

P. Touw

Wiskunde voor economie

Tweede druk



Noordhoff Uitgevers

Wiskunde voor economie



Wiskunde voor economie

Ir. P. Touw

Tweede druk

Noordhoff Uitgevers Groningen/Houten

Omslagontwerp : G2K Designers Groningen
Omslagillustratie: Photodisc

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Hoger Onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen, e-mail: info@noordhoff.nl

2 3 4 5 6 7 8 / 13 12 11 10 09

© 2007 Noordhoff Uitgevers bv Groningen/Houten, The Netherlands.

Behoudens de in of krachtens de Auteurswet van 1912 gestelde uitzonderingen mag niets uit deze uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever. Voor zover het maken van reprografische verveelvoudigingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16h Auteurswet 1912 dient men de daarvoor verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Reprorecht (postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.cedar.nl/reprorecht). Voor het overnemen van gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet 1912) kan men zich wenden tot Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.cedar.nl/pro).

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

ISBN (ebook) 978-90-01-85223-8
ISBN 978 90 01 87146 8
NUR 123

Woord vooraf

In deze herdruk van *Wiskunde voor economie* zijn de sterke punten uit de eerste druk – mogelijkheid tot zelfstudie en wiskunde in een economische context – gehandhaafd. Door het gebruik van herkenbare praktijkvoorbeelden wordt steeds de koppeling tussen theorie en praktijk gelegd. Vanuit een voorbeeld wordt een probleemstelling geformuleerd, waarna wiskundige tools worden aangereikt om tot een oplossing te komen. Verder is het materiaal geactualiseerd en is er een website bij het boek gemaakt met aanvullend materiaal. Ook de hoofdstukinleidingen zijn aangepast en het boek is voorzien van een begrippenlijst, waardoor de student gemakkelijker een bepaald begrip kan opzoeken.

Doordat in de tekst veelvuldig gebruik wordt gemaakt van opdrachten met terugkoppeling naar de theorie, is het boek uitermate geschikt voor zelfstudie. Tevens kan het dienst doen als ondersteunende literatuur bij economische vakken, zoals algemene economie, bedrijfseconomie of financiële rekenkunde.

Voordat de student een hoofdstuk gaat bestuderen, kan hij de op de website geplaatste instaptoets maken, zodat hij kan vaststellen welk specifiek deel van dat hoofdstuk hij onvoldoende beheerst. Na bestudering van het hoofdstuk geeft een eindtoets (die eveneens op de website staat) informatie over eventuele lacunes in het eindniveau van de student.

Naast dit wiskundeboek is een statistiekboek verschenen dat op dezelfde didactische leest is geschoeid.

Ik houd mij aanbevolen voor reacties.

Zwolle, april 2003
ir. P. Touw

Inhoud

Verantwoording en suggesties voor gebruik 9

- 1 Lineaire verbanden 11**
 - Inleiding 12
 - 1.1 Casus De Voordeel-urenkaart 12
 - 1.1.1 De prijs-vraagfunctie 13
 - 1.1.2 De ontvangsten (de inkomsten) 19
 - 1.1.3 De prijselasticiteit 20
 - 1.1.4 De aanbodfunctie 23
 - 1.2 Casus De hypotheek 25
 - 1.2.1 Een lineair verband 26
 - 1.2.2 Interpoleren 28
 - Samenvatting 31
 - Opgaven bij hoofdstuk 1 32

- 2 Exponentiële groei 41**
 - Inleiding 42
 - 2.1 Casus De Bank 43
 - 2.1.1 Regels van machten 43
 - 2.1.2 Wortels 54
 - 2.1.3 Exponentiële vergelijkingen 55
 - 2.1.4 Grenzen aan de groei? 57
 - 2.2 Casus De dertiende maand 59
 - 2.2.1 Periodieke betalingen 59
 - 2.2.2 De dertiende-maand-rekening 62
 - Samenvatting 65
 - Opgaven bij hoofdstuk 2 67

- 3 Break-evenpunten 77**
 - Inleiding 78
 - 3.1 Casus Totale ontvangst en totale kosten van de Voordeel-urenkaart 78
 - 3.1.1 De introductie van de ontvangsten en kosten 78
 - 3.1.2 Het oplossen van een tweedegraads vergelijking 83
 - 3.1.3 Het aantal break-evenpunten 92
 - 3.2 Casus De mountainbike 96
 - Samenvatting 99
 - Opgaven bij hoofdstuk 3 100

- 4 Lineair programmeren 109**
 - Inleiding 110
 - 4.1 Casus De kleinmeubelen 110
 - 4.1.1 Formuleren van het lineair-programmeringsprobleem 111
 - 4.1.2 De grafische methode 114
 - 4.1.3 De afrondingsprocedure 120
 - 4.2 Casus De onzekerheden 121
 - 4.2.1 De gevoeligheidsanalyse van de doelfunctie 122
 - 4.2.2 De schaduwprijs 125

- 4.2.3 Computeruitvoer 126
 - Samenvatting 128
 - Opgaven bij hoofdstuk 4 129

5 Op de helling 137

- Inleiding 138
- 5.1 Casus De productiefunctie 139
 - 5.1.1 De helling 140
 - 5.1.2 De afgeleide 145
- 5.2 Casus De vraagfunctie 150
 - Samenvatting 154
 - Opgaven bij hoofdstuk 5 155

6 Functieonderzoek 163

- Inleiding 164
- 6.1 Casus Solectra 164
 - 6.1.1 De voorraadkostenfunctie 165
 - 6.1.2 De optimale bestelgrootte 179
 - 6.1.3 De hyperbool 170
 - 6.1.4 De tweede afgeleide 174
 - 6.1.5 Het functieonderzoek 176
- 6.2 Casus Tarwe 177
 - 6.2.1 De kettingregel 178
 - 6.2.2 De productregel 180
 - 6.2.3 De quotiëntregel 182
 - Samenvatting 183
 - Opgaven bij hoofdstuk 6 184

Kernbegrippenlijst 191

Uitwerkingen tussenvragen per hoofdstuk 197

Register 229

Verantwoording en suggesties voor gebruik

Indeling boek

Het boek is opgebouwd uit zes hoofdstukken.

In hoofdstuk 1 'Lineaire verbanden' (circa 20 sbu) wordt aan de hand van de prijs-vraagfunctie van de Voordeel-urenkaart van de Nederlandse Spoorwegen de wiskundige theorie van de lijn uitgelegd. Tevens wordt aandacht besteed aan het begrip 'prijselasticiteit' uit de algemene economie.

In hoofdstuk 2 'Exponentiële groei' (circa 30 sbu) wordt aan de hand van de ontwikkeling van nieuwe spaarvormen en andere voorbeelden de wiskundige theorie van machten en wortels uitgelegd, ingebed in de begrippen 'slotwaarde' en 'contante waarde' uit de bedrijfscalculatie (financiële rekenkunde).

In hoofdstuk 3 'Break-evenpunten' (circa 30 sbu) wordt voortgebouwd op de prijs-vraagfunctie van de Voordeel-urenkaart uit hoofdstuk 1, waarbij de wiskundige theorie van tweedegraads vergelijkingen en parabolen wordt uitgelegd. Tevens komen de begrippen 'totale ontvangst' en 'totale kosten' uit de algemene economie aan bod.

In hoofdstuk 4 'Lineair programmeren' (circa 25 sbu) wordt voor een fabriek in kleinmeubelen een methode aangereikt waardoor men in staat is de optimale keuze te maken voor het productieplan. Tevens wordt gekeken wat voor effect een kleine verandering in de gegevens heeft voor de oplossing.

In hoofdstuk 5 'Op de helling' (circa 25 sbu) wordt aan de hand van een productiefunctie de wiskundige theorie van de afgeleide functie uitgelegd. Tevens wordt aandacht besteed aan de begrippen 'marginale ontvangst', 'marginale kosten' en 'marginale winst' uit de algemene economie.

In hoofdstuk 6 'Functieonderzoek' (circa 30 sbu) wordt aan de hand van de voorraadkostenfunctie voor een nieuw type auto aandacht besteed aan het functieonderzoek van een gebroken functie, waarbij de wiskundige begrippen 'tweede afgeleide' en 'asymptoot' aan bod komen. Tevens worden enkele differentieerregels geïntroduceerd waarmee (ingewikkelde) wortelfuncties kunnen worden gedifferentieerd.

Methodiek

Om de stof goed te kunnen volgen, dienen de hoofdstukken in volgorde van nummering te worden doorlopen. Er is geen uitgebreide wiskundige voorkennis vereist. Afhankelijk van de vooropleiding (vwo,

havo of mbo) en het vakkenpakket kan een student (in overleg met de docent) een of meer hoofdstukken overslaan. In het schema is te zien welke hoofdstukken achtereenvolgens bestudeerd dienen te worden. Als je bijvoorbeeld hoofdstuk 5 wilt bestuderen, dient dit vooraf te gaan door de hoofdstukken 1, 2 en 3.

Voorkennis voor	H1	H2	H3	H4	H5	H6
H1: Lineaire verbanden						
H2: Exponentiële groei						
H3: Break-evenpunten		•				
H4: Lineair programmeren		•				
H5: Op de helling	•	•	•			
H6: Functieonderzoek	•	•	•		•	

Bij het schrijven van dit materiaal is voor elk hoofdstuk zo veel mogelijk de volgende methodiek toegepast.

Een hoofdstuk begint met een overzicht van de benodigde voorkennis waardoor de lezer een indruk krijgt van de inhoud van het hoofdstuk. Er volgt een praktische probleemomschrijving (casus) van waaruit een probleemstelling wordt geformuleerd. In sommige gevallen is er voor gekozen om door een veelvoud van voorbeelden aan te geven waar de toepassingsgebieden van de leerstof kunnen worden gevonden. Aan de hand van de probleemstelling worden wiskundige methoden aangedragen die tot een oplossing kunnen leiden. Tijdens het bestuderen van de theorie wordt de lezer door het maken van tussenvragen verder geholpen zich de stof eigen te maken. De uitgewerkte antwoorden van de tussenvragen worden aan het einde van het boek gegeven. In elk hoofdstuk is ook een aanvullende of verdiepende casus opgenomen.

Belangrijke begrippen worden bij de introductie ervan in de marge vermeld.

Alle begrippen en belangrijke formules worden in de samenvatting van het hoofdstuk nog eens (alfabetisch) op een rijtje gezet.

Aan het einde van het hoofdstuk zijn opgaven gegeven. De student kan door het maken van deze opgaven met de leerstof oefenen en nagaan in hoeverre hij de theorie beheerst.

In hoofdstuk 2 is een tweetal opgaven opgenomen die gebaseerd zijn op Engelstalige artikelen uit de *Financial Times* en *The Irish Times*.

Lineaire verbanden

'The concept of numbers is the obvious distinction between the beast and man. Thanks to numbers, the cry becomes a song, noise acquires rhythm, the spring is transformed into a dance, force becomes dynamic, and outlines figures.'

Joseph Marie de Maistre (1753-1821)

1

1.1 Casus De Voordeel-urenkaart

1.2 Casus De hypotheek

Voorkennis

Verbanden, vergelijkingen, functies, eerstegraads functies, tweede-graads functies: tabellen, grafieken en formules

- Trends en periodieke verschijnselen. Trendmatige groei, trendlijn. Periode.
- Grafisch benaderen: interpoleren en extrapoleren aan de hand van een vloeiende grafiek.
- Betrouwbaarheid van de schatting.

Verbanden en functies: vergelijken van verbanden

- Een formule opstellen aan de hand van een grafiek die het verband tussen twee variabelen aangeeft.

Verbanden en functies: lineaire verbanden

- Recht evenredig verband herkennen in tabel, grafiek, formule (evenredigheidsconstante). Idem voor lineair verband.
- Lineair interpoleren en extrapoleren.
- Lineaire vergelijkingen oplossen.
- Lineaire ongelijkheden oplossen met behulp van grafiek. Berekening van snijpunt.

Verbanden en functies: exponentiële verbanden

- Lineaire groei: beginwaarde plus aangroeiing (absolute toename, hellingsgetal). De grafiek is een rechte lijn.
- Toepassingen van de wiskunde. Economische toepassingen.
- Totale grootheden (totale ontvangsten, totale kosten, totale winst) en marginale grootheden.



Instaptoets

Inleiding

De vraag van consumenten naar goederen en diensten speelt een belangrijke rol in de economie. De prijs is daarbij een bepalende factor. Als een product bijvoorbeeld in prijs daalt, zullen de consumenten in het algemeen geneigd zijn er meer van te gebruiken. Dit gaat ten koste van andere (vergelijkbare) producten die niet in prijs zijn verlaagd. Dit heet het substitutie-effect. Daarnaast kunnen consumenten bij een gelijkblijvend inkomen meer producten kopen. De koopkracht is door de prijsdaling toegenomen. Dit heet het inkomenseffect. Een prijsdaling heeft dus enerzijds het substitutie-effect en anderzijds het inkomenseffect een stijging van de vraag tot gevolg. Andersom geredeneerd leidt een stijging van de prijs tot een daling van de vraag.

In dit hoofdstuk bekijk je twee casus waarin het lineaire verband tussen de prijs van een product en de vraag ernaar aan de orde komt. In de casus van de Voordeel-urenkaart leer je de optimale prijs van de kaart te bepalen op basis van gegevens over de financiële situatie en de reisdrijf van de consument. De variabelen waarmee de Nederlandse Spoorwegen te maken hebben, zet je uit in een spreidingsdiagram. Het resultaat is een prijs-vraagfunctie. Ook leer je dat de vraag naar een product (prijs)elastisch of inelastisch kan zijn. Het elasticiteitsomslagpunt is voor een producent belangrijk bij het bepalen van de optimale prijs die hij voor een product kan vragen.

De consument bepaalt dus het verloop van de prijs-vraagfunctie, maar de producent bepaalt het verloop van de aanbodfunctie. Want hoe hoger de prijs van een product, des te interessanter het voor die producent wordt om het product aan te bieden. De situatie is voor een producent optimaal bij een stabiel marktevenwicht, als de evenwichtsprijs en de evenwichtshoeveelheid van een product zijn bepaald.

In de casus over de Hypotheek kijk je naar het verband tussen het inkomen en de maximaal verkrijgbare hypotheek. Hierbij wordt de methode van interpolatie besproken.

1.1 Casus De Voordeel-urenkaart

Bij de Nederlandse Spoorwegen (NS) worden verschillende soorten abonnementen aangeboden. De prijs van een abonnement laat de NS afhangen van de financiële situatie van de doelgroep en van de reisdrijf. Een van de abonnementen is de Voordeel-urenkaart.

Destijds is de Voordeel-urenkaart geïntroduceerd tegen de prijs van boven de f 100, met als opzet om na een paar jaar de kaart goedkoper te kunnen maken tegen de psychologische prijs van f 99 onder het motto 'Wij verlagen de prijzen drastisch!!'.

Op dit moment is de Voordeel-urenkaart aan te schaffen voor €45, hetgeen recht geeft op een korting van 40% op de verkeersbewijzen gedurende een geheel kalenderjaar na 09.00 uur 's morgens en in het weekend.

De marktonderzoeksafdeling van de NS krijgt de opdracht onderzoek te doen naar de bereidheid van reizigers om bij een prijsverandering (prijsverhoging) van de Voordeel-urenkaart de kaart toch te blijven aanschaffen. De afdeling doet dit door middel van een enquête onder de reizigers en vindt daarvoor de gegevens die in tabel 1.1 staan.

Tabel 1.1 **Prognose aantal verkochte Voordeel-urenkaarten bij verschillende prijzen**

Prijs (euro/stuk)	30	40	45	60
Aantal verkocht (in 1.000 stuks/jaar)	162	130	116	90

Probleemstelling

De NS wil onderzoeken of er een markt is voor een toename van de prijs boven de €55, waarbij men een prognose wil maken voor het aantal verkochte abonnementen bij een prijs van €70.

1.1.1 De prijs-vraagfunctie

In de voorgaande probleemstelling wordt gesproken over de prijs en de vraag (= aantal verkochte Voordeel-urenkaarten). V verwacht mag worden dat bij bijvoorbeeld een hogere prijs de vraag (= afzet) lager zal zijn.

Is het nu zo dat de vraag daalt doordat de prijs stijgt, of dat de prijs stijgt doordat de vraag daalt?

Met andere woorden: welke variabele is afhankelijk van de andere variabele?

Tussenvraag 1.1

Welke variabele wordt door de NS gebruikt als onafhankelijke variabele?

Onafhankelijke variabele

De prijs is in dit geval de *onafhankelijke variabele*, want de NS kan de prijs zelf bepalen.

Afhankelijke variabele

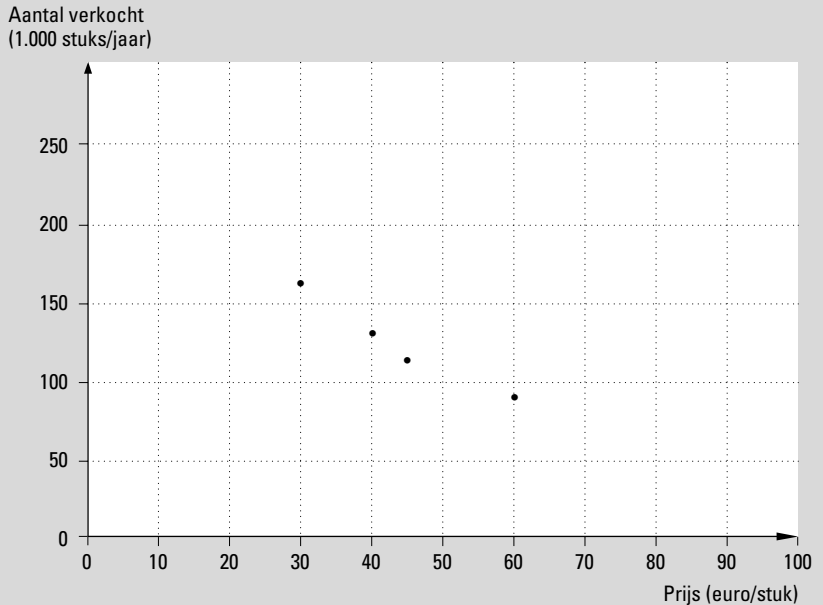
Het aantal verkochte Voordeel-urenkaarten is de *afhankelijke variabele*, want de vraag ernaar reageert op de prijs.

Een andere veelgebruikte onafhankelijke variabele is de *tijd*.

Spreadingsdiagram

De gegevens uit tabel 1.1 kunnen worden weergegeven in een grafiek, waarbij de onafhankelijke variabele horizontaal en de afhankelijke variabele verticaal wordt uitgezet. Dit noemen we een *spreadingsdiagram*, zie figuur 1.1.

Figuur 1.1 **Spreidingsdiagram**



Het is goed te zien dat er minder Voordeel-urenkaarten zullen worden verkocht naarmate de prijs per kaart hoger wordt. Er is sprake van een dalende tendens.

Als uitgangspunt voor het verband tussen de prijs en de vraag (naar Voordeel-urenkaarten) wordt een rechte lijn genomen. Dit lijkt volgens figuur 1.1 niet onredelijk. De lijn die het verband aangeeft tussen de prijs en de vraag wordt de *prijs-vraagfunctie* genoemd.

Prijs-vraagfunctie

Voor het bepalen van de lijn zijn in principe slechts twee punten noodzakelijk.

Tussenvraag 1.2

Teken het spreidingsdiagram (figuur 1.1) na en trek een lijn door de buitenste punten.

Opmerking

Het nadeel van de methode van een lijn door de buitenste twee punten is dat er totaal geen rekening wordt gehouden met de resterende punten. Deze methode is gevoelig voor eventuele afwijkingen in de buitenste punten. Binnen de statistiek staat ons een nog betere methode ter beschikking (kleinstekwadratenmethode), die gebruikmaakt van alle punten. Op dit moment beperken we ons echter tot het gebruik van de buitenste punten.

De lijn kan worden weergegeven door middel van een vergelijking.
 De prijs wordt weergegeven door p .
 De afzet (of vraag) wordt weergegeven door q (quantity).
 In het vervolg zullen de termen afzet en vraag door elkaar worden gebruikt.

De vergelijking wordt:

$$q = a \times p + b$$

Hierbij zijn a en b constanten die nader te bepalen zijn.

Eerstegraads vergelijking

Dit wordt een *eerstegraads vergelijking* genoemd.
 De buitenste punten kunnen worden weergegeven met de bijbehorende coördinaten (zie voor gegevens tabel 1.1).
 Dit geeft ($p = 30$, $q = 162$) en ($p = 60$, $q = 90$).

Stelsel

Door beide punten in te vullen in de vergelijking ontstaat een *stelsel* van vergelijkingen.

$$\begin{cases} 162 = 30a + b \\ 90 = 60a + b \end{cases}$$

Dit stelsel kan worden opgelost door beide vergelijkingen van elkaar af te trekken. Het resultaat is dat de variabele b eruit rolt ($b - b = 0$). Deze methode noemt men *eliminatie*.

Eliminatie

$$162 - 90 = 30a - 60a \Leftrightarrow 72 = -30a \Leftrightarrow a = \frac{72}{-30} = -\frac{72}{30} = -\frac{12}{5} = -2,4$$

Invullen in één van beide vergelijkingen (bijvoorbeeld de eerste) geeft:

$$162 = 30 \times -2,4 + b \Leftrightarrow b = 234$$

De eerstegraads vergelijking wordt:

$$q = -2,4p + 234$$

waarbij:

q = vraag in 1.000 stuks/jaar

p = prijs in euro/stuk

Substitutie

Er is nog een andere methode om een stelsel op te lossen. Deze methode heet *substitutie*.

$$\begin{cases} 162 = 30a + b \\ 90 = 60a + b \end{cases}$$

$$b = 162 - 30a \text{ en } b = 90 - 60a$$

$$162 - 30a = 90 - 60a$$

$$30a = -72$$

$$a = \frac{-72}{30} = -2,4$$

Invullen:

$$b = 90 - 60 \times -2,4 = 234$$

Dit geeft eveneens:

$$q = -2,4p + 234$$

Opmerking

Als de onafhankelijke variabele x wordt genoemd en de afhankelijke variabele y , dan verschijnt de algemene vorm van een eerstegraads vergelijking:

$$y = ax + b \quad [1.1]$$

Eerstegraads functie

We noemen een rechte lijn ook wel een grafiek van een *eerstegraads functie*.

Tussenvraag 1.3

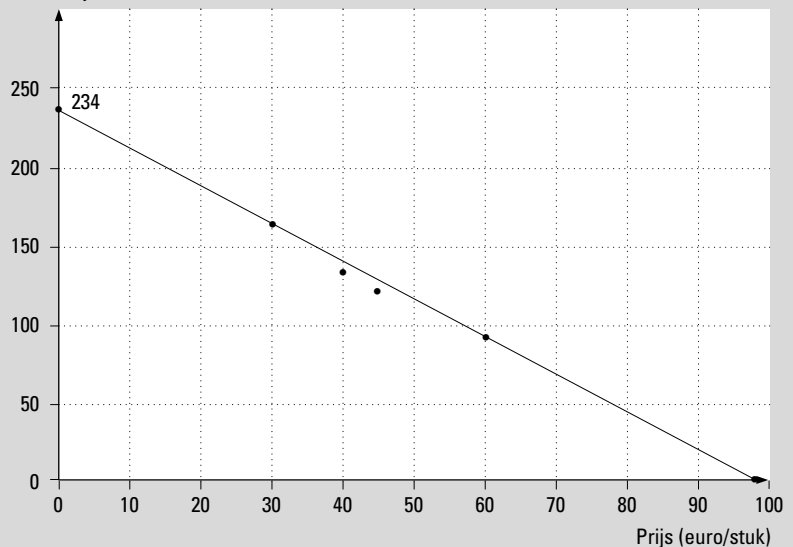
Vergelijk de waarden van de constante b ($= 234$) in voorgaande vergelijking met de lijn in figuur 1.1 (zie de uitwerking van tussenvraag 1.2).

De constanten $a = -2,4$ en $b = 234$ in de lineaire vergelijking hebben beide een duidelijke betekenis.

De constante $b = 234$ is het snijpunt met de verticale as, zie figuur 1.2.

Figuur 1.2 De prijs-vraagfunctie

Aantal verkocht
(1.000 stuks/jaar)



Tussenvraag 1.4

Geef de vergelijking van de verticale as.

Het snijpunt van de prijs-vraagfunctie met de verticale as wordt verkregen door $p = 0$ te stellen:

$$q = -2,4p + 234 = -2,4 \times 0 + 234 = 234$$

Opmerking

In de (algemene) economie is het gebruikelijk om de assen van de prijs-vraagfunctie om te keren; de horizontale as is de vraag q en de verticale as is de prijs p . Men gaat hierbij voorbij aan de wiskundige betekenis die aan een onafhankelijke variabele en aan een afhankelijke variabele wordt toegekend. De reden hiervoor is dat veel (andere) economische functies afhankelijk zijn van q en men deze functies in een grafiek samen met de prijs-vraagfunctie wil afbeelden.

Richtingscoëfficiënt (rico)

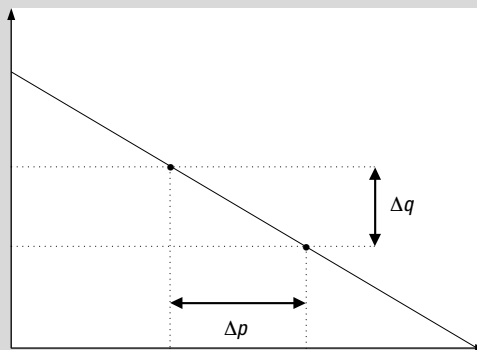
De constante a is de *richtingscoëfficiënt* (in het kort *rico*) van de vergelijking. De rico bepaalt de helling van de lijn.

Een, zoals in dit geval, negatieve rico betekent dat er sprake is van een dalende lijn. Een positieve rico geeft aan dat een lijn stijgt.

De rico kan worden berekend voor elk willekeurig tweetal punten op de lijn. De rico is gedefinieerd als het verticale verschil tussen twee punten (Δq) gedeeld door het horizontale verschil (Δp), zie figuur 1.3.

$$\text{rico} = \frac{\Delta q}{\Delta p}$$

Figuur 1.3 De rico



Tussenvraag 1.5

Bereken de rico van de lijn, uitgaande van de buitenste twee punten (30, 162) en (60, 90).

Opmerking

Als de onafhankelijke variabele x wordt genoemd en de afhankelijke variabele y , dan wordt de formule voor de rico:

$$\text{rico} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad [1.2]$$

In figuur 1.4 is een aantal voorbeelden van waarden van de rico gegeven.

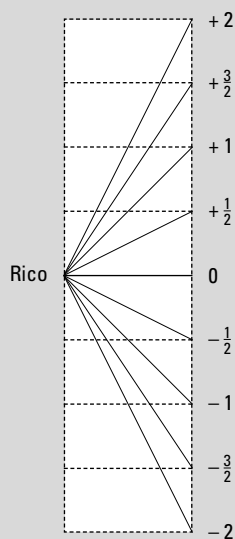
Een rico van +2 wil zeggen: één stap naar rechts en twee stappen omhoog.

Een rico van $-\frac{1}{2}$ wil zeggen: één stap naar rechts en een halve stap omlaag (ofwel twee stappen naar rechts en één omlaag).

Alleen de verhouding tussen de verticale en de horizontale afstand is van belang.

De prijs-vraagfunctie heeft alleen betekenis voor bepaalde waarden van p en q . Als de prijs te hoog wordt, dan is er geen vraag meer aanwezig (dan wordt deze als het ware negatief).

Figuur 1.4 Voorbeelden van de rico



Tussenvraag 1.6

Bereken bij een prijs van €100 de vraag naar Voordeel-urenkaarten.

De voorwaarde dat de vraag niet negatief kan zijn, geeft een begrenzing voor de maximale waarde van de prijs. Ook voor de vraag bestaat een maximale waarde. Deze wordt bereikt als de Voordeel-urenkaart gratis verkrijgbaar zou zijn.

Tussenvraag 1.7

Bereken de maximale prijs en de maximaal mogelijke vraag.

Domein

Het interval waarbinnen de prijs een betekenis heeft, wordt *domein* genoemd. Het domein bevat alle mogelijke waarden die de onafhankelijke variabele kan aannemen.

Bereik

Het interval waarbinnen de vraag (ofwel de gevraagde hoeveelheid) een betekenis heeft, wordt *bereik* genoemd. Het bereik bevat alle mogelijke waarden die de afhankelijke variabele kan aannemen.

Dit betekent voor de Voordeel-urenkaart het volgende:

- Het domein is D is $[0; 97,5]$ (in woorden: het domein is het interval dat loopt van 0 tot en met 97,5).
- Het bereik is B is $[0; 234]$ (in woorden: het bereik is het interval dat loopt van 0 tot en met 234).

Nulpunt

De plaats waar de lijn de horizontale as snijdt, wordt een *nulpunt* genoemd. In het algemeen kan een nulpunt worden gevonden door de afhankelijke variabele gelijk aan nul te stellen.

Voor de prijs-vraagfunctie is het nulpunt te berekenen door: $q = 0$ geeft $p = 97,5$ (zie de uitwerking van tussenvraag 1.7).

1.1.2 De ontvangsten (de inkomsten)

Teruggaand naar de probleemstelling aan het begin van deze casus: gebruikmakend van de prijs-vraagfunctie kan worden nagegaan welke vraag er kan worden verwacht op basis van een prijs van €70 voor de kaart.

Tussenvraag 1.8

Bereken bij een prijs van €70 de vraag volgens de prijs-vraagfunctie.

De inkomsten die de NS kan verwachten van de Voordeel-urenkaart zijn een combinatie van de prijs en de afzet. Als prognose voor de afzet wordt de prijs-vraagfunctie gebruikt. Doordat deze is opgebouwd uit een combinatie van gegevens, is deze functie beter dan individuele schattingen van de marktonderzoeksafdeling.

Bij een prijs van bijvoorbeeld €35 per stuk geeft dit een verwachte afzet van:

$$q = -2,4 \times 35 + 234 = 150$$

Tussenvraag 1.9

Bereken de verwachte afzet bij prijzen van achtereenvolgens €30 tot en met €70 met stapgroottes van €10.

De inkomsten van de NS wat betreft de Voordeel-urenkaart, zijn opgebouwd uit een combinatie van de prijs en de afzet.

Bij bijvoorbeeld een prijs van €35 per Voordeel-urenkaart zijn de inkomsten:

$$35 \text{ [euro/stuk]} \times 150.000 \text{ [stuks/jaar]} = 5,25 \times 10^6 \text{ [euro/jaar]}$$

Tussenvraag 1.10

Bereken voor de prijzen (zoals genoemd in tussenvraag 1.9) de inkomsten. Is de prijs van €70 een geschikte keuze?

Uit de uitwerking van tussenvraag 1.10 blijkt dat een prijs van om en nabij €50 voor de hoogste inkomsten zorgt, namelijk €5,7 miljoen per jaar. De huidige prijs van €45 is dus geen slechte keuze. Als de berekening voor de inkomsten bij verschillende prijzen meer in detail zou worden uitgevoerd, zou een optimum worden gevonden bij een prijs van €48,75 per stuk met inkomsten van (afgerond) €5,704 miljoen per jaar.

1.1.3 De prijselasticiteit

Bij een prijsstijging tot €70 zullen de inkomsten afnemen, doordat de prijsstijging teniet wordt gedaan door een relatief grotere afname van de vraag.

In de economie heeft men hier voor een term. Als de vraag relatief sterk reageert op een prijsverandering, dan noemt men de vraag *(prijs)elastisch*. Als de vraag relatief weinig gevoelig is voor veranderingen in de prijs, dan wordt deze *(prijs)inelastisch* genoemd.

Bij prijselasticiteit rekent men niet met absolute veranderingen (prijsstijging in euro's) maar met relatieve veranderingen (prijsstijging in procenten).

$$E_{pq} = \frac{\text{relatieve verandering vraag}}{\text{relatieve verandering prijs}}$$

Doordat de prijs-vraagfunctie een dalend verloop heeft, zal de verandering van de vraag altijd tegengesteld zijn aan de verandering van de prijs. Als de prijs stijgt, daalt de vraag en andersom. De prijselasticiteit (van de vraag) is dus altijd negatief.

Als de relatieve verandering van de vraag groter is dan de relatieve verandering van de prijs, dan is de prijselasticiteit kleiner dan -1 (meer negatief).

$$E_{pq} = \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}} \quad [1.3]$$

waarbij:

E_{pq} = prijselasticiteit (van de vraag)

Δq = verschil in vraag

Δp = verschil in prijs

$\Delta q/q$ = relatieve verschil in vraag

$\Delta p/p$ = relatieve prijsverschil

In tabel 1.2 staan enkele voorbeelden van prijselasticiteit.

Prijselastisch
Prijsinelastisch

Tabel 1.2 Enkele voorbeelden van prijselasticiteit

Inelastisch	water	-0,07
	autogebruik (woon-werkverkeer)	-0,1
	aardappels	-0,14
	brood	-0,25
	aardgas	-0,40
	tabak	-0,56
	autogebruik (overig verkeer)	-0,6
	kleding	-0,64
	benzine	-0,91
Elastisch	rundvlees	-1,24
	meubels	-1,26
	sigarettengebruik onder jongeren	-1,31
	auto's	-1,92

In verschillende publicaties kunnen de waarden voor prijselasticiteit voor bepaalde goederen nogal uiteenlopen. Dit komt doordat de prijselasticiteit niet alleen afhangt van de specifieke omstandigheden (zie tabel 1.2, autogebruik bij woon-werkverkeer en overig verkeer) maar ook van het land (in rijke landen maakt het voor de vraag naar aardappelen minder uit hoe duur ze zijn) en van de inkomenscategorie.

Tussenvraag 1.11

- a Het gasbedrijf verhoogt de prijs van aardgas met 1,5%. Met hoeveel zal de vraag naar aardgas veranderen?
- b Door een verandering in de btw daalt de prijs van auto's met 3,44%. Met hoeveel zal de vraag naar auto's veranderen?

We gaan weer terug naar de Voordeel-urenkaart.

Bij een gegeven combinatie van prijs en vraag kan door een kleine toename in de prijs berekend worden hoe de vraag hierop reageert. Bij een prijs van €45 en een vraag van 126.000 stuks laten we de prijs met 1% toenemen. De prijs wordt dan €45,45 per stuk. Invullen in de vraagfunctie geeft de bijbehorende vraag van 124.920 stuks per jaar. De resultaten staan in tabel 1.3 weergegeven.

Tabel 1.3 Berekening prijselasticiteit

	Prijs p	Vraag q (in 1.000)
Huidige waarde	45	126
Waarde na prijsverhoging	45,45	124,92
Verskil Δ	+0,45	-1,08
Relatief verschil	$0,45/45 = 0,01$	$-1,08/126 = -0,00857$

De prijselasticiteit wordt nu:

$$E_{pq} = \frac{-0,00857}{0,01} = -0,857$$

$$E_{pq} = \frac{\text{relatieve verandering vraag}}{\text{relatieve verandering prijs}} = -0,857$$

$$\text{relatieve verandering vraag} = -0,857 \times \text{relatieve verandering prijs}$$

Uit voorgaande berekening blijkt dat de (relatieve) vraag minder verandert dan de (relatieve) prijs. Bij een prijs van €45 is de vraag naar de Voordeel-urenkaart prijsinelastisch.

Tussenvraag 1.12

Bereken voor de prijs van €70 de prijselasticiteit. Is de vraag prijselastisch of prijsinelastisch?

Opmerking

Bij een prijs van €45 is de vraag naar de Voordeel-urenkaart inelastisch en bij een prijs van €70 is deze elastisch geworden. Of een goed prijselastisch dan wel prijsinelastisch is, hangt dus af van de prijs waarbij de elasticiteit berekend is. Teruggrijpend op tabel 1.3 moet worden opgemerkt dat de aangegeven elasticiteiten gelden bij 'normale' prijzen.

Als de vraag bij een prijs van €45 inelastisch is en bij een prijs van €70 elastisch, dan moet daar tussenin een omslag hebben plaatsgevonden. Dit noemt men het *elasticiteitsomslagpunt*. In het omslagpunt heeft de elasticiteit de waarde -1 . In het elasticiteitsomslagpunt zal de vraag relatief even sterk veranderen als de prijs. Dus in het omslagpunt wordt een prijsverhoging van bijvoorbeeld 2,3% gevolgd door een daling van de vraag met 2,3%.

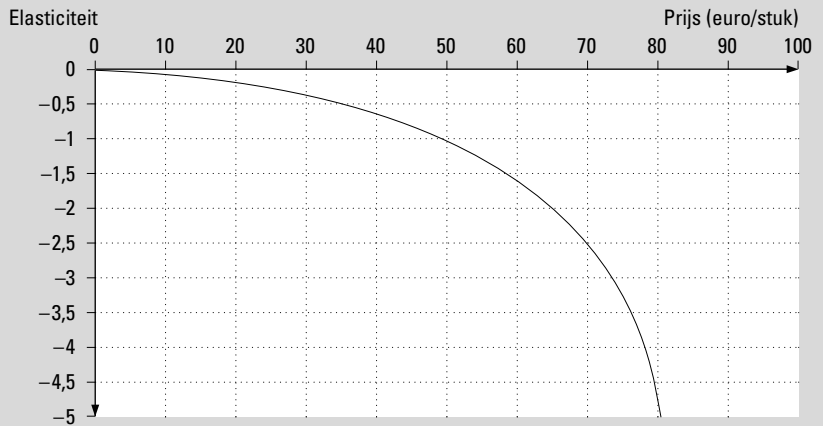
Na intensievere berekening (hetgeen buiten het bestek valt van dit hoofdstuk) blijkt dit omslagpunt zich te bevinden bij een prijs van €48,75 per stuk.

Tussenvraag 1.13

Waar zijn we deze prijs van €48,75 per stuk eerder tegengekomen?

De prijselasticiteit van een Voordeel-urenkaart is weergegeven in figuur 1.5.

Figuur 1.5 **Prijselasticiteit**



Uit figuur 1.5 kan voor elke prijs direct worden afgelezen welke prijs-elasticiteit geldt. Bij bijvoorbeeld een prijs van €60 per Voordeel-urenkaart is de prijselasticiteit (afgelezen) $-1,6$. Bij een prijs van €60 zou een prijsverhoging van 1% resulteren in een daling van de vraag van ongeveer 1,6%. Doordat de vraag sterker reageert dan de prijs, noemt men dit (prijs)elastisch.

Als de vraag inelastisch is (bij €45), dan is het vanuit het oogpunt van de inkomsten gunstig om de prijs te verhogen. De vraag neemt relatief minder af dan de prijsstijging. Als de vraag elastisch is (bij €70), dan is het vanuit het oogpunt van de inkomsten ongunstig om de prijs te verhogen. Daaruit volgt dat het bij een prijs van €70 gunstig is om de prijs te verlagen. De maximale inkomsten worden bereikt bij een elasticiteit van -1 . Dit is het omslagpunt, dat ligt bij een prijs van €48,75 per kaart.

1.1.4 De aanbodfunctie

Aanbodfunctie

De consumenten bepalen het verloop van de prijs-vraagfunctie en de producenten bepalen het verloop van de *aanbodfunctie*. Bij een bepaalde prijs wordt het voor een producent aantrekkelijk om een product aan te gaan bieden. Als de prijs verder zou stijgen, zal de producent steeds meer aan willen bieden. De aanbodfunctie is dus een stijgende functie.

Opmerking

Even voor de correctheid; we moeten ons realiseren dat een aanbodfunctie totstandkomt in een markt waar sprake is van volledige mededinging. Een individuele aanbieder kan de marktprijs van een product niet beïnvloeden. Deze marktprijs komt tot stand op basis van de totale vraag (van de consumenten) en het totale aanbod (van de producenten). In de casus van de Voordeel-urenkaart is hieraan eigenlijk niet

voldaan. Er is slechts één producent (de NS). Maar we weten dat de concurrentie op de loer ligt...

Voor de Voordeel-urenkaart gaan we uit van de volgende vergelijking (de vraagfunctie heeft hier een index v gekregen, de aanbodfunctie een index a):

$$q_a = 2p - 8$$

waarbij:

q = aanbod in 1.000 stuks/jaar

p = prijs in euro/stuk

Voor de vraagfunctie was gevonden:

$$q_v = -2,4p + 234$$

Stabiel marktevenwicht

Er is sprake van een *stabiel marktevenwicht* als de aangeboden hoeveelheid gelijk is aan de gevraagde hoeveelheid, dus:

$$q_a = q_v \quad [1.4]$$

Tussenvraag 1.14

Bereken bij welke prijs (en vraag) er sprake is van een stabiel markt-evenwicht.

Evenwichtsprijs Evenwichts- hoeveelheid

Er is dus sprake van een *evenwichtsprijs* van €55 per kaart en een *evenwichtshoeveelheid* van 102.000 Voordeel-urenkaarten per jaar.

■ Voorbeeld 1.1 De budgetcurve

Tot nu toe hebben we nog niet gekeken naar de kosten die de NS maakt voor de productie van de Voordeel-urenkaart. De NS reserveert daarvoor een bepaald budget.

De totale kosten kunnen worden opgesplitst in kosten gemaakt door de productiefactor *arbeid* (salaris) en kosten die verband houden met de productiefactor *kapitaal* (gebouwen, machines, grondstoffen, hulpstoffen).

$$TK = p_a \times a + p_k \times k$$

waarbij:

TK = de totale kosten

p_a = het loon per arbeidsuur

a = de hoeveelheid gebruikte arbeidsuren

p_k = de prijs van een eenheid kapitaalgoed

k = de kapitaalgoederenvoorraad

De *totale kosten* (TK) moeten binnen het beschikbare budget blijven.

Gegeven:

- loonkosten: €60 per uur
- kapitaalgoedprijs: €40 per eenheid
- budget: €90.000 per maand

Als het totale budget wordt benut, dan geeft dit:

$$60a + 40k = 90.000$$

Budgetcurve

Voorgaande vergelijking wordt de *budgetcurve* genoemd.

Tussenvraag 1.15

Bepaal de snijpunten van de budgetcurve met de assen.

Tussenvraag 1.16

Maak een schets van de budgetcurve. Neem kapitaal als verticale as.

De budgetcurve is een voorbeeld van een andere manier om een lijn weer te geven:

$$ax + by = c \quad [1.5]$$

Het voordeel van deze manier is dat bij een dalende lijn de snijpunten met de assen vrij eenvoudig kunnen worden bepaald. In hoofdstuk 4 komen we hier uitgebreid op terug.

Eigenlijk is de budgetcurve geen lijn maar een ongelijkheid. Men is natuurlijk niet verplicht om het gehele budget te gebruiken.

$$60a + 40k \leq 90.000$$

Eerstegraads ongelijkheid

Dit noemen we een *eerstegraads ongelijkheid*.

Een ongelijkheid bevat een \leq , $<$, \geq of $>$ -teken.

Tussenvraag 1.17

Los de eerstegraads ongelijkheid op als gegeven is dat er 880 uur arbeid per maand wordt ingezet.

1.2 Casus De hypotheek

De maximale hypotheek die een aspirant-huizenkoper kan afsluiten, wordt doorgaans berekend op basis van het brutojaarinkomen: hoe hoger het inkomen, hoe hoger de hypotheek die men kan afsluiten. Dit blijkt ook uit het overzicht in het volgende artikel.

Hoeveel hypotheek kunt u krijgen?

Hoe hoog kan de hypotheek zijn voor mijn nieuwe huis? Een veelgestelde vraag waarop slechts een globaal antwoord is te geven. Want alles hangt af van uw persoonlijke situatie.

Toch kunt u wel een indicatie krijgen. Hierna is een overzicht gegeven van de maximale hypotheek bij het aangegeven brutojaarinkomen op basis van een alleenverdiener.

<i>Brutojaarinkomen</i>	<i>Maximale hypotheek</i>
€ 20.000	€ 75.000
€ 30.000	€ 120.000
€ 40.000	€ 170.000
€ 50.000	€ 215.000
€ 60.000	€ 275.000
€ 85.000	€ 390.000
€ 100.000	€ 450.000
€ 125.000	€ 600.000

Dit is een indicatieve opgave. Neemt u voor een exacte berekening, afgestemd op uw persoonlijke situatie, contact met ons op. Voor tweeverdieners zijn er nog andere mogelijkheden.

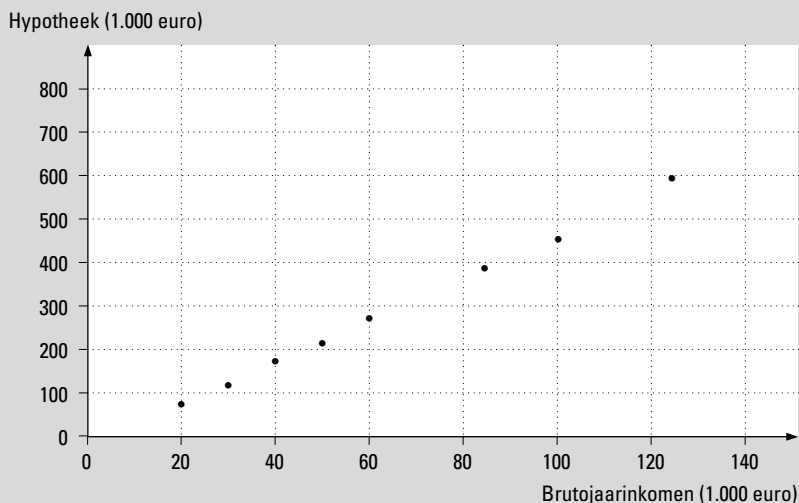
Probleemstelling

Meneer Van der Zon verdient zo'n €37.000 bruto per jaar. Welke hypotheek kan hij verwachten volgens het overzicht in het voorgaande artikel?

1.2.1 Een lineair verband

We gaan onderzoeken of er een lineair verband bestaat tussen de maximale hypotheek en het inkomen. Hier voor zijn de punten in een spreidingsdiagram weergegeven. Dit is te zien in figuur 1.6.

Figuur 1.6 Spreidingsdiagram hypotheek/inkomen bij een maximale hypotheek



Het lijkt erop dat er sprake is van een lineair verband.

Tussenvraag 1.18

Geef een vergelijking voor het lineaire verband tussen het salaris en de hypotheek. Neem daarvoor het eerste punt (bij een jaarinkomen van €20.000) en het laatste punt (bij een jaarinkomen van €125.000).

Uit het antwoord van tussenvraag 1.18 volgt:

$$Y = 5X - 25$$

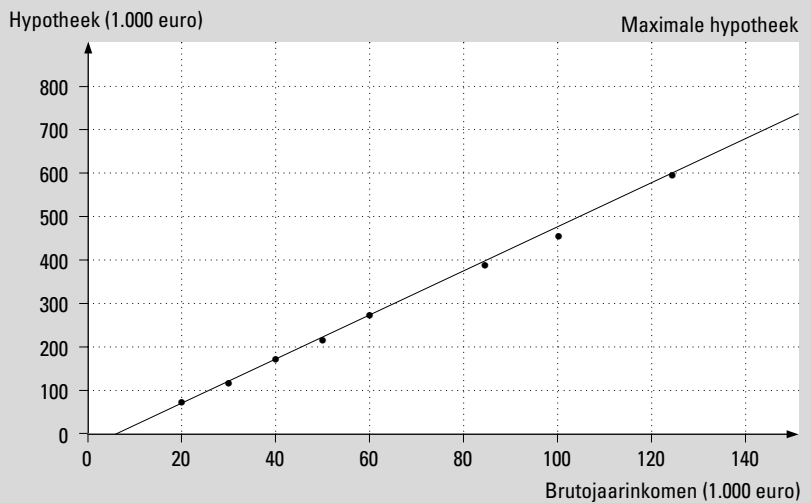
waarbij:

Y = hypotheek ($\times 1.000$ euro)

X = jaarinkomen ($\times 1.000$ euro)

Als controle kan de verkregen lijn in het spreidingsdiagram worden getekend. Dit is te zien in figuur 1.7.

Figuur 1.7 Lijn in spreidingsdiagram hypotheek/inkomen



De vergelijking voor de bepaling van de hypotheek is nog op een andere manier te schrijven, waarbij de coëfficiënt 5 geheel buiten haakjes wordt geplaatst:

$$Y = 5X - 25 = 5(X - \alpha)$$

Tussenvraag 1.19

Bereken de waarde van α .

De vergelijking voor het bepalen van de hypotheek wordt nu:

$$Y = 5(X - 5)$$

Blijkbaar moet er van een inkomen €5.000 worden afgetrokken voordat met een vermenigvuldigingsfactor (5) de toegestane hypotheek kan worden berekend.

Tussenvraag 1.20

Verklaar de €5.000 in termen van (beschikbaar) inkomen.

Hoeveel kan Van der Zon lenen op basis van de lineaire vergelijking?

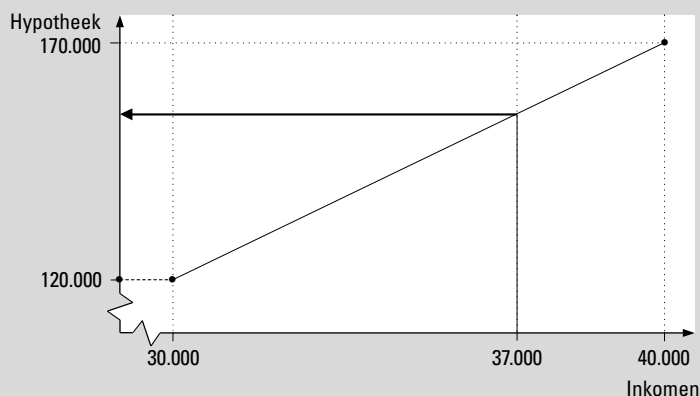
$$X = 37 \text{ geeft } Y = 5 \times (37 - 5) = 160$$

Dit betekent een maximale hypotheek van €160.000.

1.2.2 Interpoleren

Een geheel andere methode is om alleen te kijken naar het interval waarbinnen het salaris van Van der Zon valt. Het salaris van €37.000 valt in de inkomenscategorie die loopt van €30.000 tot €40.000. Bij een salaris van €30.000 kan een hypotheek van €120.000 worden genomen. Bij een salaris van €40.000 kan een hypotheek van €170.000 worden genomen. De hypotheek die Van der Zon kan opnemen ligt hier ergens tussenin, zie figuur 1.8.

Figuur 1.8 Interpoleren



Tussenvraag 1.21

Geef een ruwe schatting van de hypotheek die Van der Zon kan verkrijgen.

Het uitgangspunt van de berekening is dat de hypotheekfunctie in het inkomensinterval lineair is.

Tussenvraag 1.22

Hoe ver (in procenten) ligt €37.000 in het interval van €30.000 tot €40.000?

In het inkomensinter val van €30.000 tot €40.000 neemt de hypotheek toe met: €170.000 – €120.000 = €50.000.

70% van €50.000 is	$0,70 \times 50.000 =$	35.000
bovenop de ondergrens van		$= \underline{120.000}$
geeft een hypotheek van totaal		$= 155.000$

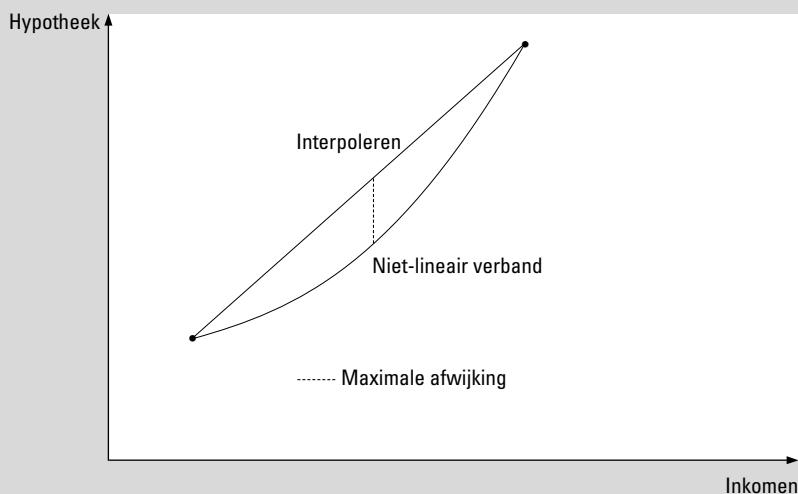
De heer Van der Zon heeft dus op basis van zijn inkomen 'recht' op een maximale hypotheek van €155.000.

Interpoleren

Voorgaande berekening noemt men *interpoleren*. Dit wordt in de praktijk toegepast als in tabellen geen precieze waarden staan vermeld.

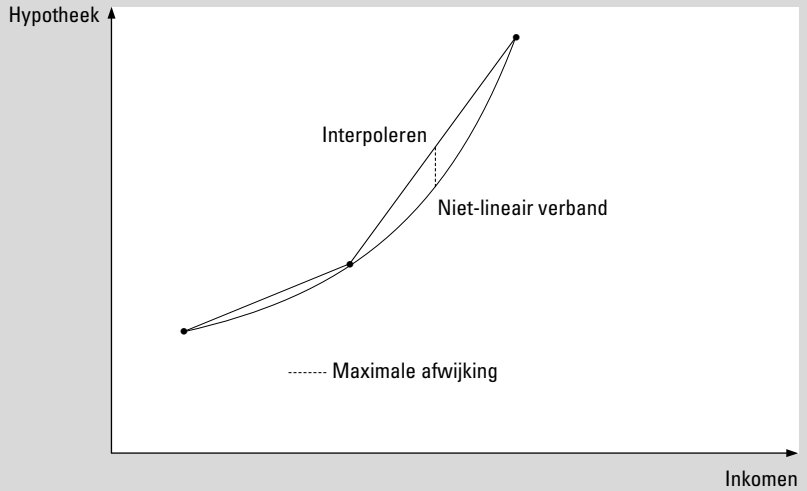
Nogmaals wordt erop gewezen dat er van wordt uitgegaan dat tussen de punten een (bij benadering) lineair verloop aanwezig is. Als dit niet het geval is, dan kan er bij het interpoleren een behoorlijke afwijking optreden. In figuur 1.9 wordt dit geïllustreerd.

Figuur 1.9 Niet-lineariteit bij interpoleren



Als oplossing voor niet-lineariteit kunnen we kiezen voor punten waartussen kleinere intervallen liggen. Hoe sterker de niet-lineariteit, des te kleiner de intervallen tussen de punten moeten worden. In figuur 1.10 staat hier van een voorbeeld.

Figuur 1.10 Kleinere intervallen bij niet-lineariteit



Het antwoord verkregen door te kijken naar een lineair verband (€160.000) en het antwoord volgend uit interpoleren (€155.000) komen goed met elkaar overeen.

Tussenvraag 1.23

Welke benadering verdient de voorkeur: interpoleren of een lineaire vergelijking?

Samenvatting

Trefwoorden

aanbodfunctie	interpoleren
afhankelijke variabele	nulpunt
bereik	onafhankelijke variabele
budgetcurve	prijs-vraagfunctie
domein	prijselastisch
eerstegraads functie	prijsinelastisch
eerstegraads ongelijkheid	richtingscoëfficiënt (rico)
eerstegraads vergelijking	spreidingsdiagram
(elasticiteits)omslagpunt	stabiel marktevenwicht
eliminatie	stelsel
evenwichtshoeveelheid	substitutie
evenwichtsprijs	

Formules

$y = ax + b$	eerstegraads vergelijking
$\text{rico} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$	richtingscoëfficiënt
$E_{pq} = \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}}$	prijselasticiteit
$q_a = q_v$	stabiel marktevenwicht
$ax + by = c$	alternatieve vorm eerstegraads vergelijking

Literatuur

Wieringa, B. en W.F. van Raaij (1987)
Consumentengedrag; Theorie, analyse en toepassingen. Stenfert Kroese, Leiden



Opgaven bij hoofdstuk 1

- 1.1 De zaterdagmarkt in Zwolle heeft een ruime sortering fruit. De Elstar-appels voor de verschillende kraampjes komen van verschillende leveranciers. De vraag naar Elstar-appels in week 43 bedroeg ongeveer 3.500 kg bij een prijs van €1,50 per kg.
Door problemen in de aanvoer kwam voor week 44 een hogere prijs tot stand, namelijk €2,00 per kg. De consument was aanmerkelijk minder koopwillig. Er werd die zaterdag slechts 2.500 kg verkocht.
Neem bij de uitwerking de prijs als onafhankelijke variabele en de vraag als afhankelijke variabele.
- Bepaal aan de hand van voorgaande gegevens de prijs-vraagfunctie, uitgaande van een lineair verband.
 - Bereken bij welke prijs er volgens de prijs-vraagfunctie geen sprake meer is van enige afzet. Wat is de wiskundige naam hier voor?
 - Bepaal het domein en het bereik van de prijs-vraagfunctie.
 - Teken de prijs-vraagfunctie.
 - Bereken voor €1,50 per kg en €1,65 per kg de inkomsten.
 - Bereken bij een prijs van €1,50 per kg of de vraag elastisch of inelastisch is.

1.2

Figuur 1.11

Toelichting

Tabel 10 Schrijventarief box 1: belastbaar inkomen uit werk en woning

Indeling schijven	Deel belastbaar inkomen box 1	Percentages
Eerste schijf	tot en met €14.870	$2,95 + 29,4 = 32,35\%$
Tweede schijf	van €14.871 t/m €27.009	$8,2 + 29,4 = 37,6\%$
Derde schijf	van €27.010 t/m €46.309	42%
Vierde schijf	vanaf €46.310	52%

Bij de opgave wordt er van uitgegaan dat eventuele heffingskortingen reeds op het inkomen zijn verrekend.

- Teken in een grafiek de verschuldigde belasting (B) als functie van het inkomen (Y) tot een inkomen van €60.000.
- Bepaal voor elk lijnstuk (van elke belastingschijf) de vergelijking die het verband weergeeft tussen de belasting (B) en het inkomen (Y).

Onder het motto 'We kunnen het niet goedkoper maken maar wel makkelijker.' krijgt een stagiair de opdracht om onder andere tabel 10 in een soort stroomschema uit te werken, waarbij nog maar minimaal door de belastingbetaler hoeft te worden gerekend. Gebleken is dat het vooral voor de wat

oudere belastingafdrager een moeilijke klus is om met behulp van tabel 10 te berekenen hoeveel belasting er betaald had moeten worden.

De lay-out van het nieuwe stroomschema is al klaar. Er moeten alleen nog wat bedragen worden ingevuld. Het idee achter het stroomschema is dat de belastingverschuldigde van het inkomen een vast bedrag moet aftrekken (afhankelijk van het inkomen) en van dit restbedrag een per centage belasting moet betalen (ook inkomensafhankelijk).

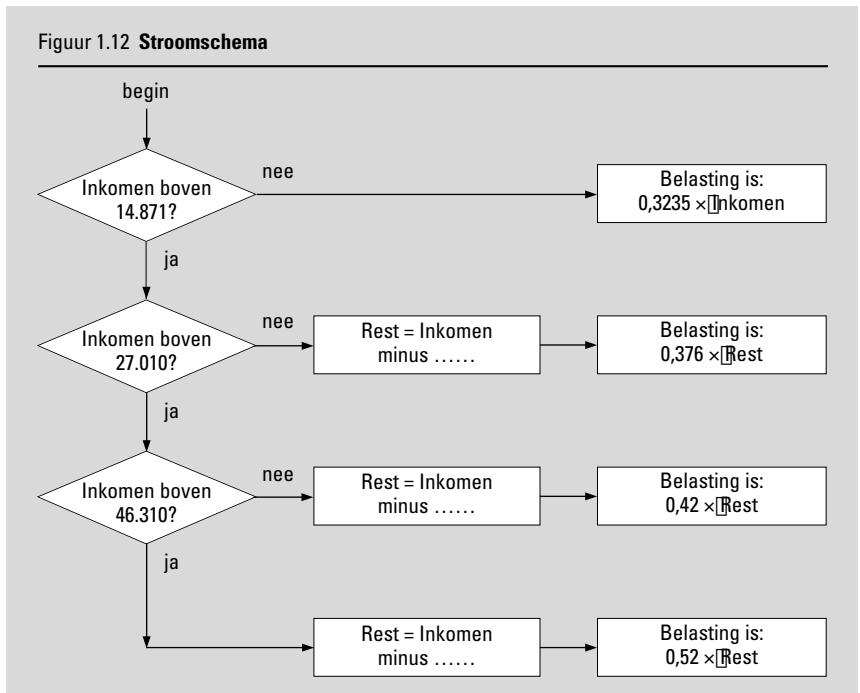
- c Beantwoord nogmaals opgave b met als voor waarde: gebruik de vorm:

$$B = \alpha \times (Y - B_0)$$

waarbij:

α = belastingpercentage per schijf

B_0 = waarde voor het stroomschema



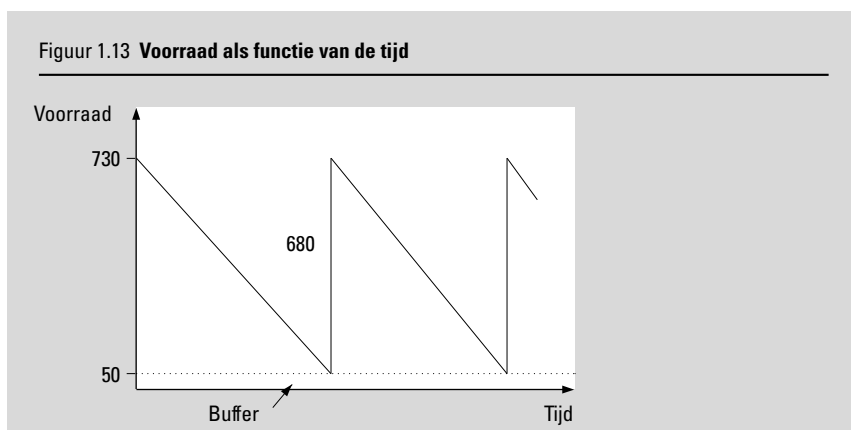
- d Vul het stroomschema in figuur 1.12 in.

Een docent verdient op dit moment ongeveer €46.000 per jaar.

- e Gebruik het stroomschema om te bepalen hoeveel belasting hij moet betalen. Hoeveel procent is dit van zijn inkomen?

- 1.3 Het bedrijf FLUXI verkoopt onder meer dakramen voor bedrijven. Een compleet dakraam bestaat uit meerdere onderdelen: multiplex platen, een golfde plaat en een bovenlicht. De vraag naar dakramen is zeer regelmatig en bedraagt op jaarbasis ongeveer 4.250 stuks. Bij FLUXI gaat men uit van 50 werkweken (ofwel 250 werkdagen) per jaar.

De bovenlichten worden besteld bij een bedrijf dat hierin is gespecialiseerd. De levertijd is vrij constant en bedraagt gemiddeld acht werkdagen. De bovenlichten moeten worden besteld in series. De (optimale) seriegrootte voor de bestelling wordt voor FLUXI bepaald op basis van een kostenberekening van de bestelkosten en de opslagkosten. Het management besluit om te werken met een bestelgrootte van 680 bovenlichten. Om rekening te kunnen houden met onvoorziene omstandigheden wordt ervoor gezorgd dat als buffer een voorraad van 50 bovenlichten aanwezig is. In figuur 1.13 is de voorraad als functie van de tijd uitgezet.



- a Welke onvoorziene omstandigheden kunnen er zijn waardoor het handig is om een veiligheidsvoorraad aan te houden?

Op het moment dat de voorraad van bovenlichten gelijk is aan 50 stuks (de buffer) komt de bestelling van 680 bovenlichten binnen.

- b Hoeveel weken duurt het totdat het voorraadniveau, direct nadat de bestelling is binnengekomen, weer is gedaald tot de buffergrootte?
- c Beschrijf de voorraad (V) als functie van de tijd (t) voor een periode van acht weken als op $t = 0$ (werkdagen) een serie bovenlichten is binnengekomen. Neem de tijd in werkdagen.
- d Bereken bij welke voorraadgrootte de volgende serie bovenlichten moet worden besteld, rekening houdend met de levertijd en de buffer.

- 1.4 Een producent van cd-spelers heeft onderzoek gedaan naar het gedrag van de vraag naar een bepaald type cd-speler bij een verandering van de prijs. Uit het onderzoek volgt dat het maximale bedrag dat de consument voor de cd-speler wil neertellen, gelijk is aan €500. Voor elke prijsdaling van €10 neemt de vraag toe met ongeveer 400 stuks per maand. De prijs-vraagfunctie vertoont een lineair verband.

- a Geef de vergelijking van de prijs-vraagfunctie (als functie van prijs) als de prijs moet worden uitgedrukt in €10 per stuk en de vraag in 1.000 stuks per maand.

- b Schrijf de prijs-vraagfunctie om naar de vorm: $p = aq + b$.
- c Bereken de prijselasticiteit bij een prijs van €150 per stuk en geef aan of de vraag bij deze prijs elastisch is of inelastisch.
- d Met hoeveel procent verandert de vraag als bij een prijs van €150 de prijs toeneemt met 1,4%?
- e Beredeneer aan de hand van het antwoord bij opgave d of de totale ontvangst toe- of afneemt als bij een prijs van €150 een prijsverhoging van 1,4% wordt doorgevoerd.
- 1.5 Een bedrijf besluit een nieuwe printer aan te schaffen. De oude HP-printer is altijd goed bevallen. Men besluit daarom een nieuwe printer van datzelfde merk aan te schaffen.
De keuze moet worden gemaakt tussen de typen zoals gegeven in tabel 1.4. In de *Consumentengids* is uitgerekend wat de kosten per afdruk zijn voor een zwart-witafdruk en een kleurafdruk, zie tabel 1.5.

Tabel 1.4

Type	Prijs (euro/stuk)
HP 660	400
HP 850	500

Tabel 1.5

Type	Zwart-wit (cent/afdruk)	Kleur (cent/afdruk)
HP 660	7	75
HP 850	5	34

De printers worden afgeschreven in vier jaar.

- a Bereken voor beide printers de jaarlijkse kosten (in euro's) bij x zwart-witafdrucken.
- b Bereken bij hoeveel zwart-witafdrucken de (jaarlijkse) kosten van beide printers gelijk zijn.
- c Bereken bij hoeveel kleurafdrucken de (jaarlijkse) kosten van de HP 660 lager zijn dan die van de HP 850.
- d Schets de lineaire kostenfuncties van zwart-witafdrucken voor beide printers.
- e De totale-kostenfunctie van beide printers is op te stellen door zowel rekening te houden met zwart-witafdrucken als met kleurafdrucken. Het aantal kleurafdrucken wordt geschat op zo'n twintig stuks per jaar. Bij welk aantal zwart-witafdrucken is de HP 660 te prefereren boven de HP 850?

Cd-verkoop zal de komende jaren stagneren

... Ook internationaal gezien gaat het de muziekindustrie niet erg voor de wind. Na jarenlang een flinke groei is dit jaar sprake van stagnatie. Volgens cijfers van de International Federation of the Phonographic Industry (IFPI) nam de verkoop van geluidsdragers over de hele wereld in de eerste zes maanden (van 1996) met slechts 0,2 procent toe tot 16,24 miljard dollar (28 miljard gulden). Als rekening wordt gehouden met de inflatie betekent dat feitelijk een achteruitgang.

In aantallen was er nog wel een groei met 5 procent tot 1,25 miljard stuks. Dat de geldomzet desondanks stagneerde, komt volgens de IFPI doordat de prijzen onder druk staan door goedkope aanbiedingen in de Verenigde

Staten. Ook deze organisatie wijst met een beschuldigende vinger naar de piraterij in de Aziatische landen. Vooral Singapore maakt zich schuldig aan goedkope namaak, aldus de IFPI...

... Als de stagnatie aanhoudt, kan dat vervelende gevolgen hebben voor grote muziekproducenten als Philips-dochter Polygram, Sony, het Britse EMI, Time Warner in de VS en het Duitse concern Bertelsmann. Deze bedrijven hebben de winst nodig voor expansie in andere mediasectoren. Zo investeert Polygram flink in de filmindustrie en Bertelsmann en Time Warner in televisie.

Bron: *de Volkskrant*

- a Bereken de (gemiddelde) prijs van geluidsdragers wereldwijd aan het begin van 1996 en halverwege 1996 in dollars.
 - b Bereken de prijselasticiteit voor geluidsdragers wereldwijd halverwege 1996 bij de prijs van \$12,99 per stuk.
 - c Hoe verandert de prijselasticiteit als er in euro's wordt gerekend (in plaats van dollars)?
 - d Bepaal de (lineaire) vergelijking van de prijs-vraagfunctie voor geluidsdragers wereldwijd. Neem de prijs in dollars per stuk en de vraag in miljarden stuks per halfjaar.
 - e Bij welke prijs van geluidsdragers is de vraag meer dan 1,5 miljard stuks (per halfjaar)?
- 1.7 Van de jaren 2000 tot en met 2002 is het aantal cursisten van de Instapcursus Wiskunde bekend. In 2000 kon men nog gratis meedoen. Vanaf 2001 werd een vergoeding van €50 gevraagd, zie tabel 1.6.

- a Leid een lineaire prijs-vraagfunctie af voor het aantal cursisten op de instapcursus. Neem als eerste punt de waarde van 2000 en als tweede punt het gemiddelde van de waarden van 2001 en 2002.
- b Hoe hoog is de maximale prijs die voor de instapcursus kan worden gevraagd als er nog cursisten kunnen worden verwacht?

Tabel 1.6

Jaar	Aantal cursisten	Deelnamekosten
2000	77	gratis
2001	59	€50
2002	45	€50

- 1.8 Een schrijver van damboeken besluit bij gebrek aan belangstelling van uitgevers het damboek in eigen beheer uit te geven. Tot nu toe bedragen de gemaakte kosten al ongeveer €200 voor illustraties. De kosten om het materiaal te laten drukken staan in tabel 1.7 weergegeven.

Tabel 1.7

Aantal	Drukkosten
100	€3.500
250	€4.000
500	€4.500

Dit betekent bijvoorbeeld dat, nadat de eerste 100 exemplaren zijn gedrukt, de kosten voor de volgende 150 stuks slechts €500 extra bedragen.

We gaan ervan uit dat de drukkosten boven de 250 exemplaren gelijkmatig stijgen.

- a Geef de kostenfunctie van het drukken weer in een grafiek.
 b Bepaal de vergelijking van de kostenfunctie op de verschillende intervallen.

De schrijver verwacht dat er een potentiële markt van 500 kopers per jaar is en dat het damboek boven de prijs van €50 praktisch onverkoopbaar is.

- c Bepaal de prijs-vraagfunctie (als functie van p).

- 1.9 De prijs-vraagfunctie van een bepaald product is gegeven:

$$q = -1,2p + 60$$

waarbij:

q = vraag in 1.000 stuks/maand

p = prijs in euro/stuk

De gevraagde hoeveelheid is niet alleen afhankelijk van de prijs van een product. Ook onder andere het inkomen van de consumenten, de voorkeuren van de consumenten (milieu) en de prijzen van alternatieve producten spelen een rol.

Door een inkomensverbetering van de consumenten kan men bij een prijs van €40 per stuk 1.500 stuks per maand verkopen. Hierdoor verschuift de prijs-vraagfunctie (evenwijdig).

Bepaal de nieuwe vergelijking van de prijs-vraagfunctie na de inkomensverbetering.

- 1.10 Van een product zijn de volgende vraagfunctie en aanbodfunctie gegeven:

Vraag: $q_v = -1/6p + 12$

Aanbod: $q_a = p - 44$

waarbij:

q in miljoenen pakjes per week

p in 10 cent per pakje

Neem (als goede algemeen econoom) de prijs als verticale as.

- a Teken beide functies in een grafiek.
- b Bepaal de evenwichtsprijs en de evenwichtshoeveelheid.

De overheid besluit een extra belasting te heffen op het product, te weten 10%. De producenten die dit product aanbieden, rekenen dit door in de prijs.

- c Bepaal de nieuwe aanbodfunctie (als functie van q).
- d Teken de nieuwe aanbodfunctie in de grafiek bij opgave a.
- e Bereken de nieuwe evenwichtsprijs en de nieuwe evenwichtshoeveelheid.

- 1.11 Bij een statistische berekening moet een waarde worden gevonden in de zogenoemde χ^2 -tabel (chi-kwadraat-tabel). Deze tabel kan onder andere worden gebruikt om onderzoek te doen naar onafhankelijkheid tussen grootheden.

In tabel 1.8 is een klein deel er van overgenomen.

Tabel 1.8

$\chi^2_{0,025}$	$\chi^2_{0,005}$
23,3367	28,2995

- a Bereken door interpoleren de waarde van $\chi^2_{0,010}$ (rond af op twee decimalen).

De werkelijke waarde blijkt gelijk te zijn aan: $\chi^2_{0,010} = 26,2170$.

- b Verklaar het verschil tussen de werkelijke waarde en de waarde bepaald met behulp van interpoleren bij opgave a.
- c Geef een schatting van $\chi^2_{0,030}$ (rond af op twee decimalen).

- 1.12 De Verenigde Naties hebben van de afgelopen jaren schattingen gemaakt van de grootte van de wereldbevolking, zie figuur 1.14 en tabel 1.9.

Tabel 1.9

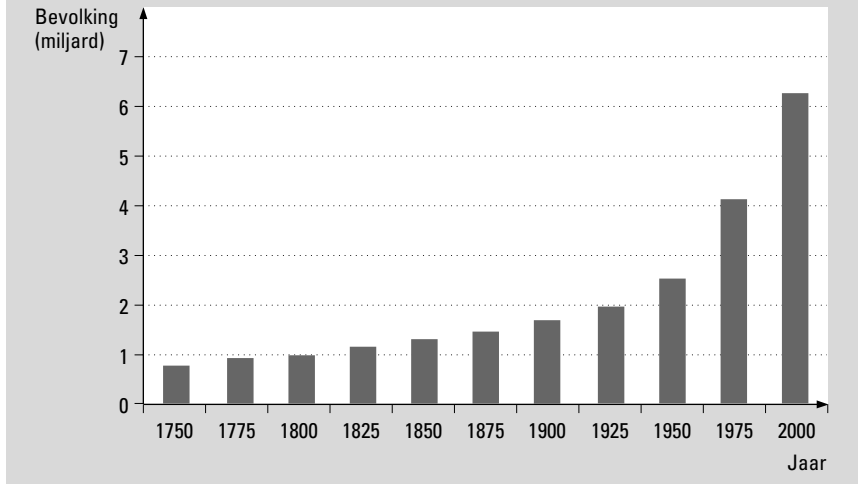
Jaar	Aantal (in miljarden)
1980	4,45
1990	5,30
2000	6,23

- a Bereken door interpolatie in tabel 1.9 wanneer de wereldbevolking de zes miljard is gepasseerd (op de maand nauwkeurig).

De groei van de wereldbevolking vertoont een exponentieel karakter.

- b Was interpoleren in dit geval toegestaan?
- c Zal de zes miljard in werkelijkheid iets vroeger of iets later optreden dan berekend bij opgave a?

Figuur 1.14 Wereldbevolking



1.13 Een keynesiaans model

In dit model wordt de economische kringloop beschreven voor de volgende sectoren: gezinnen, bedrijven, overheid en buitenland. De rol van de gezinnen is productiefactoren ter beschikking te stellen, te consumeren en te sparen. De bedrijven produceren en investeren. De overheid doet overheidsbestedingen en int belasting. Met het buitenland bestaat een import- en exportrelatie.

Het resultaat van dit model is een evenwichtsvoorwaarde van het nationaal inkomen. We beperken ons met dit model tot de korte termijn, dat wil zeggen de productiecapaciteit en de kapitaalgoederenvoorraad (machines en gebouwen) zijn constant.

Het model bestaat uit de volgende lineaire verbanden:

1 Consumptiefunctie: $C = c \times (Y - B) + C_0$

waarbij:

C = particuliere consumptie

c = marginale consumptiequote; het deel van het besteedbaar inkomen dat voor consumptie wordt aangewend

Y = nationaal inkomen

B = belastingen

C_0 = autonome consumptie

2 Investeringsfunctie: $I = I_0$

I = netto-bedrijfsinvesteringen

I_0 = autonome investeringen

3 Overheidsbestedingen: $O = O_0$

O = netto-overheidsbestedingen

I_0 = autonome overheidsbestedingen

- 4 Exportfunctie: $X = X_0$
 X = export (van goederen en diensten)
 X_0 = autonome export
- 5 Importfunctie: $M = m \times Y + M_0$
 M = import (van goederen en diensten)
 m = marginale importquote; het deel van het inkomen dat leidt tot import
 M_0 = autonome import
- 6 Belastingfunctie: $B = b \times Y$
 b = marginale belastingquote; deel van het inkomen dat als belasting moet worden afgedragen
- 7 Evenwichtsvoorwaarde: $Y = C + I + O + (X - M)$

- a In de evenwichtsvoorwaarde (7) staat in het linkerdeel het nationaal inkomen (Y) maar deze staat ook 'verstopt' in het rechterdeel, bijvoorbeeld als import. Herschrijf de evenwichtsfunctie, door invulling van de overige vergelijkingen, zodanig dat de evenwichtswaarde van het nationaal inkomen kan worden berekend.

Gegeven is dat:

- 50% van het besteedbaar inkomen voor consumptie wordt aangewend;
- 10% van het inkomen tot een toename van de import leidt;
- 35% van het inkomen belast wordt.

Verder geldt: $C_0 = 15$; $I_0 = 45$; $O_0 = 170$; $X_0 = 290$; $M_0 = 0$.

- b Bereken de evenwichtswaarde van het nationaal inkomen.

Op de webwite is het bestand Keynes.xls geplaatst dat de evenwichtswaarde van het nationaal inkomen berekent.

De directe invloed die de overheid heeft op het nationaal inkomen is: de marginale belastingquote en de overheidsbestedingen.

- c Reken uit wat het effect is op het nationaal inkomen als de overheid de belastingen in eerste instantie verlaagt naar 30% en daarna naar 25%? Is dit een lineair verband?
- d Reken uit wat het effect is op het nationaal inkomen als de overheid de bestedingen in eerste instantie verhoogt naar 200 en daarna naar 230? Is dit een lineair verband?



Eindtoets