0,762 \times € 1,20$, heeft een directe manier om de oplossing te vinden en met een rekenmachine ben je gauw klaar. Maar voor leerlingen uit groep 7 en 8 is het helemaal niet vanzelfsprekend dat je hier kunt vermenigvuldigen. Integendeel, toen we de opgave aan leerlingen voorlegden bleek dat ze geen idee hadden hoe ze deze opgave met een rekenmachine zouden kunnen oplossen. We komen daar in hoofdstuk 6 op terug.

We hielden de formulering heel open: ‘Hoeveel zou je *ongeveer* moeten betalen voor de appels?’ Door deze open formulering en met de concrete context als steun kwamen de leerlingen bijna allemaal met zinnige antwoorden, waaronder:

- 0,762 kg is minder dan een kilo, dus moet je ook minder dan € 1,20 betalen.
- Als een kilo € 1,20 kost, dan kost 100 gram 12 cent. Dus de appels kosten iets meer dan 7×12 cent.
- 0,762 kg is ongeveer $\frac{3}{4}$ kilo, dus de appels kosten ongeveer $\frac{3}{4}$ van € 1,20.

We kunnen deze antwoorden gebruiken om een idee te geven van wat we onder kerninzichten verstaan. Als we leerlingen vragen hun oplossing te beargumenteren, blijkt dat er heel wat inzicht bij komt kijken.

- Het eerste antwoord steunt op de redenering dat de prijs van de zak appels minder wordt dan € 1,20 omdat er minder dan één kilo in zit. Maar hoe zie je aan een kommagetal dat het kleiner is dan één? Uiteraard zou je dat kunnen weten op basis van een of ander regeltje, maar echt begrijpen waarom dat zo is vergt wezenlijk inzicht in de structuur van kommagetallen.
- Het bedenken dat minder dan een kilo betekent dat je minder dan € 1,20 betaalt vraagt inzicht in evenredigheden. Uitgaande van ‘€ 1,20 per kilo’ kun je beredeneren wat de prijs is van twee kilo, of van een halve kilo, maar ook van tweeënhalve kilo.
- Voor het omzetten van 0,762 kg in het gewicht in grammen is inzicht in maatwisseling nodig. Als steun kunnen we daarbij denken aan een dubbele strook of een dubbele getallenlijn met aan de ene kant grammen en aan de andere kilogrammen.





- Bedenken dat 0,762 kilo ongeveer $\frac{3}{4}$ kilo is vraagt niet alleen dat leerlingen 0,75 koppelen aan $\frac{3}{4}$, maar ze moeten ook de relatie zien tussen 0,762 en 0,75. Dat heeft te maken met inzicht in de orde van grootte van kommagetallen. Gevoel voor getallen speelt hier een belangrijke rol. Zo kunnen de leerlingen ook bedenken dat 762 gram dichtbij 750 gram ligt en dus ongeveer $\frac{3}{4}$ kilo is.

In het bovenstaande gaat het om: inzicht in de structuur van kommagetallen, inzicht in evenredigheden, in maatwisseling en in de orde van grootte van kommagetallen. Allemaal zaken die de kern raken van het daadwerkelijk begrijpen van kommagetallen en verhoudingen. Niet tot die kern hoort, om een tegenvoorbeeld te noemen, het cijferen met kommagetallen. Dat cijferen – een procedure waarbij de komma wordt ‘verschoven’ of later wordt ‘teruggeplaatst’ – is niet moeilijker dan cijferen met gewone getallen, maar zonder inzicht is het een truc met een grote kans op fouten. Met het centraal stellen van kerninzichten bedoelen we dat het bijbrengen van inzicht voorop moet staan en niet het aanleren van rekenregeltjes. Kennis van rekenregels is kwetsbaar als het niet op begrip is gebaseerd. Omgekeerd kan een leerling die het in een bepaalde situatie gewenste rekenregeltje niet kent, toch een heel eind komen met inzicht in breuken en verhoudingen.

In hoofdstuk 3 tot en met 7 beschrijven we de kerninzichten en de daarbij horende vakdidactische consequenties meer in detail.

Differentiatie

Het probleem van de differentiatie speelt bij breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen nog meer dan bij andere leerstof en nog meer dan in andere leerjaren. In zekere zin is het programma voor de bovenbouw overladen: er komen veel onderwerpen aan de orde en als we verwachten dat alle leerlingen die stof op een vrij formeel en abstract niveau gaan beheersen blijkt dat doel in de praktijk voor veel leerlingen niet haalbaar.

Tempodifferentiatie, waarbij een deel van de leerlingen langzamer door het rekenboek gaat, is geen goede oplossing. Een consequentie daarvan kan namelijk zijn dat leerlingen aan het eind van de basisschool wel uitreure geoeftend hebben met het optellen van breuken, terwijl ze nauwelijks iets



weten van procenten of kommagetallen. In dat geval zijn de prioriteiten verkeerd gekozen, want het optellen van breuken is in het dagelijks leven geen belangrijke vaardigheid, terwijl we procenten en kommagetallen overal om ons heen tegenkomen.

Het gevoel van overladenheid heeft vooral te maken met de eisen die we stellen ten aanzien van het formeel redeneren. Op dat punt zijn er enorme verschillen tussen leerlingen. Wanneer een nieuw onderwerp als kommagetallen of procenten wordt geïntroduceerd zijn er leerlingen die bijna direct het systeem doorzien en er op een abstract niveau mee kunnen redeneren, terwijl er ook leerlingen zijn die op de basisschool niet verder komen dan werken met kommagetallen of procenten in heel concrete situaties. We zullen dergelijke verschillen tot op een bepaalde hoogte moeten accepteren en dat betekent dat de doelen van het reken-wiskundeonderwijs dienen te worden bijgesteld. Het uitgangspunt moet zijn dat iedere leerling op de basisschool een elementair begrip ontwikkelt van onderwerpen als breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen, maar dat we daarbij tegelijk accepteren dat een aantal leerlingen er alleen binnen concrete situaties mee leert rekenen. Wel moeten we ze zoveel mogelijk stimuleren het systeem ook op een meer formeel niveau te doorzien.

Bijstellen van de doelen van het onderwijs rond breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen houdt in dat we ons moeten bezinnen op de sommen die we leerlingen laten oefenen, want die veronderstellen vaak een abstract niveau van redeneren. Neem als voorbeeld het optellen van breuken, waarbij we dat eerst bekijken vanuit de situatie van de goede rekenaars. Je kunt dan zeggen dat ' $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ ' voor de betere rekenaars net zo reëel is als het optellen van ' $65 + 17 = 82$ ', waar je ook niet hoeft te weten of het nu over appels gaat of over de lengte van plankjes. Zulke kinderen kunnen ook een som als ' $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} =$ ' aan, omdat de kale rekenregels hen voldoende zeggen. Voor een deel van hen geldt echter dat het optellen van breuken alleen betekenis heeft als ze er een concrete context bij hebben. In een verdeelsituatie met $\frac{1}{2}$ pizza en $\frac{1}{3}$ pizza kunnen ze een correcte oplossing vinden, maar als kale som is ' $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ ' voor hen net zo acceptabel als ' $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ '. Wanneer we alle leerlingen alle opgaven in het rekenboek laten maken, oefenen ze veel in het maken van kale breukenopgaven. Die kale opgaven en de rekenoperaties die erbij horen hebben echter weinig betekenis voor ze, wat ertoe leidt dat ze fouten gaan maken. De leerkracht besluit dan misschien dat



ze nog meer moeten oefenen met dit type sommen, maar daarmee wordt hun inzicht niet verhoogd, hooguit worden ze meer bedreven in wat ze als een ‘trucje’ ervaren.

Als tweede voorbeeld kunnen we de procenten nemen. Sommige leerlingen hebben aan een eerste kennismaking met procenten al genoeg om te begrijpen wat de reikwijdte van het procentbegrip is. Ze doorzien meteen dat procenten een bijzonder soort breuken zijn – ‘honderdsten’ – en kunnen van daaruit moeiteloos procenten naar breuken vertalen en andersom. Voor andere leerlingen moet de link tussen breuken en procenten echter veel nadrukkelijker worden gelegd. Zonder dat inzicht hebben kale omrekeningen geen zin, want zelfs ‘25% is een kwart’ kan dan eenzelfde status hebben als het feit dat een paard in het Frans ‘cheval’ heet.

Het reken-wiskundeonderwijs in de bovenbouw stoot vaak te snel door naar het formele rekenen. Dat leidt ertoe dat leerlingen bezig zijn met het inoefenen van rekenregels zonder dat ze begrip hebben van wat daaronder ligt. Dergelijk onderwijs is niet erg effectief, want inoefenen van regels vergroot hun inzicht niet. Wij kiezen daarom voor het centraal stellen van het ontwikkelen van inzicht. Dat betekent dat meer tijd moet worden uitgetrokken voor klassengesprekken, want inzicht ontstaat vooral door gesprekken en discussies. Het precieze antwoord is in dergelijke discussies niet het belangrijkste; het gaat om de redeneringen waarop kinderen hun oplossing baseren. De tijd die hiervoor moet worden vrijgemaakt kan worden gevonden door minder nadruk te leggen op het inoefenen van rekenprocedures. Het reken-wiskundeonderwijs dient zich naar ons idee te richten op kerninzichten en globaal rekenen.

Overzicht

In de volgende hoofdstukken werken we de thema’s die we in dit hoofdstuk aanstipten verder uit. De voorbeelden die we daarbij gebruiken zijn afkomstig van de ontwikkelde kernlessen (zie voorwoord).

In hoofdstuk 2 bespreken we waarom het belangrijk is dat breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen niet als gescheiden leerstofonderdelen worden onderwezen. Leerlingen moet de gelegenheid worden geboden om steeds relaties te leggen.



In hoofdstuk 3 tot en met 6 beschrijven we de kerninzichten. Voor de overzichtelijkheid gebruiken we hierbij toch de opdeling in breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen.

In hoofdstuk 7 gaan we in op de problematiek van de differentiatie. Omdat klassengesprekken zo'n centrale rol spelen in het onderwijs bespreken we uitvoerig wat het betekent om alle leerlingen – ook de zwakke rekenaars en de bollebozen – te betrekken in de klassengesprekken.

In hoofdstuk 8 geven we tenslotte een beschrijving van de doelen en tussendoelen in dit complexe leerstofgebied. Wij doen dat in een afsluitend hoofdstuk en niet bij de beschrijving van de kerninzichten in hoofdstuk 3 tot en met 6, omdat nogal wat doelen betrekking hebben op de samenhang binnen het leerstofgebied.

noten

- 1 Ministerie van OCW (maart 2004). Voorstel herziene kerndoelen basisonderwijs.
- 2 Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.
- 3 TAL-team (1999). *Jonge Kinderen Leren Rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen. Hele getallen Onderbouw Basisschool*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- 4 Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education, China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.