TAL voor de PABO

Ans Veltman

Marja van den Heuvel-Panhuizen

Rekenen met hele getallen op de basisschool

Tussendoelen Annex Leerlijnen

Noordhoff Uitgevers

Eerste druk

Rekenen met hele getallen op de basisschool

Rekenen met hele getallen op de basisschool

Ans Veltman

Marja van den Heuvel-Panhuizen

Noordhoff Uitgevers Groningen | Houten

Ontwerp omslag: G2K Designers, Groningen/Amsterdam
Omslagillustratie: Britt Molenaar, 9 jaar

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Hoger Onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen, e-mail: info@noordhoff.nl

2 3 4 5 / 14 13 12

ISBN (ebook) 978 90 01 85684 7
ISBN 978 90 01 76509 5
NUR 846

Inleiding

Zicht hebben op de manier waarop basisschoolleerlingen leren rekenen vormt een belangrijke voorwaarde voor het geven van goed rekenonderwijs. *Rekenen met hele getallen op de basisschool – TAL voor de Pabo* biedt Pabo-studenten een praktisch leerboek met opdrachten om zich de leerlijn en de tussendoelen voor rekenen met hele getallen eigen te maken. Deze uitgave geeft houvast bij het opbouwen van de vakdidactische kennis en vaardigheden die nodig zijn om basisschoolleerlingen te leren rekenen.

Het boek is geënt op de TAL-boeken *Jonge kinderen leren rekenen* en *Kinderen leren rekenen*, die naast dit boek als naslagwerken kunnen worden gebruikt. Ook dit nieuwe boek is een product van het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht.

Rekenen met hele getallen op de basisschool – TAL voor de Pabo is toegespitst op de aankomende leerkracht. Naast de leerlijnbeschrijvingen, met citaten uit de TAL-boeken *Jonge kinderen leren rekenen* en *Kinderen leren rekenen*, zijn er voor elk rekenonderdeel concrete voorbeelden van rekenactiviteiten opgenomen. Deze activiteiten zijn ontleend aan de gangbare realistische reken- en wiskundemethoden.
Elk hoofdstuk begint met een practicum op eigen niveau en de daarbij behorende reflectie. Verder bevat het boek veel praktijkopdrachten, zoals:
- rekenactiviteiten uitvoeren met kinderen;
- rekenactiviteiten ontwerpen en vervolgactiviteiten bedenken;
- uitzoeken hoe een rekenopgave in een bepaalde methode wordt aangepakt;
- zelf rekenopgaven oplossen.

Verder worden bij elk hoofdstuk literatuurtips gegeven zodat verdere verdieping mogelijk is.

Alle onderdelen van het rekenen met hele getallen van de basisschool komen in het boek aan bod. Zo kunnen de studenten het volledige leerproces van groep 1 tot en met groep 8 volgen.
Het boek bevat de volgende hoofdstukken:
- Hoofdrekenen in groep 5-8
- Groeiend getalbegrip in voorschoolse periode en groep 1 en 2
- Rekenen tot tien, tot twintig en tot honderd in groep 3 en 4
- Tafels in groep 4 en 5
- Schriftelijk rekenen, Kolomsgewijs en cijferend rekenen in groep 6-8
- Schattend rekenen in groep 6-8
- Rekenmachine in groep 7 en 8
- Getallen en getalrelaties in groep 5-8

Het boek start met hoofdrekenen omdat dit de basis is van alle andere rekenvormen. Daarna komt het rekenen in de achtereenvolgende groepen aan bod. Het geheel wordt afgesloten met een hoofdstuk over getallen en getalrelaties. Dit is weliswaar het laatste hoofdstuk, maar dit moet zeker niet als het sluitstuk van de leerlijn worden gezien. Het werken met getallen en getalrelaties is door de hele basisschool heen erg belangrijk.

Om de beschrijvingen van de rekenactiviteiten zo concreet mogelijk te maken, is er een website: www.helegetallen.noordhoff.nl met daarop videofragmenten uit de onderwijspraktijk.

Bij het schrijven van dit boek hebben we dankbaar gebruikgemaakt van de adviezen van Adri Treffers. Zijn deskundigheid en enthousiasme voor goed rekenonderwijs klinkt door in dit boek en zal vele aankomende leerkrachten inspireren.

Verklaring afkortingen in bronvermelding
TAL HG-OB = TAL-uitgave Jonge kinderen leren rekenen (978-90-01-85180-4)
TAL HG-BB = TAL-uitgave Kinderen leren rekenen (978-90-01-85100-2)

Inhoud


Ik wil Bolletje
KRUIDNOTEN
campina
Zacht & Luchtig
banaan
iglo
Franse vleesschotel
iglo
15 stuks
60 liter
GEMAAKT VAN GEBRUIKT PLASTIC

1 Hoofdrekenen in groep 5-8

1.1 Een practicum als start: Hoofdrekenen

Rekenen doe je op verschillende manieren, die onder andere afhangen van de situatie, van je kennis, vaardigheid en zelfvertrouwen.
Je kunt op de volgende manieren rekenen:
- door gebruik te maken van getalkennis en weetjes, zoals die zijn opgeslagen in je hoofd. Bijvoorbeeld: 3 + 4 = ...; 5 × 6 = ...; 50 is de helft van 100; 50% is de helft van ...; 10 cm is een decimeter.
- door gebruik te maken van getalkennis en weetjes, gecombineerd met een basiskennis van rekenregels. Bijvoorbeeld: 30% korting uitrekenen als 0,3 × ...= ...; 101 – 99 zien als het verschil tussen 101 en 99 en dus ook als het verschil tussen 102 en 100; 12 × 14 uiteen kunnen rafelen als 10 × 14 en 2 × 14.
- door gebruik te maken van hulpmiddelen. Je gebruikt bijvoorbeeld een rekenmachine als de getallen te groot of de bewerkingen te complex worden, of als je iets heel precies wilt uitrekenen.

Om grip te krijgen op het vakgebied dat in rekenwiskundemethoden en ook in literatuur over rekenonderwijs aangeduid wordt met ‘hoofdrekenen’, volgt hier een practicum op je eigen niveau. Dit heeft twee belangrijke redenen:
- het geeft je meer inzicht in hoe jij rekent, als onderdeel van jouw vorming tot gecijferde leraar;
- het geeft je voorbereiding om het onderdeel hoofdrekenen in de rekenles beter te kunnen doordenken.

1.1.1 Zelf aan de slag

Maak het practicum hiernaast.

Practicum

1 Getallen uit het nieuws van de dag

a De weerdienst van Shanghai verwacht dat er plaatselijk 200 millimeter regen zal vallen. Hoeveel liter water komt er ongeveer in de badkuip die buiten staat?

b Het wielrenpeloton komt zeven minuten na de winnaar binnen. Hoe ver zijn de wielrenners in het peloton ongeveer van de finish verwijderd als de winnaar de finishlijn passeert?

c Nedcar gaat 30 000 auto's per jaar fabriceren. Hoeveel auto's zijn dat bij benadering per dag?

2 Opgaven met kleine getallen. Welke aanpakken ken jij?

47 + 59 =	14 × 14 =	168 : 12 =
82 – 68 =	7 × 68 =	320 : 5 =

3 Wie is sneller: jij of de rekenmachine?

2400 : 8 = 801 – 789 = 6 × 251 = 1250 + 1250 + 1250 =

6 liter wijn in flessen van 75 cl. Hoeveel flessen zijn dat?

Om 7.45 uur zet je een dvd op. Deze duurt 135 minuten.
Om hoe laat is hij afgelopen?

4 Je gaat met €25,– de supermarkt binnen. Heb je genoeg geld bij je om het volgende te kopen?

a Zes flessen wijn van €4,25 per stuk.

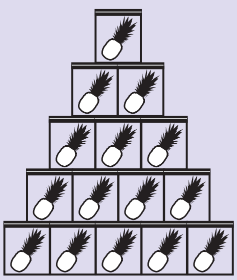
b Een pak waspoeder van €6,99; twee pakken melk van €1,15 per stuk; een ijstaart van €5,98; een pak nootjes van €2,45; een pot jam van €1,85; een pak diepvriesvis van €4,99.

5 Zelf sommen maken

Maak zelf zoveel mogelijk verschillende keersommen met 240 als uitkomst.

6 Handig tellen

Hoeveel blikken bevat een stapel die opgebouwd is als de hiernaast afgebeelde stapel?
Hierbij wordt uitgegaan van een onderste rij met 10 blikken.



7 Deelbaarheid

Onderzoek of het getal 165 deelbaar is door twee, door drie, door vijf, door vijftien.

8 Hoeveel sprongen vanaf nul?

Je springt over de getallenlijn met sprongen van 100, 10 en 1. Je streeft naar zo weinig mogelijk sprongen.
Hoeveel sprongen heb je nodig om bij 296 en om bij 464 uit te komen?

1.1.2 Reflectie

In deze reflectie wordt teruggekeken op het rekenwerk uit het practicum. De verschillende opgaven in het practicum weerspiegelen het terrein van hoofdrekenen zoals dat op de basisschool in groep 5 tot en met 8 inhoud krijgt.
Voordat er per opgave een bespreking volgt, zijn er al een paar notities te maken.

- In de eerste plaats heb je kunnen ervaren dat het niet alleen gaat om kale oefensommen, maar dat er ook gerekend wordt in praktische situaties. Getallen, bewerkingen en uitkomst krijgen betekenis door een specifieke context. De context bepaalt tevens, of er precies of geschat gerekend moet worden.
- In de tweede plaats kun je zien dat er een grote variatie aan vragen is. Veel vragen zijn gericht op bewustwording en verantwoording van de eigen aanpak.
- In de derde plaats zijn er veel opgaven met ‘mooie’ getallen.

1 Getallen uit het nieuws van de dag
Veel informatie die je dagelijks ontvangt via de media bevat getallen. Men lijkt ervan uit te gaan dat je als lezer of kijker wel raad weet met deze informatie. Deze getalsinformatie kun je omzetten in concrete sommen die je kunt controleren. Het gaat dan vaak niet om ‘precies’ rekenen, maar om ‘ongeveer’ rekenen. Je gaat hierbij uit van je eigen referentie, zoals: wat zijn de afmetingen van een badkuip? hoe hard rijden wielrenners ongeveer? hoeveel dagen bevat een jaar?
Dit wordt ook wel ‘rekenen op de rand van de krant’ genoemd. De voorbeelden laten zien dat je kunt gaan rekenen wanneer je het probleem hebt omgezet naar ‘rekentaal’, bijvoorbeeld naar 30 000 : 300 bij vraag c.
Bij het toepassen van dit soort opgaven in de klas moet de leraar de dagelijkse nieuwsstroom omzetten in voor kinderen voorstelbare problemen. Het is van belang te rekenen met handig gekozen getallen. De keuze van de getallen is interessant, omdat de leraar hierdoor weet wat de referenties van de kinderen zijn en de kinderen er nieuwe referenties bij leren.
Als informatiebron kun je internet (bijvoorbeeld met Google) raadplegen. De snelheid van een peloton wielrenners mag je – afhankelijk van allerlei routefactoren – binnen een rijkwijdte van 30 tot 60 km/uur inschatten. Keuze voor 60 km/uur geeft 1 km/minuut. Dus de geschatte afstand bij zeven minuten achterstand is 7 km. Keuze voor 30 km/uur geeft de helft, is 3,5 km achterstand. Een realistische inschatting van de afstand ligt tussen deze twee uitersten.
Het rekenwerk bij getallen uit het nieuws is dus gebaseerd op enige kennis van het onderwerp, een voorstelling van het probleem, een omzetting naar een rekenkundig model waarin een berekening in de plaats komt van de vraag, het kiezen van (een) geschikt(e) begingetal(len) en op maatkennis (in vraag b km per uur omgezet naar km per minuut).

2 Opgaven met kleine getallen
Deze vormen een belangrijke kern van het hoofdrekenen. Met bekende (voorstelbare) getallen en bewerkingen rekenen op een manier die erop gericht is zo goed mogelijk gebruik te maken van de eigenschappen van de bewerkingen en van de relaties tussen getallen.

Bijvoorbeeld: $47 + 59 = 59 + 47 = (59 + 1) + (47 - 1) = 60 + 46 = 106$
Maar ook: $47 + 59 = 40 + 50 + 7 + 9 = 90 + 16 = 106$
Of: $47 + 59 = 59 + 47 = 59 + 40 + 7 = 99 + 7 = 106$

Je kunt hier zien dat je de som op verschillende manieren kunt oplossen. Elke aanpak maakt gebruik van de eigenschappen van getallen en van bewerkingen, zoals de wetenschap dat het getal 59 dicht bij 60 ligt, dat je in een optelling het ene getal mag verhogen als je het andere getal in dezelfde mate verlaagt, dat je getallen kunt splitsen enzovoort.

Zo kun je ook de opgave 82 – 68 = analyseren naar verschillende aanpakken. Een paar voorbeelden:

$82 - 68 = 82 - 60 - 8 = 22 - 8 = 22 - 2 - 6 = 20 - 6 = 14$
$82 - 68 = \ldots;\ 80 - 60 = 20;\ 2 - 8 = -6;\ 20 - 6 = 14$
$82 - 68 = 83 - 69 = 84 - 70 = 14$
$82 - 68 = 80 - 68 + 2 = 12 + 2 = 14$
$82 - 68 = 81 - 67 = 80 - 66 = 14$
$82 - 68 = \ldots;\ 68 + 2 = 70;\ 70 + 12 = 82;\ 2 + 12 = 14$

Ook hier weer kun je gebruikmaken van kennis van getallen, van getalrelaties en van de bewerking van getallen.
Getalkennis is hier bijvoorbeeld: 82 is op te vatten als 80 (acht tientallen) en 2 (twee eenheden); getalrelatie is 82 + 2 = 84 of 82 – 2 = 80; kennis van de bewerking kan zijn vanuit de betekenis ‘eraf’ (in stukken) of vanuit de betekenis ‘verschil’. In de laatste betekenis is de stap 82 – 68 = 84 – 70 te begrijpen. Beide getallen even veel ophogen geeft hetzelfde verschil binnen de som.
Het bespreken van deze manieren van aanpak is een centraal thema in de hoofdrekenles. Kinderen leren zo van elkaar en vergroten hierbij hun eigen repertoire.

14 × 14 = kun je herschrijven in 10 × 14 + 4 × 14 = 140 + 56 = 196. Het eerste getal wordt gesplist in 10 en 4 om er vervolgens mee te rekenen.
Je kunt ook de strategie van halveren en verdubbelen toepassen.
14 × 14 wordt dan 7 × 28. Dat kun je uitrekenen via
7 × 20 + 7 × 8 = 196. Of reken vanaf 5 × 28 (dat is de helft van 10 × 28) = 140 en voeg 2 × 28 = 56 toe.
Misschien weet je kwadraten wel uit je hoofd en hoef je helemaal niet rekenen, omdat je die kennis paraat hebt. Denk aan 11 × 11 en 12 × 12.
Hoe zou je de informatie die je opgedaan hebt bij de toelichting op het uitrekenen van 14 × 14 kunnen gebruiken bij het oplossen van 7 × 68?

Niet alle kinderen kiezen voor dezelfde aanpak. Hoe meer verschillende aanpakken je kent en hoe beter je weet hoe je kinderen op een hoger niveau kunt laten functioneren, des te gemakkelijker wordt het om kinderen goed te begeleiden tijdens de rekenles.

De deling $168 : 12 = \ldots$ kan worden opgelost door 168 te splitsen in 120 en 48. Je ziet dat 12 zeker tien keer past in 168, dus je haalt als het ware eerst 120 er af. Je hebt nog 48 over en daar past 12 vier keer in. Je maakt van de deling in feite een vermenigvuldiging.
Door dit vraagstuk in een geldcontext te plaatsen kan het gemakkelijker worden om de opgave op te lossen. Twaalf personen verdelen 168 euro. Hoeveel krijgt ieder? Ieder krijgt 10 euro; dan is er 120 euro al verdeeld en is er nog 48 euro te verdelen. Je kunt eerst iedereen één euro geven, dan heb je nog 36 euro over; vervolgens geef je weer ieder één euro en zo verder.
Uiteindelijk krijgt iedereen 14 euro.

De opgave $320 : 5 = \ldots$ kun je oplossen door 320 te splitsen in 300 en 20. De splitsaanpak is altijd bruikbaar bij het oplossen van delingen. Je kunt denken aan $30 : 5 = 6$ en naar analogie hiervan aan $300 : 5 = 60$. Het antwoord is een factor tien groter geworden. Dat vraagt van je dat je inzicht hebt in het toepassen van de nulregel. Het gaat er hierbij om te begrijpen waarom de nul erbij komt en niet alleen om het trucje.
Van $320 : 5$ kun je ook een andere opgave maken met dezelfde verhouding, die makkelijker uit te rekenen is, namelijk $640 : 10$. Inzicht in de nulregel is ook nu weer van belang. Misschien zijn er ook kinderen die behoefte hebben aan een specifieke context om dit beter te kunnen begrijpen. Kun je dan bij deze opgave een context bedenken?

3 Wie is sneller: jij of de rekenmachine?
Wie er wint wordt bepaald door je kennis van de getallen, je bewerkingen en je snelheid van hoofdrekenen.
Zou je de rekenmachine ook pakken, als je van $2400 : 8 =$ even $24 : 8 = 3$ maakt, waardoor $2400 : 8 = 300$ als antwoord heeft?

Reken je 6×251 via $6 \times 250 + 6$ uit? Of splits je de opgave op in $6 \times 200 + 6 \times 50 + 6 \times 1$?

De getallen 801 en 789 liggen dicht bij elkaar. Van 789 naar 800 is 11 en dan nog 1 erbij. De aftreksom is een optelsom geworden.
Je kunt ook denken aan een context, bijvoorbeeld: ik heb 801 euro op mijn rekening staan en ik koop een computer voor 789 euro. Hoeveel geld heb ik over? Bij de kassa krijg je – als je contant betaalt – eerst 1 euro terug tot ‘790’, dan 10 euro tot ‘800’ en tot slot nog 1 euro tot ‘801’ terug. Je had de aftreksom ook onder elkaar kunnen zetten en hem zo kunnen uitrekenen, maar dan ben je waarschijnlijk net zo snel als de rekenmachine.

Bij de wijnflessen die gevuld worden met zes liter wijn, kun je direct zien dat je sowieso zes flessen kunt vullen, want je hebt per fles maar 75 cl nodig. Dan heb je nog zes keer 25 cl over. Met drie keer 25 cl is een fles vol, dus dan kun je nog twee flessen vullen en hebt in totaal acht flessen gevuld.
Je kunt ook van zes liter 600 cl maken en dat delen door 75. Om zes liter te kunnen herschrijven in centiliters moet je kennis hebben van het metrieke stelsel. Of zag je 75 cl als ¾ en kijk je dan hoe vaak ¾ in 6 past?

1250 + 1250 + 1250 = ... Dat antwoord zou je direct kunnen zien. Of zie je het sneller als de opgave niet zo, maar juist onder elkaar zou staan opgeschreven?
Je kunt ook splitsend rekenen: eerst 1000 + 1000 + 1000, dan 200 + 200 + 200 en dan 50 + 50 + 50. Of misschien laat je 250 als getal wel heel.

Bij het rekenen met tijden moet je oppassen: je rekent niet met 100, maar met 60 (60 minuten in een uur). Dus als je de rekenmachine bij deze opgave zou gebruiken, dan moet je je eerst realiseren wat je precies gaat uitrekenen. Je kunt niet zomaar gaan optellen.
135 minuten, dat is twee uur en een kwartier. De dvd gaat aan bij 7.45 uur, dus om 10.00 uur is de dvd afgelopen.

4 Heb je genoeg geld bij je om het volgende te kopen?
Misschien komt deze situatie je bekend voor: je hebt maar 25 euro en je vraagt je af of het genoeg is voor de boodschappen die je wilt doen. Je kunt dat heel precies uitrekenen, bijvoorbeeld: zes flessen van elk 4,25 is 4 × 6 euro is 24 euro en nog zes keer 0,25, dat is 1,50, dus totaal 25,50 euro. Dus 0,50 eurocent te veel. Dat precies rekenen kan, omdat je 'mooie' getallen hebt. Dit is minder het geval bij de andere boodschappen, al kun je van sommige getallen wel makkelijk 'mooie' getallen maken.

Een pak waspoeder van €6,99 pas je aan in:	7,00 euro
Twee pakken melk van €1,15 per stuk, dus samen:	2,30 euro
IJstaart van €5,98 pas je aan in:	6,00 euro
Nootjes van €2,45 en een pot jam van €1.85 tel je op, is	4,30 euro
Diepvriesvis van €4.99 pas je aan, is:	5,00 euro.

Tel de nieuwe bedragen bij elkaar op om te zien of 25 euro genoeg is. Bij het optellen heb je 2,30 euro even veranderd in 3 euro, omdat je zag dat 7 euro en 3 euro samen 10 euro is. 6 euro en 4,00 euro is ook samen 10 euro. (Je hebt nu even die 0,30 eurocent weggelaten; dat kan ook wel, want bij 2,30 euro had je 0,70 te veel gerekend.) Ten slotte voeg je 5 euro toe, en dan is het samen 25 euro. Je krijgt nog iets terug, omdat je met te veel gerekend had.
Hier komt dus het schatten in combinatie met hoofdrekenen aan de orde: hoe precies moet de schatting zijn? Hoeveel heb je te veel of te weinig genomen? En wat is het gevolg van het rekenen met andere getallen? Door met elkaar in gesprek te gaan over de gemaakte keuzes en de consequenties daarvan krijgen leerlingen steeds meer grip op de mogelijkheden die het schatten bij het hoofdrekenen te bieden heeft. Zeker als het precieze rekenen niet noodzakelijk is, kan een dergelijke aanpak voor veel tijdwinst zorgen.

5 Zelf sommen maken
Zelf zoveel mogelijk verschillende keersommen bedenken met 240 als uitkomst is voor de meeste leerlingen op de basisschool een uitdagende opdracht. We noemen dat *productief oefenen*.
Productief oefenen is een open manier van vraagstukken aanbieden, waarbij eigen initiatief van de leerling gevraagd wordt. Je kunt denken aan keersommen met 24 als uitkomst. De getallenparen 4 en 6, 3 en 8, 2 en 12, 1 en 24 horen daarbij.

Het gaat in dit geval niet om 24, maar om 240, dus dan denken we aan 4×60, 40×6, 3×80, 30×8, 2×120, 20×12, 1×240 en 10×24. Je kunt ook nog alle omkeringen opschrijven, omdat de verwisseleigenschap van toepassing is op vermenigvuldigingen. Bijvoorbeeld in 60×4, 6×40 enzovoort.
Je kunt de basisschoolleerlingen vragen om in tweetallen een bepaald aantal sommen te bedenken. Zijn alle keersommen bij 240 gevonden?

6 Handig tellen
De hoeveelheid blikken kan worden bepaald door $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$ uit te rekenen. De opdracht is handig tellen; dat kan door de bovenste en de onderste stapel op te tellen, dat is $1 + 10 = 11$. De tweede rij en de één na onderste rij zijn ook samen 11 $(2 + 9)$, dat is ook zo bij $3 + 8$, $4 + 7$ en $5 + 6$. Je hebt dus 5×11 blikken.
Je kunt ook de rijen samenvoegen die samen 10 zijn: $1 + 9$, $2 + 8$, $3 + 7$, $4 + 6$. Je hebt dan vier keer een rij van 10 en nog 10 en 5, dus samen 55.
Het zoeken van getallen die mooi bij elkaar passen kan het hoofdrekenen een stuk eenvoudiger maken. Bijvoorbeeld in de opgave $46 + 23 + 54 + 77 = \ldots$ Als je ziet dat $46 + 54$ samen 100 zijn, net zoals $23 + 77$, dan heb je de uitkomst zo gevonden. Door kinderen dit soort vragen voor te leggen en daaraan de opdracht te koppelen: ‘Reken handig!’ stimuleer je ze om op zoek te gaan naar mooie combinaties. Zo kunnen ze later zelf ook mooie combinaties ontdekken en gebruiken bij het hoofdrekenen.

7 Deelbaarheid
Bij het onderzoek naar de deelbaarheid van het getal 165 zoek je uit of 165 deelbaar is door twee, drie, vijf en vijftien.
Je kunt uitrekenen of je 165 met zijn tweeën eerlijk kunt delen. Je maakt dan een deling. Je hebt al vaker getallen gedeeld door twee en misschien is het je toen opgevallen dat het delen door twee lukt als het eindgetal een even getal is. Vijf is geen even getal, dus 165 is niet deelbaar door 2.
De overige delingen zijn te maken door 165 te splitsen en te kijken of de gesplitste getallen dan deelbaar zijn door 3, 5 en 15. Bijvoorbeeld $165 : 3 = 150 : 3 + 15 : 3$. Dat kan, dus 165 is deelbaar door drie. Een kenmerk van deelbaarheid door drie is dat de som van de cijfers waaruit het getal is opgebouwd $(1 + 6 + 5 = 12)$ deelbaar is door drie.
Je maakt dan niet de deling, maar je maakt gebruik van het kenmerk van deelbaarheid. Het kenmerk van deelbaarheid door vijf is dat het getal eindigt op een nul of een vijf; dat is hier het geval.
15 is een samenstelling van 5 en 3, dus 165 is ook deelbaar door 15.
Weet je ook de kenmerken van deelbaarheid door 4 en 9?
Je kunt kinderen op de basisschool vragen om alle getallen tot 100 op te schrijven die deelbaar zijn door 5 of 10 of door 2. Welke getallen hebben ze gevonden? Wat valt op als je naar deze getallen kijkt?
Later kunnen ze ook getallen die deelbaar zijn door 3, 4, 8, 9, 6 en 12 onderzoeken om de kenmerken van deelbaarheid te bepalen. De kenmerken van deelbaarheid door 7, 11 en 13 komen niet aan de orde, omdat daarvan geen vereenvoudiging is te geven is voor het delend uitrekenen.
Kinderen krijgen door een dergelijk onderzoek meer grip op de getallen en hun gecijferdheid neemt toe.

8 Hoeveel sprongen vanaf nul?
Je maakt gebruik van de sprongen van 100, 10 en 1 en probeert in zo weinig mogelijk sprongen bij 296 en bij 464 uit te komen.
Om in zo min mogelijk sprongen bij 296 uit te komen, maak je drie sprongen van 100 en haalt daar vier sprongen van 1 af. Je hebt gezien dat 296 dicht bij 300 ligt. Bij deze manier van springen maak je zo min mogelijk sprongen. Maak je echter twee sprongen van 100, negen sprongen van 10 en vier sprongen van 1, dan maak je meer sprongen dan wanneer je eerst over 296 naar 300 springt. Op grond van de ligging van het getal in de telrij kwam je keuze tot stand.
464 ligt dichter bij 500 dan bij 400. Dus je maakt eerst vijf sprongen van 100 en vervolgens vier sprongen van 10 terug (je bent nu bij 460) en nog vier sprongen van 1 vooruit. Met dertien sprongen kom je uit bij 464. Als je vier sprongen van 100 en zes sprongen van 10 en vier sprongen van 1 maakt, heb je veertien sprongen nodig om bij 464 uit te komen. Eerst naar 470 springen en dan zes sprongen van 1 terugspringen is niet korter.
De plaats van getallen in de telrij en de positiewaarde van elk getal heb je nodig om in zo min mogelijk sprongen bij het doelgetal uit te komen.
In een interactief moment kunnen kinderen aan elkaar uitleggen welke overwegingen ze gemaakt hebben om in zo weinig mogelijk sprongen bij het doelgetal uit te komen. Kinderen die alleen vooruitspringen, ontdekken dat terugspringen ook mogelijk is.
Terugspringen is een vaardigheid die je bij het hoofdrekenen kunt gebruiken als je bijvoorbeeld $735 - 298$ uitrekent. Je haalt van 735 300 af (dat wordt dan 435). Je hebt dan twee te veel eraf gehaald en die voeg je weer toe tot je komt op 437.

1.2 Wat is hoofdrekenen?

'Wat hoofdrekenen is, weet iedereen', aldus luidde de titel van een invloedrijk artikel over hoofdrekenen eind jaren zeventig. En inderdaad: iedereen heeft in het dagelijks leven of in de werksituatie wel eens met hoofdrekenen te maken, en iedereen heeft dus wel een idee wat daarmee bedoeld wordt. Toch ligt het minder duidelijk dan men op het eerste gezicht wellicht zou denken. Is hoofdrekenen bijvoorbeeld vooral ùit het hoofd rekenen, of mag er ook pen en papier aan te pas komen? En cijferen uit het hoofd, valt dat er ook onder? Of moet vooral gedacht worden, zoals in sommige landen het geval is, aan het uit het hoofd leren van basale rekenfeiten als $6 + 7 = 13$ of $6 \times 7 = 42$?
In Nederland heeft zich de laatste decennia mede onder invloed van voornoemd artikel een steeds duidelijker opvatting over hoofdrekenen gevormd. Een opvatting die haar wortels vindt in de wijze waarop de afgelopen 100 à 150 jaar tegen dit leerstofgebied is aangekeken en die mede onder invloed van de grootschalige invoering van de rekenmachine steeds meer gestalte krijgt in de reken-wiskundemethoden. Deze opvatting komt er kort gezegd op neer dat hoofdrekenen handig en flexibel rekenen is op basis van bekende getalrelaties en rekeneigenschappen. Deze opvatting wordt inmiddels door een brede groep praktijkmensen en vakdeskundigen gedragen. Zij vindt ook internatio-

naal steeds meer ingang. Hieronder volgt een aantal voorbeelden van opgaven die in deze opvatting tot het domein van het hoofdrekenen gerekend worden:

> 56 + 28 =
  368 + 57 =
  1980 + 370 =

> Pieter koopt een walkman. Hij betaalt met een briefje van 200. De prijs van de walkman is € 189,–. Hoeveel houdt hij over?

> 142 – 76 =
  702 – 635 =
  2980 – 370 =

> Ans koopt acht mueslibollen. Een mueslibol kost 95 cent. Hoeveel moet zij betalen?

> 8 × 28 =
  6 × 249 =
  12 × 15 =

> Sander kijkt op z'n horloge. Het is 16.51 uur. Hij moet om half zes thuis zijn. Hoeveel tijd heeft hij nog?

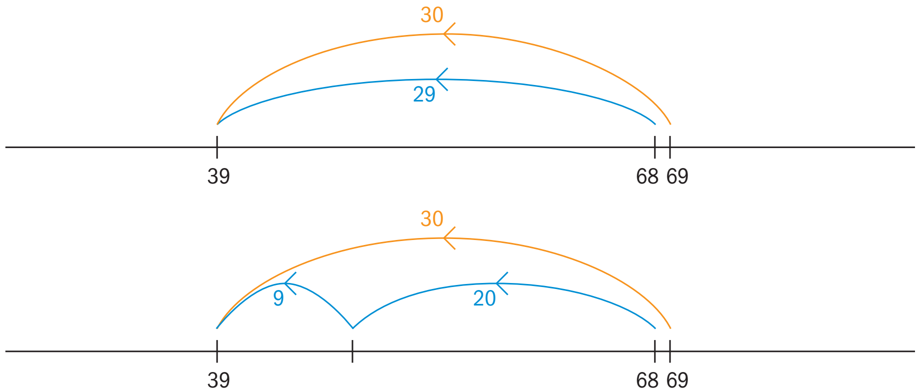
> 84 : 4 =
  150 : 6 =
  750 : 15 =

1 H. Jansen (1973). Wat hoofdrekenen is, weet iedereen. Wiskobasbulletin, 2, 3, 784–786.

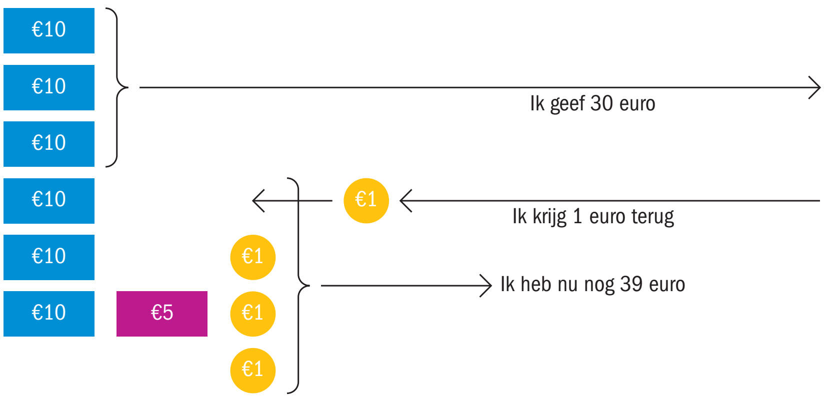
(**TAL HG-BB, p. 37**)

1.2.1 Hoofdrekenen: uit het hoofd en met het hoofd

Bij hoofdrekenen wordt niet alleen *uit* het hoofd gerekend, maar ook het rekenen *met* het hoofd, het handige rekenen, hoort tot het hoofdrekenen. Wat handig is, is afhankelijk van de getallen in de opgaven. Kinderen leren bij hoofdrekenen om naar getallen te kijken en daarna te beslissen hoe ze eenvoudig de opgave kunnen uitrekenen.
Zo is de opgave 68 – 29 eenvoudig op te lossen als je beide getallen met een getal verhoogt, waardoor 69 – 30 de nieuwe opgave wordt. Het verschil blijft immers even groot. Dit ligt meer voor de hand als je bij de opgave denkt aan de situatie waarin gevraagd wordt: 'Hoe oud was opa toen zijn kleinzoon geboren werd?' Opa is nu 68 jaar en zijn kleinzoon is 29 jaar. In feite gaat het bij deze opgave om het verschil in leeftijd. Stel je dezelfde vraag een jaar later, dan is het verschil nog even groot. Het uitrekenen is gemakkelijker, doordat je 69 – 30 kunt uitrekenen.



Het is ook mogelijk om de opgave uit te rekenen door 68 – 30 te berekenen, en in gedachten te houden dat je nu één te veel aftrekt. Dat getal moet je later weer bij het antwoord optellen. Deze aanpak ontstaat bijna vanzelf door bij deze opgave te denken aan de volgende situatie: in mijn spaarpot zit 68 euro (zes briefjes van tien, een briefje van vijf en drie losse munten van één euro). Ik wil een dvd kopen van 29 euro. Hoeveel heb ik dan nog over? In de winkel betaal ik met 30 euro; ik krijg nog één euro terug. In mijn spaarpot zit nog 38 euro en als ik straks die ene euro er weer in stop, dan heb ik dus nog 39 euro.



Een verhaal bij een opgave kan sturing geven aan de wijze waarop de oplossing tot stand komt. Aanvankelijk maken de kinderen kennis met verschillende manieren van oplossen, doordat we verhalen oftewel contexten gebruiken die een bepaalde werkwijze ondersteunen. Op een later tijdstip kunnen kinderen ook zonder context leren om verschillende oplossingswijzen te hanteren. Ze kunnen gestimuleerd worden om zelf aan een context te denken, maar ook kan ze gevraagd worden om net zo te denken als een ander kind dat een bepaalde manier van oplossen gebruikt. Hoofdrekenen is geen individuele activiteit; het met elkaar bespreken van manieren van oplossen draagt ertoe bij dat kinderen kennismaken met en steeds vaardiger worden in het gebruik van diverse manieren van oplossen. Dit betekent dat kinderen gestimuleerd worden om flexibel te werken bij het uitrekenen van een opgave. Er zijn immers verschillende manieren om een opgave uit te rekenen. Tijdens het hoofdrekenen mogen kinderen gebruikmaken van pen en papier om korte uitwerkingen te noteren. Het is niet de bedoeling dat *alle* berekeningen worden opgeschreven. Het gaat slechts om het noteren van enkele belangrijke tussenantwoorden, zodat kinderen het overzicht houden. In subparagraaf 1.4.2 is te lezen wat de functie van het kladblad is voor het noteren van tussenantwoorden.

De handige hoofdrekenstrategieën die in het huidige basisonderwijs worden gebruikt, zijn terug te vinden in *Grondslagen van de rekendidactiek*.

1. 6×26 $\qquad \begin{aligned} 6 \times 20 &= 120 \\ 6 \times 6 &= \underline{\;\;36} \\ &\;\;\;156 \end{aligned}$

2. 6×26 $\qquad \begin{aligned} 6 \times 25 &= 150 \\ 6 \times 1 &= \underline{\;\;\;\;6} \\ &\;\;\;156 \end{aligned}$ $\qquad 3 \times 52 = 156$

3. $\begin{aligned} 39 + 76 &= 40 + 75 = 115 \\ &= 100 + 15 = 115 \end{aligned}$

4. $7 \times 24 = 7 \times 25 - 7 = 175 - 7 = 168$

5. $17 + 9 + 23 + 11 = 40 + 20 = 60$

6. $\begin{aligned} 16 \times 52 = {} & 8 \times 104 \\ & 4 \times 208 \\ & 2 \times 416 \\ & \;\;832 \end{aligned}$

7. $48 + 52 = 50 + 50 = 100$

8. $448 : 8 = \ldots$ $\qquad \begin{aligned} 448 : 2 &= 224 \\ 224 : 2 &= 112 \\ 112 : 2 &= 56 \end{aligned}$ $\qquad \begin{aligned} 400 : 8 &= 50 \\ 48 : 8 &= 6 \\ 448 : 8 &= 56 \end{aligned}$

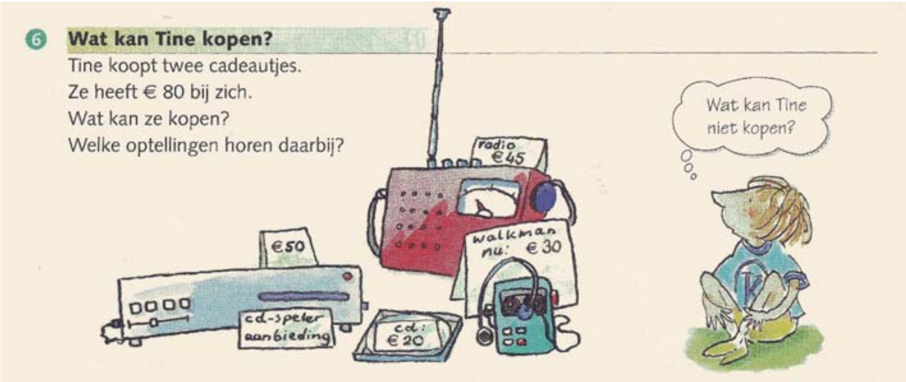
9. $4 \times 399 = 1600 - 4 = 1596$

Uit: L. van Gelder, *Grondslagen van de rekendidactiek*, p. 25/26, Wolters, Groningen 1959

Het hoofdrekenen komt in het basisonderwijs vanaf groep 5 tot en met groep 8 aan de orde bij het optellen en aftrekken tot 100/1000, het vermenigvuldigen met grote en ronde getallen en bij het delen met grote en ronde getallen.

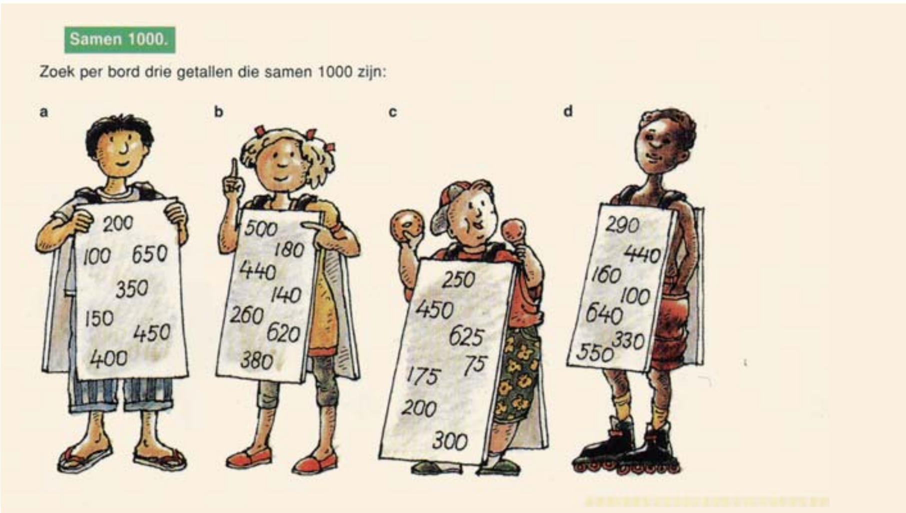
Van elk deelgebied geven we een voorbeeld uit een realistische rekenmethode.

Voorbeeld: Optellen tot 100



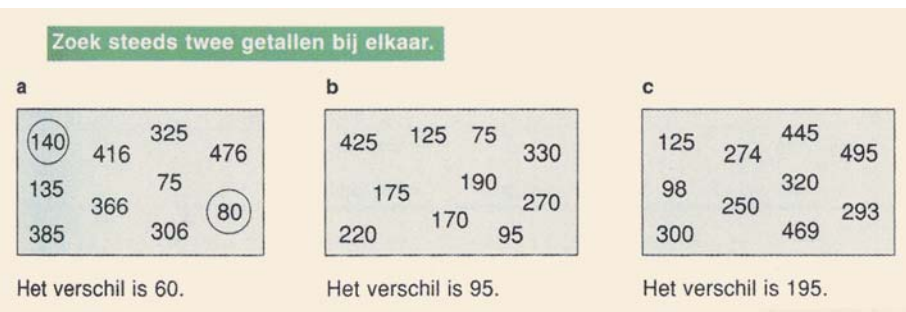
Uit: *Rekenrijk*, deel 4a, p. 107

Voorbeeld: Optellen tot 1000



Uit: *WIG*, deel 5a, p. 30

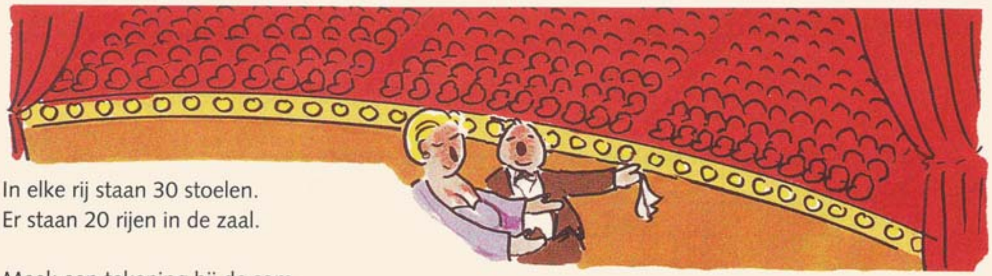
Voorbeeld: Aftrekken tot 1000



Uit: *WIG*, deel 5b, p. 63

Voorbeeld: Vermenigvuldigen met grote getallen en ronde getallen

1 Hoeveel stoelen?



In elke rij staan 30 stoelen.
Er staan 20 rijen in de zaal.

Maak een tekening bij de som.

Uit: *Rekenrijk*, deel 5b, p. 54

Voorbeeld: Delen met grote en ronde getallen

6 Hoeveel kisten kun je vullen?

1600 : 20 =

7 Reken uit.

4500 : 5 =	★ 320 : 80 =
6300 : 7 =	300 : 50 =
5500 : 11 =	280 : 70 =
8100 : 9 =	990 : 110 =
4900 : 7 =	450 : 150 =
7200 : 12 =	700 : 100 =
5600 : 8 =	★ 240 : 12 =
5600 : 7 =	100 : 25 =
3000 : 6 =	100 : 20 =
4800 : 6 =	100 : 50 =
6400 : 8 =	150 : 75 =
7200 : 8 =	300 : 150 =

Uit: *Alles telt*, deel 6a, p. 51

> Hoofdrekenen is handig en flexibel rekenen op basis van bekende getalrelaties en rekeneigenschappen.
> (TAL HG-BB, p. 37)

> Vlot en flexibel door de getallenwereld kunnen bewegen, zo zou men hoofdrekenen ook kunnen omschrijven.
> Of het daarbij om optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of delen gaat, of een combinatie van deze bewerkingen, is niet wezenlijk. Evenmin is hierbij van belang uit welk getalgebied de getallen afkomstig zijn.
> (TAL HG-BB, p. 38)

> Het is in de eerste plaats een benaderingswijze van getallen en getalsmatige gegevens waarbij handig en flexibel met de getallen wordt gerekend.
> (TAL HG-BB, p. 38)

1.2.2 Kenmerken van een goede hoofdrekenaar

Wat komt er allemaal bij kijken om je een goede hoofdrekenaar te voelen? Om te kunnen hoofdrekenen is het van belang om de basisvaardigheden zoals optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen goed te beheersen, zodat je deze vlot kunt gebruiken. Je moet kennis over rekenfeiten kunnen inzetten. Zo kun je bij het maken van een aftrekopgave ook tot een oplossing komen door een optelling te maken, bijvoorbeeld: 68 – 29 uitrekenen door 29 + ? = 68 uit te rekenen. Hoeveel moet je bij 29 doen om bij 68 uit te komen?

Naast vaardigheden en kennis speelt ook het hebben van een goed gevoel over hoofdrekenen een rol. Na een aantal succeservaringen op het gebied van hoofdrekenen durven kinderen meer op onderzoek te gaan in de wereld van de getallen. Een goed gevoel maakt hoofdrekenen tot een uitdaging en een aangename wijze van rekenen. Om kinderen hierin te begeleiden kan een leerkracht voorafgaand aan een hoofdrekenles de kinderen eerst in een korte mondelinge gezamenlijke lesactiviteit laten oefenen met de basisvaardigheden. De leerkracht geeft de kinderen ruimte om op eigen wijze tot een oplossing te komen en deze systematisch te bespreken. Ook zorgt de leerkracht ervoor dat kinderen zich veilig voelen om hun aanpakken te verwoorden en te delen met andere kinderen.

Nu wat preciezer.
We geven een aantal kenmerken van die vaardigheid:

- je werkt met getalwaarden en niet met cijfers; de getallen worden bij het hoofdrekenen ‘in hun waarde gelaten’. Voorbeeld:
  1012 – 898 = 1012 – 900 + 2.
  Het rekenen met getallen en niet met cijfers komt ook aan de orde bij de ‘bijna-verdwijnsommen’ die in groep 4 en 5 aan de orde komen. Voorbeeld: 62 – 59;
- je maakt gebruik van rekeneigenschappen en getalrelaties. We noemen hier de belangrijkste:
  – de verwisseleigenschap (16 + 47 = 47 + 16; 28 × 3 = 3 × 28),
  – de verdeeleigenschap (13 × 6 = (10 × 6) + (3 × 6)),
  – de inverse relaties optellen/aftrekken en vermenigvuldigen/delen (bijvoorbeeld: 62 – 59 = 3, want 59 + 3 = 62; 420 : 7 = 60, want 7 × 60 = 420) en combinaties daarvan;
- je steunt op een goed ontwikkeld getalgevoel en een hechte kennisbasis van elementaire rekenfeiten tot twintig en tot honderd;
- je weet dat er verschillende manieren zijn om tot een oplossing te komen. Niet iedereen hoeft op dezelfde wijze tot een oplossing te komen.
- je hebt gevoel voor de grootte van getallen;
- je hebt inzicht in de positie van een getal op de getallenlijn;
- je hebt inzicht in de verschillende structureringsmogelijkheden van een getal als hoeveelheid;
- je hebt zicht op de verschillende praktische betekenissen van getallen;
- je kunt schakelen van eenheid, bijvoorbeeld bij het rekenen met hele getallen zoals miljoen en miljard;
- je kunt gebruikmaken van passende tussennotaties al naar gelang de situatie, maar je rekent voor een belangrijk deel uit het hoofd.

1.2.3 De kenmerken in de praktijk

In de methoden voor de basisschool komen rekenopgaven voor waarbij de leerlingen gevraagd wordt om een kritische houding te ontwikkelen ten aanzien van hoofdrekenen in relatie tot cijfermatig rekenen en ten aanzien van het eventuele gebruik van een rekenmachine. In de voorbeeldopgave krijgen de leerlingen twee geheugensteuntjes aangereikt in de denkwolken; de eerste betreft het hoofdrekenen (HR!) en het tweede betreft het verstandige gebruik van de rekenmachine. De leerling mag zelf de keuze maken.

Welke opgaven zou je hoofdrekenend uitrekenen?

(5) **Reken uit**

300 × 12,2 =	324 × 2000 =
2012 × 4024 =	3 × 25 × 8 × 20 =
550 + 329 + 450 =	0,125 × 160 =
1 × 2 × 3 × 4 × 5 =	9 + 99 + 999 =
5005 – 999 =	291 256 – 140 123 =

Uit: *Rekenrijk*, deel 7a, p. 155

In het volgende voorbeeld mag de rekenmachine maar één keer in een rij gebruikt worden. De leerlingen worden hierdoor nog meer uitgedaagd om een afweging te maken.
Welke opgaven zou jij met de rekenmachine uitrekenen?

(4) **Reken uit**

Je mag in elke rij bij één som de rekenmachine gebruiken.

4 × 125 =	348 + 1469 =	496 : 8 =	1639 – 863 =
834 + 399 =	1845 – 625 =	1236 – 598 =	36 × 125 =
47 × 47 =	8 × 25 =	1236 + 589 =	5642 : 7 =

Uit: *Rekenrijk*, deel 7a, p. 48

De keuze voor hoofdrekenen is afhankelijk van de mogelijkheden die je ziet en de getalkennis die je hebt. Bespreek in tweetallen de gekozen aanpak en noteer verschillen in aanpak.
Misschien ben je tot de conclusie gekomen dat eigenlijk alle opgaven met hoofdrekenen zijn op te lossen. Bekijk daarna de volgende voorbeeldopgave. Ligt het gebruik van de rekenmachine voor de hand of is het handiger en sneller om met het hoofd te rekenen?

Met of zonder?

Met of zonder rekenmachine?

Reken de volgende sommen uit. Gebruik je rekenmachine alleen als je dat handiger vindt. Schrijf in je schrift of je een som zelf (Z) of op de rekenmachine (RM) hebt uitgerekend.

Voorbeeld:

1000 – 998 = 2 (Z)
732 : 6 = 122 (RM)

a
1200 : 3 =
4 x 249 =
40 x 40 =
992 : 8 =
499 + 499 =

6 x 257 =
1201 – 1197 =
1356 : 6 =
1275 + 1275 =
12.000 : 12 =

b Deze week in de aanbieding:
groot pak Fluks wasmiddel
van € 14,65 voor € 12,95.
Wat is de korting?

c Nesjla heeft 7 stickervelletjes gekregen. Op elk velletje zitten 36 stickers. Hoeveel stickers heeft ze in totaal?

d Voor zijn verjaardagsfeestje heeft Johan een grote zak met 120 kauwgomballen gekocht. Hij doet ze in zakjes van 5. Hoeveel zakjes kan hij vullen?

Uit: *Wis en Reken*, deel 7 Wisboek 1, p. 24

1.2.4 De zin en de plaats van het hoofdrekenen

Iedereen heeft in het dagelijkse leven of in de werksituatie wel eens met hoofdrekenen te maken.
(**TAL HG-BB, p. 37**)

Voor het leven van alledag is hoofdrekenen (samen met schattend rekenen) van eminent belang. Of het nu om het rekenen met geld gaat, met tijd, met gewichten of afstanden; een goede hoofdrekenvaardig-

> heid is onontbeerlijk om greep op de getalsmatige omstandigheden te houden, om de getallen kritisch te kunnen bekijken en op een passende manier te kunnen interpreteren. In die zin vormt hoofdrekenen een cruciaal element van gecijferdheid waarop een kind zich zonder meer moet kunnen verlaten. Maar ook voor het vervolgonderwijs is hoofdrekenen van grote waarde. Niet alleen vormt het de basis waarop men altijd moet kunnen terugvallen bij het vele rekenwerk binnen de verschillende vakgebieden, juist in een situatie waarin de rekenmachine als hulpmiddel gemeengoed aan het worden is.
> (**TAL HG-BB, p. 39**)

Welke plaats heeft het hoofdrekenen binnen het rekenen in het basisonderwijs in Nederland?
In Nederland werken we vanuit een realistische visie op rekenen. Dat betekent dat het rekenen in concrete voorstelbare situaties aan kinderen wordt aangeboden. De start vanuit de context vindt plaats vanuit de informele werkwijze die de kinderen daarbij hanteren. Kinderen hebben inbreng in het onderwijsleerproces. Ze krijgen de gelegenheid om eigen constructies en aanpakken te bedenken en deze gedachten in een gesprek met andere kinderen en de leerkracht betekenis te geven. Tijdens de uitwisseling van oplossingen krijgen kinderen mogelijkheden om op een steeds hoger niveau van denken en handelen te gaan functioneren waardoor het formele rekenen steeds meer binnen hun bereik komt.
We besteden veel onderwijstijd aan hoofdrekenen, het rekenen met verschillende aanpakken en het gebruik van de lege getallenlijn. Nadat er een stevige basis is gelegd met het hoofdrekenen, komt het cijferen aan bod. Het hoofdrekenen – dat vooraf gaat aan het cijferen – heeft het rekenen tot en met 20 en 100 als basis. In groep 3 leren de kinderen betekenis geven aan de getallen. Ze plaatsen getallen op de getallenlijn, ordenen naar grootte en splitsen getallen, zodat er een netwerk van relaties ontstaat binnen het getalsysteem tot 20 (en hoger). Ook leren ze optellen als 'erbij' en 'samen', en aftrekken als 'eraf' en 'verschil' uitvoeren, toepassen en noteren. Aan het eind van groep 3 en begin van groep 4 komt de brede oriëntatie op het getallengebied tot 100 aan de orde. Vanuit die basis kan het hoofdrekenen voor kinderen verder verkend worden.
Naast het hoofdrekenen komt het kolomsgewijze rekenen als voorloper van het cijferen en het schattend rekenen aan de orde. Bij kolomsgewijs rekenen worden getallen gesplitst en wordt er gewerkt van groot naar klein. Bij kolomsgewijs rekenen wordt er rijgend met getallen gerekend van rechts naar links en worden deeluitkomsten hoofdrekenend samengevoegd.
Cijferen is een receptmatige aanpak van het werken met cijfers.

Kolomsgewijs optellen

	345		
	278 +	je denkt:	
300 + 200 =	500	500	
40 + 70 =	110	610	
5 + 8 =	13	623	
500 + 110 + 13 =	623		

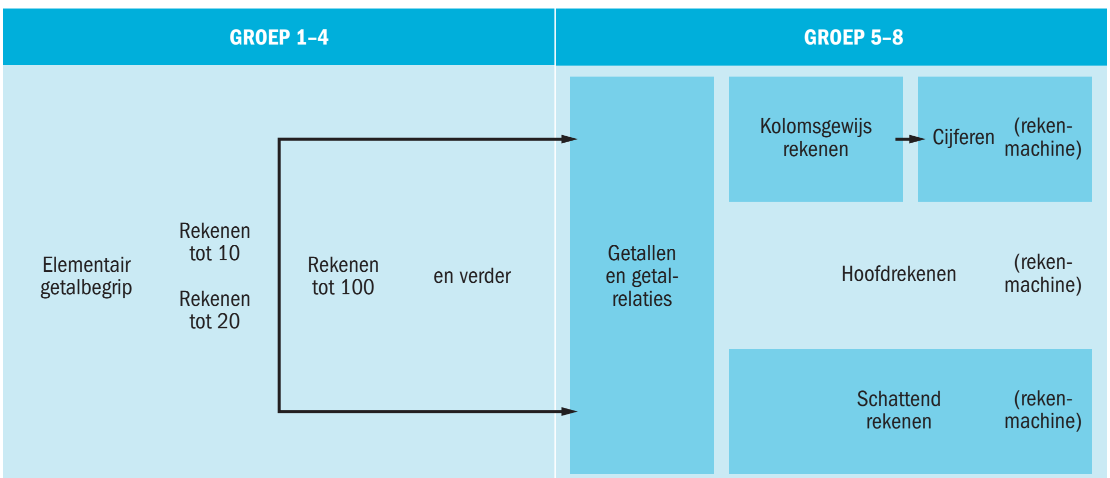
Cijferend optellen

45
~~3~~~~4~~5
278 +
623

Kolomsgewijs aftrekken				*Cijferend aftrekken*
	345			$\overset{2}{\cancel{3}}\overset{3}{\cancel{4}}{}^{1}5$
	278 –		*je denkt:*	278 –
300 – 200 =	100		100	67
40 – 70 =	30	*tekort*	70	
5 – 8 =	3	*tekort*	67	
100 – 30 – 3 =	67			

Het voordeel van cijferend rekenen is dat je sommen met grote getallen precies kunt uitrekenen. Een vermenigvuldiging als 26×87 is hoofdrekenend lastig op te lossen, maar cijferend lukt het wel. Kinderen moeten cijferend leren vermenigvuldigen voor het vervolg van het rekenproces. Maar tegelijkertijd ontstaat de vraag bij grotere vermenigvuldigingen wat de zin is van een dergelijke bewerking, als je ook een rekenmachine kunt gebruiken. Zijn er eigenlijk nog veel mensen die dit zonder rekenmachine uitrekenen? Het is belangrijk dat leerlingen kunnen schatten wat er ongeveer op het scherm van de rekenmachine komt te staan, zodat het precieze antwoord kan worden gecontroleerd met behulp van het geschatte antwoord. Hoofdrekenen is meer omvattend dan het cijferen, waarbij de nadruk ligt op een precieze uitkomst. Hoofdrekenen vraagt om getalinzicht, flexibel rekenen met getallen, schattend rekenen en problemen kunnen oplossen. Bij hoofdrekenen gaat het niet alleen om het uitvoeren van een bepaalde aanpak, zoals bij het cijferen het geval is. Kinderen weten wat ze doen, ze handelen zelfbewust op basis van inzicht in de getallen en komen met eigen oplossingen.

TAL-leerlijn hele getallen



Geleidelijke differentiatie in rekenvormen met hoofdrekenen als kern. De rekenmachine wordt gebruikt als opgaven niet adequaat opgelost kunnen worden met hoofdrekenen, schattend rekenen en kolomsgewijs/cijferend rekenen.

1.3 Drie vormen van hoofdrekenen

Bij het maken van het practicum werd het duidelijk dat er verschillende oplossingsstrategieën per opgave kunnen worden gebruikt. Soms hanteert iemand voornamelijk één type strategie, maar het komt ook voor dat er meerdere strategieën naast elkaar worden gebruikt.

> Hoofdrekenen doet zich in het algemeen voor in drie elementaire vormen die, bezien vanuit het oogpunt van leerprocessen, logisch in elkaars verlengde liggen en waarvan de verwerving gepaard gaat met een steeds verder toenemend begrip van getallen en operaties.
> (**TAL HG-BB, p. 39**)

Globaal gezien gebruiken we voor hoofdrekenen drie vormen:
1 rijgend hoofdrekenen
2 splitsend hoofdrekenen
3 gevarieerd hoofdrekenen.

> Het **rijgende hoofdrekenen** waarbij de getallen primair worden opgevat als objecten in de telrij en waarbij het opereren plaatsvindt via 'bewegen over de getallenlijn': verder (+) of terug (–), herhaald verder (×) of herhaald terug (:).
> (**TAL HG-BB, p. 39**)

Kenmerkend voor de rijgaanpak is dat het eerste getal in een opgave als geheel wordt opgevat en dat het tweede getal in gedeeltes wordt toegevoegd, dan wel erafgehaald wordt.

> Het **splitsende hoofdrekenen** waarbij de getallen primair worden opgevat als objecten met een decimaal-positionele structuur en waarbij het opereren plaatsvindt door de getallen op grond van die structuur te splitsen en te bewerken.
> (**TAL HG-BB, p. 39**)

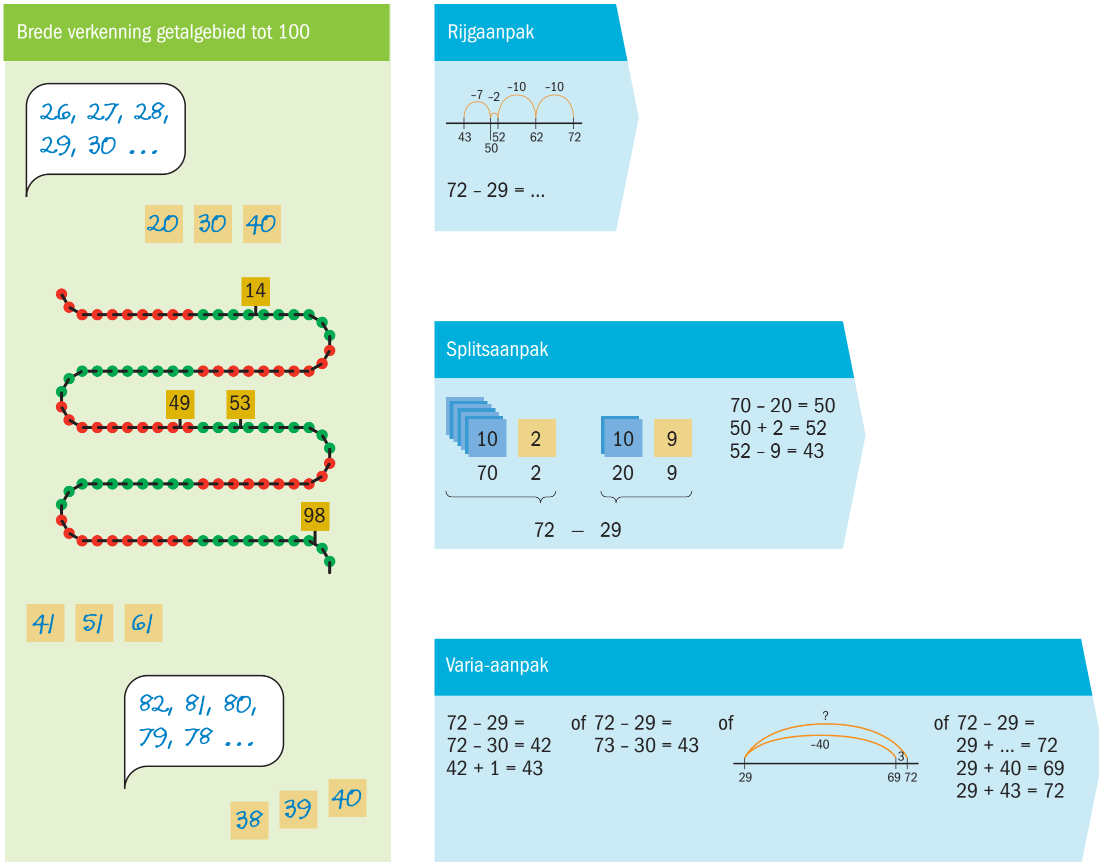
Kenmerkend voor de splitsaanpak is dat de getallen uit elkaar worden gehaald en in gedeeltes bij elkaar gevoegd of van elkaar worden gehaald.

> Het **gevarieerde hoofdrekenen** op grond van rekeneigenschappen waarbij de getallen opgevat worden als objecten die op allerlei manieren gestructureerd kunnen worden; en waarbij het opereren plaatsvindt door een passende structurering te kiezen en een daarmee overeenstemmende rekeneigenschap te gebruiken.
> (**TAL HG-BB, p. 39**)

Kenmerkend voor de varia-aanpak is dat er gebruik gemaakt wordt van allerlei handige getalrelaties en rekeneigenschappen die passen bij de betreffende opgave.

1.3.1 Volgorde van aanbieding van de drie grondvormen van hoofdrekenen bij het optellen en aftrekken

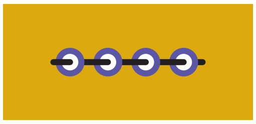
Schematische weergave van de drie vormen van hoofdrekenen



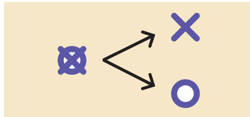
De drie grondvormen die verweven zijn met verschillende niveaus van denken en handelen komen in het rekenonderwijs tijdens het leerproces in volgorde aan bod.

Er wordt begonnen met een brede verkenning van de getallen, bijvoorbeeld vooruit- en terugtellen vanaf willekeurige getallen, tellen met sprongen van tien, welk getal is het grootst/kleinst, zet de getallen in volgorde van klein naar groot, waar ligt het getal op de getallenlijn, tussen welke tienvouden ligt een getal; in aansluiting hierop worden rijgstrategieën verkend.

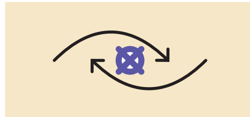
De kinderen maken eerst kennis met een kralenketting met honderd kralen. De kralen zijn gegroepeerd in groepjes van tien kralen in een kleur. Door de structuur van de kralenketting kunnen ze vlot de plaats van getallen op de kralenketting/getallenlijn bepalen. De kralenketting is als het ware een denkmodel geworden om op een getallenlijn getallen te kunnen plaatsen. Zodra de kralenketting voldoende verkend is, kunnen de kinderen de overstap maken naar een lege getallenlijn. Aanvankelijk staan op de getallenlijn nog tientallen, die kinderen kunnen gebruiken om een getal als bijvoorbeeld 49 of 52 te kunnen plaatsen. In een later stadium bepalen de kinderen zelf welke getallen ze op de zelf gemaakte getallenlijn nodig hebben om hun denken te ondersteunen en zo het antwoord op een som te kunnen geven.



Rijgaanpak



Splitsaanpak



Varia-aanpak

Rijgaanpak
Vanuit het positioneren van getallen op de getallenlijn stappen we over naar het maken van optel- en aftrekopgaven. Het sterke punt van de rijgaanpak is dat deze goed aansluit bij het tellend rekenen en bij het 'bewegen op de getallenlijn' dat kinderen bij het rijgen van de kralen op de kralenketting en de getallenlijn laten zien. Bij het bewegen op de getallenlijn doen kinderen kennis op over het handig 'springen' naar getallen, over de opbouw van getallen in tientallen en eenheden en later ook in honderdtallen en duizendtallen. Bovendien is het rijgen overzichtelijk doordat het eerste getal als geheel wordt opgevat. Kinderen hebben hierdoor minder te onthouden dan bij het splitsen waarbij beide getallen uit elkaar gehaald worden.
Het tellen wordt bij het rijgen verkort tot het maken van sprongen van tien en één en in een later stadium zelfs tot het springen met een tienvoud en het maken van een 'hup' (getallen groter dan één en kleiner dan tien).

Voorbeelden van de rijgaanpak bij het optellen.

56 + 38 =

Eerst naar 56 springen en dan de volgende sprongen:
+ 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

Eerst naar 56 springen en dan de volgende sprongen:
+ 4 + 4 + 10 + 10 + 10

Eerst naar 56 springen en dan de volgende sprongen:
+ 10 + 10 + 10 + 4 + 4

Naar 56 springen en dan de volgende sprongen:
Eerst 8 erbij en dan de + 10 + 10 + 10

Eerst naar 56 springen en dan de volgende sprongen:
+ 4 + 10 + 10 + 10 + 4

Eerst naar 56 springen en dan de volgende sprongen:
+ 30 + 8

De op één na laatste manier wordt goed uitgevoerd als leerlingen exact weten wat ze doen. Vaak blijkt echter dat kinderen wel eerst vier erbij doen, dan de tienen toevoegen en dan alsnog acht in plaats van vier toevoegen of zelfs vergeten om de resterende vier toe te voegen. Deze aanpak blijkt lastig, omdat kinderen te veel verschillende deelhandelingen moeten verrichten en de grip op de bewerking verliezen. Geeft deze aanpak inderdaad problemen, adviseer de kinderen dan om eerst de tientallen en later pas alle eenheden toe te voegen of omgekeerd.

Voorbeelden van de rijgaanpak met betrekking tot het afhalen van de tweede hoeveelheid bij het aftrekken.

65 – 28=

Eerst naar 65 springen en dan de volgende sprongen:
naar links -10 -10 -5 -3

Eerst naar 65 springen en dan de volgende sprongen:
naar links -5 – 3 -10 -10 -10

Eerst naar 65 springen en dan de volgende sprongen:
naar links -20 -5 -3

Eerst naar 65 springen en dan de volgende sprongen:
naar links -5 -20 -3

Voorbeelden van de rijgaanpak met betrekking tot het aanrijgen tot en met de uiteindelijke hoeveelheid bij het aftrekken.

65 – 28 =

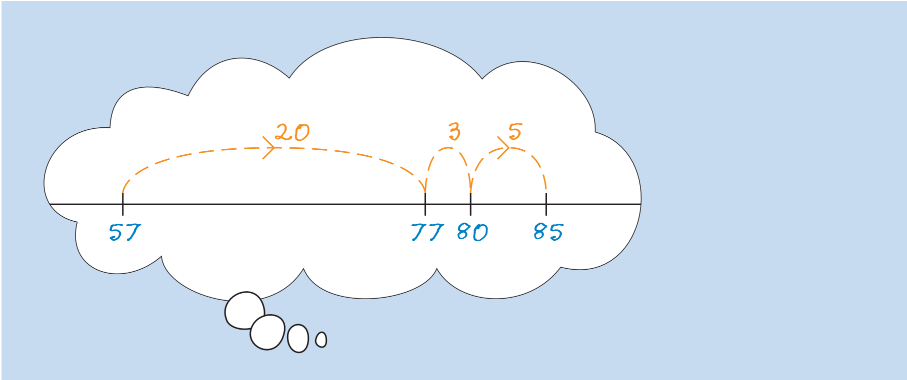
Eerst naar 28 springen en dan de volgende sprongen:
naar rechts +10 +10 +10 +2 +5 om te eindigen bij het doelgetal 65

Eerst naar 28 springen en dan de volgende sprongen:
naar rechts +2 +5 +10 +10 +10 om te eindigen bij het doelgetal 65

Eerst naar 28 springen en dan de volgende sprongen:
naar rechts + 30 +2 +5 om te eindigen bij het doelgetal 65

Eerst naar 28 springen en dan de volgende sprongen:
naar rechts + 2 + 5 + 30 om te eindigen bij het doelgetal 65

Bij het werken op de getallenlijn gaat het om het aanrijgen of afhalen van de tweede hoeveelheid. De eerste hoeveelheid blijft heel en in deelhandelingen wordt het tweede getal eraan toegevoegd of ervan afgehaald. Op de getallenlijn maakt de leerling zichtbaar op welke wijze het tweede deel toegevoegd of afgehaald wordt. Het kind kan zo het antwoord bepalen op de betreffende opgave. De lege getallenlijn is een denkmodel dat de rijgaanpak ondersteunt en steun geeft aan de mentale handeling. Door de kinderen na verloop van tijd te stimuleren om de sprongen mentaal te maken wordt de getallenlijn een denkmodel. Dit kan zo nodig worden ondersteund door met een vinger de sprong in de lucht te tekenen en het betreffende tussenantwoord te noemen.

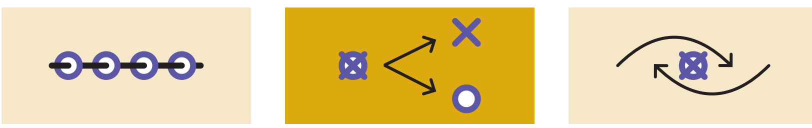


Er kan ook een overstap worden gemaakt door de rekenstappen niet meer op de getallenlijn in beeld te brengen, maar door ze in rekentaal te noteren.

57 + 28 =
57 + 20 = 77
77 + 3 = 80
80 + 5 = 85

Zo worden kinderen zich bewust van het feit dat ze niet altijd de hele bewerking hoeven op te schrijven, maar dat ze ook alleen tussentijdse denkstappen kunnen noteren. Op deze manier blijven ze grip houden op het oplossingsproces en kunnen zo tot een oplossing komen. Hier vindt als het ware de introductie plaats van het ‘functionele kladblad’ dat gebruikt kan worden bij het hoofdrekenen.

77 80 85


Splitsaanpak

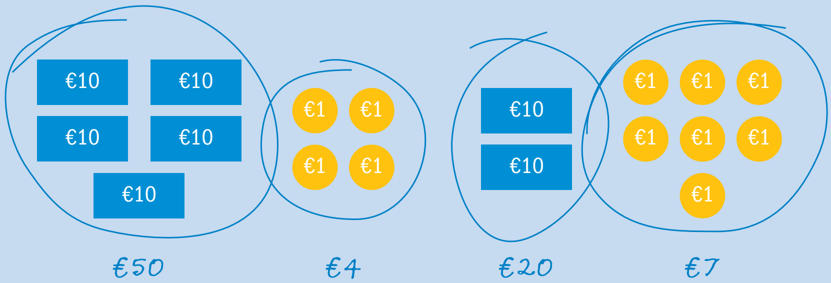
Splitsaanpak
Op het moment dat de kinderen vertrouwd zijn geworden met de rijgaanpak op de (mentale) getallenlijn en hiermee in samenhang het begrip van de getallen is ontstaan, wordt de splitsaanpak aangeboden. Door sommige kinderen kan deze al in een eerder stadium zijn ontdekt, maar het splitsen wordt nu behandeld.
Vooral bij het optellen maken kinderen spontaan gebruik van het splitsen. Beide getallen worden gesplitst in tientallen en eenheden. De tientallen worden samengevoegd en de eenheden worden bij elkaar opgeteld; tot slot worden tientallen en eenheden bij elkaar gedaan om het antwoord te bepalen.

Voorbeeld van het splitsen bij optellen

Ik koop een broek voor 54 euro
en een trui voor 27 euro.
Hoeveel moet ik betalen?

54 + 27 =

54 euro: Hoeveel briefjes
van 10 euro en hoeveel munten
van 1 euro is dat?
27 euro: Hoeveel briefjes van 10 euro
en hoeveel munten van 1 euro is dat?



50 en 20 is samen 70
4 erbij 7, 7 erbij 4 vind ik makkelijker, dat is samen 11
70 en 11 is samen 81

Voorbeeld van het splitsen bij aftrekken

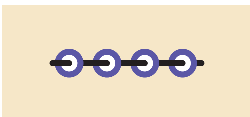
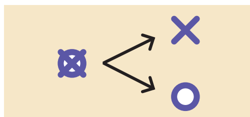
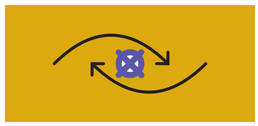
54 – 27 =
54 gesplitst is 50 en 4
27 gesplitst is 20 en 7
50 eraf 20 is 30
4 eraf 7 is ?

‘Eigenlijk moet ik er nu nog 3 afdoen, dus 30 – 3 = 27.’
Bij deze oplossing redeneert het kind vanuit een ‘tekorthandeling’.

De oplossing kan ook totstandkomen door een ‘optelhandeling’ tussen te voegen:

54 – 27 =
54 gesplitst is 50 en 4
27 gesplitst is 20 en 7
50 eraf 20 is 30
30 + 4 = 34
34 – 7 = 27

Veel kinderen maken van ‘4 eraf 7’ de opgave ‘7 eraf 4 is 3’, tellen die op bij 30 en krijgen zo 33 als antwoord. Ze vinden het soms vreemd dat je in geval van de tweede aanpak gaat optellen, terwijl je aan het aftrekken bent. Door de complexiteit van de verschillende handelingen is de splitsaanpak lastiger dan de rijgaanpak. Het kunnen toepassen van de splitsaanpak vraagt van de kinderen inzicht in de decimale structuur (de tienen en de enen) van de getallen, maar ook in de soort bewerking (optellen en/of aftrekken). Als deze aanpak problemen geeft, wordt aanbevolen om het accent te leggen op de aanpak vanuit de ‘tekorthandeling’.




Varia-aanpak

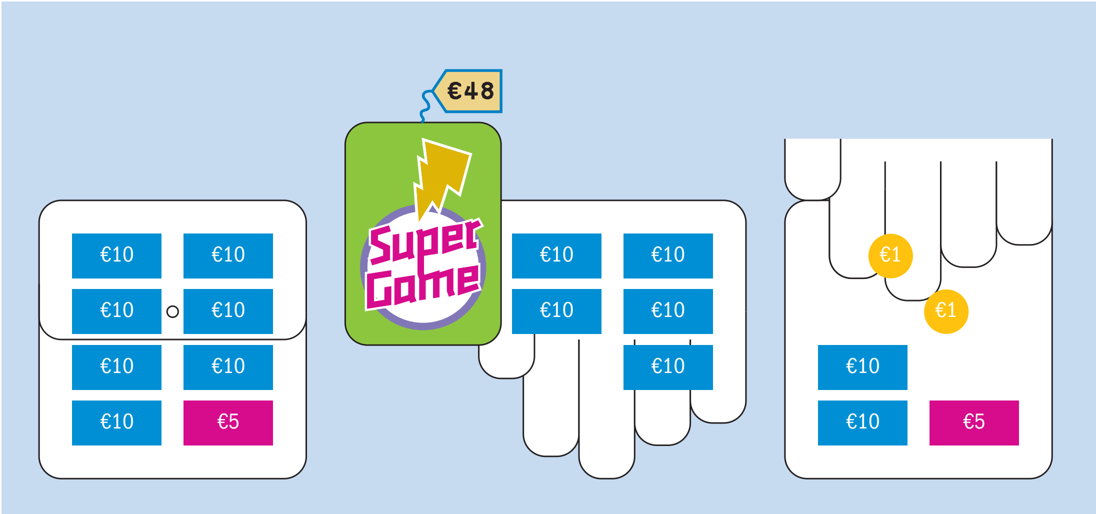
Varia-aanpak
Zodra de kinderen voldoende vertrouwd zijn met de splitsaanpak en het begrip van de operatie(s) is ontstaan, vindt een verdere uitbreiding naar de varia-aanpak plaats.

De varia-aanpak is voor sommige kinderen vaak moeilijker te doorgronden dan de andere manieren. Voor de ene opgave kan een heel andere aanpak nodig zijn dan voor de andere. Een bepaalde strategie is niet voor alle opgaven even handig. Bij elke opgave wordt op basis van de getallen en de bewerking die moet worden gedaan een keuze gemaakt voor een bepaalde aanpak. De kinderen baseren hun keuze op hun kennis van rekeneigenschappen en van de getallen waarmee ze moeten rekenen.
Zo ligt het voor de hand om bij een aftrekopgave als 104 – 87 = ..., 87 aan te vullen door vanaf 87 naar 104 te springen. Het verschil tussen de getallen wordt bepaald door de afstand van 87 naar 104 te overbruggen; eerst 3 erbij, dan 10, dan nog 4.
De varia-aanpakken die kunnen worden gebruikt, zijn: compenseren, transformeren, aanvullen (bij aftrekken) en de inverse relatie.

Voorbeeld van compenseren

75 – 48 =
75 – 50 = (bij het antwoord tel ik nog twee op, want ik heb er bij de hulpsom twee te veel van afgehaald.)

Het kind moet kunnen doorzien waarom er bij deze opgave twee opgeteld moeten worden.



In een geldcontext is deze aanpak voor de hand liggend in de situatie waarbij je zeven briefjes van tien euro en een briefje van vijf euro in de portemonnee hebt, je iets koopt voor 48 euro en betaalt met vijf briefjes van tien.

Voorbeeld van transformeren bij aftrekken ofwel gelijk blijvend verschil

68 – 29 = is evenveel als 69 – 30.

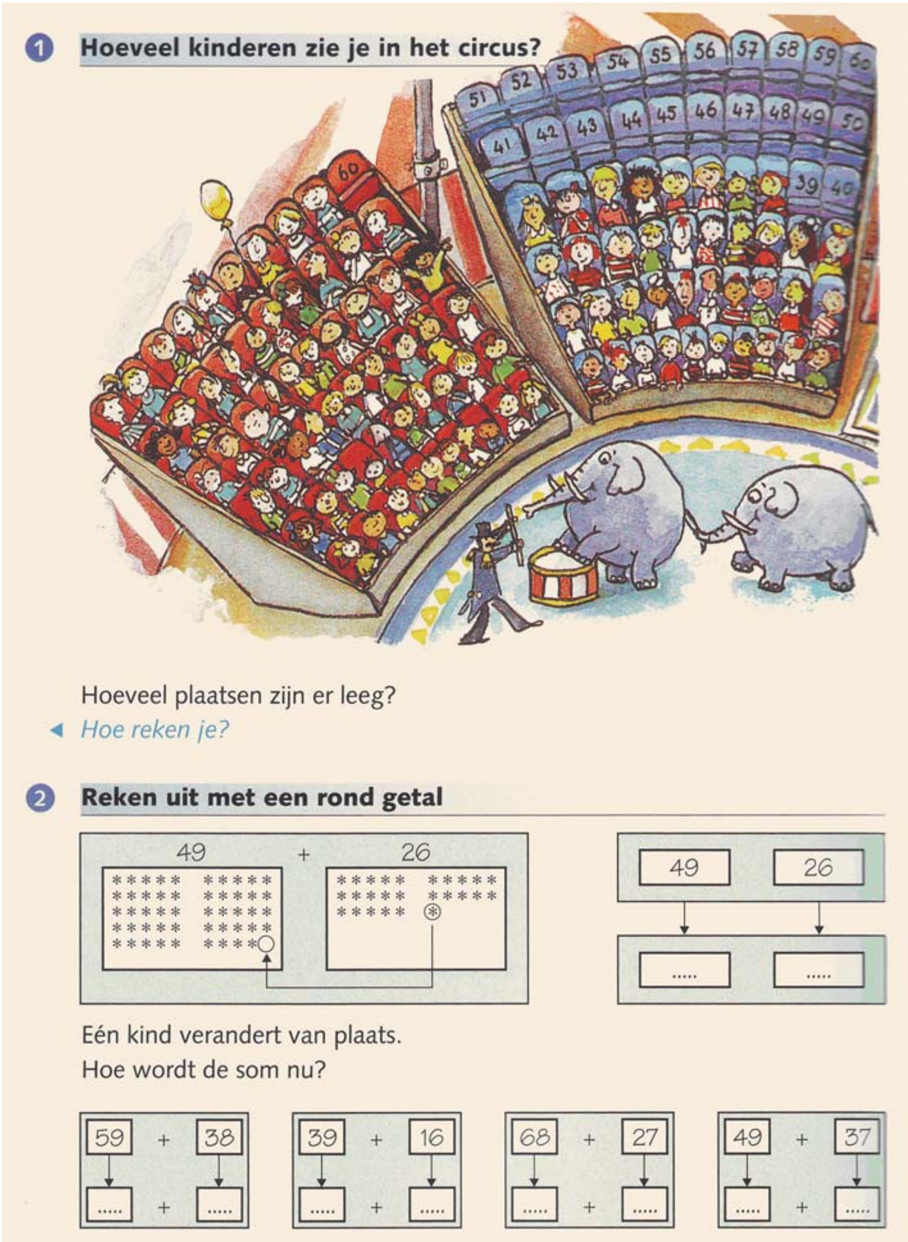
Het kind moet kunnen doorzien dat het verschil bij een aftrekking gelijk blijft als je bij beide getallen hetzelfde optelt. Als je het verschil berekent in de context van leeftijden is dat voor kinderen te begrijpen.
Bij het uitrekenen van het verschil in leeftijd kun je bij beide getallen hetzelfde (aantal jaren) toevoegen om eenvoudig te kunnen rekenen. Pa is 68 jaar en zijn zoon is 49 jaar. Hoeveel jaar is pa ouder dan zijn zoon? Dat is makkelijker te berekenen als je het verschil in leeftijd over een jaar uitrekent.

3 **Hoeveel verschillen de leeftijden?**
Bij hoeveel jaar later kun je met een rond getal rekenen?

A	B	hoeveel jaar later?	reken uit met een rond getal
68 jr	49 jr	1 jr	69 – 50 =
85 jr	58 jr	..... jr	.....
75 jr	48 jr	..... jr	.....
82 jr	67 jr	..... jr	.....
57 jr	38 jr	..... jr	.....

Uit: *Rekenrijk* 4b, p. 98

Voorbeeld van transformeren bij optellen
In het circus zijn twee tribunes te zien. Op de linkertribune zijn 59 van de 60 stoelen bezet en op de rechtertribune zijn 38 stoelen bezet. Hoeveel kinderen zie je in het circus? Door één persoon van de rechtertribune te verplaatsen naar de linkertribune ontstaat de nieuwe opgave: 60 + 37. Deze opgave is gemakkelijker uit te rekenen dan 59 + 37.



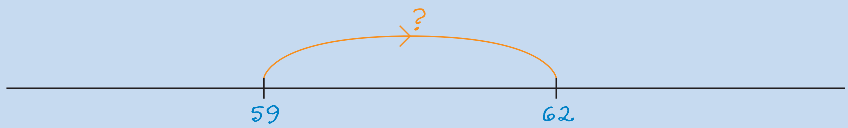
Uit: Rekenrijk 4b, p. 74

De tribunesom wordt in de tweede opgave in een schema geplaatst en door middel van de cirkel en de pijl wordt de verandering van plaats weergeven. De nieuwe opgave wordt zo zichtbaar gemaakt: 59 + 38 via 60 + 37 (rekenen met een rond getal). 59 + 38 is evenveel als 60 + 37.
Het kind moet kunnen inzien dat het resultaat van de optelling gelijk blijft,

als je bij het ene getal één toevoegt en bij het andere getal er één afhaalt. Het ligt voor de hand om deze aanpak te kiezen als één van de getallen van de optelling dicht bij een mooi rond getal ligt. Het ene getal vul je aan tot het ronde getal en van het andere getal haal je evenveel af als je bij eerste getal hebt toegevoegd.

Voorbeeld van het aanvullen bij aftrekken

$62 - 59 =$



Het aanvullen ligt hier voor de hand. Hoeveel moet ik er nog bij doen om op 62 te komen?

1 Handig rekenen.

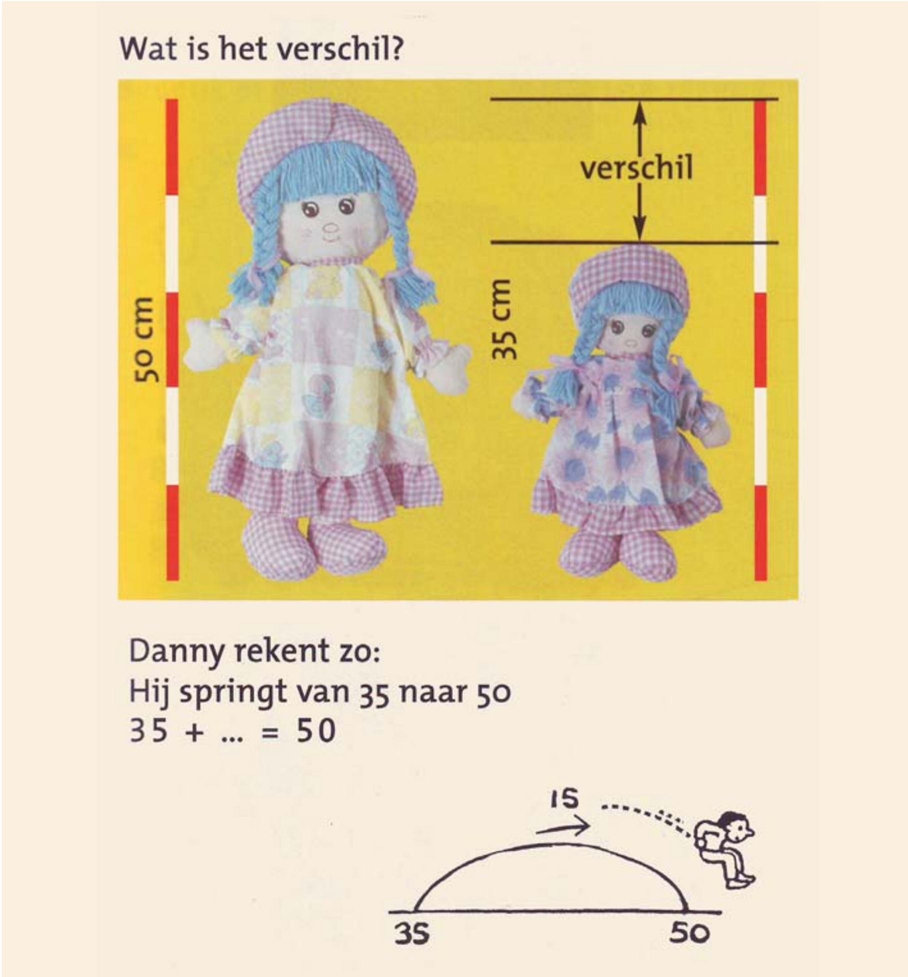
81 – 78 =	78 – 75 =
82 – 79 =	62 – 58 =
52 – 49 =	93 – 89 =
54 – 51 =	87 – 83 =
63 – 59 =	55 – 49 =

Uit: *WIG*, werkboek 5a p. 82

Bij het maken van de opgave 54 – 51 kan dezelfde aanpak gekozen worden als bij 81 – 78 door drie toe te voegen.
Het werken aan deze bijna-verdwijnsommen heeft voor kinderen alleen zin, als ze weten waar getallen liggen en als ze snel kunnen bewegen over de getallenlijn.
Kinderen die weten dat de getallen dicht bij elkaar liggen, maken vaak gebruik van deze aanpak.
Ook aftrekopgaven waarbij de getallen niet dicht bij elkaar liggen kunnen zo opgelost worden. Bijvoorbeeld: 91 – 24 = ... Je doet er 60 bij dan ben je bij 84 en dan nog 7. Dus je hebt er 67 bij gedaan.
Deze manier van werken zie je vaak terug in het werk van leerlingen die een voorkeur hebben voor optellen boven aftrekken.

Voorbeeld van de inverse relatie

$50 - 35 =$
$50 - 35 = 15$ want
$35 + 15 = 50$



Uit: Alles telt, 5a, p. 21

Het kind moet kunnen inzien dat je in plaats van de hoeveelheid er van het eind af te halen, ook de hoeveelheid van het begin kunt afhalen en dat je kunt bepalen wat het verschil is door te kijken naar wat er nog moet worden aangevuld.

In het rekenonderwijs maken de kinderen kennis met de verschillende manieren van rekenen en oefenen ze die aanpak. Maar uiteindelijk gaat het om de keuze voor de meest handige oplossingswijze voor een bepaalde opgave.
Dit betekent natuurlijk niet dat de kinderen een varia-aanpak niet al veel eerder kunnen gebruiken. Het betekent wel dat in het onderwijs in eerste instantie een duidelijke nadruk op het gebruik van rijgstrategieën ligt en op de vraag hoe je deze rijgstrategie steeds efficiënter en verkorter kunt gebruiken. Pas als de kinderen daar voldoende grip op hebben gekregen, wordt nadrukkelijk meer aandacht besteed aan de splitsaanpak. Hetzelfde geldt in een later stadium voor de varia-aanpak. Gebeurt dit niet in voldoende mate in deze volgorde, dan is er het gevaar dat zwakkere leerlingen het spoor bijster raken en verschillende soorten aanpakken door elkaar gaan halen.

Elk van deze grondvormen kan op verschillende niveaus van denken en handelen worden uitgevoerd. Op een lager niveau door gebruik te maken van modellen als de lege getallenlijn of geld, op een hoger niveau met ondersteuning via het noteren van tussenstappen in rekentaal of helemaal alleen mentaal. Met de introductie van een hogere vorm verdwijnen de lagere vormen echter niet; zij worden daarin opgenomen, zodat zich gaandeweg steeds meer hoofdrekenstrategieën ontwikkelen waaruit de kinderen afhankelijk van de opgave en de eigen voorkeur kunnen kiezen.

> Eind groep 5 kunnen de leerlingen alle optellingen en aftrekkingen tot honderd vlot en met inzicht uit het hoofd uitrekenen, zowel kaal als in toepassingssituaties. Desgewenst maken ze daarbij nog gebruik van tussennotaties. Eind groep 6 kunnen de leerlingen deze bewerkingen geheel uit het hoofd uitvoeren.
> (**TAL HG-BB**, **p. 43**)

Bij het optellen en aftrekken tot 1000 zijn dezelfde grondvormen voor het hoofdrekenen te onderscheiden.
Er is echter ook een verschil met het rekenen tot 100. Doordat de getallen groter worden en minder overzichtelijk zijn, ontstaat er bij leerlingen behoefte aan een gestandaardiseerde vorm van rekenen, zodat de getallen op een vaste manier benaderd kunnen worden. Daarom wordt er naast de splitsaanpak de kolomsgewijze rekenaanpak geïntroduceerd.

Voorbeeld van kolomswijs rekenen

	425
	368 –
400 – 300 =	100
20 – 60 =	40 tekort
5 – 8 =	3 tekort
100 – 40 – 3 =	57

Bij het optellen en aftrekken tot 1000 staat het hoofdrekenen centraal. Zijn de kinderen voldoende vaardig in het hoofdrekenen, dan kan de kolomsgewijze rekenaanpak worden aangeboden. In feite is de overstap van hoofdrekenen naar de kolomsgewijze rekenaanpak eenvoudig te maken, omdat het hoofdrekenen hierin besloten ligt.
Na de kolomsgewijze rekenaanpak kan het cijferend rekenen aan de orde komen.

Een voorbeeld van cijferend rekenen

$$\begin{array}{r} 4\overset{6}{\cancel{7}}5 \\ 368\ - \\ \hline 107 \end{array}$$

5 eraf 8 gaat niet, dus moet ik een lenen; 15 – 8 = 7. 6 eraf 6 is 0, 4 eraf 3 is 1.

Het antwoord is 107.
Het is ook mogelijk om eerst $75 - 68$ uit te rekenen; de uitkomst is dan zo gevonden.

> Eind groep 5 kunnen de leerlingen optellingen en aftrekkingen tot duizend rijgend oplossen, al dan niet ondersteund met de lege getallenlijn. Eind groep 6 zijn ze in staat optellingen en aftrekkingen tot duizend (en beperkt daarboven) op te lossen met rijg-, splits- en varia-aanpakken. Ook kunnen ze daarbij verstandig kiezen tussen een hoofdrekenaanpak of een kolomsgewijze/cijferaanpak.
> (**TAL HG-BB, p. 46**)

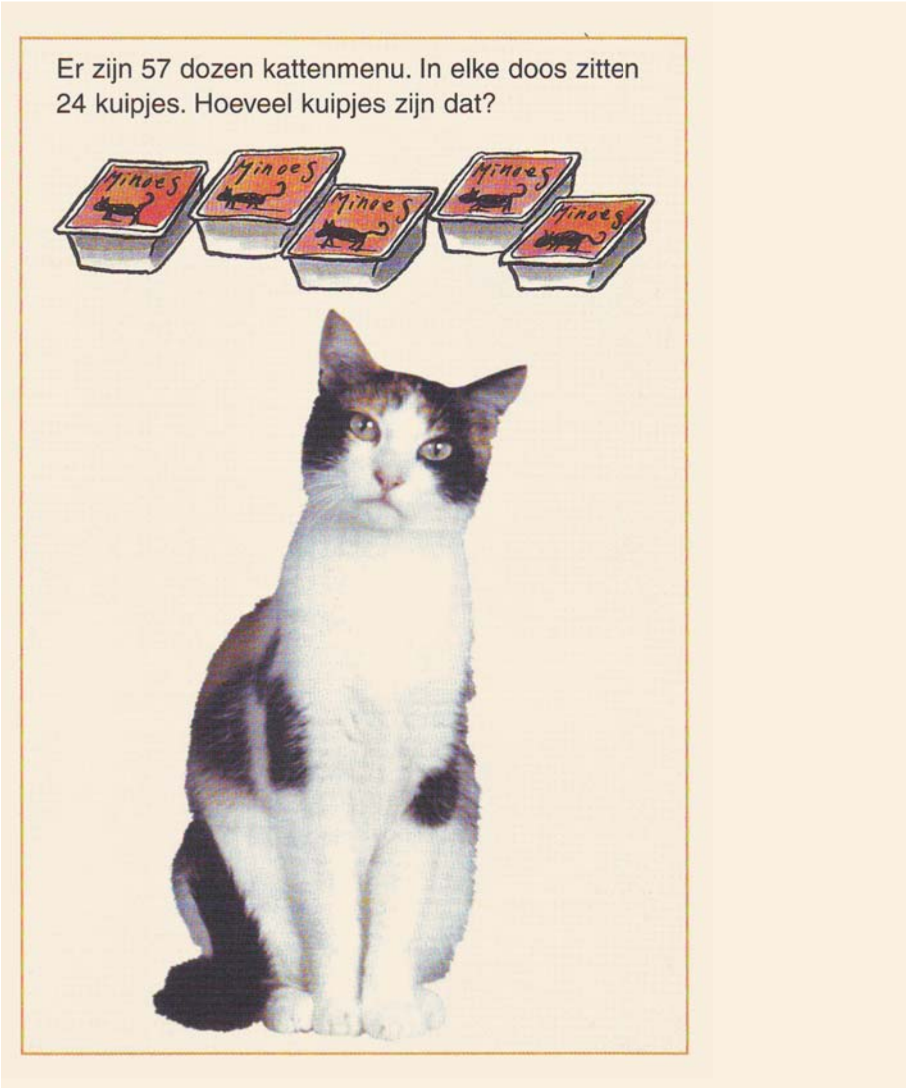
1.3.2 De drie grondvormen van hoofdrekenen bij het vermenigvuldigingen met grotere getallen

> In de loop van de tweede helft van groep 5 oriënteren de kinderen zich op handige aanpakken voor grotere vermenigvuldigingen als 12×6, 5×24, 7×80 en 6×48. Op dat moment zijn ze bij het optellen en aftrekken tot duizend al een eind gevorderd, zodat ze in ieder geval grondig vertrouwd zijn met de rijgaanpak binnen dit gebied, terwijl ook het splitsen al is verkend. Verder is in deze periode het automatiseringsproces rond de tafels van vermenigvuldiging al een eind gevorderd. De kennis die hierbij is ontwikkeld (feitenkennis, maar ook inzicht in belangrijke vermenigvuldigstrategieën gebaseerd op ‘verwisselen’ en ‘verdelen’) vormt samen met de kennis van het optellen en aftrekken tot duizend de basis voor de verkenning van grotere vermenigvuldigingen.
> (**TAL HG-BB, p. 46**)

Bij de leerlijn van het vermenigvuldigen met grotere getallen wordt gebruik gemaakt van de kennis en de vaardigheid die de kinderen hebben opgedaan bij het aanleren van de tafels van vermenigvuldiging tot tien. Namelijk:
- het inzicht in wat een vermenigvuldiging is;
- de geautomatiseerde kennis van de producten van de tafels van vermenigvuldiging (te gebruiken om deelberekeningen te maken bij de grote tafels van vermenigvuldiging);
- de ontwikkelde vermenigvuldigstrategieën (bijvoorbeeld $9 \times$ iets uitrekenen door eerst $10 \times$ uit te rekenen en daarvan $1 \times$ het aantal dat te veel is gedaan er af te halen).

> Eind groep 5 hebben de leerlingen alle vermenigvuldigingen uit de tafels van 2 tot en met 10 geautomatiseerd. Medio groep 6 zijn al deze opgaven gememoriseerd.
> (**TAL HG-BB, p. 44**)

Binnen het domein van de grote vermenigvuldigingen zijn – net als bij het optellen en aftrekken tot 100/1000 – de drie grondvormen rijgaanpak, splitsaanpak en varia-aanpak te herkennen.
Bij grote vermenigvuldigingen gaat het om opgaven zoals: 8×24, 6×49, 4×98, 6×150 en 57×24.



Uit: *Pluspunt*, lesboek groep 7, p. 3

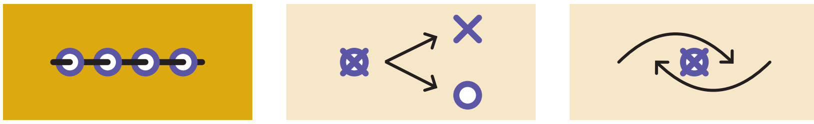
De kennis van de tafels van vermenigvuldiging tot en met 10

↓

4 × 58

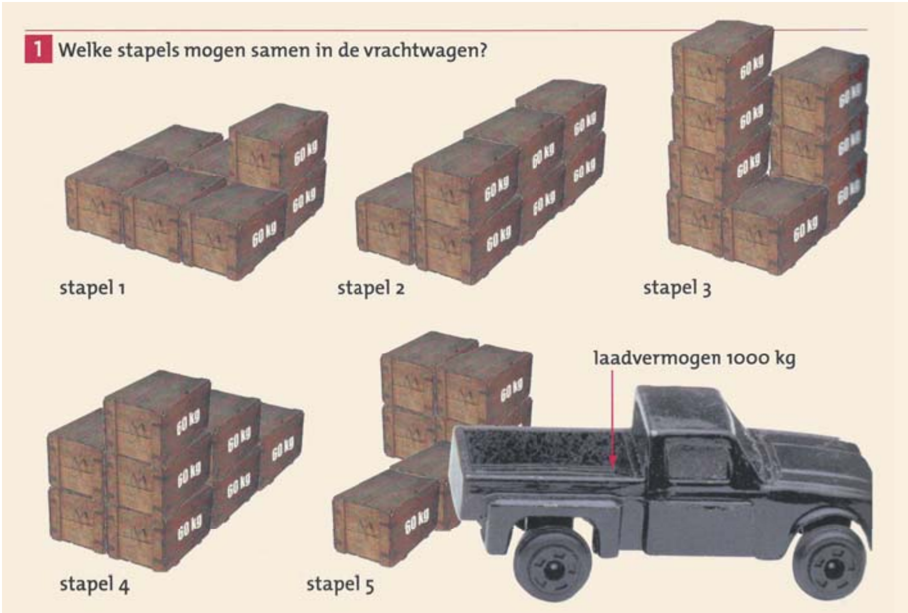
↓

Rijgaanpak	Splitsaanpak	Varia-aanpak
58 + 58 = 116 116 + 116 = 232	4 × 50 = 200 en 4 × 8 = 32 200 + 32 = 232	4 × 60 – 4 × 2 = 240 – 8 = 232 of 2 × 116 = 232



Rijgaanpak

Rijgaanpak
Net als bij het optellen kan ook de vermenigvuldiging in de vorm van rijgen worden beschreven.



Uit: *Alles telt*, 5b, p. 54

Door telkens 60 op te tellen kunnen de leerlingen uitrekenen hoe zwaar de vracht van een stapel is. Elke kist weegt 60 kilo. Bij stapel 4 kunnen ze uitrekenen hoe zwaar elf kisten zijn. Ze kunnen eerst het gewicht van tien kisten bepalen en nog 60 kilo toevoegen om het totale gewicht te bepalen.

Stapel 1

$7 \times 60 =$

$60 + 60 + 60 + 60 + 60 + 60 + 60 = 420$

$7 \times 60 =$

$60 + 60 + 60 = 180$

$60 + 60 + 60 = 180$

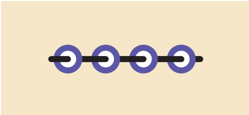
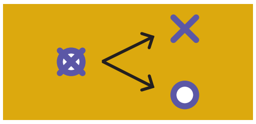
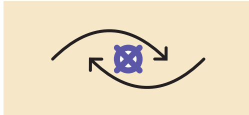
$180 + 180 + 60 = 420$

Ook voor grotere vermenigvuldigingen zoals bij stapel 4: 11×60 kan de rijgaanpak gehanteerd worden.

$11 \times 60 = 60 + 60 + \ldots\ \ldots + 60 =$

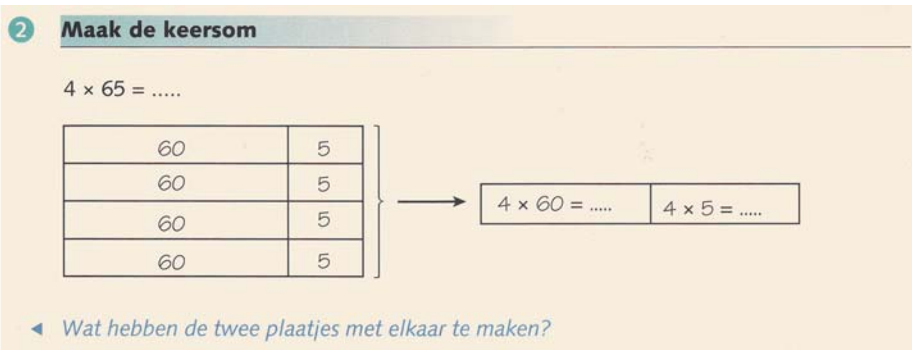
$10 \times 60 + 1 \times 60 = 600 + 60 = 660$

Ook het rekenen naar analogie komt aan de orde. De leerlingen denken aan tafelsommen die ze uit het hoofd kennen. Bij $7 \times 60 = \ldots$ kunnen ze denken aan $7 \times 6 = 42$. Je kunt de relatie leggen tussen deze twee opgaven door bij zeven keer zes briefjes van tien euro te vragen hoeveel briefjes van tien euro je hebt. Daarna kan gevraagd worden hoeveel euro 42 briefjes van tien euro is.



Splitsaanpak


Splitsaanpak
De splitsaanpak voor het vermenigvuldigen is van een hoger niveau van denken en handelen dan de rijgaanpak. Het vermenigvuldigtal wordt niet meer als geheel opgevat, maar in delen opgesplitst, die los van elkaar worden berekend. Voor een aantal leerlingen gaat deze aanpak te snel. Meestal hangt dat samen met het feit dat ze nog onvoldoende vaardig zijn in het hanteren van de nulregel. Ze hebben nog niet ontdekt dat de opgave 4×6 gebruikt kan worden voor 4×60 en dat het antwoord een factor tien groter wordt.

$$\begin{array}{lr}
 & 65 \\
 & 4 \;\times \\
\hline
4 \times 60 = & 240 \\
4 \times 5 = & 20 \;+ \\
\hline
240 + 20 = & 260
\end{array}$$


2 Maak de keersom

4 × 65 = ...

60	5
60	5
60	5
60	5

4 × 60 = ... | 4 × 5 = ...

◄ *Wat hebben de twee plaatjes met elkaar te maken?*

Uit: *Rekenrijk*, 5a, p. 102

Eerst leren de kinderen de nulregel toepassen en een ééncijferig getal vermenigvuldigen met een meercijferig getal. Daarna zijn ze toe aan het vermenigvuldigingen van meercijferige getallen keer meercijferige getallen. Bijvoorbeeld $34 \times 85 = \ldots$
Het getal 34 wordt gesplitst in 30 en 4. 85 blijft een heel getal om mee te rekenen.

85	
34	×
340	
2550	
2890	

In *Boeiend Rekenen* is het vermenigvuldigen van een meercijferig getal keer een meercijferig getal uitgewerkt. Op grond van het optellen krijgt de vermenigvuldiging op verkorte wijze gestalte. De kolomsgewijze aanpak werd toen ook al gebruikt voor het vermenigvuldigen en het delen.

We nemen nu nog eens de vermenigvuldiging onder handen. We laten er nog eens een maken door er een lange optelling van te maken. De kinderen leren de vermenigvuldiging dan ook zien als een verkorte optelling.

37	37	37
37	x 12	x 12
37	370	74
37	74	370
37	444	444
37		
37		
37		
37		
37		
37		
+ 37		
360		
+ 84		
444		

Laat er op alle manieren nog een paar oefenen. Gewen de kinderen er aan om steeds de uitkomst te controleren. Laat dit dan doen op een andere manier dan ze gebruikt hebben. Bij de vermenigvuldiging ook door de deling te maken.

45 x 17	(765)
54 x 13	(702)
27 x 22	(594)
31 x 13	(403)
23 x 11	(253)

132 x 23 =	132
	x 23
	396
	2640
	3036

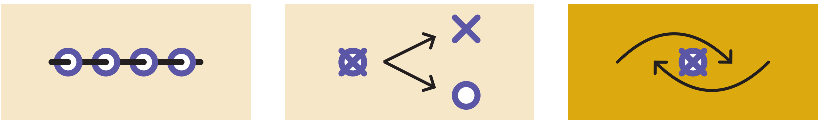
Eerst de 0, want we vermenigvuldigen met een tiental! Nu gaan we controleren. Waarom doen we dat op een andere manier? Dus de som was goed. En als er nu eens wat over was gebleven? En als het nu eens 133x was gegaan? Deze vorm van delen is voor de zwakke leerlingen een goede en begrijpelijke manier van delen. Ook de goede kunnen ermee volstaan. Wil men op de staartdeling overgaan, dan is dit toch een goede voorbereiding en een controlemiddel.

3036 : 23	
-2300	100x
736	
- 460	20x
276	
- 230	10x
46	
- 46	2x
0	over. 132x

04

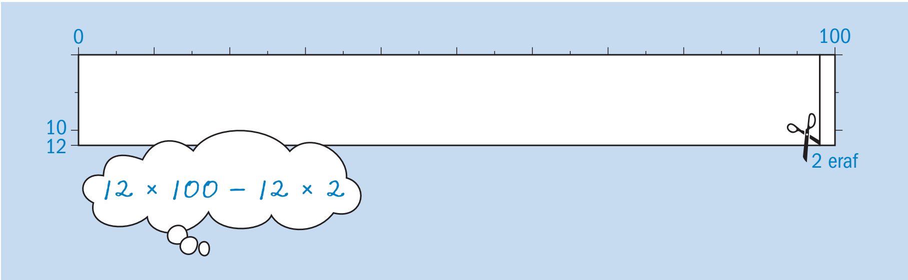
Uit: *Onderwijsboek* deel 9. W.E. Wanders en S. Bohncke, 1959. p. 04. Malmberg, 's-Hertogenbosch

Bij het splitsen van 34 in 30 en 4 en van 85 in 80 en 5 voeren kinderen vaak slechts twee deelhandelingen uit, bijvoorbeeld door 30 × 80 en 4 × 5 uit te rekenen. Ze vergeten dan 30 × 5 en 4 × 80 te berekenen om tot het uiteindelijke antwoord te komen, omdat ze het juiste inzicht nog missen. Door te rekenen met slechts één getal dat gesplitst is, is de berekening goed uit te voeren. Het ligt voor de hand om het cijferend rekenen vanaf dat moment in te zetten.



Varia-aanpak

Varia-aanpak
Voor het maken van de grote vermenigvuldiging 12 × 98 kan ook een varia-aanpak worden gebruikt.



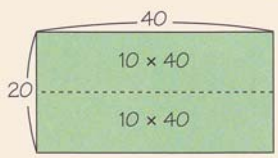
Voorbeeld van de varia-aanpak compenseren

12 × 98 =
12 × 100 = 1200, maar nu heb ik 12 × 2 te veel gedaan;
die moet ik er nog afhalen
1200 − 24 = 1176

Voorbeeld van het vermenigvuldigen met ronde getallen en de strategie één keer meer en één keer minder

7 **Reken uit**
Bedenk eerst de vraag.

één rij minder dan bij 20 × 40
19 × 40 = ...



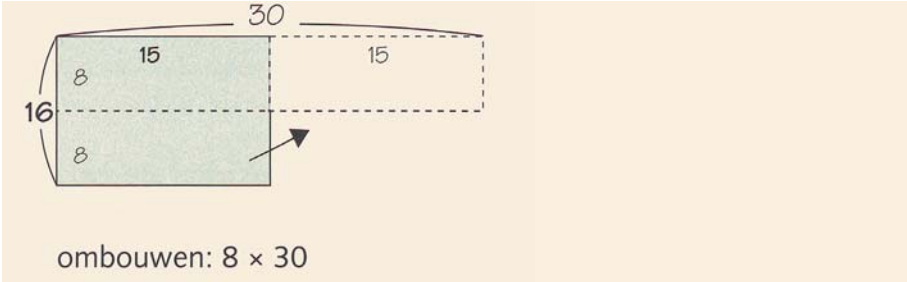
één rij meer dan bij 20 × 40
21 × 40 = ...

30 × 30 =	40 × 80 =	60 × 40 =	70 × 20 =
29 × 30 =	39 × 80 =	58 × 40 =	67 × 20 =
31 × 30 =	41 × 80 =	62 × 40 =	74 × 20 =

Uit: *Rekenrijk*, deel 5b, p. 55.

Voorbeeld van de varia-aanpak transformeren: halveren-verdubbelen

16 × 15 =
8 × 30 = 240



Uit: *Rekenrijk*, 5b, p. 102

3 Reken handig.

8 × 25 = 4 × ..... =
6 × 15 = 3 × ..... =
8 × 35 = 4 × ..... =
14 × 45 = 7 × ..... =
20 × 40 = 10 × ..... =

6 × 55 = ... × 110 =
12 × 45 = ... × 90 =
18 × 35 = ... × 70 =
12 × 125 = ... × 250 =
20 × 150 = ... × 300 =

Uit: *Pluspunt*, lesboek groep 6, p. 89

Net zoals bij het optellen en aftrekken tot 1000 komt ook hier de kolomsgewijze aanpak van het rekenen voort uit de splitsaanpak. Vanuit het hoofdrekenen ontstaat de behoefte aan een standaardmatige aanpak: de kolomsgewijze rekenaanpak.

Voorbeeld van kolomsgewijs vermenigvuldigen

	145	
	7	×
7 × 100 =	700	
7 × 40 =	280	
7 × 5 =	35	+
700 + 280 + 35 =	1.015	

Eind groep 6 zijn de leerlingen in staat grotere vermenigvuldigingen van een ééncijferig met een meercijferig getal (6 × 48, 7 × 80, 4 × 251, 25 × 7) kaal en in toepassingssituaties op te lossen met behulp van de splitsaanpak en de varia-aanpak die in samenhang daarmee aan de orde zijn gesteld. Al naar gelang de opgave maken ze daarbij gebruik van passende tussennotaties.
(TAL HG-BB, p. 49)

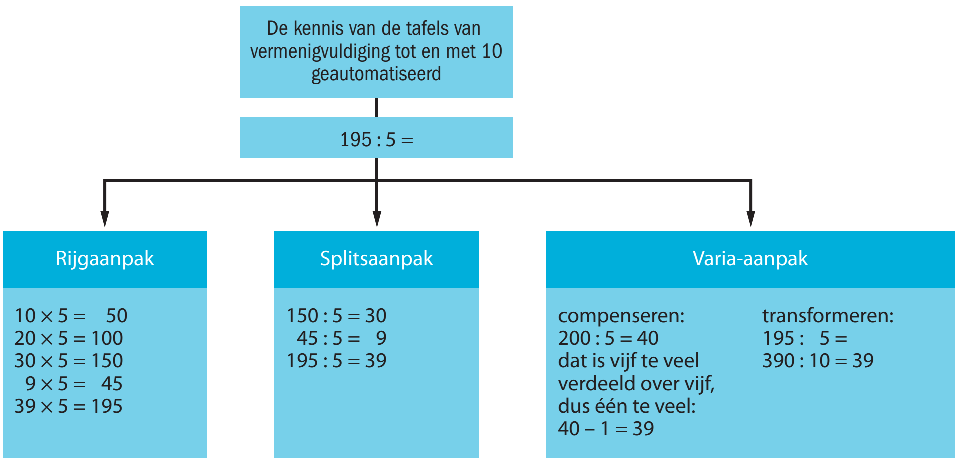
1.3.3 De drie grondvormen van hoofdrekenen bij het delen

> Als het vermenigvuldigen met grotere getallen in de loop van groep 5 de nodige aandacht heeft gekregen en de leerlingen vertrouwd zijn geraakt met de mogelijkheid van het splitsen daarbij, worden ook grotere delingen verkend. De kinderen zitten dan in de eerste helft van groep 6.
> (**TAL HG-BB, p. 51**)

Het aan de orde stellen van de hoofdbewerking delen is zinvol als de kinderen voldoende geautomatiseerde kennis hebben van de tafels van vermenigvuldiging. Deze eerder opgedane kennis kan ingezet worden om delingen op te lossen, bijvoorbeeld $7 \times 8 = 56$, dus $56 : 8 = 7$ en $56 : 7 = 8$. Voor het oplossen van een deelvraagstuk kunnen kinderen gebruikmaken van de vermenigvuldigingen. Nog voordat ze kennismaken met het deelteken, oriënteren ze zich via contextsituaties op deelsituaties.

Voorbeeld van introductie van het delen

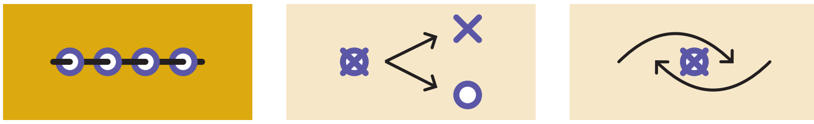
Uit *Rekenrijk* 5a, p. 10.



Voorbeeld van een contextopgave waarbij het delen wordt uitgelokt

Farida heeft dit jaar 133 dagen schooldagen gehad. Hoeveel schoolweken zijn dat?

De aanpak van deze opgave kan op verschillende manieren van denken en handelen tot stand komen.

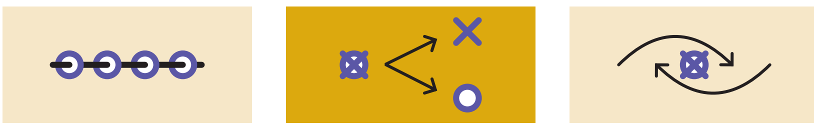


Rijgaanpak

Rijgaanpak

$84 : 7 =$	$84 : 7 =$
$84 - 7 = 77$ (1 week)	$10 \times 7 = 70$
$77 - 7 = 70$ (2 weken)	$11 \times 7 = 77$
$70 - 7 = 63$ (3 weken)	$12 \times 7 = 84$
...	...
$7 - 7 = 0$ (19 weken)	$19 \times 7 = 133$

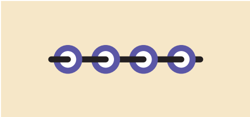
In de eerste situatie halen kinderen steeds zeven van de hoeveelheid af, ze trekken herhaald af.
In de tweede situatie wordt gebruikgemaakt van de tafel van vermenigvuldiging tot de uiteindelijke hoeveelheid bereikt is. De kinderen maken gebruik van het 'opvermenigvuldigen'. Dit is een verkorte vorm van het rijgen en tevens de basisstrategie.

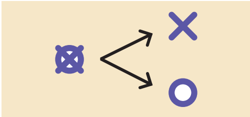


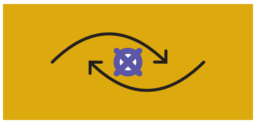
Splitsaanpak

Splitsaanpak
Er zijn ook kinderen die de hoeveelheid opsplitsen in delen, zodat er aparte eenvoudige delingen kunnen worden uitgevoerd. Ze hanteren de splitsaanpak. Deze aanpak is sterk verwant aan het opvermenigvuldigen. Kinderen maken dan ook afwisselend van beide aanpakken gebruik; het verschil tussen beide aanpakken is niet groot. De kinderen gebruiken hun kennis van de tafels van vermenigvuldiging en maken gebruik van de steunpunten uit de tafelopgaven.

$133 : 7 =$	
$70 : 7 = 10$	(want $7 \times 10 = 70$)
$63 : 7 = 9$	(want $7 \times 9 = 63$)







Varia-aanpak

Varia-aanpak

Voorbeeld van de varia-aanpak compenseren

$133 : 7 =$
$140 : 7 = 20$
$7 : 7 = 1$
$20 - 1 = 19$

Het plaatsen van de opgave 133 : 7 in een context kan kinderen inzicht geven in de varia-aanpak compenseren. Je hebt 133 euro die je met zeven personen verdeelt. Voor het gemak neem je even 140 euro, dat kun je eenvoudig delen. Dan krijgt ieder 20 euro. Eigenlijk hebben we 7 euro te veel gedeeld over zeven personen. Dus heeft ieder één euro te veel gekregen. Die haal je van 20 af. Ieder krijgt uiteindelijk 19 euro.
Voor deze aanpak is inzicht nodig. Regelmatig komt het voor dat kinderen zeggen dat ieder 13 euro krijgt, omdat er aanvankelijk 7 euro te veel was die er later moest worden afgehaald. Ze verliezen in hun redenering de context uit oog en vergeten dat die 7 euro door zeven moest worden gedeeld.

Voorbeeld van compenseren; rekenen met een rond getal

Reken uit

Schrijf op hoe je rekent.

splitsen

125
100 25

125 : 5 = ...
112 : 4 =
115 : 5 =

met een rond getal

240 : 6

234 : 6 = ...
198 : 2 =
236 : 4 =

147 : 3 =
150 : 3 =
144 : 3 =

354 : 6 =
360 : 6 =
348 : 6 =

Voor hoeveel heeft de winkelier verkocht?

Uit *Rekenrijk* 6a, p. 59

Een andere varia-aanpak is transformeren. Bij de opgave 133 : 7 ligt die aanpak niet voor de hand, maar bij 128 : 4 = is het wel mogelijk om de opgave te transformeren.

$128 : 4 =$ kun je herschrijven in
$64 : 2 =$ dit levert immers het zelfde antwoord op.
Van $64 : 2$ kan ik ook
$32 : 1 = 32$ maken, dus 32 is het antwoord.

De varia-aanpak transformeren kun je in een context plaatsen om het halveren te begrijpen. Bijvoorbeeld: vier kinderen verdelen 128 euro. Je kunt ook zeggen: de helft van de kinderen krijgt de helft van het geld, dus twee kinderen verdelen 64 euro. Een kind krijgt de helft van 64 euro, dat is 32 euro.
Bij deze deling worden beide getallen gehalveerd.

Bij de opgave 175 : 5 is het ook mogelijk om de opgave te transformeren. Beide getallen worden nu niet gedeeld, maar verdubbeld. Als je 175 euro deelt met vijf kinderen, krijg je evenveel als wanneer je 350 euro deelt met tien kinderen.

175 : 5 =	kun je herschrijven in
350 : 10 =	dit levert hetzelfde antwoord op.
350 : 10 = 35	door het gebruik van de schrapregel van de nullen is het antwoord snel bepaald.

Bij het delen kun je bij de varia-aanpak transformeren kiezen voor verdubbelen of halveren. Dit in tegenstelling tot de varia-aanpak transformeren bij het vermenigvuldigen, waarbij je verdubbelt én halveert.
De varia-aanpakken compenseren en transformeren vragen veel inzicht in de manier van denken en handelen van de kinderen.

Het onderscheid in de drie grondvormen van hoofdrekenen voor delen is hier niet zo duidelijk te maken als bij de voorgaande leerlijnen voor optellen, aftrekken en vermenigvuldigen.
De volgorde van aanbieding is hier minder voorschrijvend, omdat niet alle fasen helemaal doorlopen hoeven te worden. Opvermenigvuldigen is een aanpak die eenvoudig is te hanteren en tot een goede oplossing leidt. Dit is dan ook de basisstrategie. De splitsaanpak is nauwelijks afwijkend van deze aanpak. De varia-aanpak is geschikt voor kinderen die zicht hebben op de wijze waarop een oplossing ook tot stand kan komen en die inzien dat er ook andere mogelijkheden zijn om tot een oplossing te komen. De varia-aanpak moet wel in de klas aan de orde komen, maar hoeft niet voor alle kinderen het accent te krijgen. Wel geldt voor alle aanpakken dat de uitkomsten van de deling gecontroleerd worden door het maken van de bijbehorende vermenigvuldiging.

De volgorde van aanbieding van deelsituaties wordt eerder getypeerd door de overgang van contextsituaties naar gebruik van het deelteken. Het is van belang dat de kinderen ervaren dat de kale deelsom een verkorte symbolische weergave is van een contextopgave. Tijdens de overstap van de deelcontext naar een kale som is het voor kinderen het duidelijkst als telkens de relatie met de context gelegd en benoemd wordt. Uiteindelijk maken ze zelfstandig kale sommen, gekoppeld aan inzicht en aan de vraag: ‘hoeveel keer gaat iets in de totale hoeveelheid?’. Daarna komt zowel in een contextsituatie als in een kale som het begrip ‘rest’ aan de orde en krijgt het voor kinderen betekenis.
De betekenis van de ‘rest’ in relatie tot het antwoord op een deelvraagstuk is afhankelijk van de context. Bij de opgave: ‘er gaan vier kinderen in een auto. Hoeveel auto’s zijn er nodig voor 30 kinderen die op schoolreis

gaan?' krijgt 'rest' een andere betekenis, omdat er eigenlijk geen rest kan zijn. Alle kinderen willen immers mee op schoolreis en voor twee kinderen moet er ook een auto beschikbaar zijn. Het antwoord is dus niet: 'zeven auto's en twee kinderen zonder auto', maar 'acht auto's'. Bij de opgave: 'ik heb 30 koeken. Hoeveel zakjes kun je vullen met elk vier koeken?' ligt het anders. Je kunt zeven zakjes vullen en hebt dan twee koeken over. Maar als het om geld gaat in een situatie waarbij vier kinderen 30 euro verdelen, krijgt elk kind niet 7 of 8 euro, maar 7 euro en 50 cent.

1

Net als bij de andere bewerkingen wordt het hoofdrekenen omgezet naar een standaard manier van werken. Dat is bij het delen de aanpak van het herhaald aftrekken. Hierbij wordt telkens een deel van de hoeveelheid afgetrokken. De hoeveelheid die herhaald wordt afgetrokken is afhankelijk van de mate van verkorting die kinderen hanteren.

$675 : 15 =$
$$\begin{array}{rr}
675 & \\
150 & 10\times \\ \cline{1-1}
525 & \\
150 & 10\times \\ \cline{1-1}
375 & \\
150 & 10\times \\ \cline{1-1}
225 & \\
150 & 10\times \\ \cline{1-1}
75 & \\
30 & 2\times \\ \cline{1-1}
45 & \\
30 & 2\times \\ \cline{1-1}
15 & \\
15 & 1\times \\ \hline
0 & 45\times
\end{array}$$

$675 : 15 =$
$$\begin{array}{rr}
675 & \\
300 & 20\times \\ \cline{1-1}
375 & \\
300 & 20\times \\ \cline{1-1}
75 & \\
45 & 3\times \\ \cline{1-1}
30 & \\
30 & 2\times \\ \hline
0 & 45\times
\end{array}$$

$675 : 15 =$
$$\begin{array}{rr}
675 & \\
600 & 40\times \\ \cline{1-1}
75 & \\
75 & 5\times \\ \hline
0 & 45\times
\end{array}$$

De mate van verkorting die de kinderen hanteren mogen ze aanvankelijk zelf bepalen, maar na enige tijd worden ze gestimuleerd om grotere hoeveelheden te gebruiken bij het aftrekken. Om kinderen te ondersteunen bij het maken van een steeds kortere deling, kunnen ze eerst een tabel maken met verschillende vermenigvuldigingen van 15. Deze hulptabel kunnen ze dan gebruiken bij de uitvoering van de deling. In het onderwijs wordt vaak geadviseerd om niet alle antwoorden op de tafel van 15 te noteren. Andere tafels kunnen hier immers ook uit afgeleid worden en de overzichtelijkheid is van belang voor de bruikbaarheid. Een hulptabel kan er zo uitzien:

	15
10 ×	150
5 ×	75
2 ×	30
4 ×	60
8 ×	120

Met deze hulptabel kunnen snel alle antwoorden van de verschillende vermenigvuldigingen afgelezen worden. 40 × 15 is snel te bepalen door 150 + 150 + 150 + 150 te berekenen. Je kunt ook de nulregel toepassen bij 4 × 15 = 60 door dit om te zetten naar 40 × 15 = 600.

Een verdere verkorting van deze kolomsgewijze aanpak van de deling kan bereikt worden door een overstap te maken naar de klassieke staartdeling. Hierbij gebeurt het rekenen niet met hoeveelheden, maar met cijfers die je aangehaalt. Ook noteer je nullen, als je niet met het cijfer kunt rekenen.

```
15 / 675 \ 45
     60
    ----
      75
      75
     ----
       0
```

De klassieke staartdeling is overzichtelijk, maar blijkt in de onderwijspraktijk niet zo eenvoudig te hanteren. Kinderen begrijpen de werkwijze niet goed en er ontstaan vele fouten. In de huidige rekenwiskundemethoden worden staartdelingen niet altijd meer aan de orde gesteld.
Het is ook de vraag in welke situaties in de realiteit kinderen geconfronteerd worden met dergelijke deelopgaven, en of de kolomsgewijze rekenaanpak dan niet kan volstaan. Bovendien kunnen delingen met grote getallen ook met de rekenmachine opgelost worden en blijft het belangrijk om al hoofdrekenend te kunnen bepalen of het antwoord op de rekenmachine juist zal zijn.

> Eind groep 6 kunnen de leerlingen grotere delingen (60 : 4, 75 : 3, 250 : 5, 600 : 15, ...) zowel kaal als in toepassingssituaties vlot en handig uitrekenen. Op-vermenigvuldigen fungeert daarbij als basisstrategie. Medio groep 7 zijn de kinderen ook vertrouwd met de mogelijkheid om bij dergelijke opgaven de splitsstrategie in te zetten, alsmede enkele varia-aanpakken als compenseren en herhaald halveren. De leerlingen kunnen de rest al naar gelang de context correct interpreteren.
> **(TAL HG-BB, p. 53)**

1.3.4 Handig rekenen met nullen

De nulregel kan gebruikt worden bij het vermenigvuldigen en bij het delen.
1200 × 60 =
De drie nullen kunnen even worden weggehaald en 12 × 6 = 72 wordt uitgerekend. De drie nullen rijg je aan 72 en je krijgt 72000 als antwoord. Gaat dit te snel, dan kunnen de kinderen beter stap voor stap de nullen eraan rijgen:

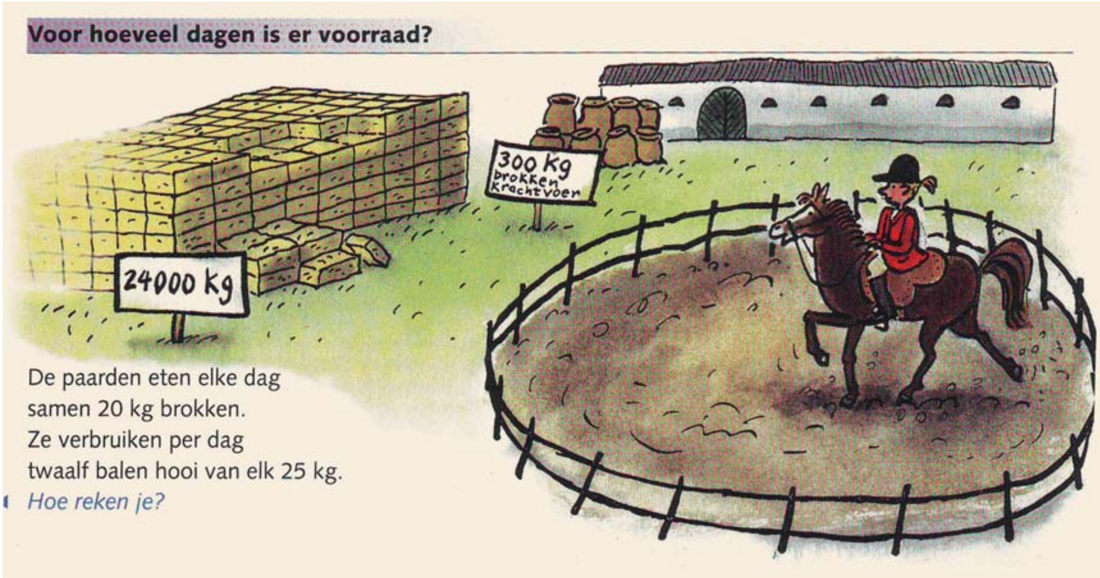
1200 × 60 =
12 × 6 = 72
12 × 60 = 720
120 × 60 = 7200
1200 × 60 = 72000

Er is echter een belangrijk verschil tussen het rekenen met nullen bij vermenigvuldigen of bij delen. Bij het vermenigvuldigen worden de nullen even weggehaald en later weer teruggeplaatst. Bij het delen worden de nullen geschrapt en later niet meer gebruikt. Het gaat bij het delen niet om de truc van het wegstrepen van nullen, maar om een goed begrepen rekeneigenschap die met inzicht toegepast wordt.
Door aanvankelijk gebruik te maken van contextsituaties kan de nulregel betekenis krijgen. Bijvoorbeeld: ‘Ik heb 350 euro. Hoeveel briefjes van tien euro zijn dat?’
In feite kan hierbij aanvankelijk herhaald 10 euro worden afgehaald om uiteindelijk het antwoord te kunnen bepalen. Door het antwoord te bespreken met de kinderen kunnen zij tot de conclusie komen dat dit ook op een kortere manier kan, namelijk door bij het delen door tien een nul weg te strepen. Tot slot controleren ze het antwoord met behulp van een vermenigvuldiging. Bij eenvoudige delingen zoals 600 : 5 en dergelijke is de nulregel goed te begrijpen, maar bij het rekenen met grotere getallen is het veel lastiger. Het schrappen van een zelfde aantal nullen bij grotere delingen vraagt om inzicht in de rekenregel.

2.000.000 : 40.000 = *is dit hetzelfde als*
2.000 : 40 = *in beide situatie is eerst door 1000 gedeeld*
200 : 4 = 50 *in beide situaties is door 10 gedeeld.*

Een stapsgewijze benadering is ook mogelijk:
2.000.000 : 40. 000 =
20 : 4 = 5
200 : 4 = 50
2000 : 4 = 500
20.000 : 4 = 5000
200.000 : 4 = 50.000
2.000.000 : 4 = 500.000
2.000.000 : 40 = 50.000
2.000.000 : 400 = 5000
2.000.000 : 4000 = 500
2.000.000 : 40.000 = 50

Een voorbeeld van het rekenen met nullen in een context is de volgende opgave. Er wordt gevraagd om uit te rekenen voor hoeveel dagen er hooi is voor de paarden.



Uit: *Rekenrijk*, deel 6b, p 58

Voorbeeld van het rekenen met nullen waarbij de relatie gelegd wordt met het vermenigvuldigen en het uitrekenen met minder nullen.

1 Weet je nog?

▸ 4 × 80 = 320

32000 : 80 = ...   *32 000 : 80 = 400*

Reken uit:

28 000 : 70 =	7 000 : 35 =	36 000 : 40 =	90 000 : 45 =
280 000 : 70 =	70 000 : 35 =	42 000 : 60 =	150 000 : 25 =
2 800 000 : 70 =	700 000 : 35 =	54 000 : 90 =	110 000 : 55 =

Uit: *Rekenrijk,* deel 6b, p 60

Gerichte oefeningen met het schrappen van de nul zijn noodzakelijk, zodat kinderen ervaringen opdoen met deze rekenregel en zodat ze grip krijgen op de schrapregel.
Het voordeel van een met inzicht toegepaste schrapregel is een tijdsbesparing op het rekenwerk. Doordat niet herhaald hoeft te worden afgetrokken, zijn er minder bewerkingen nodig. Bovendien is er minder kans op het maken van rekenfouten.

> Eind groep 7 kunnen de leerlingen vermenigvuldigingen en delingen met ronde getallen (50 × 20, 60 × 250, 600 : 4, 1200 : 80, en dergelijke) zowel kaal als in toepassingssituaties handig en flexibel uitrekenen. Ze maken daarbij onder meer gebruik van de nulregel die in het voorafgaande uitgebreid aan de orde is gesteld.
> **(TAL HG-BB, p. 56)**

> Eind groep 8 kunnen de leerlingen vlot en flexibel hoofdrekenen met gepaste getallencombinaties tot duizend en met ronde getallen daarboven, zowel kaal als in toepassingen met betrekking tot geld, tijd, gewichten, afstanden, en dergelijke. Als een extra mogelijkheid om dergelijke opgaven op te lossen, hebben ze ook kennis gemaakt met strategieën als transformeren, halveren-verdubbelen en het vergroten of verkleinen van beide termen van een deling met dezelfde factor.
> (TAL HG-BB, p. 60)

Opdracht 1.1 Rekenen met nullen in de rekenmethode
Zoek uit hoe het rekenen met nullen voor vermenigvuldigen en voor delen uitgewerkt is in de rekenmethode van je stageschool. Maak een overzicht van de verschillende opeenvolgende opgaven. Schrijf een reflectie op de wijze waarop dit wordt aangeboden. Geef duidelijk aan welke verbeterpunten je voorstelt.
Geef een groepje leerlingen een les waarin je je nieuwe aanpak van het rekenen met nullen uitprobeert. Beschrijf de uitkomst hiervan.
Bespreek met je medestudenten je bevindingen en formuleer een eindconclusie.

Opdracht 1.2 Hoofdrekenen tot 1000
Geef enkele hoofdrekenvragen met betrekking tot vermenigvuldigingen en het rekenen tot 1000 aan leerlingen van groep 6/7.
Je kunt zelf sommen maken of gebruikmaken van onderstaande opgaven.

137 + 98 =	315 – 249 =	10 × 38 =	195 : 5 =
252 + 252 =	621 – 370 =	50 × 12 =	630 : 15 =
680 + 270 =	360 – 198 =	60 × 15 =	450 : 45 =
235 + 235 + 235 =	268 – 59 =	8 × 25 =	450 : 9 =

- Vraag de kinderen om hun oplossing te verwoorden en/of te noteren op een kladpapier, zodat je de uitwerkingen (met juiste en onjuiste oplossingen) kunt plaatsen onder de verschillende grondvormen van hoofdrekenen.
- Welke niveaus van denken en handelen hebben de leerlingen gebruikt en wat valt je op aan de juiste en onjuiste oplossingen in relatie tot de gebruikte grondvorm?
- Bij welke opgaven heeft de leerling gebruik gemaakt van tussennotaties om deelhandelingen te ondersteunen?
- Wat is je mening als leerkracht over het gebruik van tussennotaties?
- In welke mate maken de leerlingen gebruik van de rijgaanpak, de splitsaanpak en de varia-aanpak?
- Hoe zou je dit als leerkracht willen uitbreiden voor de leerlingen?
- Hoe kun je nadrukkelijk aansturen op het gebruik van een hoger niveau van denken en handelen?

Opdracht 1.3 Hoofdrekenopgaven opsporen in de methode
Ga op zoek naar opgaven in de methode van je stageschool die geschikt zijn voor hoofdrekenen. Zijn er opgaven waarin de grondvormen aan de orde komen? Worden deze opgaven op een aantrekkelijke en uitdagende manier aangeboden? Zo ja, waarom? Zo nee, heb je een voorstel voor verbetering?
Maak kopieën voor je medestudenten en bespreek enkele opgaven. Leg in de bespreking de nadruk op waardevolle oefenvormen om het hoofdreken-repertoire uit te breiden.

Opdracht 1.4 Een kind helpen met hoofdrekenen
a Een kind uit groep 4 geeft als antwoord op: 85 – 47 = 42.
Wat doe je als leerkracht?
b Een kind uit groep 6 geeft als antwoord op: 12 × 13 = 106.
Wat doe je als leerkracht?

1.4 De hoofdrekenles

Hoofdrekenen leren de kinderen niet alleen door zelfstandig sommen te maken. Kinderen moeten nadrukkelijk leren hoe ze met en uit het hoofd kunnen rekenen. De hoofdrekenles is dus een belangrijk onderdeel van het reken- en wiskundeonderwijs.

1.4.1 Belangrijke kenmerken van de hoofdrekenles

De hoofdrekenles is kort en heeft een duidelijk doel: het zich vlot kunnen bewegen in de wereld van de getallen. De keuze van het aanbod voor de hoofdrekenles is weloverwogen genomen. Het gaat om leerstof die voor de groep speciale aandacht nodig heeft. Een rekenregel of een bepaalde aanpak kan worden geoefend.
De hoofdrekenles kan afwisselend zowel mondeling als schriftelijk worden uitgevoerd. Een schriftelijke activiteit bestaat uit ongeveer vijftien opgaven die in een korte tijd gemaakt kunnen worden en waarbij zowel vooraf als achteraf een bespreking is gekoppeld waarin de handige aanpakken geaccentueerd worden.
Centraal in de hoofdrekenles staat het onderhouden van basisvaardigheden en het oefenen van bepaalde aanpakken, zodat het repertoire en het toepassingsbereik van elk kind vergroot wordt en het zelfvertrouwen toeneemt. Niet alle kinderen komen op dezelfde wijze tot een oplossing. De leerkracht heeft als taak om de verschillende aanpakken van kinderen te benutten. Hij maakt notities op het bord, zodat kinderen kunnen meedenken in de wijze waarop de oplossing tot stand is gekomen. Op het bord staan in rekentaal de doorlopen rekenhandelingen. Ook oplossingen van een minder hoog oplossingsniveau worden besproken, om ervoor te zorgen dat de leerlingen zich prettig blijven voelen tijdens de hoofdrekenles en niet alleen maar gespannen zijn, maar vooral ook om ze te stimuleren om mee te blijven denken. Voor de leerkracht betekent dit dat tijdens de groepsbespreking van de oplossingen het globaal schatten en een aanzet tot het hanteren van een bepaalde aanpak door de betreffende leerlingen, als waardevol voor de bespreking wordt gezien. Deze antwoorden kunnen het beste bij de start van de rekenles benut worden, ze zijn als het ware een opstap naar het vervolg. Ook het plaatsen van

het hoofdrekenen in een herkenbare, betekenisvolle toepassingssituatie kan de kinderen helpen bij het oplossen. Op die manier hebben ze de mogelijkheid om op informele wijze tot een oplossing te komen. Zodra contextopgaven meer oplossingsmanieren mogelijk maken, is er grotere groep leerlingen in staat om tot een aanpak te komen – mede doordat ze zich iets voor kunnen stellen bij een context. Zo kunnen ze het uitrekenen van 75 – 48 heel erg lastig vinden, maar als de opgave in een winkelcontext wordt geplaatst, waarbij wordt gesteld dat er een computerspel gekocht wordt voor 48 euro, terwijl er 75 euro in de spaarpot zit en de vraag wordt gesteld hoeveel geld er na de aankoop nog in de spaarpot zit, kunnen ze deze opgave opeens heel gemakkelijk vinden.

Zoveel mogelijk kinderen krijgen de gelegenheid om hun oplossingswijze te verwoorden. Uitwisseling van verschillende oplossingen en handigheidjes geven de les een interactief karakter. De leerkracht heeft als taak om de bespreking van oplossingen compact te laten verlopen en voor structuur in de les te zorgen, bijvoorbeeld door verschillende manieren van oplossen in volgorde stapsgewijs op het bord te noteren. Hij kan de gebruikte aanpak benoemen, herhalen en relaties leggen tussen aanpakken.
De leerkracht stimuleert elk kind om op inzichtelijke wijze te komen tot een niveauverhoging en meer vaardigheid. Dit kan gerealiseerd worden door aangedragen aanpakken te herhalen en kinderen uit te dagen om mee te denken in de gevolgde aanpak, zodat er leermomenten voor de groep gecreëerd worden.
Geschikte en mindere geschikte manieren van oplossen bespreekt de leerkracht met de groep, zodat kinderen steeds meer grip krijgen op handige aanpakken. De leerkracht kan aansturen op een bepaalde aanpak en deze benadrukken zodat kinderen regels, relaties en aanpakken gaan inzien en doorzien. De leerkracht zorgt er ook voor dat de les in een vlot tempo verloopt. Tot slot geeft hij een samenvatting van de gezamenlijke leerpunten die tijdens de les aan de orde zijn geweest en worden oplossingen direct gecontroleerd op juistheid.

Opdracht 1.5 Geef een hoofdrekenles
Kies een hoofdrekenles uit de methode. Geef deze les en reflecteer erop. Maak in je reflectie gebruik van de volgende aandachtspunten voor jou als leerkracht en voor de kinderen.

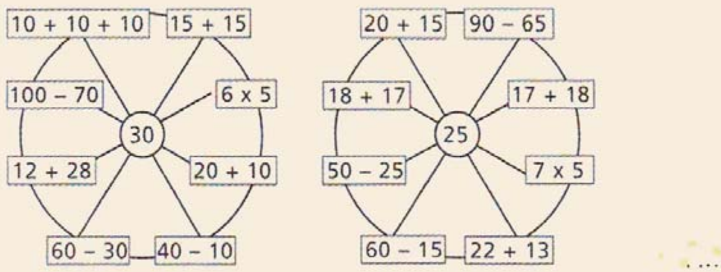
- Aandachtspunten voor de leerkracht zijn: zicht op de gehanteerde aanpak van de kinderen, de plaats van de aanpak in de leerlijn, het uitnodigen tot meedenken met kinderen, aanzetten tot andere manieren van oplossen, noteren op het bord, de onderwijsvorm met daarin het herhalen, toelichten en samenvatten van aanpakken van kinderen.
- Aandachtspunten voor de kinderen zijn: een duidelijke toelichting geven (mondeling en/of schriftelijk) op hun aanpak, nadenken en meedenken over de aanpak van andere kinderen en die toepassen. Van welke grondvormen maken ze gebruik?

Voorbeelden van hoofdrekenopgaven uit de methode
Een greep uit het aanbod van hoofdrekenopgaven ter inspiratie voor hoofdrekenlessen.

Rekenwielen

1 **Welke sommen horen bij het getal in het midden?**

Schrijf ze in je schrift.



Uit: *Wis en Reken*, deel 4, wisboek 2, p. 96

4 Vlekken! Wat heeft er gestaan?

20 + = 50	9 + = 17	2 + = 11	+ 70 = 73
23 + 10 =	7 + 6 =	4 + 9 =	16 3 = 19
+ 2 = 30	+ 9 = 14	7 + 8 15	43 + = 48
12 + 7 =	9 + 7 =	+ 8 = 25	80 + 7 =
45 + 4 49	8 8 = 16	27 + 8 =	+ 4 = 68

Uit: *WIG*, deel 4a, p. 141

Maak de slinger.

a
40 - 1 = 39
39 - 2 = 37
37 - 3 = 34
34 - 4 = 30
... - 5 = ...
Ga zo verder.
Kom je uit bij o?

b
36 - 1 = 35
35 - 2 = 33
33 - 3 = 30
... - 4 = ...
Ga zo verder.
Kom je uit bij 0?

c
45 - 1 = 44
44 - 2 = 42
... - 3 = ...
Ga zo verder.
Kom je uit bij 0?

d Bedenk zelf een slinger die op 0 uitkomt.

Uit: *Alles telt*, deel 4b, p. 83

Zoek de routes

Hoeveel is deze route waard?

in ↓

15	28	36
27	32	48
18	65	23
29	12	26

a ↓ uit

Zoek de goedkoopste route.

in ↓

12	34	63
23	55	4
35	65	23
44	7	46

b ↓ uit

Zoek de duurste route.

in ↓

34	63	28
55	4	15
65	23	21
7	46	14

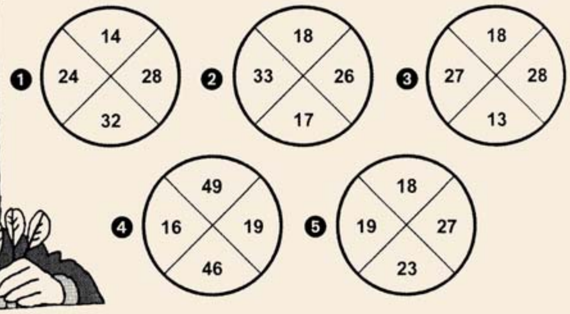
c ↓ uit

Uit: *Rekenrijk*, deel 5a, p. 121

2 Samen 100 punten.

a welke cirkel kan Joris met de 4 pijltjes precies 100 punten gooien?

b welke cirkel lukt dat ook met 3 pijltjes?



Uit: *Pluspunt*, Plusboek groep 8, p. 59

3 Samen 100.

Je mag optellen of aftrekken.

a Gebruik alleen 6 en 7.

b Gebruik alleen 7 en 8.

c Gebruik alleen 8 en 9.

d Gebruik alleen 11 en 14.

Uit: *Pluspunt*, Opdrachtenboek groep 8, p. 3

Zoek steeds twee getallen bij elkaar.

a

140 416 325 476
135 75 366 80
385 306

Het verschil is 60.

b

425 125 75 330
175 190 270
220 170 95

Het verschil is 95.

c

125 274 445 495
98 320 250 293
300 469

Het verschil is 195.

Uit: *WIG*, deel 5b, p. 63

2 Welke uitkomst is goed?
Reken met mooie ronde getallen.

266 + 310 =	666	of	576		416 + 295 =	611	of	711
375 + 101 =	476	of	486		324 + 482 =	806	of	706
189 + 644 =	833	of	813		165 + 425 =	580	of	590
406 + 402 =	838	of	808		235 + 240 =	375	of	475
319 + 487 =	723	of	806		647 + 251 =	889	of	898

Uit: *Alles telt*, deel 5b, p. 12

Opdracht 1.6 Zelf hoofdrekenen
Speel het spel: 'maak het doelgetal'.
Kies twee getallen uit tussen nul en vijf en twee getallen tussen zes en tien, bijvoorbeeld twee, drie, zes en acht. Kies een doelgetal onder de honderd, bijvoorbeeld: 32. Probeer met de vier getallen 32 te maken. Je mag optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen en de deeluitkomsten gebruiken. Elk gekozen getal moet één keer gebruikt worden.

Een mogelijke oplossing:

$6 + 2 = 8, \quad 8 \times 3 = 24, \quad 24 + 8 = 32$

Opdracht 1.7 Ontwerp een hoofdrekenles
Maak een hoofdrekenles. Welke rekenregel of aanpak wil je centraal stellen?
Kijk in de methode van je stageschool om informatie te krijgen over de manier waarop dit leerstofonderdeel is uitgewerkt. Maak eventueel gebruik van een context. Door een context te kiezen die de beoogde aanpak uitlokt, kun je de kinderen extra steun bieden.
Je kunt ook gebruikmaken van de voorbeelden op de pagina's 60, 61 en 62. Reken de voorbeeldsommen eerst uit en bedenk dan een variant voor je stagegroep die is afgestemd op hun leerstofaanbod.
Bespreek na afloop je hoofdrekenles met je medestudenten.

1.4.2 Het kladblad voor het noteren van tussenantwoorden

Het gebruik van een kladblad is functioneel. Bij rekenopgaven met veel gegevens of opgaven waarbij je door een systematische aanpak tot een oplossing kunt komen, is het prettig om enkele tussentijdse berekeningen te kunnen maken.

Voorbeeld van het gebruik van een kladblad in de rekenmethode

1 **Vijf sommen met een kladblaadje**

Welke sommen zou jij uit het hoofd doen?

a 18 x 100 =
b 175 x 8 =
c 47 x 63 =
d 15 x 80 =
e 99 x 65 =

kladblaadje

2 **Bekijk de kladblaadjes**

Hieronder zie je de kladblaadjes van Danny en Abdul.
Hoe hebben zij de sommen uitgerekend?

Danny:

kladblaadje

b
```
  64
 175
   8 x
1400
```
c
```
  63
  47 x
 441
2520
2961
```
420 + 21
2400 + 120

e
```
  99
  65 x
 495
5940
6435
```
450 + 45
5400 + 540

Abdul:

kladblaadje

b
```
 350
 700
1400
```
c
```
  63
  47 x
 441
2520
2961
```
420 + 21
2400 + 120

e 6500 − 65

Uit: *Wis en Reken*, Wisboek 2, groep 7, p. 11

Het spel: 'Getallen maken'

Getallen maken

Maak het getal in de cirkel

a
- 9, 60, 2, 3, 11 — (10)
- 10, 300, 9, 270, 2 — (15)

b
- 5, 30, 7, 90, 2 — (70)
- 150, 7, 3, 10, 100 — (5)
- 9, 4, 5, 2, 1000 — (125)

c
- 50, 9, 8, 20, 250 — (750)
- 50, 47, 10, 8, 7 — (2)
- 11, 9, 8, 2, 5 — (110)

d
- 7, 13, 30, 5, 10 — (650)
- 15, 75, 30, 5, 2 — (1)
- 1, 70, 7, 10, 20 — (2)

e
- 11, 4, 20, 600, 5 — (300)
- 9, 120, 5, 2, 70 — (12)

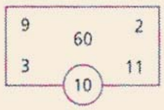
Uit: *Wis en Reken*, Wisboek 1, p. 51

'Getallen maken' is een spel waarbij het getal in de cirkel gemaakt moet worden met de vijf getallen in de rechthoek:

- Je mag optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.
- Elk getal mag maar één keer worden gebruikt.
- Niet alle getallen in de rechthoek hoeven te worden gebruikt.
- Wie kan de meeste oplossingen vinden?

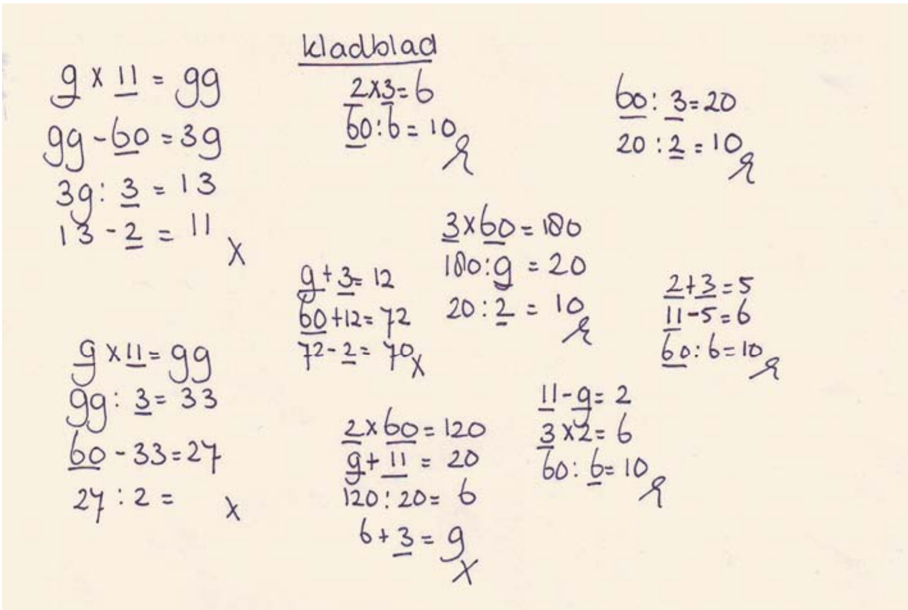
1

Bij het spel 'Getallen maken' is het gebruik van een kladblad functioneel.



Uit: *Wis en Reken*, Wisboek 1, p. 51

Bij opgave a maak je het getal 10. Op het kladblad is een uitwerking te vinden van de zoektocht naar het getal 10.



Opdracht 1.8 Reflectie op je eigen hoofdrekenen
Ga zelf op zoek naar de bewerkingen die nodig zijn om de andere getallen van het spel 'Getallen maken' (vorige pagina) te vinden. Noteer je uitwerkingen op een kladblad. Bespreek je oplossingen met een medestudent.

Vaak is het onthouden van meerdere gegevens niet altijd eenvoudig, wat het komen tot een uiteindelijk antwoord lastig maakt. Op een kladblad kunnen tussenantwoorden worden opgeschreven die moeten worden onthouden en gedachten worden geordend. Zo houden de leerlingen grip op het rekenwerk.
Kinderen moeten leren om een kladblad te gebruiken, want zonder die gerichte aandacht maken de meeste kinderen pas noties op het kladpapier, als ze het antwoord al (bijna) weten. Ook zijn er kinderen die vinden dat het kladpapier er netjes uit moet zien. Doorstrepen mag niet en gegevens

die ze aan het eind niet nodig hebben, gummen ze uit. Ook zijn ze van mening dat het gebruiken van papier een lager niveau van rekenen is. Kinderen moeten ervaren dat het maken van notities een ondersteuning is bij het denken en een hulp bij het komen tot een oplossing.
De leerkracht kan een juist gebruik van een kladblad stimuleren door kinderen regelmatig op het bord te laten zien welke denkstappen ze hebben gemaakt en hoe je de tussenstappen noteert. Ze kunnen dan zien hoe hun oplossingsproces is verlopen en andere kinderen krijgen zo de mogelijkheid om mee te denken.
De uitwisseling van denkstappen heeft dus betekenis voor het kind zelf, maar ook voor de communicatie over en weer met de andere kinderen. Ze weten en zien dan over welke aanpak ze het hebben.

1.5 Literatuurtips

Buys, K. (2001). Hoofdrekenen.
In: Heuvel-Panhuizen, M. van den, K. Buys en A. Treffers (2001), Tussendoelen Annex leerlijnen. Kinderen leren rekenen. Hele getallen bovenbouw basisschool, Groningen: Wolters-Noordhoff.

Treffers, A. en E. de Moor (1990), Proeve van een nationaal programma voor het reken- en wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2: Basisvaardigheden en cijferen, Tilburg: Zwijsen (niet meer verkrijgbaar maar wel beschikbaar op pabo's).

Buys, K. (2008), Leren vermenigvuldigen met meercijferige getallen. Proefschrift. Utrecht, Freudenthal Instituut.

Buys, K. (2000). Hoofdrekenen anno 2000: aandachtspunten voor een leerlijn.
In: Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 18 (3), p. 28-36.

Buys, K. (2005/2006), Een wereld zonder cijferen. In: Volgens Bartjens, 25 (5), p. 22–27.

Buys, K. (2002/2003), Hoofdrekenen in de hoogste leerjaren. In: Volgens Bartjens, 22 (2), p. 28–32.

Heuvel-Panhuizen, M. van den, Bodin-Baarends, C. (2004/2005), Alles of niets. In: Volgens Bartjens, 24 (2), p. 12–14.

Huitema,S. (1991), Meer hoofdrekenen, minder cijferen. In: Volgens Bartjens, 11 (1), p. 4–7.

Kassel, D. van (2001/2002), Interactie en hoofdrekenen. In: Volgens Bartjens, 21 (4), p. 33–35.

Stralen, J. van (2001/2002), Een referentiekader voor het rekenonderwijs. In: Volgens Bartjens, 21 (3), p. 5–9.