Wiskunde de basis

deel 1

Noordhoff Uitgevers

Jaap Grasmeijer

1e druk

Wiskunde de basis

deel 1

Jaap Grasmeijer

Eerste druk

Noordhoff Uitgevers Groningen/Houten

Ontwerp omslag: Rocket Industries
Omslagillustratie: Getty Images

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan:
Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Hoger Onderwijs, Antwoordnummer 13,
9700 VB Groningen, e-mail: info@noordhoff.nl

0 / 17

MIX
Paper from
responsible sources
FSC® C118189

ISBN (ebook) 978-90-01-87818-4
ISBN 978-90-01-87817-7
NUR 918

Woord vooraf

Met de uitgave van dit boek wordt beoogd in kort bestek de wiskunde te behandelen die nodig is in de propedeuse van de techniekopleidingen in het hbo. Dit gebeurt niet strikt formeel, maar toch is er in dit boek meer aandacht voor bewijzen en afleidingen van formules dan in de meeste andere hbo-wiskundeboeken. Doel hiervan is het inzicht van de studenten in de wiskunde te vergroten. Het is de schrijver opgevallen dat studenten vaak trucjes toepassen zonder de achterliggende begrippen echt te doorgronden. Hoewel recente wijzigingen in het programma van de wiskunde op de havo beogen meer algebraïsche vaardigheden aan te brengen dan de laatste jaren gebeurde, is er in dit boek voor gekozen ook deze te behandelen. Al was het maar om ook de studenten afkomstig uit het mbo van een degelijke wiskundebasis te voorzien. Het past ook in de opvatting dat de onderwerpen en de opgaven geleidelijk in moeilijkheidsgraad moeten toenemen: confronteer de student niet met te veel problemen tegelijk.
Bij een aantal opgaven is het handig om gebruik te maken van een grafische rekenmachine of van een computeralgebrasysteem. Dit veelal ter oriëntatie of juist om een berekening te controleren. Uitgangspunt blijft het met de hand berekenen van de oplossing.
Er is hier en daar voor de liefhebber aandacht voor de geschiedenis van wiskundige onderwerpen en personen. Bewondering voor en besef van de schoonheid van wiskundige technieken worden niet onder stoelen of banken gestoken. Mijn dank gaat dan ook vooral uit naar al die bekende en minder bekende wiskundigen uit het verleden die dit allemaal bedacht en ontwikkeld hebben.
Bij dit boek hoort de site **www.wiskundedebasis.noordhoff.nl** die interactieve opdrachten biedt waarmee studenten kunnen controleren of ze de stof op een basisniveau beheersen. Tevens biedt de site de uitwerkingen van de opgaven uit het boek. De site is alleen toegankelijk als je het boek nieuw aanschaft.
Dit boek is ontstaan als dictaat en gedurende een aantal jaren bijgeschaafd. De studenten en collega's die hieraan bijgedragen hebben, wil ik hierbij ook bedanken.

Voor op- en aanmerkingen over aanpak of onderwerpkeuze houden de uitgever en de schrijver zich aanbevolen.

Castricum, voorjaar 2016
Jaap Grasmeijer

Inhoud

1 Rekenen

De basisrekenvaardigheden in dit hoofdstuk heb je nodig voor alle technische vakken in je opleiding. Het is dus erg belangrijk dat je de voorrangsregels van bewerkingen feilloos kunt toepassen en dat je zonder fouten kunt rekenen met breuken. Ook als je een rekenmachine gebruikt, moet je goed de volgorde van bewerkingen kennen om de berekening correct te kunnen laten uitvoeren. Grove fouten kun je voorkomen door een schatting van de uitkomst te maken.

1

1.1 Voorrangsregels

Volgorde bewerkingen

Als in een berekening verschillende bewerkingen voorkomen, dan is het belangrijk dat je weet in welke volgorde de bewerkingen moeten gebeuren en of je haakjes moet gebruiken. Dit is ook van belang voor de invoer op je rekenmachine.

VOORBEELD 1.1
$8 + 2 \times 3 = 14$ en *niet* 30.

Haakjes

Je moet eerst de vermenigvuldiging uitvoeren en daarna pas optellen. Als je de volgorde wilt veranderen, moet je haakjes gebruiken. Gebruik haakjes alleen als het nodig is, anders wordt het alleen maar onoverzichtelijk. Vaak kun je verwarring voorkomen door gebruik te maken van een overzichtelijke notatie.

De regels voor de volgorde van bewerkingen zijn (wat je eerst moet doen, staat bovenaan):
1 wat tussen haakjes staat
2 machtsverheffen en worteltrekken
3 vermenigvuldigen en delen
4 optellen en aftrekken

Bewerkingen op hetzelfde niveau doe je in de volgorde waarin je ze tegenkomt (van links naar rechts). Je rekenmachine houdt deze volgorde ook aan. Voor de oudere lezers: ‘Meneer van Dale wacht op antwoord’ behoort dus tot het verleden!

Omdat machtsverheffen voor aftrekken gaat, geldt dus dat $-3^2 = -3 \times 3 = -9$, maar $(-3)^2 = -3 \times -3 = 9$. Bij veel rekenmachines en computerprogramma’s moet de laatste berekening ingevoerd worden als $-3 \times (-3)$, omdat twee operatoren (hier $\times$ en $-$) niet direct na elkaar mogen voorkomen.

OPGAVEN

1.1 Bereken eerst handmatig en daarna met je rekenmachine:

a $7 + 2 \times 5 - 3$	**d** $4 - 3^2$	**g** $(-4)^2 - 2 \times 5^2$
b $5 \times 4 - 7 \times 2$	**e** $-5^2 - 9^2$	**h** $-2^3 + 8 : 4$
c $3 - 2 \times (6 - 7)$	**f** $(4 - 6)^2 + 3 \times 2^2$	**i** $15 : 3 \times 5 - (-2)^3$

1.2 Breuken

Breuk
Teller
Noemer

Bij een breuk heet het gedeelte boven de deelstreep de teller en het gedeelte onder de deelstreep de noemer, dus: breuk $= \frac{\text{teller}}{\text{noemer}}$.
In de breuk $\frac{3}{4}$ geeft de noemer aan wat voor soort je hebt (vierden) en de teller geeft aan hoeveel je er daarvan hebt (drie).

Je komt breuken onder meer tegen als je iets eerlijk gaat verdelen: je hebt drie repen en je deelt ze met zijn vieren; dan krijgt ieder $\frac{3}{4}$ reep.

Een breuk is alleen nul, als de teller nul is; bij eerlijk delen krijgt niemand wat, als er niets te verdelen is; dus $\frac{0}{a} = 0$, als $a \neq 0$. Deze eigenschap zullen we nog vaak gebruiken.
Breuken kom je ook vaak tegen in opgaven als deze: wat is je gemiddelde snelheid als je 7 kilometer loopt in 2 uur?
Snelheid is afstand gedeeld door tijd, dus $v = \frac{s}{t} = \frac{7\,\text{km}}{2\,\text{uur}} = \frac{7}{2}$ km/uur.
Eventueel kun je hier de helen nog uithalen en dan krijg je: $3\frac{1}{2}$ km/uur.

De bewerkingen bij breuken komen als volgt aan de orde:
1 mintekens
2 vereenvoudigen
3 optellen en aftrekken
4 vermenigvuldigen
5 delen

1 Mintekens
Bij een breuk maakt het niet uit of een minteken in de teller staat of in de noemer of voor de hele breuk. Let wel op als er nog meer plus- of mintekens in de breuk voorkomen. Het is het meest overzichtelijk als er zo weinig mogelijk mintekens staan en dan nog het liefst voor de breuk.

VOORBEELD 1.2

1 $\frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$ en ook $\frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$, maar $\frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$.

2 $\frac{-2+5}{3} = \frac{3}{3} = 1$, maar $-\frac{2+5}{3} = -\frac{7}{3}$, want teller en noemer behandel je alsof er haakjes omheen staan.

Laat een min niet zwerven, maar geef duidelijk aan waar hij staat: in de teller, in de noemer of vóór de breuk.

2 Vereenvoudigen
Of je 26 km loopt in 8 uur of 13 km in 4 uur, dat maakt voor de gemiddelde snelheid niet uit. Er geldt dan ook $\frac{26}{8} = \frac{13}{4}$; je mag teller en noemer door hetzelfde getal delen.

VOORBEELD 1.3

1 $\frac{10}{15} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{2}{3}$; teller en noemer zijn gedeeld door 5.

2 $\frac{24}{30} = \frac{4 \times 6}{5 \times 6} = \frac{4}{5}$; teller en noemer zijn gedeeld door 6.

3 $\frac{204}{780} = \frac{51 \times 4}{195 \times 4} = \frac{51}{195} = \frac{17 \times 3}{65 \times 3} = \frac{17}{65}$; eerst gedeeld door 4, daarna door 3.

Uiteindelijk is er door 12 gedeeld; dat wordt wel de *grootste gemeenschappelijke deler* (ggd) van 204 en 780 genoemd.

3 Optellen en aftrekken
Om breuken bij elkaar te kunnen optellen moet je ze eerst gelijknamig maken, wat betekent dat de noemers gelijk zijn. Dit bereik je door teller en

noemer met een geschikt getal te vermenigvuldigen. Vervolgens kun je de tellers optellen (noemer blijft hetzelfde).
Aftrekken van breuken gaat op dezelfde manier.

VOORBEELD 1.4

1 $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1 \times 5}{3 \times 5} + \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$

Hoe kom je aan die 15 in de noemer?

Altijd kun je het product van de noemers nemen, maar vaak kan het 'zuiniger'.

2 $\frac{5}{6} - \frac{3}{8} = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} - \frac{3 \times 3}{8 \times 3} = \frac{20}{24} - \frac{9}{24} = \frac{11}{24}$

Je hoeft dus niet 48 als nieuwe noemer te nemen, want 24 volstaat.

We noemen 24 het *kleinste gemeenschappelijke veelvoud* (kgv) van 6 en 8.

3 $\frac{1}{90} + \frac{1}{45} = \frac{1}{90} + \frac{2}{90} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$

Als je 90 × 45 als nieuwe noemer had gekozen, had je achteraf veel meer werk gehad aan het vereenvoudigen van het antwoord.

4 $4\frac{1}{3} - 2\frac{5}{7} = \frac{13}{3} - \frac{19}{7} = \frac{13 \times 7}{3 \times 7} - \frac{19 \times 3}{7 \times 3} = \frac{91}{21} - \frac{57}{21} = \frac{34}{21} = 1\frac{13}{21}$

4 Vermenigvuldigen
Vermenigvuldigen van breuken doe je door de tellers met elkaar te vermenigvuldigen en de noemers ook. Dus $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$. Je kunt dit als volgt inzien: je wilt $\frac{2}{3}$ deel van $\frac{5}{7}$ nemen. Schrijf $\frac{5}{7} = \frac{15}{21}$ en nu zie je dat $\frac{2}{3}$ deel hiervan $\frac{10}{21}$ is, want $\frac{2}{3}$ van 15 is 10.

VOORBEELD 1.5

1 $\frac{3}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{32}$

2 $\frac{2}{3} \times \frac{6}{7} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$; hier zijn in de laatste stap teller en noemer gedeeld door 3.
Dit had ook eerder gekund: $\frac{2}{3} \times \frac{6}{7} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$.

3 $3 \times \frac{2}{11} = \frac{3}{1} \times \frac{2}{11} = \frac{6}{11}$

4 $2\frac{1}{5} \times 3\frac{2}{7} = \frac{11}{5} \times \frac{23}{7} = \frac{253}{35} = 7\frac{8}{35}$; het is dus *onjuist* om alleen $2 \times 3 = 6$ en $\frac{1}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{2}{35}$ op te tellen.

!

Merk op dat je breuken *niet* gelijknamig hoeft te maken bij vermenigvuldigen; dat doe je alleen bij optellen en aftrekken!

5 Delen
Delen van breuken doe je door de teller te vermenigvuldigen met het omgekeerde van de noemer. Dus: $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$. Je kunt dit inzien door te bedenken dat je eigenlijk wilt weten hoe vaak de noemer in de teller past. In

één hele past $\frac{7}{5}$ maal $\frac{5}{7}$; in $\frac{2}{3}$ deel dan $\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}$. In feite vermenigvuldig je teller en noemer van de breuk met het omgekeerde van de noemer, waardoor de noemer 1 wordt: $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}}{\frac{5}{7}\times\frac{7}{5}} = \frac{2}{3}\times\frac{7}{5} = \frac{14}{15}$.

VOORBEELD 1.6

1 $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{6}{7}} = \frac{1}{4}\times\frac{7}{6} = \frac{7}{24}$

2 $\frac{5\frac{1}{2}}{1\frac{3}{4}} = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{7}{4}} = \frac{11}{2}\times\frac{4}{7} = \frac{44}{14} = \frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$

3 $\frac{2}{\frac{3}{4}} = 2\times\frac{4}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

4 $\frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{1}} = \frac{2}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Merk op dat de voorbeelden 3 en 4 alleen verschillen in de volgorde waarin gedeeld wordt, maar dat dit verschillende antwoorden oplevert. Geef dus altijd duidelijk aan wat je bedoelt!

OPGAVEN

1.2 Vereenvoudig de volgende breuken zo ver mogelijk. Haal ook de helen eruit.

a $\frac{14}{35}$ **c** $\frac{24}{36}$ **e** $\frac{52}{68}$ **g** $\frac{63}{105}$ **i** $\frac{396}{156}$ **k** $\frac{126}{315}$

b $\frac{48}{16}$ **d** $\frac{35}{80}$ **f** $\frac{60}{85}$ **h** $\frac{117}{65}$ **j** $\frac{112}{630}$ **l** $\frac{252}{196}$

1.3 Bereken zonder rekenmachine:

a $\frac{2}{7}+\frac{3}{5}$ **d** $\frac{5}{42}-\frac{7}{90}$ **g** $3:\frac{4}{7}\times\frac{5}{9}$ **j** $\frac{5}{8}:\frac{2}{3}\times\frac{16}{9}$ **m** $\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$

b $\frac{3}{8}-\frac{4}{13}$ **e** $\frac{4}{5}\times\frac{7}{9}$ **h** $\frac{4}{9}\times\frac{7}{4}\times\frac{3}{11}$ **k** $\frac{5-(3+2)}{7\times 4:2}$ **n** $\frac{2}{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}}$

c $\frac{7}{10}+\frac{2}{15}$ **f** $1\frac{3}{7}\times 3\frac{5}{8}$ **i** $\frac{5}{7}-\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}$ **l** $\frac{7-(3-5)}{6\times 3:2}$ **o** $\frac{\frac{5}{7}}{\frac{3}{5}-\frac{1}{3}}$

1.4 De wet van Ohm uit de elektriciteitsleer luidt:

$$R = \frac{U}{I}\text{, oftewel: weerstand [ohm]} = \frac{\text{spanning [volt]}}{\text{stroomsterkte [ampère]}}$$

Bereken R exact als $U = 15\frac{2}{3}$ volt en $I = 2\frac{1}{7}$ ampère.

1.5 Bij een parallelschakeling van drie weerstanden geldt voor de vervangingsweerstand:

$$\frac{1}{R_v} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Bereken R_v als gegeven is:

a $R_1 = 5\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 3\,\text{k}\Omega$, $R_3 = 15\,\text{k}\Omega$

b $R_1 = 1\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 2\,\text{k}\Omega$, $R_3 = 3\,\text{k}\Omega$

c $R_1 = 1\tfrac{1}{6}\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 3\tfrac{1}{2}\,\text{k}\Omega$, $R_3 = 1\tfrac{2}{3}\,\text{k}\Omega$

1.3 Staartdelingen

Staartdeling

Door middel van een staartdeling kun je het quotiënt van twee getallen berekenen.

VOORBEELD 1.7

Gegeven: $\frac{17438}{46}$.

Berekening

$$\begin{array}{llll}
46 & / & 17438 & \backslash \quad 379 + \dfrac{4}{46} \\
 & & \underline{138}\,- & \\
 & & 363 & \\
 & & \underline{322}\,- & \\
 & & 418 & \\
 & & \underline{414}\,- & \\
 & & 4 &
\end{array}$$

Beschrijving

Omdat 1 en 17 te klein zijn om door 46 te delen, kijk je hoe vaak 46 op 174 gedeeld kan worden (oftewel: hoe vaak het erin past, uitgedrukt in helen). Dit gaat 3 keer; de 3 schrijf je achter de backslash op (deze 3 staat nu eigenlijk voor 300).

Omdat $3 \times 46 = 138$, houd je $174 - 138 = 36$ over. Dan haal je 3 aan en schrijf je die achter de 36.

Nu ga je kijken hoe vaak 46 op 363 gedeeld kan worden: 7 keer. Die 7 schrijf je rechts achter de 3 (de 7 geeft de tientallen aan).

Omdat $7 \times 46 = 322$, houd je $363 - 322 = 41$ over. Nu haal je 8 aan.

46 op 418 gaat 9 keer (9 opschrijven) en $9 \times 46 = 414$ en $418 - 414 = 4$, de rest is 4.

Deze rest 4 deel je door 46 en schrijf je achter de helen. Je hebt nu berekend dat $\frac{17438}{46} = 379 + \frac{4}{46}$ of kortweg $379\,\frac{4}{46}$, wat nog te vereenvoudigen is tot $379\,\frac{2}{23}$.

Eventueel kun je door nullen aan te halen verder gaan achter de komma in plaats van het exacte antwoord als breuk op te schrijven.

Ga nu zelf na dat: $\dfrac{52863}{72} = 734\,\frac{5}{24}$.

In hoofdstuk 3 zullen we volgens hetzelfde principe veeltermen (met machten van x) op elkaar delen.

OPGAVEN

1.6 Bepaal door middel van een staartdeling:

a $\dfrac{71425}{36}$ **b** $\dfrac{151843}{24}$ **c** $\dfrac{392858}{735}$ **d** $\dfrac{9204371}{3782}$

Herhalingsopgaven

1

1.1 Bereken eerst handmatig en daarna met je rekenmachine:

a $5 - 2^3 \times 7 + 3^2$
b $6 : 2 + 8 \times 4^2$
c $4 - 2 \times (9 - 7)$
d $(2 - 3) \times 14 - 5^2$
e $(3 + 4)^2 - 2 \times 3^2$
f $-5^3 - 9^2 + 2^3$
g $(-4)^3 + 2 \times (-5)^2$
h $2 \times (7^2 + 35) : 14$
i $4 \times (3 \times 2) - (-3)^2$

1.2 Vereenvoudig de volgende breuken zo ver mogelijk. Haal ook de helen eruit.

a $\frac{10}{45}$
b $\frac{18}{54}$
c $\frac{34}{51}$
d $\frac{75}{180}$
e $\frac{12}{78}$
f $\frac{160}{85}$
g $\frac{63}{115}$
h $\frac{27}{648}$
i $\frac{87}{126}$
j $\frac{105}{630}$
k $\frac{341}{121}$
l $\frac{204}{374}$

1.3 Bereken zonder rekenmachine:

a $\frac{3}{7} + \frac{2}{9}$
b $\frac{3}{11} - \frac{2}{13}$
c $\frac{6}{35} + \frac{5}{14}$
d $\frac{7}{30} - \frac{5}{42}$
e $\frac{2}{7} \times \frac{6}{11}$
f $3\frac{2}{5} \times 1\frac{5}{7}$
g $2 : \frac{4}{9} \times \frac{5}{7}$
h $\frac{4}{9} \times \frac{7}{8} - \frac{3}{5}$
i $\frac{5}{7} - \frac{2}{5} : \frac{4}{3}$
j $\frac{5}{9} : \frac{2}{3} \times \frac{6}{5}$
k $\frac{7 - (3 + 1)}{5 \times 4:2}$
l $\frac{8 - (3 - 7)}{6 - 3:2}$
m $\dfrac{5}{\frac{1}{2} + \frac{1}{7}}$
n $\dfrac{7}{\frac{1}{6} + \frac{3}{4}}$
o $\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{2}{5} - \frac{1}{3}}$

1.4 Bij een parallelschakeling van drie weerstanden geldt voor de vervangingsweerstand:

$$\frac{1}{R_v} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Bereken R_v als gegeven is:
a $R_1 = 4\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 7\,\text{k}\Omega$, $R_3 = 14\,\text{k}\Omega$
b $R_1 = 5\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 9\,\text{k}\Omega$, $R_3 = 15\,\text{k}\Omega$
c $R_1 = 8\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 12\,\text{k}\Omega$, $R_3 = 18\,\text{k}\Omega$
d $R_1 = 10\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 15\,\text{k}\Omega$, $R_3 = 25\,\text{k}\Omega$
e $R_1 = 40\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 60\,\text{k}\Omega$, $R_3 = 80\,\text{k}\Omega$
f $R_1 = 100\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 120\,\text{k}\Omega$, $R_3 = 150\,\text{k}\Omega$

1.5 Bepaal door middel van een staartdeling:

a $\frac{583491}{67}$
b $\frac{778490}{16}$
c $\frac{275449}{912}$
d $\frac{7560321}{3642}$