Rekenen met verhoudingen op de basisschool

Reken-wiskundedidactiek voor de bovenbouw

Noordhoff Uitgevers

Frans van Galen & Annette Markusse

1e druk

Rekenen met verhoudingen op de basisschool

Frans van Galen

Annette Markusse

Eerste druk

Noordhoff Uitgevers Groningen / Utrecht

Ontwerp omslag: G2K (Groningen-Amsterdam)
Omslagillustratie: iStock-499343582

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Hoger Onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

Aan de totstandkoming van deze uitgave is de uiterste zorg besteed. Voor informatie die desondanks onvolledig of onjuist is opgenomen, aanvaarden auteur(s), redactie en uitgever geen aansprakelijkheid. Voor eventuele verbeteringen van de opgenomen gegevens houden zij zich aanbevolen.

FSC www.fsc.org MIX Papier van verantwoorde herkomst FSC® C118189

0/18

ISBN (ebook) 978-90-01-87778-1
ISBN 978-90-01-87777-4
NUR 123

Voorwoord

Het vak rekenen en wiskunde staat op de basisschool iedere dag op het rooster. Als leerkracht in opleiding zul je er daarom veel mee te maken krijgen. Als je aan de slag gaat in de bovenbouw – dat wil zeggen in groep 6, 7 of 8 – zul je veel tijd besteden aan breuken, verhoudingen, procenten, kommagetallen en grafieken; de onderwerpen van dit boek. Ze hangen sterk met elkaar samen. We kozen voor 'verhoudingen' in de titel als een overkoepelende term, want ook breuken, procenten en kommagetallen geven verhoudingen weer. Het onderwerp grafieken past hier ook bij, omdat grafieken verhoudingen weergeven in een plaatje. Het boek is gebaseerd op het TAL-boek *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen* (2005) en het hoofdstuk grafieken uit *Meten en meetkunde in de bovenbouw* (2007).
Veel leerlingen vinden het rekenen met breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen lastig. Het onderwijzen van deze onderwerpen vraagt dan ook veel van je: een rijke en flexibele rekenvaardigheid en een gedegen kennis van de vakdidactiek.

Dit boek bevat zeven hoofdstukken. In de hoofdstukken 3, 4, 5 en 6 staat steeds één onderwerp centraal, maar we bespreken telkens ook een meer algemeen aspect van het rekenonderwijs.
Het boek begint met een hoofdstuk over samenhang. Breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen hebben veel met elkaar gemeen. In hoofdstuk 1 wordt benadrukt dat in het onderwijs die samenhang een centrale plaats moet krijgen.
Hoofdstuk 2 gaat over de onderwijspraktijk. Er wordt een beeld geschetst van de manier waarop je de reken-wiskundelessen in de bovenbouw vorm kunt geven en welke leerkrachtvaardigheden daarvoor nodig zijn. We richten ons daarbij op het idee dat in het onderwijs leerlingen ruimte moeten krijgen om de wiskunde als het ware zelf opnieuw uit te vinden.
In hoofdstuk 3 kun je kennismaken met de didactiek van breuken en met de opbouw van de leerlijn. Daarnaast is er veel aandacht voor het schriftelijke rekenwerk. We laten zien hoe je dit werk kunt analyseren en welke verschillende niveaus van oplossen je daarbij kunt onderscheiden. Met dit hoofdstuk willen we je laten ervaren hoe waardevol het is als niet alleen het antwoord, maar ook alle denkstappen helder op papier worden gezet.
Hoofdstuk 4 gaat over verhoudingen en het rekenen met de verhoudingstabel. Daarnaast bevat het hoofdstuk een aantal praktijkvoorbeelden waarin wordt ingezoomd op interactieve instructie. We laten zien hoe je leerlingen met verschillende vragen aan het denken kunt zetten.
Hoofdstuk 5 behandelt de procentendidactiek. Verschillende modellen, zoals de procentenstrook en de procententabel, worden besproken. Ook het rekenen met de rekenmachine komt aan de orde. In het hoofdstuk besteden we veel aandacht aan het werken met de rekenmethode. We laten zien hoe

je een les uit de methode kunt voorbereiden en hoe je met enkele kleine aanpassingen een les kunt verrijken.
Hoofdstuk 6 gaat in op het rekenen met kommagetallen, maar je kunt er ook veel lezen over het meten. We laten zien dat leerlingen via meten de decimale structuur van kommagetallen kunnen ontdekken. Verder is er in dit hoofdstuk ook aandacht voor productief oefenen en andere speelse werkvormen.
We sluiten het boek af met een hoofdstuk waarin we aandacht besteden aan grafieken. Grafieken brengen verhoudingen in beeld.

Met uitzondering van hoofdstuk 1, hebben alle hoofdstukken dezelfde opbouw. Ieder hoofdstuk begint met een practicum op eigen niveau. Dit practicum is een introductie op het hoofdstuk en geeft je de mogelijkheid om samen met medestudenten enkele kernaspecten van de didactiek te verkennen. In de hoofdstukken 3 tot en met 7 wordt dit practicum opgevolgd door de paragraaf *Hoe rijk is jouw rekenkennis?* Hierin onderzoek je hoe het staat met je eigen rekenkennis en in welke mate je je kunt verplaatsen in het denken van kinderen.
Hierna volgen enkele paragrafen waarin de didactiek wordt beschreven. We verwijzen daarbij veelvuldig naar opgaven uit de gangbare reken-wiskundemethoden om daarmee te laten zien hoe je de didactiek kunt vertalen naar de alledaagse praktijk. Vaak doen we dit in de vorm van een intermezzo: een korte tekst die los staat van het lopende verhaal. Ze zijn herkenbaar aan de groene achtergrondkleur. Het geven van een goede rekenles vraagt meer dan het strikt volgen van de methode. Het is belangrijk dat je leert om kritisch naar de methode te kijken. Vanuit een kritische houding zul je beter in staat zijn de methode naar je eigen hand te zetten, passend bij de behoeften van je groep. In de intermezzo's besteden we hier veel aandacht aan.
Ieder hoofdstuk bevat ook enkele praktijkopdrachten waarmee je in je stageschool aan de slag kunt. Vaak zijn het kleine onderzoeksopdrachten waarmee je de beschreven didactiek in de praktijk verder kunt uitdiepen.
In de samenvatting aan het eind van het hoofdstuk worden de belangrijkste punten nog eens op een rij gezet. Dit doen we in de vorm van een aantal tips voor de praktijk en met een opsomming van specifieke begrippen. Deze begrippen geven de vaktaal weer die je nodig hebt om op een professioneel niveau met anderen uit de beroepsgroep te communiceren. We sluiten af met een zelftoets waarin je kunt onderzoeken in hoeverre het hoofdstuk heeft bijgedragen aan je professionele ontwikkeling.

Het gaat in dit boek om onderwerpen die lastig zijn voor veel leerlingen en die behoorlijk complex zijn om te onderwijzen. Het zijn echter ook onderwerpen waarbij veel te ontdekken valt. Het is bijvoorbeeld mooi om te zien hoe leerlingen op een gegeven moment ontdekken dat je dezelfde situaties op heel verschillende manieren wiskundig kunt beschrijven en hoe je modellen als de strook of de verhoudingstabel in kunt zetten om een concreet probleem op te lossen. We wensen je veel plezier bij deze ontdekkingstocht.

Najaar 2017
Frans van Galen en Annette Markusse

Inhoud


3/4
1/2
3/8
1/4
1/8
700
600
500
400
300
200
100
plaatsen.

1 Samenhang

1

Een practicum als start: een tweederde meerderheid?

‘Onzekerheid over uitslag stemming’

‘Meerderheid voor nieuw bestemmingsplan’

‘Plan krijgt geen tweederde meerderheid’

Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen hebben veel gemeen. Vaak kun je ze allemaal gebruiken om dezelfde situatie te beschrijven. Bij het rekenen ga je daarom ook makkelijk over van de een op de ander. Beantwoord de vragen bij het verhaaltje hierna en probeer goed te letten op hoe je redeneert.

Opdracht
De gemeenteraad heeft zojuist gestemd. 12 van de 19 raadsleden stemden voor de verandering van het bestemmingsplan, maar er is onduidelijkheid over de vraag of er een tweederde meerderheid nodig is. De verslaggeefster van de plaatselijke krant vraagt zich af hoe zij de stemverhouding in de kop van het artikel zal verwerken.

1 Je zag waarschijnlijk meteen dat de meerderheid van de raad voor heeft gestemd. Hoe redeneerde je daarbij?
2 Is er ook een tweederde meerderheid? Hoe redeneer je? Vergelijk jouw aanpak met die van je medestudenten.
3 Wanneer gaan kommagetallen een rol spelen?
4 Welke kop zou jij boven een krantenartikel zetten?

Reflectie
Eerst over de krantenkop. Je zou vast niet kiezen voor de kop: ‘12 van de 19 raadsleden stemmen in met bestemmingsplan’. Niet alleen wil een lezer vooral weten of het nieuwe bestemmingsplan geaccepteerd is, maar de verhouding 12 van de 19 zegt lezers weinig. Koppen met ‘3 van de 4’ vind je wel in de krant.
De helft van de raadsleden is voor, dat weet je direct. De helft van 19 zou 9½ zijn, dus bij 10 raadsleden is er al een meerderheid. Je kunt ook redeneren dat 12 raadsleden de helft zou zijn van een raad van 24 mensen, dus bij een kleinere raad zal 19 meer dan de helft zijn.

Is die tweederde meerderheid gehaald? De 12 voorstemmers zouden tweederde zijn in een raad van 18. De raad is groter – 19 leden – dus de tweederde meerderheid is niet gehaald.
Hoeveel procent is 12 van de 19? Als het schattend mag, kan het zonder rekenmachientje. 12 van de 20 zou 6 van de 10 zijn, dus 60 van de 100. 12 van de 19 zal iets meer dan 60% zijn.
Precies uitrekenen hoeveel procent van de raadsleden voor is, gaat het makkelijkst op de rekenmachine. 1% van 19 is 0,19. We moeten 12 delen door 0,19. Uitkomst afgerond: 63%. Je kunt ook 12 delen door 19 en dan × 100 doen. Met 12 : 19 zet je de breuk $^{12}/_{19}$ of de verhouding ‘12 op de 19’ om in een kommagetal, en een kommagetal kun je via vermenigvuldigen met 100 omzetten in een percentage.
Met deze opdracht wilden we je laten ervaren dat verhoudingen, breuken, procenten en kommagetallen veel met elkaar gemeen hebben. Bij rekenen en redeneren gaan we vaak over van de ene beschrijving naar een andere. Journalisten hebben een voorkeur voor breuken en verhoudingen zolang het gaat om eenvoudige getalrelaties (‘drie van de vier’, ‘driekwart’) en kiezen voor procenten als een meer precieze beschrijving zinvol is.

1.1 Verschillend, maar ook hetzelfde

In de onderbouw van het basisonderwijs zijn de leerlingen steeds meer vertrouwd geraakt met de wereld van de gehele getallen. In groep 6 en 7 komen daar opeens andersoortige getallen bij: breuken, procenten en kommagetallen. Hoewel breuken, procenten en kommagetallen elk hun eigen notatie en hun eigen eigenschappen hebben, hebben ze ook veel met elkaar gemeen.
Breuken en procenten zijn getallen die een verhouding weergeven. Verhoudingen zijn op zich al in de onderbouw aan de orde gekomen, zowel meetkundig als getalsmatig. De leerlingen hebben bijvoorbeeld opgaven gemaakt met recepten: de hoeveelheden die je nodig hebt voor 4 personen moet je verdubbelen voor 8 personen en voor 12 personen moet je drie keer zoveel nemen. In de bovenbouw gaat het rekenen met verhoudingen een grote rol spelen. Kommagetallen worden belangrijk bij het rekenen met breuken, procenten of verhoudingen op de rekenmachine.
Dit boek eindigt met een hoofdstuk over grafieken. We kunnen verhoudingen weergeven met getallen, maar we kunnen dat ook doen in een plaatje. Dat is vooral handig als verhoudingen veranderen. Een voorbeeld is groei: er is geen vaste relatie tussen leeftijd en lengte. Een grafiek van lichaamslengte tegen leeftijd laat zien dat kinderen in hun eerste levensjaren heel snel groeien en dat die groei steeds langzamer verloopt. Voor de prijs van groenten in de supermarkt hebben we geen grafiek nodig, want als we twee keer zoveel sperziebonen kopen, betalen we simpelweg twee keer zoveel. In dit eerste hoofdstuk laten we grafieken nog buiten beschouwing.
We bespreken in dit hoofdstuk de samenhang tussen de onderwerpen door te laten zien hoe breuken, procenten en kommagetallen zijn ontstaan. Die samenhang moet een belangrijke plek hebben in het onderwijs

1.1.1 Samenhang

In de volgende situaties gaat het steeds om dezelfde verhouding:
- Wieke at $^{3}/_{5}$ deel van haar reep op.
- 3 op de 5 automobilisten staan regelmatig in de file.
- Dit voedsel bestaat voor 60 procent uit water.

- Het is nog 0,6 km tot de camping.
- 3 delen gemalen amandelen op 2 delen suiker.
- De kale breuk ⅗.

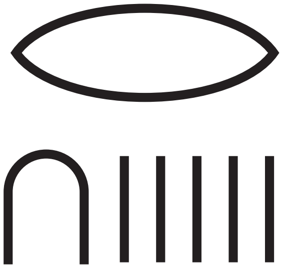
Gemeenschappelijk aan breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen is dat ze allemaal een verhouding aangeven, de verhouding tot een bepaald totaal of de verhouding tot een andere hoeveelheid. Deze gelijksoortigheid maakt dat we in dagelijkse situaties gemakkelijk kunnen wisselen tussen verschillende vormen, wat helpt om de situatie te interpreteren en om het probleem op te lossen. Tegelijkertijd helpt deze samenhang ons ook om de getallen beter te begrijpen.
Hoe komt het dat er verschillende manieren zijn om dezelfde verhouding te noteren? Het is verhelderend om naar de geschiedenis te kijken. Telkens ontstond er een nieuwe notatiewijze die goed paste bij een specifieke situatie of een bepaalde manier van rekenen. Die verschillen tussen situaties spelen ook nu een rol.

Verhoudingen
We spreken van een (vaste) verhouding als er sprake is van een lineair verband tussen twee getalsmatige beschrijvingen. 'Lineair' of 'recht evenredig' betekent: als het ene getal met een bepaalde factor wordt vergroot of verkleind, dan wordt het andere getal met diezelfde factor vergroot of verkleind. Een dergelijk lineair verband komt vaak voor. Denk bijvoorbeeld aan:
- Prijs en gewicht. Wanneer je twee keer zoveel koopt, moet je meestal ook twee keer zoveel betalen.
- Benzinegebruik. Als een auto '1 op 18' rijdt, wil dat zeggen dat er 18 kilometer kan worden gereden op één liter benzine en dus 36 kilometer op twee liter benzine, of 27 kilometer op anderhalve liter.
- Ingrediënten. Om dezelfde smaak te houden moeten de hoeveelheden recht evenredig worden vergroot of verkleind.
- Een schaalmodel van bijvoorbeeld een auto of vliegtuig. Alle maten zijn evenredig verkleind.
- Schaduw. Er is een lineair verband tussen de lengte van rechtopstaande stokken en hun schaduw. Een stok die twee keer zo lang is, heeft ook een twee keer zo lange schaduw.

Een verschil tussen verhoudingsbeschrijvingen als '2 van de 3', '1 op 32' en dergelijke enerzijds, en breuken, procenten en kommagetallen anderzijds, is dat in het eerste geval de twee getallen van de verhouding allebei worden genoemd, terwijl bij breuken, procenten en kommagetallen de verhouding als het ware wordt samengevat in één getal. Hier ligt een belangrijke reden voor het ontstaan van breuken, procenten en kommagetallen; men wilde de verhoudingssituatie op een beknopte manier vastleggen.

Breuken
Breuken zijn ontstaan vanuit verdelen en afpassen. Eerst verwees de notatie waarschijnlijk nog heel concreet naar bepaalde handelingen, maar van daaruit ontwikkelden breuken zich tot op zichzelf staande getallen, tot knopen binnen een netwerk van getalrelaties. We kunnen aan de geschiedenis van de breuken zien dat dit geen eenvoudig proces was.
In het systeem voor breuken dat de Egyptenaren rond ongeveer 1700 voor Christus ontwikkelden, hadden drie breuken een eigen symbool: ½, ⅔ en ¾. Daarnaast kenden de Egyptenaren alleen stambreuken – wat wij zouden

schrijven als $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ enzovoort, dus als een breuk met teller 1. De afbeelding laat zien hoe $\frac{1}{15}$ werd genoteerd. Het symbool bovenaan geeft aan dat hier niet het getal 15 staat, maar de breuk $\frac{1}{15}$.



Egyptische breuk

In de Rhind-papyrus staan vraagstukken als: hoe verdeel je 6 broden over 10 mensen? Wij zouden het antwoord schrijven als $\frac{6}{10}$ of $\frac{3}{5}$, maar in het Egyptische systeem schreef je het als $\frac{1}{2}$ plus $\frac{1}{10}$. Stel het je voor als een concrete uitdeelsituatie: eerst krijgen de 10 mensen ieder een half brood en daarna wordt het laatste brood verdeeld. Dezelfde manier van verdelen paste men bijvoorbeeld toe bij 2 gedeeld door 5: eerst krijgt iedereen een zo groot mogelijk stuk – $\frac{1}{3}$ in dit geval – en daarna wordt de rest verdeeld. Dus wat wij schrijven als $\frac{2}{5}$ schreven de Egyptenaren als $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{15}$ (en niet als $\frac{1}{5}$ en $\frac{1}{5}$, wat je misschien zou verwachten). Je begrijpt dat het rekenen met breuken in het Egyptische systeem lastiger was dan het rekenen met ons notatiesysteem.
De Egyptische notatie werd tot ver in de middeleeuwen gebruikt. Men kan zich afvragen waarom breuken met noemers ongelijk aan 1 niet eerder werden ingevoerd. De verklaring is waarschijnlijk dat stambreuken eerst moeten worden opgevat als telbare objecten, voordat je ‘tellers’ zinvol kunt invoeren. Wanneer je veel met een bepaalde stambreuk werkt, verdwijnt het handelingsaspect naar de achtergrond en kan de stambreuk de status krijgen van zelfstandige maat. Denk bijvoorbeeld aan $\frac{1}{4}$ liter slagroom. Dat is voor ons een bepaalde hoeveelheid waarbij we niet meer denken aan het in vieren delen van een liter. Het handelingsaspect is helemaal verdwenen. Wel realiseren we ons de verhoudingen: één liter is vier keer zoveel als $\frac{1}{4}$ liter. Wanneer zich eenmaal een nieuwe maat heeft gevormd, kunnen we ook gaan afpassen. Pas dan is het zinvol de breukentaal uit te breiden naar het introduceren van breuken met tellers ongelijk aan 1, want deze nieuwe breuken beschrijven dan namelijk ook het aantal keren dat is afgepast.
Dit maakt duidelijk waarom de stap naar tellers groter dan 1 niet vanzelfsprekend is. Het gaat immers niet zomaar om het uitbreiden van een procedure van ‘delen’ naar ‘delen en vermenigvuldigen’. Er zit een stap tussen: het ‘een-zoveelste-deel’ moet eerst het karakter krijgen van een zelfstandige maat.

Procenten
Procenten zijn ontstaan binnen het rekenen met geld. In eerste instantie werd rente en belasting uitgedrukt in een verhouding. Rente kon bijvoorbeeld worden aangegeven als: op iedere 300 dukaten worden 5 dukaten als rente gegeven. Bij de invoering van een nieuw belastingstelsel in 1569 werd

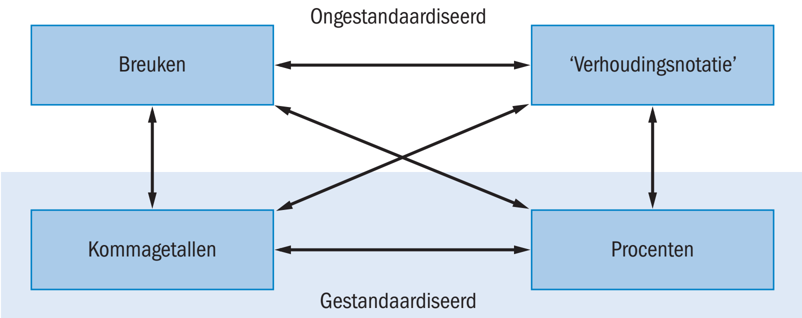
gesteld dat iedere ‘Tiende Penning’ aan belasting moest worden betaald, dus één op elke tien penningen.
Werken met zulke verhoudingsgetallen heeft als nadeel dat het vergelijken van verhoudingen lastig is. Is 2 van de 3 bijvoorbeeld meer of minder dan 3 van de 5? Om dit probleem op te lossen ging men gebruikmaken van een gestandaardiseerde verhouding door ‘op de honderd’ te gaan rekenen. Het Franse ‘per cent’ werd verbasterd tot ‘procent’, dat staat voor een verhouding waarbij een van de getallen op honderd is gesteld.

Kommagetallen
Pas rond 1600 kwam men op het idee van de tiendelige breuken. De Nederlander Simon Stevin legde het systeem uit in een boek met de titel *De Thiende*. Het voordeel van tiendelige breuken of kommagetallen – Stevin noteerde ze nog niet met een komma – is dat je ermee kunt rekenen alsof het gewone getallen zijn. Bovendien kun je de verfijning op een simpele manier eindeloos voortzetten: als 3,6 niet precies genoeg is ga je naar 3,64 of 3,642, enzovoort. Het is een mooi, elegant systeem dat de decimale structuur van de gehele getallen – eenheden, tientallen, honderdtallen enzovoort – doortrekt naar de andere kant.
Met de opkomst van typemachines, rekenmachines en computers heeft het gebruik van kommagetallen een hoge vlucht genomen. Inmiddels gebruiken we in veel situaties kommagetallen waar vroeger met breuken werd gewerkt.

1.1.2 Standaardiseren
Kommagetallen zijn ontstaan als een manier om verfijning te standaardiseren in stappen van tien. Het zijn ‘tiendelige breuken’. Procenten zijn ontstaan vanuit het standaardiseren van verhoudingen naar honderd. Door hun standaardisatie laten procenten en kommagetallen zich makkelijker vergelijken dan breuken en verhoudingen.

- Aan beschrijvingen als ‘⅓ deel’ en ‘⅖ deel’ zie je niet direct wat meer is. Wanneer van de breuken kommagetallen worden gemaakt – 0,333.. en 0,4 – zie je dat wel.
- Het is makkelijker om 33% en 40% ‘puur sap’ te vergelijken dan om bij ‘1 van 3’ en ‘2 van 5 delen sap’ te zeggen welke mengverhouding het meeste sap bevat.
- Over de vraag of 33% van een bedrag meer of minder is dan 40% van dat bedrag hoeft niemand na te denken. Procenten zijn op honderd genormeerd. Dat maakt het vergelijken makkelijk en we zien aan percentages ook direct hoeveel iets meer of minder is.

De samenhang tussen breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen kan worden weergegeven in het volgende schema. Het woord ‘verhoudingsnotatie’ staat tussen aanhalingstekens omdat het ook bij breuken, procenten en kommagetallen om verhoudingen gaat. Met ‘verhoudingsnotatie’ bedoelen we een beschrijving als ‘2 van de 3’ en dergelijke, dus beschrijvingen waarin beide getallen van de verhouding apart worden genoemd. De pijlen geven aan dat we vanuit iedere beschrijving over kunnen stappen naar een andere.



Een paar voorbeelden:

- Wanneer we 9 procent van iets willen uitrekenen, dan kunnen we dat met de zakrekenmachine doen door in te typen: *0.09 (van procenten naar kommagetallen).
- Het uitrekenen van de som '½ + ⅘' wordt gemakkelijk als we er kommagetallen van maken. We rekenen dan '0,5 + 0,8 = 1,3' uit (van breuken naar kommagetallen).
- Als er 75 procent wordt gegeven, moeten we ¾ deel nemen (van procenten naar breuken).
- Bij het uitrekenen van '0,49 + 0,249' maken we een schatting en rekenen uit '½ + ¼ = ¾' (van kommagetallen naar breuken).
- 3 op de 5 mensen is 60 procent (van verhoudingen naar procenten).
- '⅔ van 75 mensen' is '2 van de 3 mensen', of '10 van de 15', of '50 van de 75' (van breuken naar verhoudingen).

De voorbeelden maken zichtbaar dat het vaak handig is om de overstap te maken naar een gestandaardiseerde beschrijving van de situatie (in procenten of kommagetallen), zeker als we heel precies willen zijn, maar we redeneren ook graag met simpele breuken of verhoudingen. De voorbeelden laten ook de grote verwantschap zien tussen de notatie in kommagetallen en procenten (de gestandaardiseerde getallen): 0,75 en 75 procent lijken erg op elkaar.

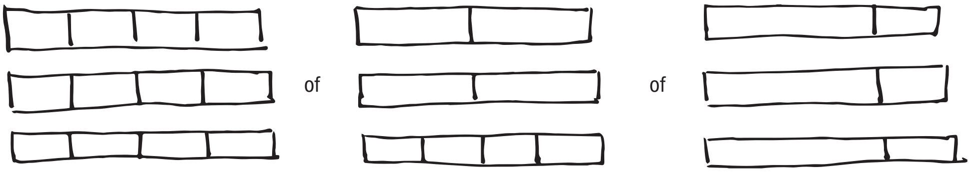
1.2 Onderwijs

De samenhang tussen breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen moet een centrale plaats krijgen in het onderwijs. We gaan daar kort op in. Het is een terugkerend thema in de volgende hoofdstukken.

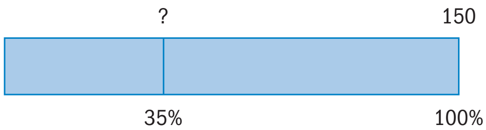
1.2.1 Contexten en modellen

Een ontwikkeling die vele eeuwen besloeg heeft uiteindelijk geleid tot het gebruik van breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen zoals wij dat nu kennen. We moeten leerlingen de kans geven om actief de relaties tussen breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen te onderzoeken, zodat ze gaan begrijpen waarom bijvoorbeeld soms voor procenten wordt gekozen en op andere momenten voor breuken.
Dat onderzoek start altijd vanuit contextsituaties. Als we willen dat leerlingen op onderzoek gaan, dan moet het probleem dat ze op gaan lossen voor hen betekenis hebben. Ze moeten zich de details van de situatie voor kunnen stellen en ze moeten gemotiveerd zijn om een antwoord te zoeken op de vraag die gesteld wordt. Belangrijk is dat leerlingen al hun kennis inzetten, ook hun kennis over de wereld buiten school.

Ervaring met contextsituaties leidt tot het werken met modellen. Als vier kinderen op een eerlijke manier drie stokbroden moeten verdelen, dan kan dat op verschillende manieren getekend worden.



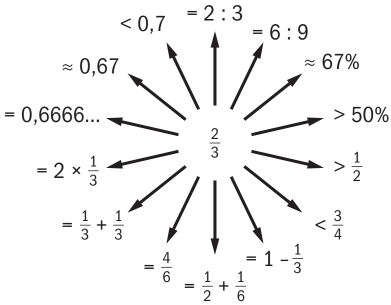
De stroken stellen hier nog heel concreet stokbroden voor, en de strepen laten zien hoe die stokbroden gesneden worden. Stroken kunnen echter gebruikt worden om allerlei situaties te visualiseren, bijvoorbeeld ook de vraag hoeveel 35% is van 150.



Dit kan worden beschreven als een proces van ‘model van’ naar ‘model voor’ (Streefland, 1985; Gravemeijer,1999). In eerste instantie is een schema of model een representatie van een specifiek probleem; later kan zo’n model een algemeen hulpmiddel worden voor het redeneren binnen allerlei andere situaties.
Ook andere modellen spelen een belangrijke rol bij het rekenonderwijs in de bovenbouw: cirkeldiagrammen, de dubbele getallenlijn en de verhoudingstabel.

1.2.2 Een netwerk van getalrelaties

Het onderzoeken en oplossen van allerlei contextproblemen moet er uiteindelijk toe leiden dat leerlingen kennis ontwikkelen over breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen die min of meer op zichzelf komt te staan. We kunnen die kennis beschrijven als een netwerk van getalrelaties. Het plaatje is een poging om een deel van dat netwerk in beeld te brengen; het laat zien wat iemand zonder veel te hoeven redeneren weet over de breuk $\frac{2}{3}$. Je moet je dat netwerk echter veel en veel groter voorstellen, want ieder getal of iedere breuk heeft als knoop in het netwerk verbindingen met weer andere knopen.



Getallen zoals 25, 50 en 75 spelen een belangrijke rol in het netwerk. 25 roept als een kwart van 100 direct relaties op met andere getallen. Dit zou voor meer getallen moeten gelden. Bijvoorbeeld:

- 33 is iets minder dan ⅓ deel van 100
- 49 is bijna 50 en dus de helft van 100
- 16 is herhaald te delen door 2
- 16 is iets minder dan ⅙ deel van 100
- enzovoort

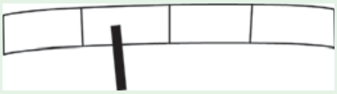
Het is nuttig om met leerlingen na te gaan welke bijzondere getallen zij kennen en wat deze getallen bijzonder maakt.
Een dergelijk netwerk van getalrelaties geeft leerlingen een basis voor het redeneren over breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen. Leerlingen kunnen de relaties tussen breuken onderling gebruiken, maar ze kunnen bijvoorbeeld ook overgaan van procenten naar breuken, of van breuken naar kommagetallen.

- Je krijgt 25% korting. Als leerlingen 25 herkennen als ¼ deel van 100 is meteen duidelijk dat ¾ deel van de prijs moet worden betaald.
- Wat kost 0,329 kg als een kilo € 0,60 kost? 0,329 is ongeveer ⅓, dus 60 moet worden gedeeld door 3. Het kost dus ongeveer € 0,20.
- Hoeveel is 30 : 2,37? We gaan afpassen. 2,37 is ongeveer 2½ en 4 × 2½ = 10. Iedere keer dat we 10 op 30 afpassen, staat voor 4 × 2,37. 10 kan 3 keer van 30 af en dus is het antwoord ongeveer 12.

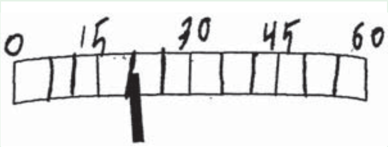
Beschikken over een netwerk van getalrelaties en kunnen redeneren over breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen staan niet los van elkaar, integendeel. Via redeneren over opgaven ontstaat zo’n netwerk, en dat netwerk op zijn beurt maakt allerlei redeneringen mogelijk.

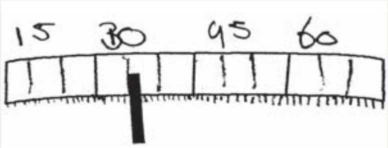
Aan de slag met een rijk probleem

Rijke reken-wiskundige problemen vormen een ingang om leerlingen de samenhang tussen breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen te laten ervaren. Een les rond benzine tanken illustreert dat.

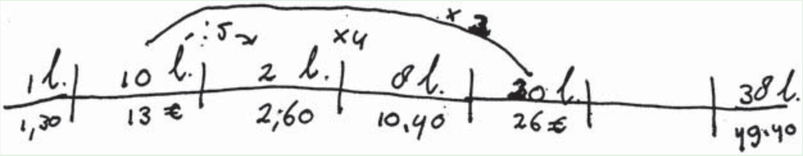


De leerlingen krijgen een werkblad met de twee plaatjes die hier zijn afgebeeld en niet meer dan dat. Verschillende kinderen zeggen direct dat het plaatje links een benzinemeter is en ze kunnen uitleggen wat hij aangeeft: als de benzine minder wordt, gaat de wijzer naar links en zo kun je zien wanneer het tijd is om weer te tanken. Er is even discussie over hoeveel benzine er in een tank past. De leerkracht vertelt dat het bij deze auto 60 liter is. Het bord van het tankstation wordt besproken. Iedereen is het erover eens dat je 1,299 kunt afronden tot € 1,30. Uiteindelijk formuleren de leerlingen zelf het probleem: hoeveel past er nog in de benzinetank en hoeveel zou dat kosten?





Als de leerlingen in groepjes werken aan het probleem zijn er leerlingen die heel precies proberen te werken door extra streepjes te zetten op de benzinemeter. Robert deelt de stukjes van de strook in drieën. Johnny doet dat ook en probeert dan nog verder te verfijnen om heel precies te kunnen rekenen. De meeste leerlingen komen ook zonder dat vrij makkelijk tot een schatting. Ieder vakje van de benzinemeter staat voor 15 liter en de wijzer staat in het tweede stukje nog voor de helft, dus kan er nog ongeveer 40 liter in de tank. Ook bij de vraag hoeveel het kost wordt eerst geschat: 40 moet ongeveer $1\frac{1}{3}$ keer worden genomen en dat is ongeveer 52 euro.
In het gezamenlijke gesprek komt naar voren dat je de prijs van de benzine het best kunt bepalen door een verhoudingstabel te maken. Dat doen de leerlingen en ze komen zo allemaal uit op ongeveer € 49,00 voor de benzine.



In de discussies die het probleem oproept stappen de leerlingen over van verhoudingen naar breuken, van breuken naar kommagetallen, enzovoort. Zulke blikwisselingen worden mogelijk gemaakt door de getalrelaties die leerlingen in hun repertoire hebben. In dit geval gaat het om relaties als:

- De helft van 60 is 30 en een kwart is 15.
- 1,299 is ongeveer 1,30 of 1,3.
- 1,30 is ongeveer 1⅓.
- 10 keer 1,30 is 13 (of meer algemeen: vermenigvuldigen met 10 maakt van de eenheden tientallen).
- 38 kan worden samengesteld uit 30 en 8; en ‘8’ kan worden bereikt via ‘2’.

Samenvatting

In dit hoofdstuk hebben we ervoor gepleit om de samenhang tussen breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen een centrale plek te geven in het rekenonderwijs. De historie laat zien dat er een reden was om verschillende notatiewijzen te ontwikkelen. Als we willen dat leerlingen de samenhang begrijpen, moeten zij een dergelijk proces in zekere zin ook zelf hebben doorgemaakt. Een praktisch argument om aandacht aan de samenhang te besteden is dat het in veel dagelijkse situaties zinvol is om de overstap te maken tussen de ene notatievorm en de andere.

Als we willen dat leerlingen breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen echt gaan begrijpen, dan is het nodig om interactie een centrale plaats te geven in het onderwijs. Rijke reken-wiskundige problemen, zoals het probleem van de benzinemeter, lokken een dergelijke interactie op een vanzelfsprekende manier uit.

In latere hoofdstukken bespreken we breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen los van elkaar, maar we zullen daarbij steeds ook de samenhang met de andere onderwerpen benadrukken.