Statica en Sterkteleer

Harry van Egmond,
Jacques Timmers, Arnette Vogelaar

1e druk

Noordhoff Uitgevers

Statica en Sterkteleer

Harry van Egmond
Jacques Timmers
Arnette Vogelaar

Eerste druk

Noordhoff Uitgevers Groningen/Utrecht

Ontwerp omslag: G2K (Groningen-Amsterdam)
Omslagillustratie: Unsplash - John Robert Marasigan

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Hoger Onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189
www.fsc.org

0 / 18

ISBN(ebook) 978-90-01-88813-9

ISBN 978-90-01-88812-1
NUR 173

Woord vooraf

Er zijn veel boeken geschreven over sterkteleer, statica en vervormingsleer, veelal bewerkte vertalingen in het Nederlands van boeken die in Amerika zijn uitgebracht. Deze vertaalde boeken bevatten vaak te veel pagina's omdat onderwerpen te vaak worden herhaald in een iets andere context. Ook is het zo dat bestaande boeken meestal slechts één van de drie onderwerpen behandelen. Een student moet dan drie aparte boeken aanschaffen. Er is ook een groot verschil in niveau waar te nemen. Sommige boeken gaan 'te kort door de bocht' wanneer het de mathematische precisie betreft, en sommige gaan te diep op de materie in en zijn dus minder geschikt voor technische opleidingen op hbo-niveau.
Dit boek beoogt een tussenweg te bewandelen. De onderwerpen sterkteleer, statica en vervormingsleer, die sterk aan elkaar zijn gerelateerd, zijn in dit boek samengekomen en er is tevens voorzien in een basishoofdstuk met een aantal natuurkundige begrippen, benodigd voor het goed kunnen bestuderen van dit boek. Er is gepoogd om in een compact bestek basiskennis aan te reiken alsmede met beknopte theorie de sterkteleer, statica en vervormingsleer aan de orde te laten komen.
De schrijvers hopen dat dit boek een goede balans creëert voor wat betreft de integratie van de drie onderwerpen in één boek zonder in oppervlakkigheid of te grote diepgang te vervallen. Wij vinden het een praktisch boek geworden, met flink wat voorbeelden en opgaven waarmee een student aan een technische hbo-opleiding goed uit de voeten kan. Wij hopen dat deze studenten dit ook zo zullen ervaren.

Harry van Egmond
Jacques Timmers
Arnette Vogelaar

Deventer/Dronten/Drachten, juni 2018

Inhoud

Inleiding

Statica en Sterkteleer is geschreven voor aankomend hbo-ingenieurs. Tijdens en na je studie krijg je te maken met constructies en machines. Wat je functie ook zal zijn in de toekomst, je moet goed kunnen communiceren met andere technici en ook technische zaken goed kunnen uitleggen aan niet-technici. Kennis van en inzicht in toegepaste mechanica is daarom van groot belang. Je moet begrijpen welke krachten, spanningen en vervormingen optreden in constructies als gevolg van uitwendige belastingen.
Dit boek behandelt drie onderwerpen uit de toegepaste mechanica: statica, sterkteleer en vervormingsleer. De dynamica waarbij constructies/onderdelen aan versnellingen onderhevig zijn, vereist een aparte beschouwing die niet binnen dit boek past. Dat neemt niet weg dat de meeste constructies, waarmee je als hbo-ingenieur te maken zult krijgen, als statisch te beschouwen zijn als je hier aan gaat rekenen.

Opzet van het boek
Hoofdstuk 1 bestaat uit een deel van de natuurkundige havo-stof met toegevoegd uitleg over de begrippen koppel en stationaire aandrijvingen. Deze begrippen komen in de volgende hoofdstukken aan bod.
Hoofdstuk 2 gaat over de statica, ofwel evenwichtsleer. Vooral de inwendige belastingen in constructies en de dwars- en normaalkrachten en momenten die daarin optreden zijn nodig om het hoofdstuk 3 over sterkteleer te kunnen begrijpen. In hoofdstuk 2 komen ook vakwerken en scheve belastingsgevallen aan de orde.
Hoofdstuk 3 gaat over de sterkteleer. Hier gaan we in op de materialen en de vorm van een constructie zodanig dat deze een uitwendige belasting kan opnemen.
Hoofdstuk 4 heeft als onderwerp de vervormingsleer. Hier is geen sprake van de aanname van starre lichamen, maar van constructies die als gevolg van een uitwendige belasting doorbuiging of een hoekverdraaiing ondergaan.

Op de website www.staticaensterkteleer.noordhoff.nl is materiaal te vinden ter ondersteuning tijdens het bestuderen van dit boek.

1 Algemene begrippen

Na bestudering van dit hoofdstuk kun je:
- de juiste significantie, eenheden en grootheden toepassen
- vectoren ontbinden en bij elkaar optellen
- het zwaartepunt van een voorwerp bepalen
- de begrippen kracht, moment, koppel en vermogen toepassen

Stel je eens voor, je hebt een nieuwe klapstoel gekocht. Je klapt de stoel uit en je ploft er op neer. Maar voordat je je ervan bewust bent, zit je niet op de stoel maar op de vloer: de poten van de stoel zijn doorgebogen. Je besluit de klapstoel terug te brengen naar de winkel en daar neemt de verkoper zuchtend de zoveelste klapstoel in ontvangst en geeft je geld terug…
Dit is een voorbeeld waarbij een product of een onderdeel van een product niet goed functioneert; het is namelijk niet sterk en/of stijf genoeg en er treedt ontoelaatbare vervorming op. In dit boek komen de onderwerpen statica, sterkteleer en vervormingsleer aan bod waarmee je kunt bepalen of een product(onderdeel) functioneert. Voordat je begint met het bestuderen van de volgende hoofdstukken is het noodzakelijk om een aantal basisbegrippen te kennen en te begrijpen. In dit hoofdstuk bespreken we begrippen als grootheden, eenheden, getallen, goniometrie, vectoren, krachten en vermogen. In de volgende hoofdstukken van dit boek kom je deze begrippen in een toegepaste vorm tegen.

1

1.1 Grootheden, eenheden en getallen

Grootheid
Eenheid

In het dagelijks leven maak je veel gebruik van grootheden en eenheden. Een grootheid is iets dat je kunt meten en de eenheid is de maat waarin je de grootheid uitdrukt. Voorbeelden hiervan zijn een tijdsduur van 10 seconden of een massa van 85 kilogram. De waarde van een grootheid druk je uit in een getal gevolgd door de eenheid. Deze beide uitdrukkingen kun je korter schrijven, namelijk als $t = 10$ s en $m = 85$ kg. Hierbij zijn tijd en massa de grootheden, s en kg de eenheden.

Symbolen

De symbolen, die je gebruikt om de grootheden uit te drukken, zijn vaak de eerste letter van de Engelse vertaling van de grootheid: *m, F, t, P, n, R* (mass, force, time, power, number of rotations, resistance).
In de volgende subparagrafen bespreken we eerst het begrip SI-eenheid. Daarna kijken we naar eenheden binnen de techniek. We zien wat een dimensieanalyse betekent. Ook beschrijven we hoe je het verband tussen grootheden kunt vinden. Ten slotte behandelen we het begrip significantie.

1.1.1 SI-basiseenheden

SI-eenheden

In de praktijk gebruiken we diverse eenheden voor de grootheid lengte, zoals inch, yard of meter. Ook voor de massa zijn er verschillende eenheden, zoals kilogram, ton of pound. In dit boek gebruiken we SI-eenheden. In tabel 1.1 vind je de zeven SI-basiseenheden.

TABEL 1.1 SI-basiseenheden

Grootheid	Symbool grootheid	Eenheid	Afkorting eenheid
Tijd	*t*	seconde	s
Lengte	*l*	meter	m
Massa	*m*	kilogram	kg
Elektrische stroom	*I*	ampère	A
Absolute temperatuur	*T*	kelvin	K
Hoeveelheid stof	*n*	mol	mol
Lichtsterkte	*S*	candela	cd

Dimensie

Afgeleide SI-eenheid

Een ander woord voor eenheid is dimensie. De dimensie van een grootheid duid je aan door het symbool van de grootheid tussen rechte haken te zetten. Bijvoorbeeld $[t]$ = s, wat je uitspreekt als: 'de eenheid van tijd is seconde'. Deze SI-basiseenheden kun je ook combineren om een afgeleide SI-eenheid te krijgen. Dit doe je bijvoorbeeld bij het uitdrukken van een snelheid in meter per seconde (m/s). Hierbij vormen de SI-basiseenheden samen de afgeleide SI-eenheid. Voor de afgeleide SI-eenheid 'newton' geeft dit:

$$\left[F\right] = \mathrm{N} = \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Veelgebruikte afgeleide SI-eenheden zijn opgenomen in bijlage A.

Bij het uitvoeren van berekeningen kan het getal voor de eenheid heel groot of heel klein zijn. Om te voorkomen dat je een lange reeks nullen moet opschrijven, kun je gebruikmaken van de wetenschappelijke notatie van getallen óf een voorvoegsel plaatsen voor de eenheid. Een voorbeeld hiervan is:

Wetenschappelijke notatie

Voorvoegsel

1.000 gram = 10^3 gram = 1 kg

Duizend kun je dus ook schrijven als 10^3, maar vaker kom je dit tegen als een k (voluit: kilo) voor de eenheid. Veelgebruikte voorvoegsels zijn opgenomen in tabel 1.2.

TABEL 1.2 Voorvoegsels

Voorvoegsel	Symbool	Naam	Decimaal equivalent	Wetenschappelijke notatie
giga	G	miljard	1.000.000.000	10^9
mega	M	miljoen	1.000.000	10^6
kilo	k	duizend	1.000	10^3
deci	d	tiende	0,1	10^{-1}
centi	c	honderdste	0,01	10^{-2}
milli	m	duizendste	0,001	10^{-3}
micro	μ	miljoenste	0,000 001	10^{-6}

1.1.2 Eenheden binnen de techniek

Alle voorwerpen of constructies hebben bepaalde afmetingen. Om met een fabrikant over de precieze vorm en afmetingen te kunnen communiceren, leg je deze vast in een technische tekening. Dit is een tekening van het totale onderdeel/product bestaande uit verschillende aanzichten en wordt ook wel een werktekening genoemd. In figuur 1.1 staat een werktekening van het onderste deel van een lampenkap. Om te voorkomen dat de fabrikant een tekening verkeerd leest, zijn de tekenregels en methodes vastgelegd in normen. In Nederland is deze normalisatie in handen van het Nederlands Normalisatie Instituut (NNI) te Delft. Je noemt dit ook wel NEN-normen, waarbij NEN staat voor Nederlandse Norm. Over de maten op een technische tekening is het volgende opgenomen in NEN-normen (bron: NEN):

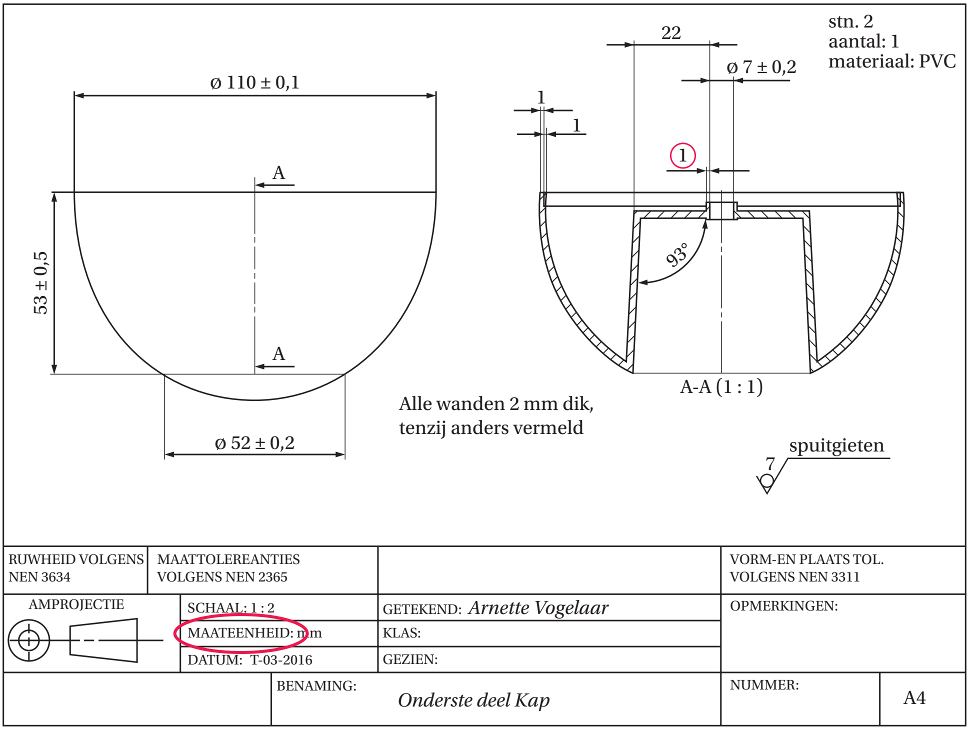
Technische tekening

NEN-normen

> ‘Indien alle lengtematen in dezelfde eenheid worden uitgedrukt, mag het symbool voor de eenheid worden weggelaten onder voorwaarde dat de toegepaste eenheid op de tekening of in de bijbehorende documentatie wordt verklaard.’

Om te voorkomen dat je bij elke maat een eenheid moet weergeven, kies je er meestal voor om de kleinste maat weer te geven als een getal tussen de 1 en 10. Dit zie je ook terug in de technische tekening (figuur 1.1). In de praktijk betekent dit dat je bij berekeningen meestal niet met meters, de SI-eenheid voor lengte, rekent maar met millimeters omdat je deze eenheid ook gebruikt in een technische tekening.

FIGUUR 1.1 Technische tekening



1.1.3 Dimensieanalyse

Het is essentieel dat de eenheden (dimensies) binnen een formule kloppen. Een voorbeeld is het berekenen van de oppervlakte van een tafelblad, waarbij je de lengte met de breedte vermenigvuldigt. De twee eenheden van de lengte en de breedte moeten (inclusief voorvoegsel) aan elkaar gelijk zijn. Zo vermenigvuldig je om de oppervlakte te bepalen geen centimeters met meters. Omdat je bij voorkeur rekent met SI-eenheden, zet je eerst de centimeters om naar meters. De oppervlakte van een tafelblad druk je dan uit in m^2. Natuurlijk kun je ervoor kiezen om het oppervlak in een andere eenheid, zoals cm^2 of mm^2, uit te drukken.

Dimensieanalyse

Als je niet zeker bent van een formule of de bijbehorende eenheid, dan kun je een dimensieanalyse uitvoeren. Bij een formule betekent dit dat de eenheid aan de linkerkant van het is-teken gelijk is aan de eenheid aan de rechterkant. Als voorbeeld kijken we naar de inhoud van een balk. Bij het uitvoeren van een dimensieanalyse zet je de eenheden op de plaats van de grootheid. Dit geeft:

$$[V] = [l] \cdot [b] \cdot [h] \text{ oftewel } \mathrm{m}^3 = \mathrm{m} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{m}$$

Hierin is:
V het volume in kubieke meter
l de lengte in meter
b de breedte in meter
h de hoogte in meter

Je ziet in de formule dat aan de linkerkant hetzelfde staat als aan de rechterkant; op deze manier zie je dat het gebruik van de eenheden correct is.

1.1.4 Verbanden tussen grootheden

Verband tussen grootheden

Het verband tussen grootheden kun je beschrijven met een formule. Je kunt dit verband vinden door een aantal verschillende waarden in te vullen. Zo vind je voor het volume van een balk met afmetingen van 1 cm × 1 cm × 2 cm met de formule $V = l \cdot b \cdot h$ dat dit 2 cm^3 is. Maar wat is het volume als de lengte van de balk twee keer zo groot is ($l = 2$ cm)? Invullen van deze waarde geeft een volume van 4 cm^3. Kortom, het vergroten van de lengte met een factor twee geeft een twee keer zo groot volume. Je vindt een volume dat acht keer zo groot is wanneer je alle afmetingen (de lengte, breedte en hoogte) twee keer zo groot maakt. Dit verband kun je ook vinden door goed naar een formule te kijken in plaats van getallen in te vullen. Een voorbeeld is de formule $y = 2 \cdot x$, waarbij zowel x als y een grootheid vertegenwoordigen. Maak je x twee keer zo groot, dan wordt y ook twee keer zo groot. Bij de formule $y = \dfrac{2}{x}$ gebeurt precies het omgekeerde. Maak je de waarde van x twee keer zo groot, dan vind je voor y een twee keer zo kleine waarde. Per situatie kun je afleiden wat het effect van de verandering in x is op de waarde van y, door voor x een getal in te vullen en te beredeneren wat er met y gebeurt. Voorbeeld:

Gegeven is de formule $y = \dfrac{5}{x^3}$.

Stel je maakt x twee keer zo groot, wat gebeurt er dan met y?
In plaats van x vul je dan $2x$ in en schrijf je de formule uit; dit geeft:

$$\frac{5}{(2x)^3} = \frac{5}{2^3 \cdot x^3} = \frac{5}{8 \cdot x^3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{x^3}.$$

Door deze uitkomst te vergelijken met de oorspronkelijke formule, zie je dat er eigenlijk staat: $\dfrac{1}{8} y$.
Kortom, maak je x twee keer zo groot, dan wordt y een achtste keer zo groot oftewel 8 keer zo klein.

1.1.5 Significantie

Significante cijfers

De nauwkeurigheid van een getal bepaal je aan de hand van het aantal significante cijfers. Het aantal significante cijfers is het totaal aantal cijfers in het getal, waarbij de nullen aan het begin niet meetellen. Het maakt hierbij dus niet uit waar de komma staat. Een cijfer in een getal is meer significant (belangrijk) als het bepalender is voor de grootte van een getal. Zo is het meest significante cijfer het eerste cijfer – het meest linkse – in een getal en het minst significante cijfer het laatste cijfer – het meest rechtse – in een getal. Voorbeeld:

71,658 → vijf significante cijfers
Het meeste significante cijfer van 71, 658 is de 7 en die staat voor 70.
Het minst significante cijfer is 8, die staat voor 0,008.
0,064 → twee significante cijfers

Bij het doen van metingen, pas je de regels voor significante cijfers toe. Hierbij hangt het aantal significante cijfers van een getal samen met het gekozen meetinstrument.
We leggen de significantie van een meetinstrument uit aan de hand van het begrip massa. Het gebruik van de begrippen massa en gewicht loopt door elkaar heen. Het verschil hiertussen leggen we eerst kort uit. Daarna bespreken we significantie in berekeningen.

Gewicht versus massa

Massa
Gewicht
Newton

De begrippen gewicht en massa gebruiken we in spreektaal meestal niet correct. De massa geeft namelijk de hoeveelheid materiaal waaruit een voorwerp bestaat aan en heeft de eenheid kilogram. Het gewicht is de kracht die een voorwerp uitoefent op de ondergrond of op een ophangpunt. De eenheid van gewicht is newton.
Wat een weegschaal doet, is het meten van de zwaartekracht oftewel het gewicht van een voorwerp. Alleen bij het aflezen van dit gewicht staat er dus foutief de eenheid (kilo)grammen op de weegschaal vermeld. Er is wel een relatie tussen deze twee begrippen. Deze relatie zie je terug in de bepaling van de zwaartekracht. Over de zwaartekracht lees je meer in paragraaf 1.4. In de volksmond spreken we bijna altijd over een gewicht in kilogram maar eigenlijk bedoelen we hiermee het gewicht in newton.

Afbeelding 1.2 Bepaling van het gewicht van een tomaat

Meet-onzekerheid

In afbeelding 1.2 ligt een tomaat op een weegschaal om de massa van de tomaat te bepalen. De digitale weegschaal geeft aan dat de tomaat 111 gram weegt. De massa is tot op 1 gram nauwkeurig af te lezen, wat betekent dat de massa van de tomaat een getal is tussen de 110,5 en 111,5 gram. Deze meetonzekerheid geef je ook wel weer met een plusminusteken na de meetwaarde: 111 ± 0,5 gram.

Wanneer je 111,0 gram noteert, geef je aan dat de massa van de tomaat tussen de 110,95 en 111,05 gram ligt. De meetonzekerheid is in dit geval dus 0,05 gram, maar dit is nauwkeuriger dan deze weegschaal kan aangeven!
De massa lees je af in grammen, maar misschien wil je wel verder rekenen met milligrammen. Met behulp van de kennis uit deze paragraaf kun je dit antwoord ook noteren als:
111 g = 111 × 1.000 = 111.000 mg, maar dat is *onjuist*!
Wat gebeurt er nu? Het aantal significante cijfers verandert hiermee van drie naar zes, maar de nauwkeurigheid van de weegschaal is niet gewijzigd. Dit betekent dat het getal in milligrammen ook maar drie significante cijfers mag hebben. Om dit netjes te noteren, maak je gebruik van de wetenschappelijke notatie. Dit geeft: $111\ g = 111 \cdot 10^3\ mg$.

Berekeningen
Ook bij berekeningen houd je rekening met significantie. De uitkomst kan namelijk nooit nauwkeuriger zijn dan de getallen waarmee je begint. Voor de significatie van de uitkomst kijk je dan ook naar het minst significante getal. Hierbij is er wel een verschil tussen berekeningen waarbij je optelt of aftrekt en vermenigvuldigt of deelt. De regels zijn als volgt:

- *Optellen en aftrekken:* het resultaat krijgt evenveel cijfers achter de komma als het getal met het kleinste aantal cijfers achter de komma.
- *Vermenigvuldigen en delen:* het resultaat heeft evenveel significante cijfers als het getal met het kleinste aantal significante cijfers.

Voorbeeld:

85 + 3,15 = 88, want 85 heeft geen cijfers achter de komma.
5,11 × 7,555 = 38,6, want 5,11 heeft het kleinste aantal significante cijfers.

Opgaven

1.1 Grootheden
Geef aan om welke grootheid het gaat en reken om (maak gebruik van tabel 1.1 en bijlage A).

a 5 MJ = … J
b 10 cm = … km
c 1.000.000 s = … μs
d 150 mm^2 = … m^2
e 124 min = … h
f 1 N/mm^2 = … MPa

1.2 Eenheden
Druk uit in SI-basiseenheden (in kg, m en s) (maak gebruik van tabel 1.1 en bijlage A).

a 10 MPa
b 5 km/h
c 40 mN/μs
d 500 mW·Ms

1.3 Dimensieanalyse
Voer een dimensieanalyse uit voor (maak gebruik van tabel 1.1 en bijlage A).

a $E = \frac{1}{2}m \cdot v_2$
b $F = m \cdot a$
c $a = \dfrac{v}{t}$
d $P = M \cdot \omega$
e $\sigma = \dfrac{F}{A}$

1.4 Verbanden
Wat gebeurt er met y als x twee keer zo groot wordt in de volgende formules?

a $y = 10x$
b $y = 5x^2$

1

c $y = \dfrac{4}{x}$

d $y = \dfrac{5a}{x^2}$, met a een constante

1.5 Significantie

Bereken (let op significantie):

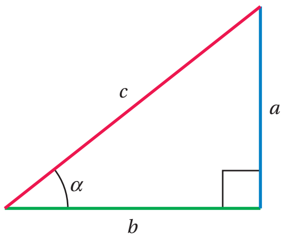
a 6,4930 × 0,010
b 8,59403 + 3,4
c 80 – 4,5
d 9,00 / 4,5
e 100.000 – 0,1
f 8,767 × 2,34

1.2 Goniometrie

Goniometrie

Een onderdeel van de wiskunde dat zich bezighoudt met hoeken en lengtes heet goniometrie. De goniometrische formules maken het mogelijk om te rekenen aan een driehoek. Ook pas je goniometrie toe bij het ontbinden van vectoren (zie paragraaf 1.3).

FIGUUR 1.3 Rechthoekige driehoek



Een driehoek heeft drie zijden. Elk van deze zijden heeft een eigen lengte. Kenmerkend voor een driehoek is dat de drie hoeken van de driehoek samen 180° zijn. Als twee zijden van een driehoek loodrecht op elkaar staan, oftewel een hoek van 90° met elkaar maken, spreek je van een rechthoekige driehoek (zie figuur 1.3).

Stelling van Pythagoras

Voor een rechthoekige driehoek geldt de stelling van Pythagoras, die een verband tussen de zijden van een driehoek geeft (formule [1.1]):

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad [1.1]$$

Goniometrische formules

Hoek α is – bij een rechthoekige driehoek – altijd kleiner dan 90°. Bij een rechthoekige driehoek kun je daarnaast een aantal regels gebruiken om de lengte van een zijde te berekenen als één hoek en een andere zijde bekend zijn met behulp van de volgende goniometrische formules (zie ook voorbeeld 1.1):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \qquad [1.2]$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \qquad [1.3]$$

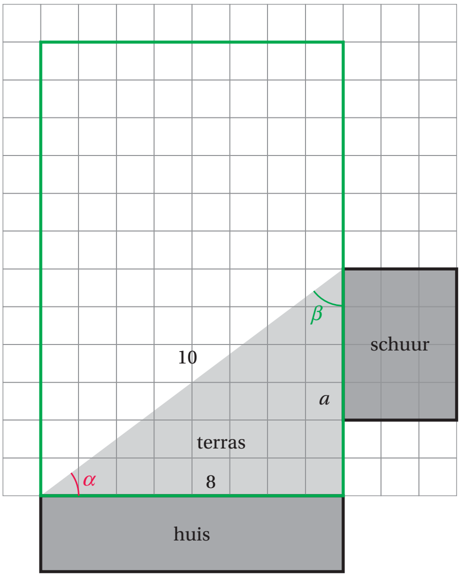
$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \qquad [1.4]$$

VOORBEELD 1.1

Toepassing goniometrie

Jonathan heeft besloten om in zijn tuin een driehoekvormig terras aan te leggen zodat hij vanuit zijn huis richting de schuur kan lopen (zie figuur 1.4). Het terras wordt even breed als zijn huis, 8 meter. De lengte van de schuine zijde van het terras is 10 meter.

FIGUUR 1.4 Voorbeeldvraag goniometrie



Gevraagd

Bereken de afstand van de rechterhoek van het huis tot de verste hoek van de schuur (grootte van a) en de hoeken waaronder de tegels ter hoogte van de schuine terraszijde gesneden moeten worden (hoeken α en β).

Aanpak en oplossing

De hoeken van elke tegel, die grenst aan de schuine terraszijde, zijn gelijk aan de hoeken α en β van het volledige terras. Hierbij gaan we uit van de gelijkvormigheid van driehoeken. De tuin is een rechthoek, dus je hebt te maken met een rechthoekige driehoek, waarvan twee zijden bekend zijn. De derde zijde bereken je dan met behulp van de stelling van Pythagoras (formule [1.1]):

Invullen: $8^2 + a^2 = 10^2$

Omschrijven: $a^2 = 10^2 - 8^2$

Uitrekenen: $a = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6\text{ m}$

Er zijn verschillende manieren waarop je de hoeken kunt berekenen. Allereerst kun je hoek α berekenen door de goniometrische formules in te vullen (formule [1.2], [1.3] of [1.4]):

$$\sin\alpha = \frac{6}{10} \quad \text{of} \quad \cos\alpha = \frac{8}{10} \quad \text{of} \quad \tan\alpha = \frac{6}{8}.$$

Om de hoek te berekenen, gebruik je de inverse functie van de sinus, cosinus of tangens. Dit noteer je als volgt: $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{6}{10}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{8}{10}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{6}{8}\right)$.

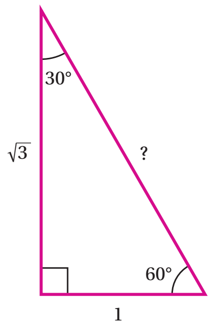
Met elk van deze drie formules vind je dat $\alpha = 36{,}9°$. Op een vergelijkbare manier kun je uitrekenen dat $\beta = 53{,}1°$ of door gebruik te maken van de kennis dat alle hoeken van de driehoek samen 180° zijn:
$\beta = 180° - 90° - 36{,}9° = 53{,}1°$.

Opgaven

1.6 Gegeven is een rechthoekige driehoek (figuur 1.5). De lengte van één zijde is onbekend en kan op verschillende manieren berekend worden. Bereken de onbekende schuine zijde door gebruik te maken van:

a De stelling van Pythagoras
b De cosinus
c De sinus

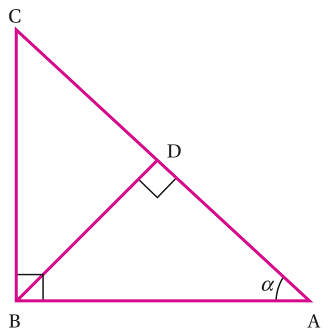
FIGUUR 1.5 bij opgave 1.6



1.7 Gegeven is een driehoek ABC (figuur 1.6). Hoek B is een rechte hoek. De zijde BD staat loodrecht op zijde AC. Verder is bekend dat BD = 18 en hoek $\alpha = 47°$. Bereken:

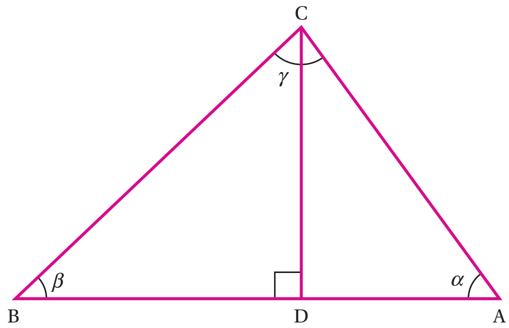
a De lengte van de zijde AB
b De lengte van de zijde AD
c De lengte van de zijde BC
d De lengte van de zijde DC

FIGUUR 1.6 bij opgave 1.7



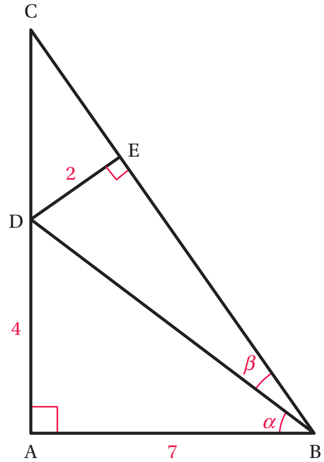
1.8 Gegeven een driehoek ABC (figuur 1.7). Zijde CD staat loodrecht op zijde AB. AC = 10, BC = 12 en hoek $\alpha = 65°$.
Bereken:
a Hoek γ
b Hoek β
c De lengte van de zijde AB

FIGUUR 1.7 bij opgave 1.8



1.9 Gegeven een rechthoekige driehoek ABC (figuur 1.8), die is opgebouwd uit verschillende driehoeken. Zijde DE staat loodrecht op zijde BC en AB = 7, AD = 4 en DE = 2.
Bereken:
a Hoek α
b De lengte van de zijde BD
c Hoek β
d De lengte van de zijde CE
e De lengte van de zijde BC

FIGUUR 1.8 bij opgave 1.9



1.3 Vectoren

In deze paragraaf geven we eerst antwoord op de vraag wat een vector precies is. Daarna bespreken we het optellen van vectoren en vervolgens het ontbinden van vectoren.

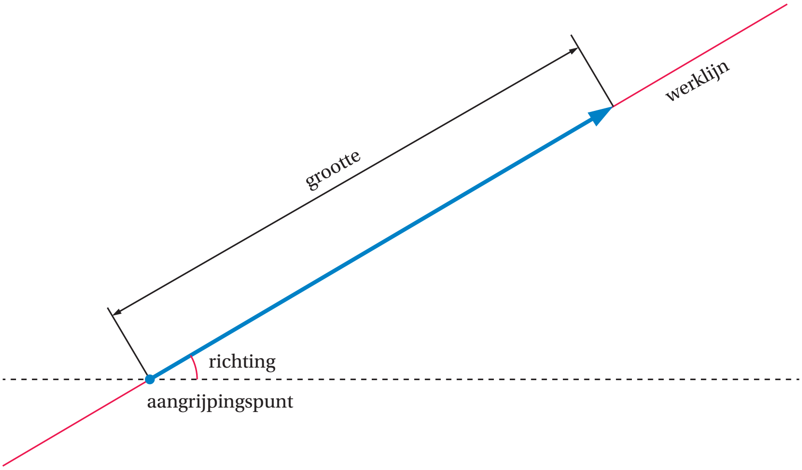
1.3.1 Wat is een vector?

Vector
Vectoriële grootheden

Een vector is een pijl die je gebruikt om grootheden, die een richting hebben, weer te geven. Voorbeelden van vectoriële grootheden zijn kracht $\vec{F}$ en snelheid $\vec{v}$. Binnen de wiskunde plaats je boven het symbool van een vectoriële grootheid een pijltje. In figuur 1.9 is een vector weergegeven. Hierin is het volgende te zien:

- Het begin van de vector geeft het aangrijpingspunt aan.
- De lengte van de vector geeft de grootte weer.
- De pijlpunt geeft de richting van de vector weer.

FIGUUR 1.9 Vectorweergave



Het aangrijpingspunt is de staart van de vector. De afstand van de staart tot aan de pijlpunt van de vector kun je meten: dit is de lengte van de vector oftewel de grootte. De grootte van een vector kun je bepalen met een schaal, bijvoorbeeld 1 cm komt overeen met 1 N. Dit noteer je ook wel als 1 cm $\triangleq$ 1 N. Maar meestal geef je de grootte van de vector direct weer in de vorm van een getal met bijbehorende eenheid, zoals 5 N. Op deze manier heb je geen liniaal nodig om de lengte van een vector te bepalen. Ook voorkomt dit eventuele meet- en omrekenfouten van de lengte naar de grootte.

Modulus

In de wiskunde geef je de grootte (of modulus) van een vector weer met modulusstrepen '| |' links en rechts van de vector: $|\vec{F}|$. De grootte van de vector geef je als een scalar (getal) weer door deze te schrijven als $|\vec{F}| = F$.

Scalar

Ook de richting van de vector geef je bij voorkeur aan in een tekening zodat jij of iemand anders dit later niet meer uit de tekening hoeft op te meten. Dit kan bijvoorbeeld door de hoek ten opzichte van een bepaalde lijn te noteren.

Werklijn

De lijn die door een vector heenloopt (rode lijn in figuur 1.9), noem je de werklijn. Je kunt een vector langs zijn werklijn verschuiven zonder dat de werking van de kracht verandert. Hiermee komt het aangrijpingspunt dus ergens anders op de werklijn te liggen. Dit maakt berekeningen met vectoren vaak eenvoudiger. Een voorbeeld is een voorwerp hangend aan een lint (zie afbeelding 1.10): de kracht werkend op de schroef in de muur verandert niet bij een andere lengte van het lint. Kortom, de krachtvector als gevolg van het gewicht van het voorwerp kun je verschuiven in de richting van het lint.

Afbeelding 1.10 Voorwerp hangend aan een lint

1.3.2 Optellen van vectoren

Vectoren kun je bij elkaar optellen. De som van de bij elkaar opgetelde vectoren heet een resulterende vector, maar noemen we ook wel resultante. Grafisch bepaal je de richting van de resulterende vector met behulp van de parallellogrammethode (zie ook voorbeeld 1.2). Hiervoor teken je vanaf de pijlpunt van de vectoren die je optelt (A en B) een stippellijn parallel aan de andere vector, zie figuur 1.11. De resulterende vector teken je vervolgens van het oorspronkelijke aangrijpingspunt (de staart) tot aan de plaats waar de stippellijnen elkaar snijden. De grootte van de resulterende vector kun je bepalen aan de hand van de lengte van deze vector. In figuur 1.11 heeft de resulterende vector een grootte van C. In berekeningen gebruik je alleen de lengte van de pijl (de grootte).

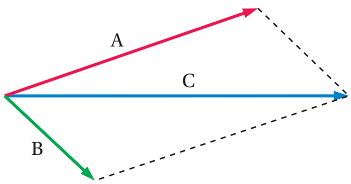
Resulterende vector

Resultante

Parallellogrammethode

1

FIGUUR 1.11 Optellen van vectoren



In de praktijk zet je in een tekening alle vectoren. Elke vector geef je een unieke naam. De naam die je de vector geeft, is afhankelijk van de grootheid en het aantal vectoren. Gebruikelijk is om onder de letter van de grootheid een letter of cijfer te hangen die je in een begeleidende tekst of in berekeningen definieert. Dit heet een subscript.

Subscript

Binnen de vakgebieden statica, sterkte- en vervormingsleer heb je te maken met krachten. De vectoren die daarbij horen zijn krachtvectoren. In de rest van deze paragraaf gaan we uit van krachtvectoren. Het symbool voor de grootheid kracht is F (zie subparagraaf 1.1.1). In een tekening kun je krachtvectoren benoemen door ze te nummeren bijvoorbeeld $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ enzovoort. De resulterende krachtvector geef je weer door onder het symbool voor de grootheid (F) het subscript ‘r’ of ‘res’ te noteren. Een resulterende kracht kan de som zijn van een groot aantal krachtvectoren. De resulterende krachtvector $\vec{F}_r$ is in dit geval gelijk aan $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots$ Als verkorte schrijfwijze voor deze optelling gebruiken we in de wiskunde ook wel de Griekse hoofdletter voor de S (van som), de sigma Σ. Zo kun je noteren dat de resulterende kracht gelijk is aan de som van alle krachtvectoren. In verkorte schrijfwijze is dit $\vec{F}_r = \sum \vec{F}_i$. De letter i is de index van de sommatie en kun je zien als een getal lopend van 1 tot en met het aantal krachten dat je bij elkaar wilt optellen.

Krachtvectoren

Sigma

Index

1

VOORBEELD 1.2

Toepassing parallellogrammethode

Op een zonnige dag besluit Lieke een stuk te gaan fietsen. Eerst fietst ze 5,0 km naar het oosten, vervolgens 2,0 km naar het noorden, dan 1,5 km naar het westen en uiteindelijk houdt ze een pauze nadat ze nog 3,0 km richting het zuiden heeft gefietst.

Gevraagd

Bepaal in welke richting Lieke moet fietsen om weer terug te komen naar haar oorspronkelijke startpunt en hoeveel kilometer deze afstand is.

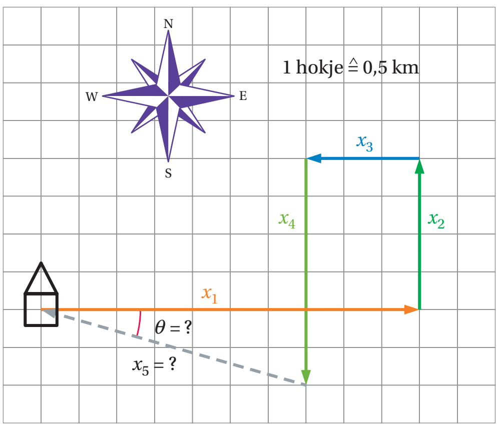
Aanpak

Deze informatie kun je omzetten in een vectortekening en om het antwoord te geven op de vraag kun je de paralellogrammethode toepassen. Omdat het hier gaat over afstanden, gebruiken we de notatie x_i voor de verschillende afstanden die Lieke fietst, waarbij de x staat voor afstand in kilometer met een subscript 1 tot en met 4. Van elke vector is de (wind)richting gegeven, dit gebruik je om in de tekening de vector in een bepaalde richting te laten wijzen. Het aangrijpingspunt van de eerste vector is het startpunt, van elke volgende vector is dit het punt waar Lieke van richting verandert.

Oplossing

De vectortekening bij dit vraagstuk is gemaakt op ruitjespapier en weergegeven in figuur 1.12. De lengte van vector x_5 en de richting zijn nu te bepalen met behulp van goniometrie. De verticale lengte van x_5 het startpunt (huis) is 1 km en de horizontale lengte is 3,5 km. Met behulp van formule [1.1] kun je berekenen dat grootte van de vector $x_5 = \sqrt{1^2 + 3{,}5^2} \approx 3{,}6$ km. Voor de richting van de vector x_5 pas je formule [1.4] toe: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3{,}5}\right) \approx 16°$. Als je het midden van de windroos verplaatst naar het aangrijpingspunt van de vector x_5 zie je dat Lieke in de richting tussen West en West-Noord-West (WNW) zal moeten fietsen om op haar startpunt terecht te komen.

FIGUUR 1.12 Voorbeeldvraag parallellogrammethode



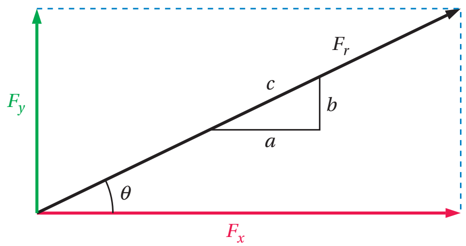
1.3.3 Ontbinden van vectoren

Een vector kan in elke willekeurige richting staan. Dit kan moeilijkheden geven zodra je wilt gaan rekenen met deze vector. In dat geval is het makkelijker als je de vector ontbindt in een horizontale en verticale component die loodrecht op elkaar staan, net als in een *x,y*-assenstelsel (zie figuur 1.13).
Afhankelijk van de gegevens, een hoek of een verhouding, kun je de *x*- en *y*-componenten van de vector met de volgende formules bepalen (zie figuur 1.13):

$$F_x = F_r \cdot \cos\theta \quad F_y = F_r \cdot \sin\theta$$

$$F_x = F_r \cdot \left(\frac{a}{c}\right) \quad F_y = F_r \cdot \left(\frac{b}{c}\right)$$

FIGUUR 1.13 Ontbinden van een (kracht)vector



Omgekeerd is het ook mogelijk dat je alleen de twee loodrecht op elkaar staande componenten (F_x en F_y) kent, die parallel staan aan de *x*- en *y*-as. Vanuit deze twee componenten zijn de grootte en de richting van de resulterende vector ($\vec{F}_r$) te bepalen met behulp van de stelling van Pythagoras en goniometrie.
De grootte van de resulterende vector is dan:

$$F_r = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

De bijbehorende richting bereken je met behulp van:

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} \text{ oftewel } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right)$$

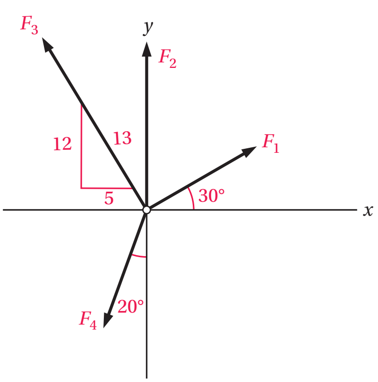
Voorbeeld 1.3 betreft een som van vier krachtvectoren. In dit voorbeeld zie je hoe je het ontbinden van vectoren toepast.

VOORBEELD 1.3

Toepassing ontbinden van vectoren

Gegeven is een situatie waarin vier krachten aangrijpen in de oorsprong, zie figuur 1.14. De richting van de krachtvectoren is weergegeven ten opzichte van een *x,y*-assenstelsel. De grootte van de vectoren is als volgt: $F_1 = 10$ N, $F_2 = 15$ N, $F_3 = 26$ N en $F_4 = 13$ N. Je kunt deze vectoren optellen tot één resulterende krachtvector.

FIGUUR 1.14 Voorbeeldsom met vier krachtvectoren



De krachten werken in verschillende richtingen. Voor de krachten F_1 en F_4 is de hoek ten opzichte van een as gegeven. In het geval van F_3 is er een verhouding gegeven. De eerste stap in het oplossen van dit vraagstuk is de krachten te ontbinden in de *x*- en een *y*-richting. Hiervoor pas je de theorie over het ontbinden van vectoren toe. Let hierbij wel goed op ten opzichte van welke as een hoek is weergegeven en in welke richting de pijl wijst. In het assenstelsel is naar boven en naar rechts als positief gedefinieerd. De berekeningen staan in tabel 1.3.

TABEL 1.3

Kracht	*x*-component	*y*-component	Opmerking
F_1	$F_1 \cos 30° =$ $10 \cos 30° = 8{,}7$ N	$F_1 \sin 30° =$ $10 \sin 30° = 5{,}0$ N	De hoek is gegeven ten opzichte van de *x*-as, zoals in figuur 1.13. De formules zijn direct toepasbaar.
F_2	0 N	15 N	De krachtvector wijst enkel in de verticale richting en heeft dus alleen een *y*-component.
F_3	$-\frac{5}{13} F_3 =$ $-\frac{5}{13} \cdot 26 = -10$N	$\frac{12}{13} F_3 = \frac{12}{13} \cdot 26$ $= 24$ N	Er is een verhouding gegeven. Het is ook mogelijk om deze verhouding in een hoek $\theta \approx 67{,}4°$(zie subparagraaf 1.3.3) om te zetten en de vectorcomponenten vergelijkbaar als voor kracht F_1 te berekenen. De *x*-component wijst naar links en is daardoor negatief.
F_4	$-F_4 \sin 20° =$ $-13 \sin 20°$ $= -4{,}4$ N	$-F_4 \cos 20° =$ $-13 \cos 20°$ $= -12$ N	De hoek is gegeven ten opzichte van de *y*-as in plaats van de *x*-as (figuur 1.13). Je kunt de hoek ten opzichte van de *x*-as bepalen (90° − 20° = 70°) en de formules toepassen. Dit is hetzelfde als figuur 1.13 90° te draaien waardoor voor de *x*-component een sinus in de formule komt en voor de *y*-component een cosinus. Zowel de *x*-component als de *y*-component is negatief als gevolg van de richting van de vectorcomponent.

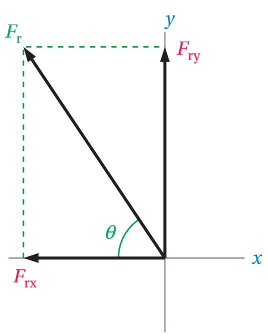
Alle componenten in de *x*-richting kun je bij elkaar optellen. Dit geeft de *x*-component van de resulterende vector (F_{rx}). Het optellen van de *y*-componenten geeft je de *y*-component van de resulterende vector (F_{ry}):

$$F_{rx} = \sum F_x = 8{,}7 + 0 - 10 - 4{,}4 = -5{,}7 \text{ N}$$

$$F_{ry} = \sum F_y = 5 + 15 + 24 - 12 = 32 \text{ N}$$

Ter visualisatie kun je een schets maken van deze resulterende vectorcomponenten, zie figuur 1.15. De vectorcomponenten hebben een grootte van 5,7 en 32 N. Omdat de *x*-component van de resulterende vector (F_{rx}) negatief is, wijst deze vector naar links. De grootte en richting van de resulterende vector kun je berekenen met behulp van deze vectorcomponenten. Dit geeft:

FIGUUR 1.15 Bepaling resulterende krachtvector



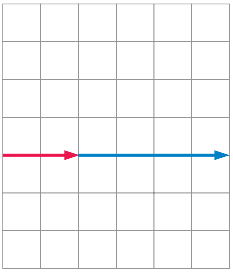
$F_r = \sqrt{(-5{,}7)^2 + 32^2} = 32{,}5$ N en $\tan\theta = \dfrac{32}{5{,}7} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{32}{5{,}7}\right) = 79{,}9°$
ten opzichte van de x-as zoals aangegeven in figuur 1.15.

De richting van de resulterende vector kun je ook uitdrukken ten opzichte van de positieve x-as. In dit geval is de hoek met de positieve x-as:
$180° - 79{,}9° = 100{,}1°$.

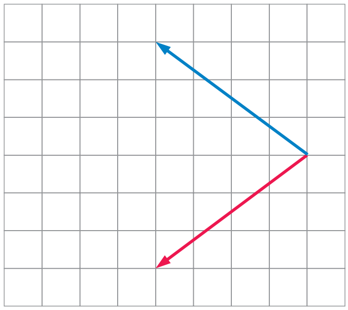
Opgaven

1.10 Bepaal de lengte (in hokjes) en de richting in graden ten opzichte van de positieve x-as van de resulterende vector in de volgende drie figuren.

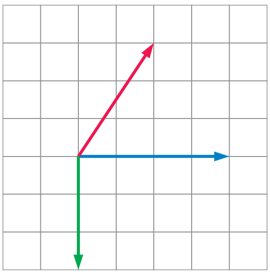
a



b



c



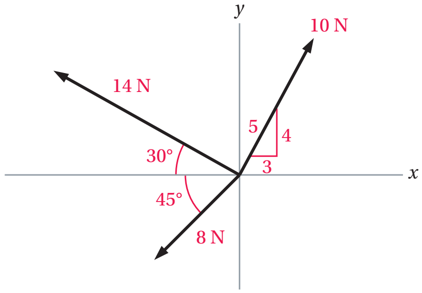
1.11 Bekijk figuur 1.16. Wat kun je zeggen over de som van de vier vectoren? De afmetingen van elk hokje zijn 1 cm × 1 cm.

FIGUUR 1.16 bij opgave 1.11

1

1.12 Bepaal voor elk van de vectoren in figuur 1.17 de grootte van de horizontale en verticale component. Let hierbij op de richting!

FIGUUR 1.17 bij opgave 1.12



1.13 Bekijk figuur 1.18.

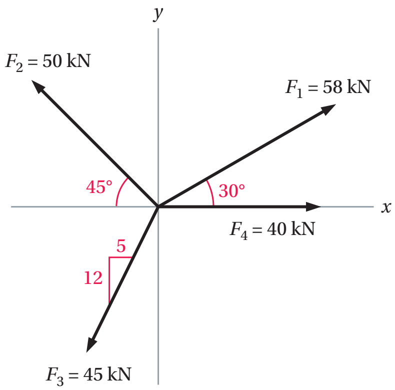
a Ontbind alle vectoren in een x- en een y-component.

b Bereken $\sum F_x$, oftewel tel de x-componenten van de vectoren bij elkaar op.

c Bereken $\sum F_y$.

d Bereken de resulterende kracht met de richting ten opzichte van de positieve x-as (F_r en θ).

FIGUUR 1.18 bij opgave 1.13



1.4 Krachten

Deze paragraaf start met de wetten van Newton, die de basis vormen voor het begrip kracht. Daarna vind je in een overzicht de meest voorkomende krachten en hoe je deze als vectoren in een tekening kunt weergeven.

1.4.1 Wetten van Newton

Natuurkundige Sir Isaac Newton (1642–1726) formuleerde in *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* in 1687 een drietal bewegingswetten, waarin hij ook het begrip kracht introduceerde. Deze wetten kennen we onder de naam de ‘wetten van Newton’. Ook de eenheid van kracht is naar hem vernoemd: newton. Voor de volledigheid bevat dit boek alle wetten van Newton. Voor de toepassing van statica zijn de eerste en derde wet van Newton relevant.

Wetten van Newton

Eerste wet van Newton

Als je een bal ergens neerlegt en je geeft er geen trap tegen oftewel je oefent er geen kracht op uit, dan zal de bal op zijn oorspronkelijke plek blijven liggen. De eerste wet van Newton beschrijft deze voorbeeldsituatie:

> Als er geen resulterende krachten op een voorwerp werken, blijft het in rust of beweegt het eenparig met een constante snelheid. In verkorte vorm: als $F_r = 0$, dan geldt $v = 0$ of v = constant.

Kortom, als iemand niet tegen je duwt, is er geen resulterende kracht en blijf je stil zitten. Een voorbeeld van de eerste wet van Newton waarbij de snelheid constant is, is een ideale bowlingbal waarop geen lucht- en rolwrijving werkt. Zonder enige wrijving zal deze bal eeuwig blijven rollen.

Tweede wet van Newton
De eerste wet van Newton stelt dat een voorwerp waarop geen resulterende kracht werkt op zijn plaats blijft of met constante snelheid beweegt: het behoudt zijn oorspronkelijke beweging. Als de resulterende kracht niet gelijk aan nul is ($F_r \neq 0$), gaat een voorwerp versnellen. Bij het in beweging komen verandert de snelheid van een voorwerp en spreek je van een versnelling. De tweede wet van Newton zegt:

Versnelling

> Wanneer er een resulterende kracht op een voorwerp werkt, dan zal dit voorwerp een versnelling krijgen in de richting van die kracht.

Het verplaatsen van een tafel door ertegen te duwen is een voorbeeld van de tweede wet van Newton. De tafel zal in eerste instantie stilstaan ($F_r = 0$ en $v = 0$). Bij het duwen tegen de tafel is de resulterende kracht niet meer nul: de tafel gaat verschuiven en krijgt dus een versnelling.

De grootte van de versnelling is afhankelijk van de grootte van de resulterende kracht. De versnelling bepaal je met behulp van de massa van het voorwerp. In formulevorm ziet de tweede wet van Newton er zo uit:

$$F_r = m \cdot a \qquad [1.5]$$

Hierin is:

F_r	de resulterende kracht	N
m	de massa	kg
a	de versnelling	m/s^2

Volgens formule [1.5] is er dus 1 N nodig om 1 kg een versnelling te geven van 1 m/s^2. Als je de kracht op een voorwerp verdubbelt, dan verdubbelt de versnelling ook. Als de massa van een voorwerp twee keer zo groot is, dan heb je ook een kracht nodig die twee keer zo groot is om dezelfde versnelling te realiseren.

Derde wet van Newton
Bij biljarten maak je gebruik van de derde wet van Newton. De derde wet van Newton luidt:

> Een kracht komt altijd voor in combinatie met een tegenkracht. Actiekracht en reactiekracht zijn even groot en tegengesteld gericht.

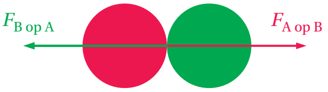
1

In formulevorm kun je de derde wet van Newton schrijven als:

$$F_{actie} = -F_{reactie} \quad [1.6]$$

In figuur 1.19 is een situatie weergegeven waarop twee biljartballen (A en B) elkaar raken. Op het contactmoment draagt de ene bal de kracht over aan de andere bal. In de figuur kun je dit zien als een krachtvector van B op A die naar links wijst en de krachtvector van A op B naar rechts. De krachten A en B zijn even groot, maar werken in tegengestelde richting en op verschillende objecten.

FIGUUR 1.19 Derde wet van Newton



1.4.2 Soorten krachten

Je kunt diverse soorten krachten onderscheiden. Hierna vind je de meest gebruikte krachten met een toelichting van de grootte, de richting en het aangrijpingspunt van de krachtvector.

Zwaartekracht

Een rijpe appel valt van een boom naar beneden omdat de aarde aan de appel 'trekt'. Tijdens het vallen neemt de snelheid van de appel steeds toe. Een vallend voorwerp ondergaat dus een versnelling, beter bekend als valversnelling (gravitatie). Deze versnelling is constant. De kracht waarmee de aarde aan de appel trekt, heet de zwaartekracht.

Valversnelling

Zwaartekracht

Gravitatiewet

Naast de drie wetten die Newton heeft geformuleerd, formuleerde hij ook de gravitatiewet. Deze wet heet ook wel de vierde wet van Newton. De gravitatiewet pas je toe om de aantrekkingskracht tussen twee voorwerpen te bepalen. Deze ziet er in formulevorm als volgt uit:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad [1.7]$$

Hierin is:

F	de aantrekkingskracht tussen twee voorwerpen	N
m_1	de massa van het eerste voorwerp	kg
m_2	de massa van het tweede voorwerp	kg
r	de afstand tussen de zwaartepunten van de voorwerpen	m
G	de gravitatieconstante: $6{,}67428 \cdot 10^{-11}$	$\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

De formule van de gravitatiewet (formule [1.7]) gebruik je bijna altijd in de vereenvoudigde vorm. Op aarde spreken we namelijk van de zwaartekracht, wat niets anders is dan de aantrekkingskracht van de aarde op een voorwerp. Door voor de massa m_1 van het eerste voorwerp de massa van de aarde ($5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg) en voor de afstand r tussen de voorwerpen de straal van de aarde ($6{,}371 \cdot 10^3$ m) in te vullen, krijg je de formule voor de zwaartekracht. Hierbij vormen m_1, r en G een andere constante namelijk de valversnelling g. De formule van de aantrekkingskracht van de aarde op een voorwerp is dan:

$$F_z = m \cdot g \qquad [1.8]$$

Hierin is:

F_z	de zwaartekracht	N
m	de massa van het voorwerp	kg
g	de valversnelling op aarde	9,81 m/s^2

Het aangrijpingspunt van de zwaartekracht is het zwaartepunt van een voorwerp, dit wordt uitgelegd in paragraaf 1.5.

Wat is de valversnelling (gravitatie)?

Aan ieder voorwerp wordt door de aarde 'getrokken'. De snelheid van de voorwerpen, als ze naar beneden vallen, hangt af van de luchtwrijving. Een rond voorwerp (gestroomlijnd) ondervindt veel minder wrijving dan een hoekig voorwerp. De lucht stroomt beter langs het ronde voorwerp, dat daardoor minder weerstand ondervindt. Als je voorwerpen in vacuüm laat vallen, vallen ze allemaal met dezelfde valversnelling. In vacuüm heb je namelijk geen wrijving met de lucht. Deze versnelling (g) noem je de valversnelling of gravitatieversnelling. De valversnelling op aarde is afhankelijk van de locatie waar je je bevindt. Op de polen is de valversnelling namelijk 9,83 m/s^2 en op de evenaar is dit 9,78 m/s^2. Om deze reden worden raketten meestal vanaf de evenaar gelanceerd omdat dit een brandstofbesparing oplevert. Binnen de wetenschap is afgesproken dat we rekenen met de gemiddelde valversnelling van 9,81 m/s^2.

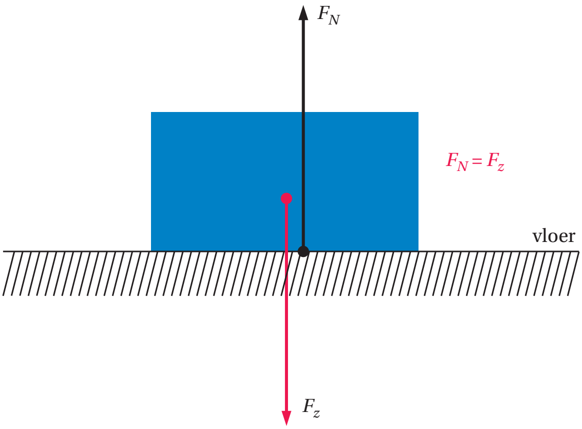
Bron: wetenschap.info.nl

Normaalkracht

Op een voorwerp, dat op de vloer staat, werkt een zwaartekracht. Alleen zakt het voorwerp niet door de ondergrond heen, het wordt tegengehouden door een even grote kracht die tegengesteld aan de zwaartekracht werkt en loodrecht op de ondergrond staat: de normaalkracht. Er is geen sprake van beweging en de resulterende kracht is nul, dus de krachten heffen elkaar op (eerste wet van Newton). De normaalkracht geef je weer als F_N. Het aangrijpingspunt van de normaalkracht is ter plaatse van het oppervlak waar een voorwerp de ondergrond raakt. In figuur 1.20 zijn zowel de zwaartekracht als de normaalkracht weergegeven voor de hiervoor genoemde situatie. Het aangrijpingspunt van de normaalkracht ligt natuurlijk recht onder het aangrijpingspunt van de zwaartekracht. Vaak teken je een vector zo dat deze niet de andere vector doorkruist, dus in figuur 1.20 is de vector van de normaalkracht iets naar rechts verschoven.

Normaalkracht

FIGUUR 1.20 Normaalkracht F_N



Bron: Sijbesma e.a. (2014) (bewerkt)

Veerkracht

De lengte van een veer verandert als je eraan trekt of erop duwt. Deze lengteverandering is afhankelijk van de kracht die je uitoefent en van een eigenschap van de veer zelf, namelijk de veerconstante. De relatie tussen kracht, veerconstante en lengteverandering (uitrekking) is:

Veerconstante

$$F_{veer} = C \cdot u \qquad [1.9]$$

Hierin is:

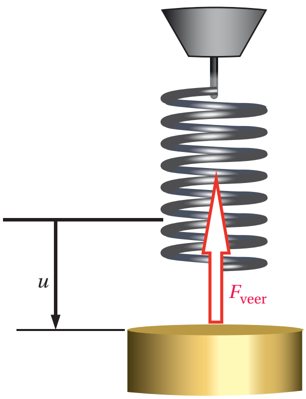
F_{veer}	de veerkracht	N
C	de veerconstante	N/m
u	de lengteverandering van de veer	m

Veerkracht

De richting van de veerkracht is tegengesteld aan de richting van de lengteverandering. Zoals je ziet in figuur 1.21, is het aangrijpingspunt van F_{veer} het uiteinde van de veer. De formule voor veerkracht kom je in een andere vorm in hoofdstuk 3 tegen onder de naam ‘wet van Hooke’.

Wet van Hooke

FIGUUR 1.21 Veerkracht



Wrijvingskracht

Bij vrijwel alle bewegingen op aarde is er sprake van wrijving. Wrijving is een kracht en dit noem je ook wel wrijvingskracht. De wrijvingskracht werkt altijd in tegenstelde richting ten opzichte van de (resulterende) kracht op het voorwerp. De wrijvingskracht grijpt aan daar waar de wrijving plaatsvindt: het grensvlak tussen het voorwerp en het oppervlak waarover het voorwerp beweegt. De wrijvingskracht is afhankelijk van een wrijvingscoëfficiënt en de normaalkracht:

Wrijvingskracht

Wrijvingscoëfficiënt

$$F_w = f \cdot F_N \qquad [1.10]$$

Hierin is:

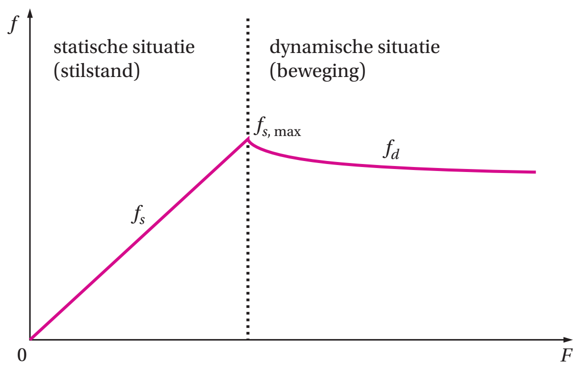
F_w	de maximale wrijvingskracht	N
f	de wrijvingscoëfficiënt	-
F_N	de normaalkracht	N

De wrijvingscoëfficiënt f is een getal dat de mate van wrijving tussen twee oppervlakken aangeeft en hangt af van de materialen die contact met elkaar maken. We maken onderscheid tussen een *statische* en een *dynamische wrijvingscoëfficiënt*. Er is sprake van een statische situatie als een voorwerp niet in beweging is oftewel er is geen beweging tussen de oppervlakken. De dynamische wrijvingscoëfficiënt is van toepassing als twee oppervlakken ten opzichte van elkaar bewegen. In figuur 1.22 zie je een grafiek waarin de kracht F (vaak een trek- of duwkracht) is uitgezet tegen de wrijvingscoëfficiënt f. Hierin is zowel de statische als de dynamische situatie weergegeven en is af te lezen dat de maximale statische wrijvingscoëfficiënt altijd groter is dan de dynamische ($f_{s,\,max} \geq f_d$). Waarden van f zijn te vinden in tabellen (zie bijlage B, tabel B.1) over wrijvingscoëfficiënten. Zo is er bij schaatsen sprake van metaal op ijs: glijden is dan goed mogelijk, dus f is zeer klein. De combinatie rubber en steen geeft een grote f: hiervan maak je bijvoorbeeld gebruik van bij veiligheidsschoenen (antislip).

Statische wrijvingscoëfficiënt

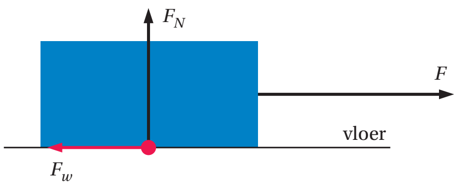
Dynamische wrijvingscoëfficiënt

FIGUUR 1.22 Statische en dynamische wrijving



Neem bijvoorbeeld een doos die op de grond staat. Deze kun je verschuiven door ertegenaan te duwen met een kracht F; dit is weergegeven in figuur 1.23. Zolang de doos stilstaat is er een wrijvingskracht aanwezig die even groot is, en in tegengestelde richting, als de kracht waarmee je tegen de doos duwt ($F_w = F$). Op een bepaald moment komt de doos in beweging. Tot het moment van schuiven neemt de wrijvingscoëfficiënt toe tot $f_{s,\,max}$ (zie figuur 1.22). De maximale wrijvingskracht is daarmee gelijk aan $F_{w,\,max} = f_{s,\,max} \cdot F_N$. Als de doos eenmaal in beweging is, zal de wrijvingskracht altijd lager zijn dan $F_{s,max}$ omdat $f_d < f_{s,\,max}$.

FIGUUR 1.23 Wrijvingskracht



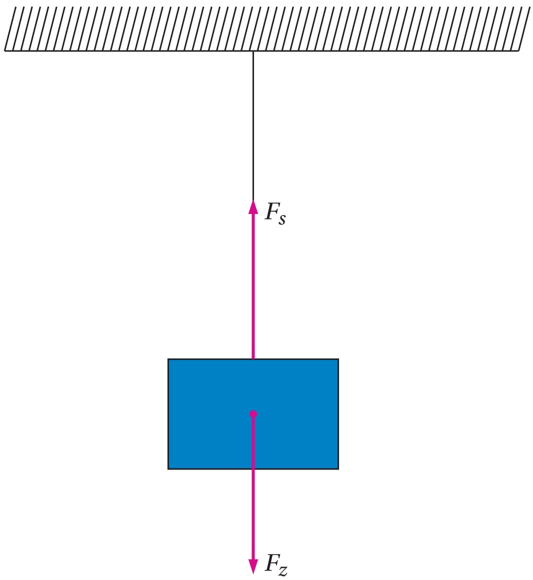
Bron: naar Sijbesma e.a. (2014) (bewerkt)

Spankracht

Spankracht

Een voorwerp dat aan een touw of kabel hangt, wil vallen als gevolg van de zwaartekracht, zie figuur 1.24. Het touw zorgt ervoor dat dit niet gebeurt door een reactiekracht te leveren. Deze reactiekracht van een touw of kabel noem je de spankracht. De grootte van de spankracht is in deze situatie even groot als de zwaartekracht die werkt op het voorwerp. Als aangrijpingspunt voor de spankracht gebruik je het punt waarop het touw of de kabel is verbonden met het andere voorwerp. Houd er rekening mee dat een touw of kabel alleen kan uitrekken; de spankracht kan alleen een trekkende werking hebben. Het symbool voor spankracht is F_s.

FIGUUR 1.24 Spankracht



Opgaven

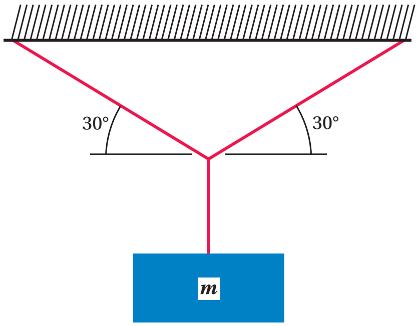
1.14 Bereken de zwaartekracht wanneer:
a $m = 35$ kg
b $m = 30$ g

1.15 Een veer rekt 15 cm uit als je er een kracht van 60 N op uitoefent. Bepaal de veerconstante *C*.

1.16 Een veer van 25 cm hangt aan een haak. De veer heeft een veerconstante van 25 N/cm.
Wat is de veerlengte wanneer er een massa van 25 kg aan hangt?

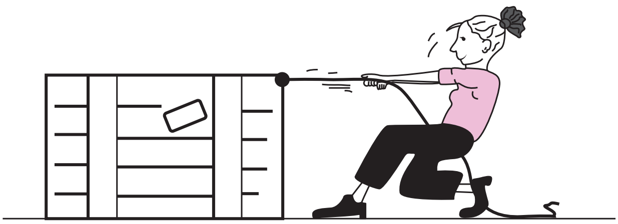
1.17 Een kist met een massa van 50 kg hangt met behulp van twee staalkabels aan het plafond (zie figuur 1.25).
a Welke krachten spelen hier een rol?
b Neem de tekening over en geef met pijlen aan hoe deze krachten werken (richting en aangrijpingspunt).
c Hoe groot is de spankracht in elke kabel?

FIGUUR 1.25 bij opgave 1.17



1.18 Beschouw figuur 1.26.
Ans trekt met een kracht van 150 N aan de kist. De kist heeft een massa van 10 kg en de maximale statische wrijvingcoefficiënt is 0,62.
a Welke krachten spelen hier een rol?
b Neem de tekening over en geef met pijlen aan hoe deze krachten werken (richting en aangrijpingspunt).
c Bereken of Ans de kist in beweging krijgt.

FIGUUR 1.26 bij opgave 1.18



1.5 Zwaartepunt

De zwaartekracht werkt op elk volume-element van een voorwerp. Als je dit in een tekening zou weergeven, zijn dit allemaal kleine krachtvectoren richting de aarde. Als je uitgaat van een homogeen figuur – elk even groot volume-element heeft dezelfde massa – kun je deze bij berekeningen vervangen door één resulterende vector, de zwaartekracht. Het aangrijpingspunt van de zwaartekracht noem je ook wel het zwaartepunt. **Zwaartepunt**
In de volgende subparagrafen zien we hoe je het zwaartepunt bepaalt voor eenvoudige figuren en voor een samengesteld figuur.

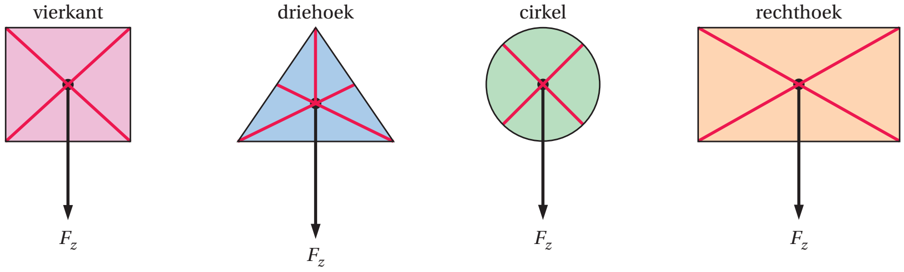
1

1.5.1 Zwaartepunt bij eenvoudige figuren

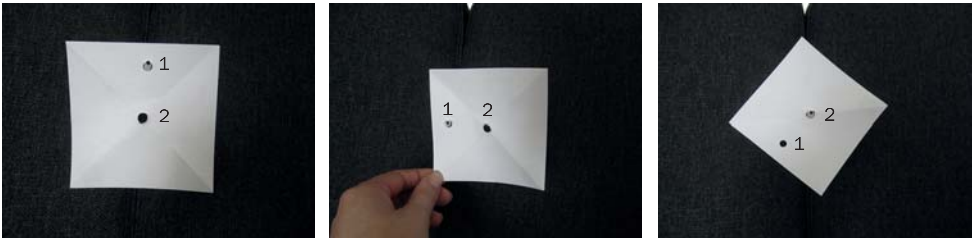
Symmetrielijnen

Voor eenvoudige (platte) figuren, zoals een cirkel, driehoek of vierkant, bepaal je het zwaartepunt door middel van het tekenen van symmetrielijnen. Het punt waar de symmetrielijnen elkaar kruisen is het zwaartepunt, zie figuur 1.27.

FIGUUR 1.27 Zwaartepunt bij eenvoudige figuren



Je kunt het zwaartepunt van een voorwerp ook controleren met behulp van pen en papier, zie afbeelding 1.28. Van het papier bepaal je het zwaartepunt met behulp van de symmetrielijnen. Ter hoogte van het zwaartepunt maak je een gaatje (gat 2). Daarnaast maak je op een willekeurig ander punt in het papier ook een gat (gat 1). Als je het papier laat balanceren op je penpunt ter hoogte van gat 1, zie je dat het papier gaat roteren als het gevolg van de zwaartekracht. Het papier draait totdat het zwaartepunt (gat 2) onder gat 1 ligt. Wanneer je je pen door gat 2, het zwaartepunt, steekt, zie je dat het papier niet de neiging heeft te gaan roteren. Zolang je de pen steekt door het zwaartepunt kun je het papier in elke willekeurige positie zetten zonder dat het papier roteert rondom dit punt.



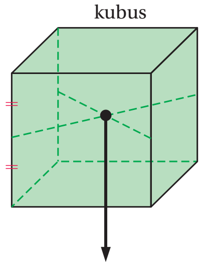
Afbeelding 1.28 Zwaartepunt-experiment (1) willekeurig gat, (2) gat op zwaartepunt

Translatie

Samenvattend kunnen we zeggen dat een kracht die aangrijpt in het zwaartepunt van een voorwerp niet zal leiden tot een rotatie van het voorwerp maar mogelijk wel tot translatie (beweging). Terwijl een kracht die buiten het zwaartepunt van een voorwerp aangrijpt ervoor zorgt dat een voorwerp wil gaan roteren.

Om het zwaartepunt van een voorwerp (driedimensionaal) te bepalen, maak je gebruik van wat je weet over de zwaartepunten van de aanzichten van een voorwerp. In figuur 1.29 is het zwaartepunt van een kubus weergegeven. Hierbij maak je gebruik van de kennis van het zwaartepunt van een vierkant. Het zwaartepunt van een figuur kun je weergeven door middel van coördinaten. Dit kun je doen door een coördinatenstelsel te definiëren.

FIGUUR 1.29 Zwaartepunt kubus



1.5.2 Zwaartepunt bij een samengesteld figuur

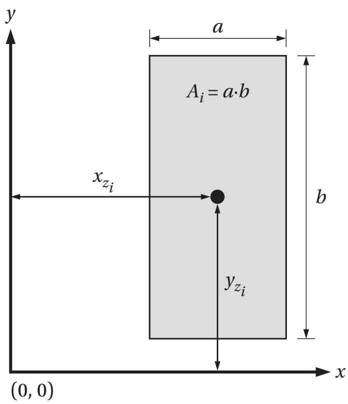
Soms kun je geen duidelijke symmetrielijnen tekenen. In zo'n geval is het zwaartepunt niet meer te bepalen zoals bij eenvoudige figuren. Als je te maken hebt met een figuur dat is opgebouwd uit meerdere eenvoudige deelfiguren, kun je het zwaartepunt bepalen door gebruik te maken van wat je weet van het zwaartepunt ($x_{z,i}$ en $y_{z,i}$) en het oppervlak (A_i) van een deelfiguur. Hierbij is i de index voor een getal van 1 tot en met het aantal deelfiguren waarin je het figuur opdeelt. De bijdragen van de zwaartepunten en de oppervlaktes van die deelfiguren leveren je dan het zwaartepunt van het totale figuur. Hierbij gebruik je de volgende formules:

$$x_z = \frac{\sum x_{z,i} \cdot A_i}{\sum A_i} \qquad [1.11]$$

$$\text{en } y_z = \frac{\sum y_{z,i} \cdot A_i}{\sum A_i} \qquad [1.12]$$

$\sum A_i$ betekent niets anders dan de oppervlaktes van alle afzonderlijke eenvoudige figuren tezamen oftewel het totale oppervlak van het figuur. Beide formules stellen dat de sommatie van de deeloppervlakken vermenigvuldigd met de zwaartepuntcoördinaten van die eenvoudige figuren gedeeld door het totale oppervlak van het figuur gelijk is aan de zwaartepuntcoördinaat. De vermenigvuldiging, $\sum x_{z,i} \cdot A_i$ of $\sum y_{z,i} \cdot A_i$ noem je ook wel het statisch moment (zie figuur 1.30). Om deze formules te kunnen toepassen, definieer je eerst een assenstelsel met de daarbij behorende zwaartepuntcoördinaten ($x_{z,i}$ en $y_{z,i}$) van de eenvoudige figuren. Zie de voorbeelden 1.4 en 1.5.

FIGUUR 1.30 Statisch moment

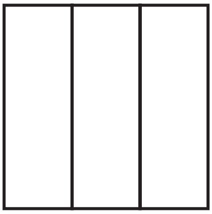


VOORBEELD 1.4

Bepaling zwaartepunt van een samengesteld figuur (1)

Een samengesteld profiel is opgebouwd uit een drietal platen met elk een afmeting van 30×10 mm, zie figuur 1.31.

FIGUUR 1.31 Samengesteld profiel



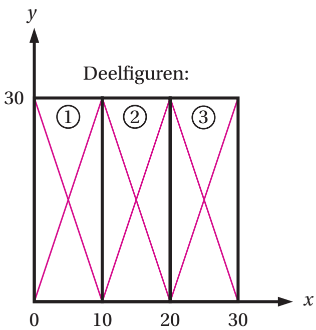
Gevraagd

Bepaal het zwaartepunt van dit samengestelde profiel.

Aanpak

Allereerst definieer je een assenstelsel, zodat je het zwaartepunt kunt uitdrukken ten opzichte van een bepaald gedefinieerd punt. De meest voor de hand liggende keuze is het assenstelsel te definiëren vanuit de hoek linksonder (zie figuur 1.32).

FIGUUR 1.32 Samengesteld profiel met assenstelsel



Oplossing 1

De snelste manier om het zwaartepunt te bepalen in deze situatie, is door de drie platen als één grote plaat te zien: samen vormen ze namelijk een vierkant profiel van 30×30 mm. Op basis van de symmetrielijnen vind je dat het zwaartepunt in dit assenstelsel ligt op $(x_z, y_z) = (15, 15)$.

Oplossing 2

Als je in een samengesteld profiel niet direct met symmetrielijnen het zwaartepunt kunt bepalen, kun je gebruikmaken van de theorie hiervoor en de formules [1.11] en [1.12]. Allereerst bepaal je de zwaartepuntcoördinaten en oppervlaktes van de afzonderlijke figuren, om daarna de zwaartepuntcoördinaten van het geheel te berekenen. Deze gegevens zijn samengevat in tabel 1.4.

TABEL 1.4

Gegeven	Deelfiguur 1	Deelfiguur 2	Deelfiguur 3
$x_{z,i}$	$x_{z,1} = 5$ mm	$x_{z,2} = 10 + \frac{10}{2} = 15$ mm	$x_{z,3} = 20 + \frac{10}{2} = 25$ mm
$y_{z,i}$	$y_{z,1} = 15$ mm	$y_{z,2} = 15$ mm	$y_{z,3} = 15$ mm
A_i	$A_1 = 10 \times 30 = 300$ mm^2	$A_2 = 10 \times 30 = 300$ mm^2	$A_3 = 10 \times 30 = 300$ mm^2

De x-coördinaat van het zwaartepunt vind je door middel van het invullen van de formule [1.11]:

$$x_z = \frac{x_{z,1} \cdot A_1 + x_{z,2} \cdot A_2 + x_{z,3} \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3} =$$

$$\frac{5\text{ mm} \times 300\text{ mm}^2 + 15\text{ mm} \times 300\text{ mm}^2 + 25\text{ mm} \times 300\text{ mm}^2}{300\text{ mm}^2 + 300\text{ mm}^2 + 300\text{ mm}^2} = 15\text{ mm}$$

Op dezelfde manier bereken je de y-coördinaat van het zwaartepunt met behulp van formule [1.12]:

$$y_z = \frac{y_{z,1} \cdot A_1 + y_{z,2} \cdot A_2 + y_{z,3} \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3} =$$

$$\frac{15\text{ mm} \times 300\text{ mm}^2 + 15\text{ mm} \times 300\text{ mm}^2 + 15\text{ mm} \times 300\text{ mm}^2}{300\text{ mm}^2 + 300\text{ mm}^2 + 300\text{ mm}^2} = 15\text{ mm}$$

Conclusie

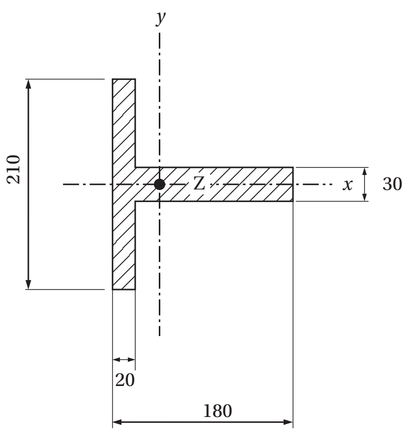
Met beide methoden vind je dat het zwaartepunt in dit assenstelsel ligt op $(x_z, y_z) = (15{,}15)$. Alleen is methode 1 sneller omdat je gebruikmaakt van het inzicht dat er symmetrielijnen aanwezig zijn. Wanneer je dit niet direct ziet of als deze symmetrielijnen niet aanwezig zijn, kun je gebruikmaken van methode 2.

VOORBEELD 1.5

Bepaling zwaartepunt van een samengesteld figuur (2)

Een samengesteld profiel is opgebouwd uit twee platen, zie figuur 1.33.

FIGUUR 1.33 Samengesteld profiel



Bron: Binnendijk (1993)

Gevraagd

Bepaal de plaats van het zwaartepunt Z.

Aanpak

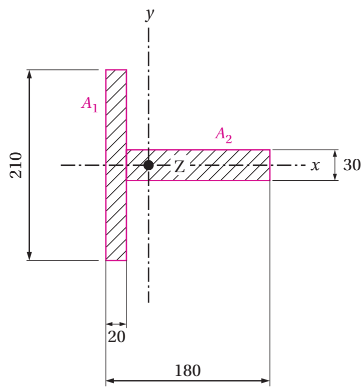
Om het zwaartepunt van het samengestelde profiel te bepalen, definieer je gewoonlijk eerst een assenstelsel. In deze situatie is het assenstelsel al gedefinieerd. Op basis van symmetrie zie je dat de x-as al door het zwaartepunt heen loopt. De locatie van de y-as kun je niet op basis van symmetrie bepalen. Kortom, hier ligt de oorsprong van het assenstelsel in het zwaartepunt van het figuur. Het figuur is in een tweetal eenvoudigere figuren op te delen waarvan we het zwaartepunt kunnen bepalen.

Oplossing
Om de zwaartepuntcoördinaat te vinden, maak je gebruik van de formule [1.11]:

$$x_z = \frac{\sum x_{z,i} \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2}{A_{totaal}}.$$

Hierin is A_1 het linkerdeeloppervlak, A_2 het rechterdeeloppervlak, zie figuur 1.34. De coördinaten $x_{z,1}$ en $x_{z,2}$ zijn de afstanden ten opzichte van de linkerzijde van het profiel. Invullen van formule [1.11] geeft:

FIGUUR 1.34 Opdeling van een samengesteld profiel



$$x_z = \frac{\frac{20}{2}\,\text{mm} \cdot (20\,\text{mm} \times 210\,\text{mm}) + \left(20 + \frac{160}{2}\right)\text{mm} \cdot (160\,\text{mm} \times 30\,\text{mm})}{(20\,\text{mm} \times 210\,\text{mm}) + (160\,\text{mm} \times 30\,\text{mm})}$$

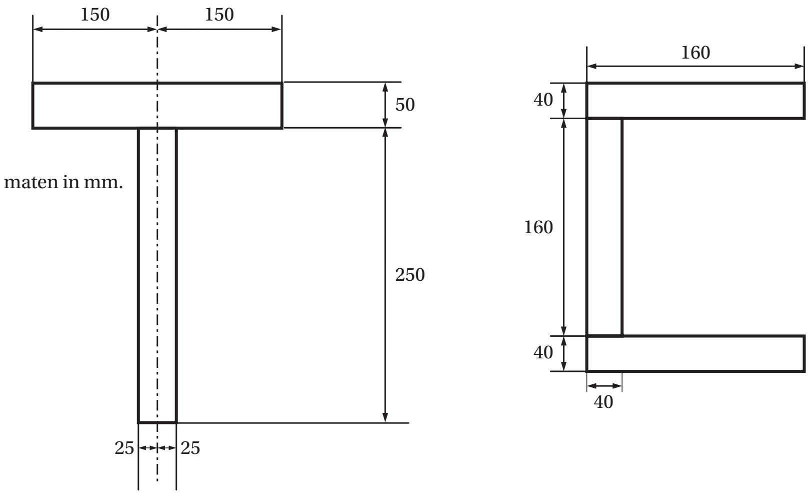
$$= \frac{(42.000 + 480.000)\,\text{mm}^3}{9.000\,\text{mm}^2} = 58\,\text{mm}$$

Kortom de y-as snijdt de x-as op een afstand van 58 mm gedefinieerd vanaf de linkerzijde van dit samengestelde profiel.

Opgaven

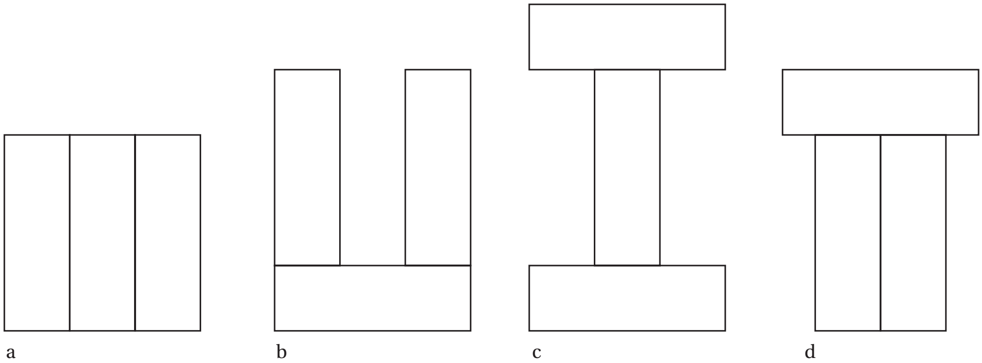
1.19 Bepaal de zwaartepunten van het T-profiel en U-profiel in figuur 1.35. De maten zijn aangegeven in millimeters.

FIGUUR 1.35 bij opgave 1.19



1.20 Met drie rechthoekige balken zijn vier verschillende profielen samengesteld (figuur 1.36). De afmetingen van de balk zijn 10×30 mm. Bepaal het zwaartepunt voor elk van deze profielen.

FIGUUR 1.36 bij opgave 1.20



1.6 Momenten

In deze paragraaf leggen we eerst het begrip 'moment' uit. Vervolgens zien we wat wordt bedoeld met een koppel van krachten. Dan bespreken we achtereenvolgens het buigmoment en het wringmoment. Ten slotte verdiepen we ons in de begrippen vermogen en toerental.

1.6.1 Het begrip moment

Bij het losdraaien van een moer met een steeksleutel speelt het begrip 'moment' een rol: hoe groter de lengte van de sleutel hoe minder kracht het kost om deze moer los te draaien. In figuur 1.37 (linkerafbeelding) is het moment grafisch weergegeven. De kracht F oefen je bij een steeksleutel uit met je hand, de lengte van de sleutel noemen we de arm d. Het moment resulteert in een rotatie van een voorwerp (de sleutel) rondom een bepaald punt (de moer). In een tekening geef je het moment weer met een gekromde pijl. Zowel de kracht als het moment bevindt zich in hetzelfde vlak (x,y). De grootte van het moment bereken je met de volgende formule: **Moment**

$$M = F \cdot d \qquad [1.13]$$

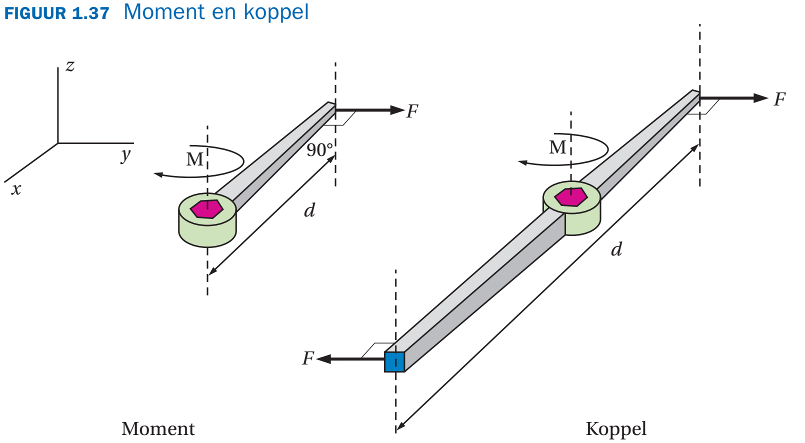
Hierin is:

M	het moment ten opzichte van een punt	Nm
F	de kracht	N
d	de loodrechte afstand tussen het punt en de werklijn van de kracht	m

Uit formule [1.13] volgt dat je een groter moment krijgt – bij gelijkblijvende kracht F – wanneer de arm (d) groter is. Kortom, het effect van een kracht hangt niet alleen af van de grootte van de kracht, maar ook van de loodrechte afstand van de werklijn van de kracht tot het draaipunt.

1

FIGUUR 1.37 Moment en koppel



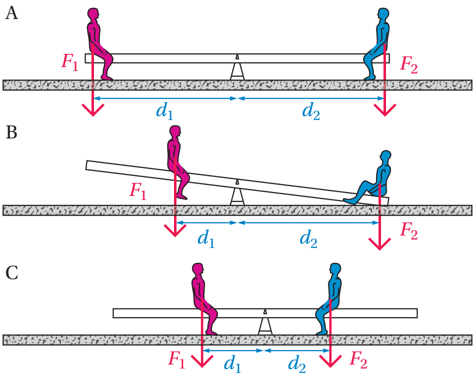
Bron: Wikipedia

Evenwicht

In afbeelding 1.38 spelen twee kinderen op een wipwap. Het wipwappen gaat heel goed wanneer twee personen even zwaar zijn ($F = F_1 = F_2$) en ze even ver van het draaipunt zitten. Wanneer de wipwap horizontaal blijft, spreek je van evenwicht, zie figuur 1.39A. Evenwicht betekent dat het moment aan beide kanten even groot is, dus $M_1 = M_2$ oftewel $F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2$. Het evenwicht verstoor je wanneer de linkerpersoon dichter naar het midden toe gaat zitten, hiermee maak je d_1 kleiner. Aangezien het moment ten opzichte van het draaipunt aan de linkerkant ($F \cdot d_1$) dan kleiner is dan het moment aan de rechterkant ($F \cdot d_2$), gaat de linkerpersoon omhoog, zie figuur 1.39B. Als je de wipwap weer in evenwicht wilt brengen, dan moet de andere persoon zich ook verplaatsen, zodat beide personen weer even ver van het draaipunt ($d_1 = d_2$) af zitten, zie figuur 1.39C.

Afbeelding 1.38 Wipwap

FIGUUR 1.39 Wipwap in verschillende posities



Bron: Sijbesma e.a. (2014)

1.6.2 Koppel van krachten

Koppel

Je spreekt van een koppel als je twee tegengestelde even grote krachten hebt waarvan de werklijnen evenwijdig aan elkaar zijn en niet samenvallen. Door een koppel wil een voorwerp gaan draaien rondom een draaipunt. In de rechterafbeelding in figuur 1.37 is een koppel grafisch weergegeven. Zoals je ziet, resulteert het koppel in rotatie rondom de moer. Zowel de krachten als het koppel bevinden zich in hetzelfde vlak (x, y).
De grootte van een koppel bereken je op eenzelfde manier als het moment, een kracht maal een afstand. De afstand is hierbij de loodrechte afstand tussen de twee krachtvectoren, in formulevorm krijg je dan:

$$M = F \cdot d \qquad [1.14]$$

Hierin is:

M	het (moment van het) koppel	Nm
F	de grootte van de krachtvector	N
d	de afstand loodrecht gemeten tussen de twee krachtvectoren	m

Bij een koppel zijn de krachten even groot, maar ze werken in tegengestelde richting. Als gevolg daarvan is de resulterende kracht nul en vindt er alleen draaiing plaats. Dit in tegenstelling tot een moment waarbij er wel een resulterende kracht aanwezig is.
Een ander voorbeeld van een koppel kan worden beschreven aan de hand van een liniaal. De ene kant van een liniaal houd je met je linkerhand vast en de andere kant met twee vingers van je rechterhand. Als je de liniaal probeert te buigen zodat je een U-vorm krijgt, oefen je met je twee vingers een koppel uit. Hierbij duw je de bovenkant van de doorsnede van de liniaal in elkaar en trek je de onderkant uit elkaar. De (werklijnen van de) krachten staan in figuur 1.41 (linkerfiguur) loodrecht op de dwarsdoorsnede van het oppervlak van de liniaal. De uitoefening van een koppel op de liniaal veroorzaakt een vervorming; in de volgende subparagraaf komt dit aan bod als het buigmoment.

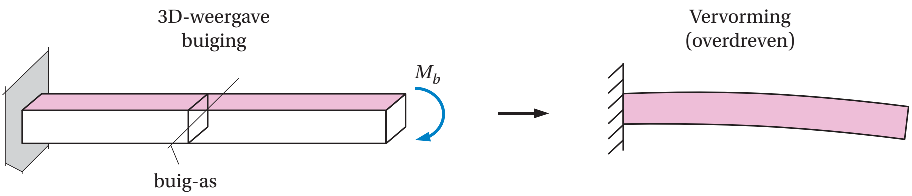
1.6.3 Buigmoment

Buigmoment

Een buigmoment is een belasting in de vorm van een moment dat je aanbrengt op een voorwerp. Dit buigmoment leidt tot een vervorming van dat voorwerp. In figuur 1.40 is het buigmoment op een balk overdreven weergegeven. Je kunt deze situatie vergelijken met een liniaal die je met je ene hand vasthoudt en met twee vingers probeert te buigen. Het buigend moment geef je weer met een gekromde pijl en het symbool is M_b. De buiging vindt hierbij plaats over een zogenoemde buig-as.

Buig-as

FIGUUR 1.40 Effect buigmoment



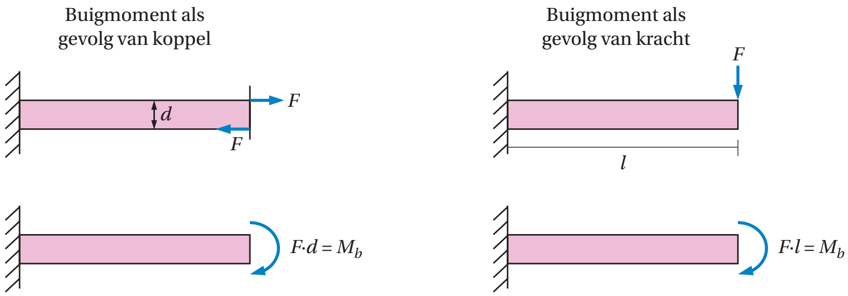
Het buigmoment is het gevolg van een koppel of van een kracht die je uitoefent op een uiteinde van de liniaal. Figuur 1.41 geeft beide situaties weer. De grootte van het buigmoment als gevolg van een koppel is gelijk aan:

$$M_b = F \cdot d \qquad [1.15]$$

Je kunt ook enkel met één vinger op het uiteinde van de liniaal drukken om buiging te veroorzaken. Dit geeft een buigmoment als gevolg van een kracht. De kracht staat hierbij loodrecht op de lengte-as van de balk. De grootte van het buigmoment is dan gelijk aan:

$$M_b = F \cdot l \qquad [1.16]$$

FIGUUR 1.41 Buigmoment als gevolg van koppel of kracht

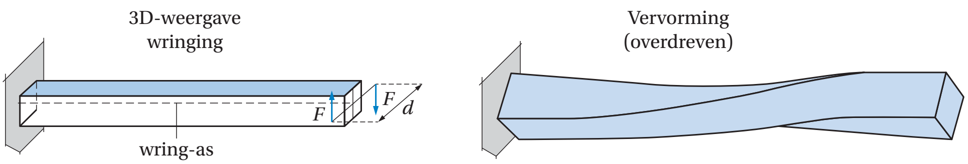


1.6.4 Wringmoment

Wringmoment Bij het wringmoment neem je net als bij het buigmoment een vervorming waar als het gevolg van dat moment, namelijk een hoekverdraaiing van een voorwerp over een bepaalde as. Wringing komt in de praktijk veel voor, bijvoorbeeld bij een motor die een as aandrijft. Het wringmoment kom je soms ook tegen onder de naam torsiemoment. **Torsiemoment** De oorzaak van het wringmoment is een koppel dat in het vlak van de doorsnede van de as werkt. De werklijnen van de krachten, die het koppel vormen, zijn hierbij parallel aan het oppervlak. In figuur 1.42 is het wringmoment weergegeven. Als symbool voor het wringmoment gebruik je M_w. De grootte van het koppel is gelijk aan het wringmoment:

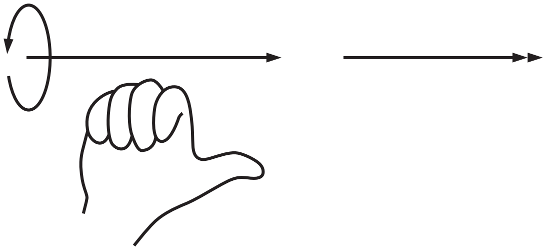
$$M_w = F \cdot d \qquad [1.17]$$

FIGUUR 1.42 Effect wringmoment



Wringing vindt plaats in drie dimensies. Aangezien je tekent in het platte vlak is het lastig om wringing in je tekening weer te geven. Daarom geef je wringing meestal weer als een vector met een dubbele pijl, zie figuur 1.43. De richting van de pijl bepaal je met behulp van de rechterhandregel: je vingers volgen de wringing van de as en je duim geeft daarmee de richting van de pijl aan. Bij figuur 1.43 is de richting van de vector dan ook naar rechts gericht. Voor figuur 1.42 wijst de torsiepijl dus naar links.

FIGUUR 1.43 Rechterhandregel (links) en vectorweergave wringmoment op basis van rechterhandregel (rechts)



1.6.5 Vermogen en toerental

Een wringmoment kan ontstaan bij de aandrijving van een as met behulp van een motor. Hierbij zet de motor (elektrische of chemische) energie om in beweging (arbeid). Hoe snel een motor energie kan leveren, druk je uit in vermogen. Het maximale vermogen van een motor is een combinatie van koppel en een hoeksnelheid. Voor het vermogen geldt:

Vermogen
Hoeksnelheid

$$P = M_w \cdot \omega \qquad [1.18]$$

Hierin is:

P	het vermogen	W
M_w	de grootte van het koppel (wringmoment)	Nm
ω	de hoeksnelheid	rad/s

In de praktijk heb je vaak niet de hoeksnelheid ter beschikking, maar wel het toerental in omwentelingen per seconde of in rpm (*rotations per minute*). De relatie tussen de hoeksnelheid en het toerental is:

Toerental

$$\omega = 2\pi \cdot n \text{ oftewel} \qquad n = \frac{\omega}{2\pi} \qquad [1.19]$$

Hierin is:

ω	de hoeksnelheid	rad/s
n	het toerental	1/s

Als je de formule voor vermogen en de hoeksnelheid combineert, vind je een directe relatie tussen het koppel, het vermogen en het toerental: $P = M_w \cdot 2\pi \cdot n$. Kortom als je het vermogen van een motor en een bepaald toerental weet, kun je de grootte van het koppel van een motor uitrekenen.

1

Stationair

Een motor draait stationair als de hoeksnelheid waarmee de aandrijfas draait constant is in de tijd. Aangezien de snelheid constant is, kun je zeggen dat de eerste wet van Newton van toepassing is. In hoofdstuk 3 leer je hoe je aan vraagstukken waarin sprake is van een constant toerental, kunt rekenen.

Opgaven

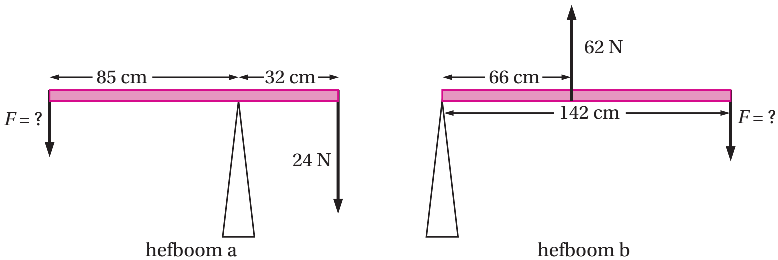
1.21 Gegeven een kracht van 50 N en een arm van 0,25 m.
a Bereken het moment.
b Wat is het moment als de arm twee keer zo groot wordt gemaakt?

1.22 Anna heeft een massa van 70 kg en staat op een duikplank met een lengte van 250 cm. Wat is het maximale moment dat zij kan veroorzaken op de duikplank?

1.23 Hylke en Sietse zitten op een wip. Hylke heeft een massa van 30 kg en de massa van Sietse is 45 kg. Hylke zit op 3 meter vanaf het draaipunt van de wip. Bereken hoe ver Sietse van het draaipunt af moet gaan zitten om de wip in evenwicht te krijgen.

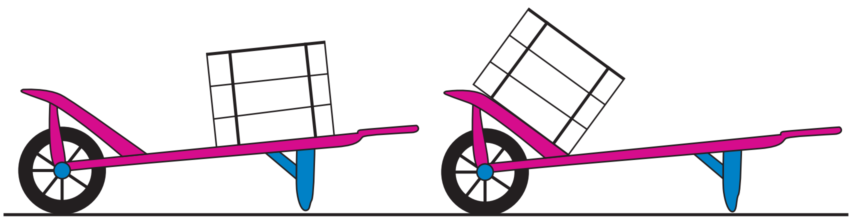
1.24 In figuur 1.44 staan twee hefbomen die in evenwicht zijn. Bereken de onbekende krachten.

FIGUUR 1.44 bij opgave 1.24



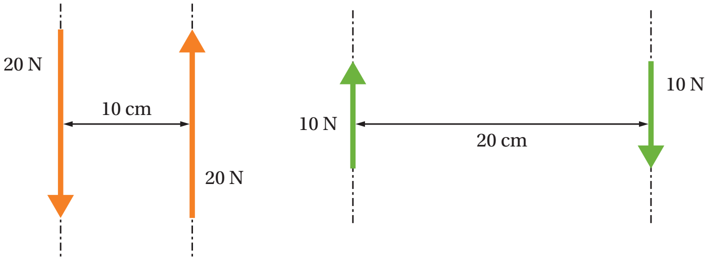
1.25 In figuur 1.45 zie je twee manieren om een kist op een kruiwagen te laden. Welke kruiwagen is het gemakkelijkst op te tillen? Waarom?

FIGUUR 1.45 bij opgave 1.25



1.26 Bepaal de grootte van de momenten van de koppels in de volgende figuren (figuur 1.46).

FIGUUR 1.46 bij opgave 1.26

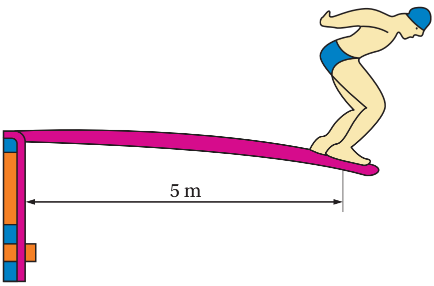


1.27 In afbeelding 1.47 zie je het draaien van een moer van een autowiel. Verklaar dat er in deze situatie zowel sprake is van een koppel, een wringmoment.

Afbeelding 1.47 bij opgave 1.27

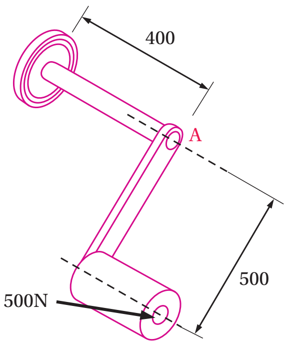
1.28 Erik (m = 75 kg) staat op het uiteinde van een duikplank; zie figuur 1.48. Bereken het buigmoment op de plaats waar deze is bevestigd.

FIGUUR 1.48 bij opgave 1.28



1.29 Bij een op handkracht aangedreven hefwerktuig wordt een slinger gebruikt, zie figuur 1.49. In alle standen van de slinger kan op het handvat een kracht van 500 N worden uitgeoefend. De kracht staat loodrecht op de arm van 500 mm.
Bereken het wringmoment in punt A.

FIGUUR 1.49 bij opgave 1.29



1.30 Een fietser levert een koppel met een grootte van 60 Nm en trapt met 0,5 omw/s rond.

a Wat is het vermogen van de fietser?

b Wat gebeurt er met het vermogen als de fietser twee keer zo snel rondtrapt?

1.31 Gegeven is een elektromotor met een vermogen van 20 kW en een toerental van 200 omw/s. Wat is de grootte van het koppel (wringmoment) dat deze motor levert?