Wiskunde in de praktijk

Kennisbasis

W. Oonk, R. Keijzer, S. Lit, N. Figueiredo

2e druk

Noordhoff

Wiskunde in de praktijk

Kennisbasis

Wil Oonk
Ronald Keijzer
Sabine Lit
Nisa Figueiredo

Tweede druk

Noordhoff Groningen

Ontwerp omslag: G2K Designers, Groningen-Amsterdam
Omslagillustratie: Yakobchuk Viacheslav – Shutterstock

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Hoger Onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op mijnnoordhoff.nl.

De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontlenen.

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189
FSC www.fsc.org

0 / 20

ISBN (ebook) 978-90-01-89640-9
ISBN 978-90-01-89639-3
NUR 123

Woord vooraf

Dit boek is – samen met de bijbehorende website – bedoeld om je als aanstaande leraar basisonderwijs voor te bereiden op de landelijke toets van de Kennisbasis Wiskunde voor de Pabo.
De kern van boek en website wordt gevormd door 400 oefenopgaven. Die sluiten aan bij de toetsdoelen van de Kennisbasistoets Wiskunde en begrippen uit de toetsgids.
De opgaven zijn grotendeels van een hoog niveau. De gedachte erachter is dat je er op een gegeven moment bij gebaat bent, opgaven te leren oplossen die vergelijkbaar zijn met de moeilijke toetsitems uit de landelijke toetsen. Het levert op die manier een optimaal studierendement op.
Het is overigens niet zo dat je met het behalen van de Kennisbasistoets ook voldoende 'professioneel gecijferd' of zelfs 'startbekwaam' bent voor het leraarschap. Het geeft je wel een stevige basis om de didactiek van het vak wiskunde onder de knie te krijgen om vervolgens leerlingen steeds beter te kunnen begeleiden in het leren van wiskunde.

Dit boek en de website zijn vooral bedoeld als zelfstudiemateriaal, maar kunnen ook als materiaal gebruikt worden in de les. De ervaring leert, dat daarbij de samenwerking met medestudenten het verkrijgen van inzicht en kennis verdiept en versnelt.

Kenmerkend voor de serie *Wiskunde in de praktijk*, waar dit boek deel van uitmaakt, is het betekenisvol en gevarieerd gebruik van belangrijke begrippen. Het zijn kernbegrippen die ook in de landelijke toetsgids staan en die je in dit boek zult herkennen in de toetsopgaven, maar ook in de toelichtingen bij de oplossingen en in de thema-teksten. Bovendien zul je ze zien in de kantlijnen van de bladzijden en kun je de bijbehorende beschrijvingen van begrippen terugvinden in het begrippenregister achter in het boek.
Het boek *Kennisbasis* sluit aan op de overige vier boeken uit de serie *Wiskunde in de praktijk*, maar kan ook goed gebruikt worden naast andere studieboeken voor het vak wiskunde op de Pabo.

We hebben bij het ontwikkelen van de opgaven dankbaar gebruik gemaakt van de reacties die we mochten ontvangen van collega-opleiders en studenten van de Hogeschool iPabo te Amsterdam en Alkmaar en van de Thomas More Hogeschool in Rotterdam.

Deze tweede druk is aangepast aan de laatste eisen van de herijkte Landelijke Kennisbasistoets Wiskunde voor de Pabo. Naast het verbeteren en verwijderen van enkele opgaven betekent dit onder andere het toevoegen van:
- opgaven over rekenen met machten en wortels;
- opgaven over vergelijkingen met twee onbekenden;

- opgaven over rekenen gerelateerd aan verbanden en grafieken;
- opgaven over het maken van formules bij lineaire verbanden in concrete situaties en een formule vertalen in een grafiek;
- opgaven over procentpunten.

Ook de toetsen op de website zijn in die zin aangepast.

Onze dank gaat uit naar studenten en opleiders die gereageerd hebben op de eerste druk van het boek met suggesties voor verbetering.

We hopen dat je ook aan de opgaven uit dit boek met plezier kunt werken en met succes het beoogde doel bereikt: slagen voor de landelijke kennisbasistoets Wiskunde voor de pabo. Met het uiteindelijke doel jouw kennis, inzicht en vaardigheid in te zetten voor het leren rekenen door leerlingen.

De auteurs,
Utrecht, najaar 2019

Inhoudsopgave

Studiewijzer

De kennisbasis van een leraar basisonderwijs bestaat uit met elkaar verbonden soorten kennis van wiskunde; zie de drie kenniscategorieën in de paragraaf hierna. Die kennis wordt landelijk getoetst. De meest actuele informatie over de toets en de toetsgids vind je op de website:
www.10voordeleraar.nl.
Dit boek en de bijbehorende website bevat in totaal 400 opgaven die bedoeld zijn als oefenstof voor die toets.
Het gaat hierbij om het inzichtelijk leren oplossen van de opgaven. Daarbij word je geholpen door thema's in het boek met informatie over lastige onderwerpen en – in het laatste hoofdstuk – met handreikingen voor het beter leren oplossen van problemen.
De opgaven worden in het boek en op de website op een verschillende manier aangeboden.

De indeling van het boek
In het boek worden de oefenopgaven gepresenteerd en besproken per domein, achtereenvolgens:
- hele getallen en bewerkingen
- verhoudingen, breuken, kommagetallen en procenten
- meten
- meetkunde
- verbanden

Per domein zijn er drie soorten opgaven, weergegeven in dezelfde drie categorieën als bij de indeling van de landelijke *Toetsgids Pabo Wiskunde*.
1 Kennis van de wiskunde
   Bij opgaven van deze categorie gaat het om kennis van wiskundig correcte berekeningen en het kunnen beredeneren van de oplossingen.
2 Wiskundekennis specifiek voor de leraar
   In dit geval draait het om opgaven waarvoor je als leraar de kennis moet beheersen die specifiek op het wiskunde*onderwijs* betrekking heeft, dus bijvoorbeeld het kennen en kunnen toepassen van strategieën of modellen. Deze kennis en vaardigheid is nodig om te kunnen communiceren met leerlingen: hen begeleiden, uitleggen, hun oplossingen interpreteren en beoordelen, enzovoort.
3 Maatschappelijk relevante wiskundekennis
   Bij opgaven uit dit gebied kun je laten zien dat je over de vereiste wiskundige kennis en vaardigheden beschikt om situaties uit het dagelijks leven te kunnen interpreteren en verklaren en ook te kunnen 'vertalen' met wiskundige hulpmiddelen als schema's, tabellen en reken-wiskundige bewerkingen.

Bij elke opgave in het boek vind je het antwoord met daarna een toelichting. Vaak worden er meerdere oplossingsmanieren gegeven.
Aan het eind van sommige hoofdstukken vind je thema's over belangrijke onderwerpen:

- talstelsels
- deelbaarheid, waaronder priemgetallen, grootste gemene deler (GGD) en kleinste gemene veelvoud (KGV)
- vergelijken van verhoudingen
- meetkundige figuren

Om zo'n thema gericht te kunnen bestuderen zijn er naast de begrippen in de marge ook vragen in de tekst opgenomen. Deze vragen, aangeduid met een vraagteken in de kantlijn, zijn bedoeld om je tijdens het lezen te laten nadenken over het voorafgaande. Het helpt je om een actieve houding aan te nemen door bijvoorbeeld eerst zelf op zoek te gaan naar oplossingen. Op die manier kun je je de stof daadwerkelijk eigen maken. In de tekst erna vind je het antwoord.

Het laatste hoofdstuk van het boek gaat over probleemoplossen, het leren omgaan met lastige opgaven. Aan de hand van voorbeelden en handreikingen, zogenaamde heuristieken, leer je hoe je problemen met dergelijke opgaven aan kunt pakken. Tips in het boek verwijzen naar heuristieken die je bij bepaalde opgaven kunt gebruiken.

De website
Op de website vind je drie complete toetsen. Ze zijn in opzet vergelijkbaar met de landelijke toets. Bij iedere opgave krijg je een beknopte feedback en soms een verwijzing naar soortgelijke opgaven met toelichting in het boek.

Zie www.wp-kennisbasis.noordhoff.nl voor:

- drie complete toetsen, in opzet vergelijkbaar met de landelijke toets
- antwoorden bij de opgaven en verwijzing naar soortgelijke opgaven in het boek

Moeilijkheidsgraad van de opgaven en hulp bij het oplossen
Je bepaalt zelf de volgorde waarin je de opgaven maakt.
Als je wilt kun je beginnen met één van de drie complete toetsen op de website en vervolgens bijvoorbeeld inventariseren bij welke soort opgaven je extra toelichting wilt uit het boek of extra informatie over een bepaald onderwerp.
In het boek kies je voor het maken van de opgaven of het bestuderen van de thema's. Misschien heb je eerst vooral behoefte aan oefening in opgaven over verhoudingen en breuken. Dan moet je in hoofdstuk 2 beginnen. Het kan ook zijn dat je bijvoorbeeld eerst meer wilt weten over deelbaarheid, GGD en KGV voor je de opgaven over die onderwerpen gaat maken. In dat geval kun je terecht bij het thema deelbaarheid, paragraaf 1.4.
De opgaven zijn niet gemakkelijk. Vergeleken met de opgaven uit de landelijke toets, behoren ze grotendeels tot de categorie moeilijke opgaven. Gebruik de tips en de toelichtingen in het boek om op een plezierige manier je eigen weg te vinden. Werk in principe zonder rekenmachine en gebruik hem

alleen als het echt nodig is. Bij opgaven waar je een rekenmachine mag gebruiken staat een icoontje.
Zoals gezegd kan het laatste hoofdstuk je helpen problemen beter aan te pakken.

Dit boek en de website zijn vooral bedoeld als zelfstudiemateriaal. Toch raden wij je aan om samen te werken met een medestudent. Het verdiept en versnelt het verkrijgen van eigen inzicht in wiskunde.

Professionele gecijferdheid
Door het inzichtelijk oefenen met de opgaven werk je aan je eigen 'professionele gecijferdheid'. In de *Kennisbasis Wiskunde voor de Lerarenopleiding basisonderwijs* worden vier competenties genoemd waarover een startbekwame leerkracht moet beschikken om professioneel gecijferd te zijn. De leraar moet:
1 zelf voldoende rekenvaardig en 'gecijferd' zijn;
2 wiskunde betekenis kunnen geven voor kinderen;
3 oplossingsprocessen en niveauverhoging bij kinderen kunnen realiseren;
4 wiskundig denken van kinderen kunnen bevorderen.

Het accent bij het werken aan de opgaven ligt dus vooral op het verbeteren van de eerste competentie. Toch ben je dan ook bezig om de overige, didactische competenties te versterken. Dat gebeurt bijvoorbeeld als je elkaar wat uitlegt of oplossingen uitwisselt. Door anderen te helpen een probleem te begrijpen, bereik je zelf het hoogste niveau van begrijpen!
Ook op andere manieren leg je zelf verbinding met de didactiek als je met de opgaven bezig bent. Dat gebeurt onder andere in opgaven waarin je werk van leerlingen analyseert.
Didactische aspecten kom je ook tegen in de toelichtingen bij de opgaven, met name wanneer daar gebruik gemaakt wordt van contexten, schema's of modellen om de situatie te verhelderen.
Ten slotte kun je de relatie met de didactiek leggen in het laatste hoofdstuk over probleemoplossen. De heuristieken die je daar leert kennen om zelf problemen aan te pakken, zijn het in alle opzichten waard om ook met je leerlingen te bespreken, zodat zij ook in staat zijn met voor hen nieuwe problemen aan de slag te gaan.

Begrippen
Belangrijk onderdeel van de professionele gecijferdheid is het kennen en kunnen gebruiken van belangrijke begrippen voor wiskunde. Het zijn in dit geval vakspecifieke kernbegrippen die ook in de landelijke Toetsgids Wiskunde voor de Pabo staan.
In dit boek kom je die begrippen op verschillende plaatsen tegen, namelijk in de marge van de bladzijden, in de opgaven en toelichtingen en in de thema-teksten. Bovendien staan alle begrippen in het begrippenregister achterin het boek nog eens op een rij, voorzien van korte beschrijvingen.

1 Hele getallen en bewerkingen

In dit hoofdstuk vind je opgaven uit het domein hele getallen en bewerkingen. Deze opgaven zijn onderverdeeld in drie categorieën opgaven, namelijk:

- kennis van de wiskunde, dat zijn de opgaven van paragraaf 1.1
- reken-wiskundekennis specifiek voor de leraar, de opgaven van paragraaf 1.2
- maatschappelijk relevante reken-wiskundekennis, de opgaven van paragraaf 1.3.

In de paragrafen 1.4 en 1.5 kun je extra informatie vinden over de onderwerpen deelbaarheid en talstelsels.

1.1 Kennis van wiskunde

1.1.1 De juiste volgorde

$4 + 16 : 4 \times 8 - 2 =$

A $2\frac{1}{2}$
B 28
C 34
D 38

Antwoord: C

Toelichting
De volgorderegel is: eerst vermenigvuldigen en delen, in de volgorde waarin dat staat, daarna optellen en aftrekken in de volgorde waarin het staat. De oude regel 'Meneer van Dalen Wacht Op Antwoord' geldt niet meer. Dus begin je in deze opgave met $16 : 4 = 4$, dan $4 \times 8 = 32$. Dan blijft nog te doen $4 + 32 - 2 = 34$ (antwoord C).
Niet juist: eerst vermenigvuldigen $4 \times 8 = 32$, dan delen $16 : 32 = 0{,}5$ en dan $4 + 0{,}5 - 2 = 2\frac{1}{2}$ (antwoord A).
Niet juist: alles in de volgorde waarin het staat, dus $4 + 16 = 20$, $: 4 = 5$, $\times 8 = 40$, $- 2 = 38$ (antwoord D).

Vermenigvuldigen
Delen
Optellen
Aftrekken

1.1.2 Handige volgorde

Los de volgende opgave ‘handig’ op.
$225 : (24 \times 13 - 26 \times 11 - 11)^2 =$

Antwoord: 1

Toelichting
Eerst moet berekend worden wat tussen haken staat, met als eerste 24×13 en 26×11. Daarbij kun je gebruikmaken van het feit dat $26 = 2 \times 13$, dus $24 \times 13 - 26 \times 11 = 24 \times 13 - 13 \times 22 = 24 \times 13 - 22 \times 13 = 2 \times 13 = 26$. Vervolgens moet nog 11 worden afgetrokken van die 26; dat is 15.

Kwadraat

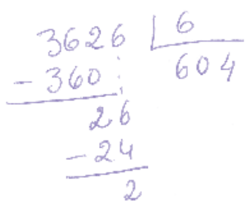
Dat getal kwadrateren levert $15^2 = 225$. Ten slotte is $225 : 225 = 1$.
Misschien kom je in de verleiding om eerst $26 \times 11 - 11 = 25 \times 11 = 250 + 25 = 275$ uit te rekenen, enzovoorts. Maar dat gebeurt op die manier niet volgens de rekenregels. Je behandelt het aftrektal (–11) dan als de vermenigvuldiging 1×11 met voorrang. De uitkomst is dan uiteindelijk ook niet gelijk aan 1.

1.1.3 Delen op eigen manier

Peter lost de som 3626 : 6 op zijn eigen manier op.
Welke bewering is juist?

A De rekenprocedure van Peter is wiskundig correct en het antwoord is ook juist.
B De rekenprocedure van Peter is wiskundig correct, maar het antwoord is niet juist.
C De rekenprocedure van Peter is wiskundig *niet* correct en het antwoord is niet juist.
D De rekenprocedure van Peter is wiskundig *niet* correct, maar het antwoord is juist.

FIGUUR 1.1.3 Oplossingsmanier van Peter



Antwoord: A

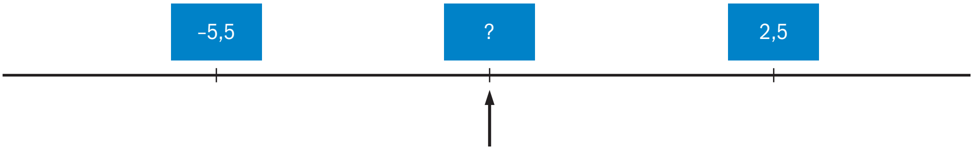
Toelichting

Cijferen
Kolomsgewijs rekenen
Deeltal

De procedure is wiskundig correct en is een vorm van cijferen. Peter werkt niet met het hele getal 3626, zoals bij kolomsgewijs rekenen, maar begint met 362 tientallen. 362 tientallen : 6 = 60 tientallen, en dan houdt Peter 2 tientallen over. Bij die 2 tientallen komen de zes eenheden van het deeltal 3626. Peter deelt 26 door 6, dat is 4. Hij noteert de 4 achter de 60. Het antwoord is 604 en dat is juist.

1.1.4 Getallenlijn met negatieve getallen

FIGUUR 1.1.4 Getallenlijn met negatieve getallen



Welk getal ligt op de getallenlijn precies tussen -5,5 en 2,5 in?

Antwoord: –1,5

Toelichting

Manier 1
Het getal dat er precies tussenin ligt, is het gemiddelde:
(–5,5 + 2,5) : 2 = –1,5.

Manier 2
Het verschil tussen beide getallen op de getallenlijn is 8. Je wilt weten welk getal er precies tussenin ligt. De helft van 8 is 4. Het getal bij de pijl is –5,5 + 4 = –1,5. Controle: van –1,5 tot 2,5 op de getallenlijn is inderdaad 4.

Verschil
Getallenlijn

1.1.5 Deelopgave met kommagetallen

Vier kinderen rekenen de opgave 157,5 : 10,5 uit:
Mara: ‘Ik doe van beide getallen 0,5 af en los de som 157 : 10 op.’
Merel: ‘Ik doe gewoon 315 : 21.’
Tijn: ‘Ik deel 157,5 eerst door 10 en dan door 0,5.’
Pim: ‘Ik reken 1050 : 105 = 10 en 525 : 105 uit en tel de resultaten bij elkaar op.’
Welke kinderen lossen de opgave correct op?

A Mara, Merel en Pim.
B Mara, Merel en Tijn.
C Merel en Pim.
D Alleen Pim.

Antwoord: C

Toelichting

De oplossing van Mara is niet correct. Mara haalt van beide getallen 0,5 af. Wanneer je eenzelfde hoeveelheid van het deeltal en van de deler afhaalt, krijg je niet hetzelfde antwoord (157,5 : 10,5 is niet hetzelfde als 157 : 10). Bij een eenvoudiger bekend probleem kun je goed zien dat dit niet mag. Neem 20 : 4 = 5; als je 2 van de 20 en 2 van de 4 afhaalt, krijg je 18 : 2 = 9. Het antwoord is niet hetzelfde.

Deeltal
Deler

De aanpak van Merel is wel correct. Ze verdubbelt beide getallen (deeltal en deler) en dat geeft hetzelfde antwoord. Dat zie je ook bij 20 : 4 = 5, want 40 : 8 is ook 5.

Aanpak

De aanpak van Pim is ook correct. Pim gebruikt eerst een aanpak die vergelijkbaar is met die van Merel. Hij vermenigvuldigt deeltal en deler met 10. 157,5 : 10,5 = 1575 : 105. Hij lost deze som vervolgens op door 1575 te splitsen in 1050 en 525. 1575 : 105 = (1050 + 525) : 105 = 1050 : 105 + 525 : 105. Hier past Pim de distributieve eigenschap van delen toe.

Distributieve eigenschap

1.1.6 Wat was het getal?

Ik zet achter een getal het cijfer 5. Door die handeling wordt het nieuwe getal 608 groter dan het oorspronkelijke getal.
Wat is het oorspronkelijke getal?

Antwoord: 67

Toelichting
Door het cijfer 0 achter een getal te zetten, wordt het getal tien keer zo groot, maar er komt negen keer het getal bij: het wordt dus negen keer groter. Door er het cijfer 5 achter te plaatsen, wordt het bovendien nog eens 5 groter, vanwege die vijf eenheden die worden toegevoegd. Dit betekent dat het getal 608 – 5 = 603 staat voor negen keer het oorspronkelijke getal. Dat getal is dus 603 : 9 = 67. Controle: 67 wordt 675, dat is inderdaad 675 – 67 = 608 groter dan 67.

1.1.7 Product en som

Het product van twee getallen is 96. Hun som is 22.
Welke twee getallen zijn dat?
Geef als antwoord het grootste van die twee getallen.

Antwoord: 16

Toelichting
Het product is 96; dat wil zeggen dat je 96 krijgt als je de twee getallen met elkaar vermenigvuldigt. De som is 22; dat wil zeggen dat je 22 krijgt als je de twee getallen bij elkaar optelt. **Product** **Som**
Eerst maar eens op zoek naar twee getallen die vermenigvuldigd met elkaar 96 opleveren, zoals 2 × 48. Als je systematisch werkt, noteer je:

FIGUUR 1.1.7 Product en som

Eerste getal	Tweede getal	Product	Som
2	48	96	50
3	32	96	34
4	24	96	28
6	16	96	22
8	12	96	20

Dit rijtje geeft alle delers van 96, waardoor je weet dat je geen mogelijkheden over het hoofd ziet. Nu moeten de delers bij elkaar opgeteld 22 zijn. Dit geldt voor 6 en 16. **Deler**

1.1.8 Delen met de rekenmachine

Van een deling met deler 16 is het antwoord op de rekenmachine 204,125. Een kind wil het antwoord opschrijven als ‘204 rest…’
Wat is de rest van deze deling?

Antwoord: 2

Toelichting

Manier 1
Wanneer je de deling in symbolentaal opschrijft, krijg je … : 16 = 204,125.
Deler Dit betekent dat de deler 16 in zijn geheel 204 keer in het deeltal past. Wat
Deeltal je overhoudt van het deeltal, daar past het getal 16 slechts 0,125 keer in. Dit is de rest! De rest is dus 0,125 × 16 ofwel $\frac{1}{8}$ deel van 16 is 2.

Manier 2
Wanneer je de deling in symbolentaal opschrijft, krijg je … : 16 = 204,125.
Rest Dit betekent dat dezelfde deling zonder rest het antwoord 204 zou hebben.
Inverse Maak gebruik van het feit dat vermenigvuldigen de inverse bewerking van delen is: het deeltal is gelijk aan 16 × 204,125 = 16 × 204 + 16 × 0,125. De rest is dus 16 × 0,125 = 0,125 × 16 = $\frac{1}{8}$ × 16 = 2.
Wanneer je dit moeilijk te begrijpen vindt, denk dan aan een bekende opgave, zoals 10 : 5 = 2. 11 : 5 = 2,2 of 2 rest 1, want 5 × 2,2 = 5 × 2 + 5 × 0,2; de rest 5 × 0,2 = 1.

1.1.9 Hoeveel stemmen?

In een dorp werden bij de laatste verkiezingen 2050 geldige stemmen uitgebracht. Van de vier lijsten die meededen, versloeg DemW het CDO, de PvdB en de VVF met respectievelijk 70, 120 en 160 stemmen.
Hoeveel stemmen kreeg de PvdB?

Antwoord: 480

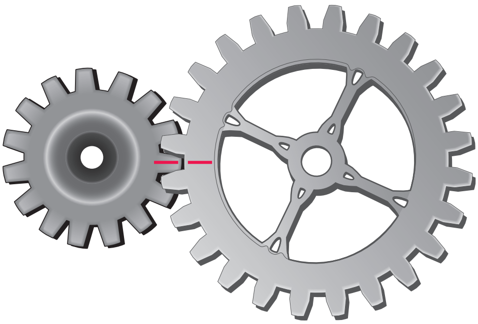
Toelichting

Manier 1
Stel dat alle partijen evenveel stemmen hadden gehad als DemW. Dan waren er 70 + 120 + 160 = 350 stemmen meer uitgebracht, dus in totaal 2050 + 350 = 2400 stemmen. Het betekent dat DemW dus in werkelijkheid 2400 : 4 = 600 stemmen heeft gekregen. Dan heeft de PvdB dus 600 – 120 = 480 stemmen gekregen.

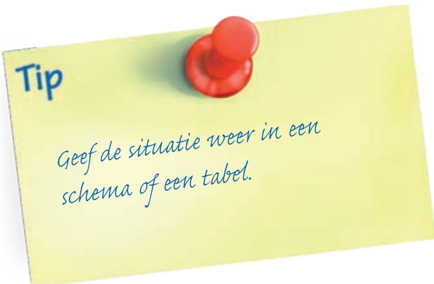
Manier 2
Stel dat DemW een aantal van S stemmen heeft gekregen. Dan hebben de andere partijen respectievelijk S – 70, S – 120 en S – 160 stemmen gekregen. In totaal dan: 4S – 350 stemmen. Dus is 4S – 350 = 2050 en 4S = 2400, wat betekent dat S = 600.
De PvdB had S – 120 stemmen, dus 600 – 120 = 480 stemmen.

1.1.10 Tandwielen

FIGUUR 1.1.10A Tandwielen



Twee tandwielen draaien tegen elkaar in. Het kleine tandwiel heeft 15 tanden en het grote tandwiel heeft 24 tanden. Twee rode streepjes markeren de uitgangspositie.
Na hoeveel omwentelingen (minimaal) van het kleine tandwiel staan de rode streepjes weer precies tegen over elkaar?



Antwoord: 8

Toelichting

Manier 1
Maak een tabel waarin je kunt zien hoeveel tandjes tegenover elkaar door-rollen.

FIGUUR 1.1.10B Aantal omwentelingen

Kleine tandwiel		Grote tandwiel	
Aantal omwentelingen	Aantal tandjes	Aantal omwentelingen	Aantal tandjes
1 x	15	1 x	24
2 x	30	2 x	48
3 x	45	3 x	72
4 x	60	4 x	96
5 x	75	5 x	120
6 x	90		
7 x	105		
8 x	120		

Kijk welk getal in beide rijtjes voorkomt. Het aantal tandjes moet gelijk zijn, want dan staan de rode streepjes weer precies tegenover elkaar. Je vindt het getal 120. Voor het kleine tandwiel betekent dat 120 : 15 = 8 omwentelingen.

Kleinste gemene veelvoud

Priemgetal

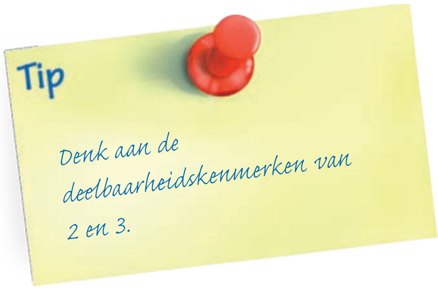
Manier 2
Het gaat om het kleinste gemene veelvoud of KGV van 15 en 24. Om dat te vinden kun je beide getallen eerst ontbinden in priemfactoren.
$15 = 3 \times 5$
$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

Het KGV van 15 en 24 is dan $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120$.
Na 120 tandjes staan de rode streepjes weer tegenover elkaar. Dat is 120 : 15 = 8 omwentelingen van het kleine tandwiel.
Zie ook paragraaf 1.4, Thema deelbaarheid.

1.1.11 Welk cijfer hoort er te staan?

Het getal 1?16 is deelbaar door 6.
Welk cijfer staat op de plaats van het vraagteken?
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.

A 6
B 0 of 6
C 1, 4 of 7
D 3, 5 of 9



Antwoord: C

Toelichting

Manier 1
Om te beginnen kun je gewoon gaan uitproberen. Vul achtereenvolgens de cijfers 0, 1, 2, …, 9 in. Daarna ga je na of het getal met het ingevulde cijfer inderdaad deelbaar is door 6. Dat mag, zoals is aangegeven, niet met de rekenmachine. Een staartdeling gebruiken kan, maar is nogal omslachtig. Handiger is om – eerst grote – zesvouden af te trekken van het getal, net zo lang tot je weet of het hele getal een zesvoud is.

Manier 2
Een andere, snelle manier is gebruikmaken van de kenmerken van deelbaarheid door 2 en door 3. Een getal dat deelbaar is door 6, moet deelbaar zijn door 2 én door 3. Het is in ieder geval deelbaar door 2, want het is een even getal. Als het deelbaar is door 3, is de som van de cijfers ook deelbaar door 3, dus 1 + ? + 1 + 6 = ? + 8 moet een drievoud zijn. Op de plaats van het vraagteken voldoen dan: 1, 4 en 7, want 9, 12 en 15 zijn een drievoud. Andere cijfers voldoen niet.
Zie ook paragraaf 1.4, Thema deelbaarheid.

Deelbaarheid

1.1.12 Deelbaar door 12

Het getal 302B456 is deelbaar door 12.
Welk cijfer kan B *niet* zijn?

A 1
B 3
C 4
D 7

Antwoord: B

Toelichting
Wanneer een getal deelbaar is door 12, is het ook deelbaar door de delers van 12, en dus door 3 en 4 (3 × 4 = 12). Een getal is deelbaar door 4 als de laatste twee cijfers (in dit geval 56) deelbaar zijn door 4. Het getal 56 is deelbaar door 4 en daarom is het getal 302B456 deelbaar door 4, ongeacht welk getal we bij B invullen. We hoeven alleen nog maar te letten op de deelbaarheid door 3. Het getal 302B456 is deelbaar door 3 als de

Deelbaarheid

Som

som van de cijfers deelbaar is door 3, dus 3 + 2 + B + 4 + 5 + 6 = 20 + B moet deelbaar zijn door 3.
B kan 1 zijn, want 20 + B = 21, en 21 is deelbaar door 3. B kan ook 4 of 7 zijn, want 20 + 4 = 24 en 20 + 7 = 27. In al deze gevallen is het gegeven getal deelbaar door 3, en dus ook door 12 (omdat het ook door 4 deelbaar is).
B kan *niet* 3 zijn, want 20 + 3 = 23, en 23 is *niet* deelbaar door 3.
Zie ook paragraaf 1.4, Thema deelbaarheid.

1.1.13 GGD, KGV en priemgetallen

Stelling I: het kleinste gemene veelvoud KGV van twee priemgetallen is gelijk aan het product van deze twee priemgetallen.
Stelling II: de grootste gemene deler GGD van twee priemgetallen is gelijk aan de kleinste van de twee priemgetallen.
Welke stelling is of welke stellingen zijn waar?

A Stelling I is waar.
B Stelling II is waar.
C Stelling I en II zijn beide waar.
D Stelling I en II zijn beide onwaar.

Antwoord: A

Toelichting

Priemgetal

Probeer het uit met twee paren priemgetallen, bijvoorbeeld 5 en 7 en het paar 7 en 11. Dit kan je een idee geven hoe het zit. Beredeneer daarna of dat ook altijd geldt.
Stelling I: voor 5 en 7 geldt dat er geen kleiner veelvoud is dan 5 × 7 = 35. Voor 7 en 11: geen kleiner veelvoud dan 7 × 11 = 77. Stelling I is waar, want bij twee priemgetallen is er geen kleiner gemeenschappelijk veelvoud dan gewoon het product van die twee priemgetallen. Het kleinste gemene veelvoud is gelijk aan het product van twee priemgetallen.

Product

Kleinste gemene veelvoud

Grootste gemeenschappelijke deler

Stelling II: de grootste gemeenschappelijke deler van 5 en 7 is 1, en voor 7 en 11 is dat ook zo. Stelling II is niet waar, want een priemgetal heeft geen andere delers dan 1 en zichzelf. De grootste gemeenschappelijke deler van twee priemgetallen is dus altijd 1.
Zie ook paragraaf 1.4, Thema deelbaarheid.

1.1.14 Grootste gemene deler

$2^3 \times B^2 \times 7$ en $2^2 \times B \times 13$ zijn de ontbindingen in priemfactoren van twee getallen, waarbij B voor hetzelfde getal staat. De grootste gemene deler (GGD) van deze twee getallen is 44.

Voor welk getal staat B?

A 3
B 2
C 13
D A, B en C zijn alle drie onjuist.

Antwoord: D

Toelichting

Manier 1
Probeer te bedenken wat je weet over de grootste gemeenschappelijke deler (GGD) van de getallen $2^3 \times B^2 \times 7$ en $2^2 \times B \times 13$. De GGD van twee getallen is het product van alle gemeenschappelijke priemdelers met de kleinste exponent. Gemeenschappelijk hebben beide getallen de deler 2 met de kleinste exponent 2, dus 2^2. De factoren 7 en 13 zijn geen gemeenschappelijke delers. B is wel een gemeenschappelijke deler, en we weten dat dit een priemgetal is. Conclusie: 2^2 en B zijn gemeenschappelijke delers, de GGD is $2^2 \times B$ of $4 \times B$. In de opgave staat dat de GGD gelijk is aan 44; B is dus 11.

Grootste gemeenschappelijke deler

Product

Priemgetal

Manier 2
De GGD van deze twee getallen, $2^3 \times B^2 \times 7$ en $2^2 \times B \times 13$, is 44. De ontbinding in priemfactoren van 44 is 11×2^2 . Omdat 44 deler is van beide getallen, moeten 11 en 2 in de ontbinding in priemfactoren van deze getallen voorkomen. Het getal 2 komt voor. De 11 nog niet. B moet daarom 11 zijn. Zie ook paragraaf 1.4, Thema deelbaarheid.

Deler

1.1.15 Rest

Welke rest heeft de vermenigvuldiging 78×24 bij deling door 7?

Antwoord: 3

Toelichting
$78 \times 24 = 77 \times 24 + 1 \times 24$. De uitkomst van 77×24 is een zevenvoud, namelijk $7 \times 24 \times 11$. Dat getal kunnen we dus al door 7 delen. Bij deling van 24 door 7 blijft de rest 3 over, want 21 is een 7-voud.

Rest

1.1.16 Zesde macht

Hoeveel delers heeft 6^6?

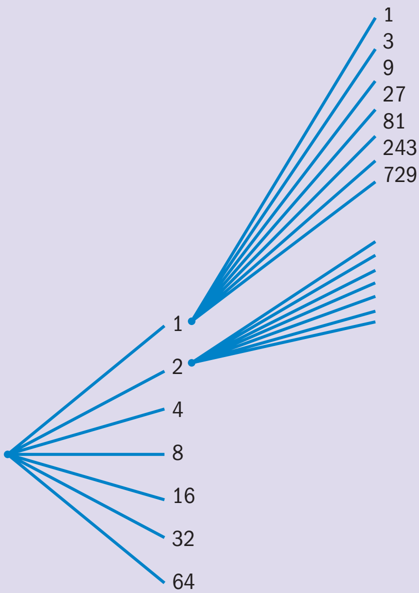
Antwoord: 49

Toelichting
2^6 heeft zeven delers, namelijk 1 (= 2^0), 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5 en 2^6. Ook 3^6 heeft zeven delers.

Macht
Deler
Structuur
Schematiseren

Het grondtal 6 van 6^6 ('zes tot de zesde macht') is geen priemgetal, wat betekent dat het bepalen van het aantal delers wat lastiger is. We ontbinden 6 in de twee priemfactoren 2 en 3, dus $6^6 = 2^6 \times 3^6$. Dat levert in totaal 7 × 7 is 49 delers op. In de – niet volledig getoonde – structuur van het volgende boomschema komen de 49 delers in beeld. Bij elk van de zeven getallen uit de linkerkolom horen de zeven getallen uit de rechterkolom; in totaal dus 49.

FIGUUR 1.1.16 Zesde macht



1.1.17 Som van priemgetallen

Stellingen:
1 De som van twee priemgetallen is soms een priemgetal.
2 De som van twee priemgetallen is altijd een priemgetal.
3 De som van twee priemgetallen is nooit een priemgetal.

Welke stelling is juist?

A Stelling 1
B Stelling 2
C Stelling 3

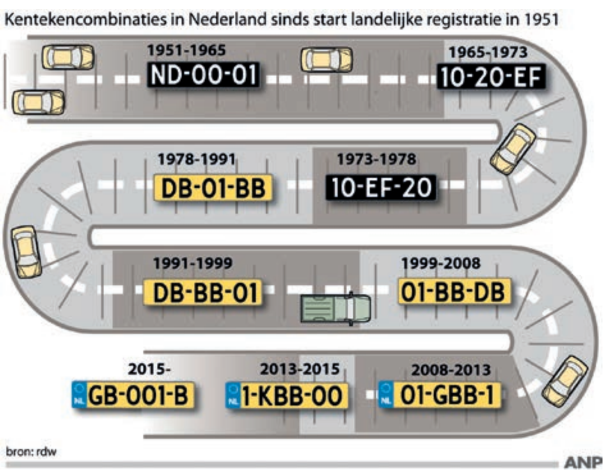
Antwoord: A

Toelichting
De priemgetallen 2 en 3 zijn opgeteld weer een priemgetal, namelijk 5. Dat geldt ook als je bijvoorbeeld de priemgetallen 2 en 5 of 2 en 11 optelt. Als de priemgetallen ongelijk zijn aan 2, geldt dat het oneven getallen zijn. De som van twee priemgetallen is dan een even getal. Dat getal kan dus geen priemgetal zijn, want het is deelbaar door 2. Met andere woorden: stelling A is juist.

Priemgetal

1.1.18 Negende nieuwe kentekencombinatie

FIGUUR 1.1.18 Nieuwe kentekencombinatie



1

De Rijksdienst voor het Wegverkeer (RDW) geeft sinds 2019 kentekenplaten uit met de nieuwe cijfer-lettercombinatie G-001-KB. In figuur 1.1.18 zie je de vorige cijfer-lettercombinaties.
Hoeveel nieuwe mogelijke kentekens levert deze nieuwe cijfer-lettercombinatie op in vergelijking tot de vorige combinatie van 2015?

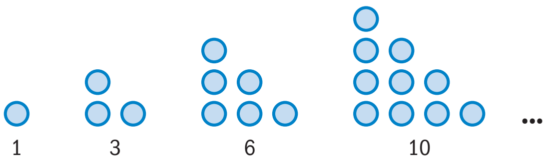
A Minder mogelijkheden
B Evenveel mogelijkheden
C Meer mogelijkheden

Antwoord: B

Toelichting
G-001-KB levert 26 × 10 × 10 × 10 × 26 × 26 mogelijke kentekens op.
GB-001-B heeft ook drie letters en drie cijfers, en levert dus evenveel mogelijke kentekens op.
Je ziet dat een letter meer verschillende mogelijkheden oplevert dan een cijfer. Een kenteken met vier letters en twee cijfers geeft meer verschillende mogelijkheden dan een kenteken met drie letters en drie cijfers.
Misschien merk je op dat er geen klinkers gebruikt worden. Dan wordt het aantal mogelijke kentekens kleiner. Maar omdat het in deze vraag om dezelfde aantallen letters gaat, verandert het antwoord daardoor niet.

1.1.19 Driehoeksgetallen

FIGUUR 1.1.19A Reeks driehoeksgetallen



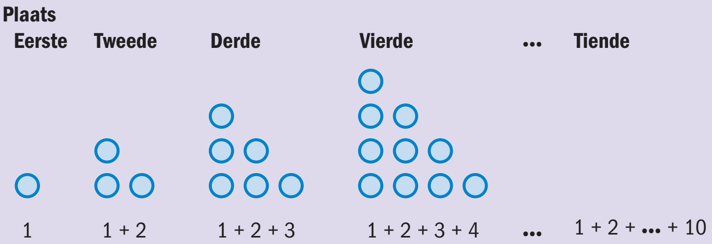
De getallen 1, 3, 6 en 10 zijn de eerste vier driehoeksgetallen uit de reeks van driehoeksgetallen.
Welk getal staat op plaats 100 in de reeks driehoeksgetallen?

Antwoord: 5050

Driehoeksgetal

Toelichting
Kijk naar de volgende figuur van de driehoeksgetallen als som van opeenvolgende hele getallen.

FIGUUR 1.1.19B Driehoeksgetallen als som van opeenvolgende hele getallen



Op plaats 100 staat dus het getal 1 + 2 + … + 99 + 100
Deze som kun je handig oplossen door 1 + 100 bij elkaar te nemen, dan 2 + 99 enzovoorts. Je krijgt 50 keer het getal 101:
$1 + 2 + \ldots + 99 + 100 = 50 \times 101 = 5050$

1.1.20 Triljoen

Hoeveel is een triljoen gedeeld door een biljoen?

A 10^3
B 10^6
C 10^9
D 10^{12}

Antwoord: B

Toelichting
Wat een triljoen en een biljoen zijn, moet je weten. Een triljoen is 10^{18}. Biljoen
Een biljoen is 10^{12}. Misschien heb je dit niet helemaal paraat, maar kom Triljoen
je toch een eind als je een lijstje maakt van alle grote getallen, zoals in de volgende tabel.

FIGUUR 1.1.20 Grote getallen

Duizend	10^3
Miljoen	10^6
Miljard	10^9
Biljoen	10^{12}
Biljard	10^{15}
Triljoen	10^{18}
Triljard	10^{21}

Nu moet je nog delen: $10^{18}: 10^{12}$. Probeer eventueel met kleinere machten uit hoe dat gaat. Bij $10^6: 10^3$ kun je de deling uitschrijven en zie je wat er gebeurt, want 1 000 000 : 1000 = 1000. Bij het delen met machten kun je de exponenten van elkaar aftrekken. Macht
Dus $10^{18}: 10^{12} = 10^6$, want $18 - 12 = 6$.

1.1.21 Zo dicht mogelijk benaderen

Welke schatting van de vermenigvuldiging 795 × 97 benadert het dichtst de precieze uitkomst? Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.

A 800 × 90
B 800 × 100
C 790 × 90
D 790 × 100

Antwoord: D

Toelichting
Als 'gewone' schatting van de uitkomst van 795 x 97 ligt 800 × 100 (antwoord B) natuurlijk voor de hand, maar het gaat hier om het zo dicht mogelijk benaderen van de werkelijke *uitkomst.*

Vergelijk je bijvoorbeeld de schatting B van 800 x 100 met 795 × 97, dan blijkt die 795 × 3 + 5 × 100 ≈ 3000 groter te zijn (zie figuur 1.1.21).

FIGUUR 1.1.21

795 × 97
↓ + 795 × 3
795 × 100
↓ + 5 × 100
800 × 100

Verder is schatting A (72 000) 8000 kleiner dan schatting B (80 000) en daarmee dus ongeveer 5000 kleiner dan de schatting van 795 × 97. Schatting C is nog eens 10 × 90 = 900 kleiner dan A, dus ongeveer 6000 kleiner dan 795 x 97.
Ten slotte is schatting D (79 000) 1000 kleiner dan B, dus ongeveer 2000 groter dan 795 × 97, zodat schatting D de vermenigvuldiging 795 × 97 het dichtst blijkt te benaderen.
B ≈ 795 × 97 + 3000

In een overzicht:
A = B – 8000 ≈ 795 × 97 – 5000
C = A – 9000 ≈ 795 × 97 – 5000
D = B – 1000 ≈ 795 × 97 + 2000

Redeneren

Het op deze manier kunnen redeneren met getallen is van groot belang voor het (leren) volgen van redeneringen van leerlingen.

1.1.22 Wetenschappelijke notatie

Hier zie je vier getallen in de wetenschappelijke notatie genoteerd.

A $3{,}5 \times 10^{17}$
B $3{,}5 \times 10^{19}$
C $3{,}5 \times 10^{12}$
D $3{,}5 \times 10^{13}$

Welk getal is het getal 0,35 triljoen?

Antwoord: A

Toelichting
1 triljoen = 1 000 000 biljoen
1 biljoen = 1 000 000 miljoen
1 triljoen = $1\,000\,000 \times 1\,000\,000 \times 1\,000\,000 = 10^{18}$
0,35 triljoen = $0{,}35 \times 10^{18} = 3{,}5 \times 10^{17}$.

Triljoen
Biljoen
Miljoen

1.1.23 Rekenen met binaire getallen

Hieronder staan twee getallen in het tweetallig stelsel, die je moet optellen.
111 + 10 =
Wat is het antwoord, ook als tweetallig getal genoteerd?

Antwoord: 1001

Toelichting
In het tweetallig of binair talstelsel gebruik je alleen de cijfers 0 en 1. Het binaire getal 10 betekent één bundel van twee en is in het tientallig stelsel twee waard.

Binair talstelsel

Manier 1
111 is binair een bijna rond getal. 111 + 1 = 1000. Nog 1 erbij is 1001.

Manier 2
Zet de getallen onder elkaar, tel ze cijferend op en wissel een 10 in een kolom in voor een 1 in de kolom links daarvan.

Cijferen

TABEL 1.1.23 Cijferen met binaire getallen

2^3	2^2	2^1	2^0
	1	1	1
		1	0 +
	1	10	1
	10	0	1
1	0	0	1

Zie ook paragraaf 1.5, Thema talstelsels.

1.1.24 Aftrekken met binaire getallen

Dit is een opdracht met binaire getallen:
100 000 – 11 111 =
Wat is het juiste antwoord?

Antwoord: 1

Aanvullen
Binair talstelsel
Decimaal positioneel getalsysteem

Toelichting
Wanneer je de aftreksom als een verschil ziet, kun je het antwoord vinden door aan te vullen. In het binair talstelsel geldt 11 111 erbij 1 is 100 000. Het verschil is dus 1.
Je kunt een parallel maken met het decimaal positioneel getalsysteem, dat tientallig is. Wanneer je het bijna ronde getal 99 999 hebt en daar 1 bij doet, worden alle negens nullen en krijg je links een positie erbij: 100 000. Zie ook paragraaf 1.5, Thema talstelsels.

1.1.25 Kolomsgewijs achttallig

Welke van deze kolomsgewijze vermenigvuldigingen in het achttallige stelsel is juist?

FIGUUR 1.1.25 Kolomsgewijs achttallig

A	B	C	D
53	53	53	53
× 24	× 24	× 24	× 24
14	140	14	140
200	2400	240	2400
600	600	60	600
1000	12 000	1200	10 000
2014	15 340	1534	13 340

Antwoord: C

Toelichting
In opgave A is bij de vermenigvuldigingen 4 × 50, 20 × 3 en 20 × 50 waarschijnlijk gewoon tientallig gedacht, en niet in het achttalig talstelsel. Er is wel goed opgeteld. Bij opgave B is overal een factor 10 (acht) te veel gebruikt; er is goed opgeteld. Bij opgave D is ook een factor 10 te veel gebruikt. Bovendien is er een fout gemaakt bij de laatste vermenigvuldiging 20 × 50; de maker is daar weer even in de tientallige rol gestapt. De optelling is goed. Zie ook paragraaf 1.5, Thema talstelsels.

Talstelsel

1.1.26 Vondel

FIGUUR 1.1.26 Grafmonument van Vondel

Op deze foto zie je het grafmonument van Vondel in de Nieuwe Kerk in Amsterdam. Het vermeldt het jaar waarin Vondel is overleden (MDCLXXIX) en het jaar waarin dit monument is opgericht (MDCCLXXII).
Hoeveel jaar is er verlopen tussen het overlijden en het oprichten van het monument?

1

Antwoord: 93 jaar

Toelichting
Alleen de jaartallen op dit monument zijn van belang voor de vraag. Deze jaartallen staan vermeld in Romeinse cijfers.

Manier 1
Vondel is overleden in MDCLXXIX ofwel in 1679. Het monument is uit MDCCLXXII, dus uit 1772. 1772 – 1679 = 93.

Manier 2

Positioneel getalsysteem

Omdat het Romeinse talstelsel geen positioneel getalsysteem is, kun je ook letters tegen elkaar wegstrepen: MDCLXX staat in beide jaartallen. Die letters kun je wegstrepen (wel opletten!), het verschil tussen de twee getallen blijft even groot. Over blijft nog CII – IX is 102 – 9 = 93.
Zie ook paragraaf 1.5, Thema talstelsels.

1.1.27 De waarde van n

$(\sqrt{5})^n$ n is een geheel getal. Wat kan de waarde van n zijn?

A n moet een veelvoud zijn van 2 en groter of gelijk aan 0.
B n moet een veelvoud zijn van 2 en groter dan 0.
C n moet een veelvoud zijn van 5 en groter of gelijk aan 0.
D n moet een veelvoud zijn van 5 en groter dan 0.

Antwoord: A

Toelichting

Worteltrekken

Inverse bewerking

Macht

Worteltrekken en machtsverheffen zijn inverse bewerkingen. Als je uit een getal de wortel trekt, en je doet het dan weer tot de macht 2, dan heb je het oorspronkelijke getal weer terug. Kijk maar even bij het getal 9: $\sqrt{9} = 3$, en $3^2 = 9$. Dus $(\sqrt{5})^2 = 5$. Maar n kan hier ook meer waardes hebben. $(\sqrt{5})^4 = 25$. Met een oneven macht krijg je geen geheel getal. Nu nog de vraag of de exponent ook 0 kan zijn. Een getal tot de macht 0 is 1. Dus dat kan ook.

1.1.28 De lengte van de zijden

De oppervlakte van een vierkant is 3. Wat is de lengte van een van de zijden?

A $\frac{1}{4}\sqrt{3}$
B $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
C $\sqrt{3}$
D $\sqrt{9}$

Antwoord: C

Toelichting
De oppervlakte van een vierkant reken je uit door zijde x zijde te doen. Omgekeerd als je de oppervlakte weet, dan krijg je de lengte van de zijde door de wortel te trekken uit de oppervlakte. In dit geval dus de wortel uit 3.

Oppervlakte

Worteltrekken

1.1.29 De eikenprocessierups

Na de eerste vondst in Nederland in 1991 is de eikenprocessierups in aantal exponentieel toegenomen. Stel je eens voor dat het in 1991 is begonnen met één rups en de populatie vervolgens elk jaar is verdubbeld tot uiteindelijk het maximum aantal in 2021.
In welk jaar was het aantal rupsen dan de helft van dat maximum?
Wat is het antwoord op deze vraag?

Antwoord: 2020

Toelichting
Als je terugdenkt vanaf de 2021 naar de 2020, wordt het aantal gehalveerd en gaat het dus achtereenvolgens terug van het maximum naar de helft van dat maximum. Bij de groei van de populatie met 1 als start, wordt het aantal rupsen telkens met de factor 2 vermenigvuldigd: 1, 2, 4, 8, 16, 32, enzovoort; eigenlijk dus achtereenvolgens 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, enzovoort. Dit wordt wel een exponentiële groei genoemd, een toename met steeds hetzelfde percentage, in dit geval 100%, weer te geven met de factor 2. De bijbehorende grafiek is een kromme lijn. De toename van het aantal factoren 2 zie je aan de exponenten 0,1,2,3,4,5, enzovoort. Een groei of afname met eenzelfde aantal – bijvoorbeeld een lengtegroei van iemand met elk jaar telkens 2 cm gedurende een aantal jaren – heet een lineaire groei; bij zo'n groeiproces hoort een rechte lijn als grafiek.

Exponentiële groei

Exponent

1.1.30 Vergelijkingen met twee onbekenden

Voor de getallen a en b geldt:
$a + b = 30$ en $2 \times a + 3 \times b = 100$

Welke bewering is waar?

A a is een negatief getal en b is dat niet.
B b is een negatief getal en a is dat niet.
C Er zijn geen getallen a en b waarvoor beide vergelijkingen gelden.
D Er is meer dan een mogelijkheid voor de getallen a en b.

Antwoord: A

Toelichting

Manier 1
Door getallen bij a en b in te vullen, merk je dat a een negatief getal moet zijn. a = 29 en b = 1 geeft 58 + 3 = 61, nog lang geen 100. Andersom a = 1 en b = 29 geeft 2 + 3 x 29 = 89 wat het hoogst mogelijk uitkomst is met a een geheel positief getal. a moet daarom een negatief getal zijn, en b groter dan 29.

Manier 2
Dezelfde conclusie kun je trekken door de vergelijkingen op te lossen: a + b = 30, dus a = 30 – b. Wanneer je dit in de andere vergelijking invult krijg je: 2 × (30 – b) + 3 × b = 100; reken je dat uit dan krijg je 60 - 2 × b + 3 × b = 100, b = 100 – 60, b = 40; wanneer je dit bij de eerste vergelijking invult zie je dat a = 30 – 40 = -10. a is een negatief getal en b is dat niet.

1.2 Kennis specifiek voor de leraar

1.2.1 Delen met nullen

Drie deelsommen:

FIGUUR 1.2.1 Delen met nullen

480 : 80 =
4800 : 80 =
48000 : 80 =

Lisa uit groep 6 vertelt hoe zij deze deelsommen uit haar rekenboek doet.
Lisa: ‘Ik doe gewoon de nullen weg, 48 : 8 = 6. Bij de volgende een nul erbij, bij die 6, dus 60 en bij de laatste nog een nul erbij.’
Welke strategie past Lisa (al dan niet begrepen) toe?

A Lisa voegt nullen toe aan de uitkomst.
B Lisa deelt deler en deeltal door hetzelfde getal.
C Als het deeltal tien keer zo groot wordt, maakt Lisa het quotiënt ook tien keer zo groot.
D De antwoorden B en C zijn beide juist.

Antwoord: D

Toelichting
Handig rekenen
De deelopgave 480 : 80 kun je uitrekenen door middel van handig rekenen, en wel door deeltal en deler beide te delen door 10. Je krijgt dan 48 : 8 = 6. Als je deeltal en deler beide door hetzelfde getal deelt, of met hetzelfde getal vermenigvuldigt, blijft de uitkomst gelijk. Antwoord B is alvast juist.
Deeltal
Deler
Als je weet dat 4800 : 80 = 60, dan is 48 000 : 80 = 600. Het deeltal in de tweede opgave is tien keer zo groot, dus de uitkomst, het quotiënt, wordt ook tien keer zo groot. Antwoord C is dus ook juist.
Quotiënt

1.2.2 Buiten spelen

Drie kinderen rekenen uit hoeveel uur per jaar ze buiten spelen. Per week 9 keer 15 minuten en dat voor 40 schoolweken is 40 × 9 × 15. Ze komen samen tot de opgave 40 × 9 × 15 : 60, maar ze lossen de opgave op verschillende manieren op:
Kees: ‘Ik deel eerst 40 door 10, dat is 4. Dan wordt de opdracht heel gemakkelijk.’
Pim: ‘Ik doe 4 × 15 is 60, en 60 : 60 is 1. Dan heb ik alleen 10 × 9 over.’
Marvin: ‘Ik doe 360 gedeeld door 60 is 6. Dan wordt het ook gemakkelijk.’

Welke kinderen redeneren op een wiskundig correcte manier?

A Alleen Marvin
B Marvin en Pim
C Kees, Pim en Marvin
D Geen van de kinderen

Antwoord: C

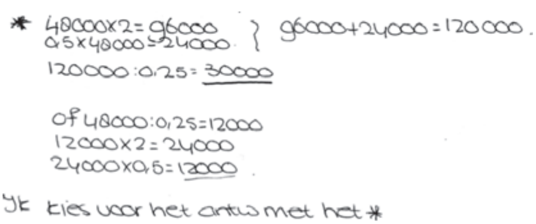
Toelichting
40 × 9 × 15 : 60 kun je ook opschrijven als $40 \times 9 \times \frac{15}{60} = \frac{40 \times 9 \times 15}{60}$.
Kees vereenvoudigt als het ware de breuk door 40 en 60 door 4 te delen. Hij krijgt dus $\frac{10 \times 9 \times 15}{15}$. Hij deelt weer teller en noemer door 15 en houdt 10 × 9 = 90 over.
Pim rekent 40 × 9 × 15 = 10 × 4 × 9 × 15 = 10 × 9 × 4 × 15 = 10 × 9 × 60 en 10 × 9 × 60 : 60 = 90.
Marvin rekent eerst 40 × 9 = 360 en heeft dan $\frac{360 \times 15}{60}$.
360 : 60 = 6 ; 6 × 15 = 90.

Breuk
Teller
Noemer

1.2.3 Vermenigvuldiging met drie factoren

Hierna zie je twee oplossingen van een leerling die de opgave 0,25 × 2,5 × 48 000 heeft gemaakt. Ze kiest uiteindelijk voor de eerste oplossing.

FIGUUR 1.2.3A Vermenigvuldiging met drie factoren



Welke van de volgende vier beweringen is juist?

A Het antwoord van de tweede oplossing (12 000) is goed, de rekenprocedure niet.
B Het antwoord van de eerste oplossing (30 000) is goed, de rekenprocedure niet.
C Het antwoord en de rekenprocedure van de eerste oplossing zijn goed.
D Het antwoord en de rekenprocedure van de tweede oplossing zijn goed.

Antwoord: B

Toelichting

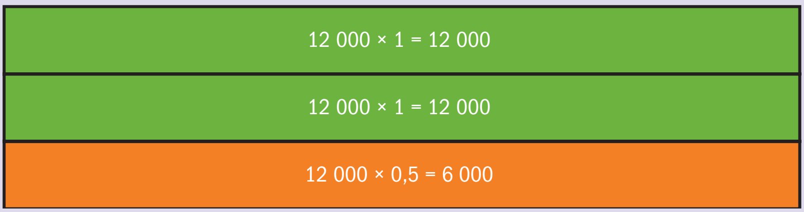
Distributieve eigenschap

In feite gaat het hier om het toepassen van de distributieve eigenschap van de vermenigvuldiging en optelling, namelijk dat 12 000 × 2,5 = (12 000 × 2) + (12 000 × 0,5). In algemene vorm: a (b + c) = ab + ac.

Context
Rechthoekmodel

Een context (12 000 × €2,50) of een plaatje van het rechthoekmodel kan helpen om de distributieve eigenschap inzichtelijk te maken.

FIGUUR 1.2.3B Vermenigvuldiging met drie factoren



In oplossing 1 wordt een notatiefout gemaakt: 120 000 : 0,25 ≠ 30 000. Er is weliswaar (terecht) door 4 gedeeld, maar 120 000 : 0,25 zou leiden tot 120 000 : $\frac{1}{4}$ = 120 000 × 4 = 480 000. Het antwoord 30 000 is wel goed. In de tweede oplossing wordt dezelfde notatiefout gemaakt (48 000 : 0,25 = 12 000) en ook hier wordt wel een vierde deel genomen. Vervolgens wordt 24 000 × 0,5 berekend in plaats van 12 000 × 0,5.

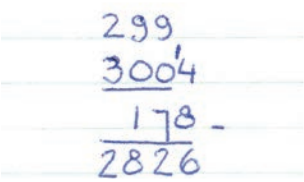
Niveau

Voor leerlingen van diverse rekenniveaus blijken dit soort opgaven (drietermen) vaak lastig te zijn. De aanpak om bij de opgave 0,25 × 2,5 × 48 000 bijvoorbeeld eerst een vierde deel van 48 000 te nemen, vraagt meer kennis en inzicht dan je misschien zou denken. In feite zijn het namelijk achtereenvolgens de commutatieve en de associatieve eigenschap die deze aanpak legitimeren. De uitkomst daarvan (12 000) moet je dan nog wel met 2,5 vermenigvuldigen.

Eigenschap van bewerking

1.2.4 Inwisselen

FIGUUR 1.2.4 Inwisselen



Fatima vertelt hoe zij deze som gedaan heeft: ‘Vier min acht kan niet, dan ga ik inwisselen. Maar dan kan het ook niet en dan ga ik inwisselen bij 300. Dat wordt 299. Dan krijg ik 14 – 8 = 6, 9 – 7 = 2, 9 – 1 = 8, en dan nog een 2.’
Is het wiskundig correct wat Fatima doet?

A Ja.
B Nee.
C Dat kun je op grond van dit werk van Fatima niet nagaan.

Antwoord: A

Toelichting

Cijferen
Eenheid
Tiental

Fatima cijfert. Als zij niet voldoende eenheden heeft om af te trekken, wil zij een tiental inwisselen. Maar er zijn nul tientallen. Dit is voor kinderen vaak een lastig probleem. Fatima neemt nu een ‘cijfergroepje’ (zo noemt de methode *Rekenrijk* dit) waarbij zij wel kan inwisselen: 300 wordt 299. Dit zijn in feite dertig tientallen, waarvan zij er dan één afhaalt en inwisselt voor tien eenheden. In de eenhedenkolom komt nu te staan 14 – 8. Nu kan Fatima van rechts naar links aftrekken. Dit is wiskundig correct.

1.2.5 Oneven aantal delers

Twee groep 8-kinderen zijn op zoek naar de getallen onder de 100 met een oneven aantal delers.
Peter: ‘81 heeft een oneven aantal delers. Alleen oneven getallen hebben een oneven aantal delers.’
Sara: 'Volgens mij zijn er ook even getallen met een oneven aantal delers …’
Wie heeft gelijk?

A Alleen Peter
B Alleen Sara
C Allebei
D Geen van beiden

Antwoord: B

Toelichting

Deler

Er zijn ook even getallen met een oneven aantal delers, het getal 36 bijvoorbeeld. De delers van 36 zijn: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 en 36. Peter heeft dus geen gelijk.

1

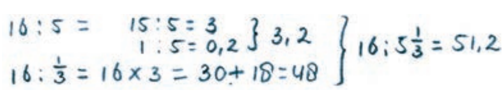
Priemgetal
Kwadraat

Sara heeft gelijk. Alle priemgetallen hebben precies twee delers, een even aantal delers. Niet-priemgetallen hebben meer delers. Een kwadraat heeft een oneven aantal delers. Kijk bijvoorbeeld naar de delers van 16, dat zijn: 1, 2, 4, 8 en 16. Dat is logisch, omdat de delers paren vormen: $1 \times 16 = 16$; $2 \times 8 = 16$. Je houdt 4 over, omdat 4 een paar vormt met zichzelf: $4 \times 4 = 16$. Bij getallen die geen kwadraat zijn, gebeurt dat niet, en daarom is het aantal delers van die getallen even.
Er zijn precies tien kwadraten tot en met 100: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 en 100. Alle andere negentig getallen hebben een even aantal delers. Zie ook paragraaf 1.4, Thema deelbaarheid.

1.2.6 Delen door $5\frac{1}{3}$

Een pabostudent geeft de volgende oplossing geschreven bij de opgave $16 : 5\frac{1}{3} =$

FIGUUR 1.2.6 Delen door $5\frac{1}{3}$



Welke van de volgende drie beweringen is juist?

A De oplossingsprocedure is goed, maar het antwoord is fout.
B De distributieve eigenschap is toegepast op het delen en dat mag niet.
C Het antwoord is goed, de oplossingsprocedure niet.

Antwoord: B

Toelichting

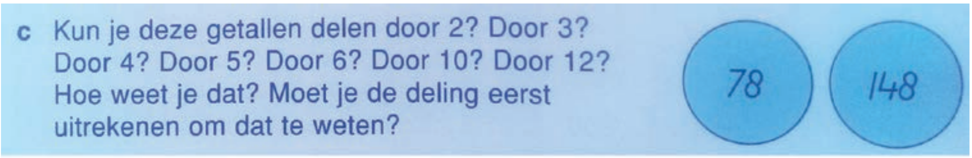
Distributieve eigenschap

Deler

Inderdaad is de distributieve eigenschap hier verkeerd toegepast door de deler $5\frac{1}{3}$ te splitsen in 5 en $\frac{1}{3}$, en vervolgens te redeneren: $16 : 5\frac{1}{3} = (16 : 5) + (16 : \frac{1}{3}) =$, enzovoorts. Dat dit niet mag, zie je bijvoorbeeld door $16 : 5\frac{1}{3}$ te beschouwen als het aantal stappen van $5\frac{1}{3}$ dat je nodig hebt om van 0 naar 16 te komen. Je kan dan niet eerst kijken hoeveel stappen van 5 je nodig hebt en vervolgens hoeveel stappen van $\frac{1}{3}$, om dat vervolgens op te tellen. Iets dergelijks mag wel bij het vermenigvuldigen, zoals bij $16 \times 5\frac{1}{3} = (16 \times 5) + (16 \times \frac{1}{3}) = 90 + \frac{16}{3} = 90 + 5\frac{1}{3} = 95\frac{1}{3}$. Bij het delen mag de deler $5\frac{1}{3}$ niet gesplitst worden.

1.2.7 Deelbaar door 6

FIGUUR 1.2.7 Opgave uit *De wereld in getallen*



c Kun je deze getallen delen door 2? Door 3? Door 4? Door 5? Door 6? Door 10? Door 12? Hoe weet je dat? Moet je de deling eerst uitrekenen om dat te weten?

Groep 8 van meester Kees werkt aan deze opdracht uit *De wereld in getallen*. Is 148 deelbaar door 6? Drie leerlingen redeneren verschillend.
Sander: ‘148 is niet deelbaar door 6 omdat het ook niet door 3 deelbaar is.’
Karin: ‘148 is niet deelbaar door 6 omdat 8 niet deelbaar is door 6.’
Marco: ‘148 is niet deelbaar door 6 omdat 100 niet deelbaar is door 6.’
Welke kinderen redeneren correct?

A Sander en Karin
B Sander en Marco
C Alleen Sander
D Alleen Marco

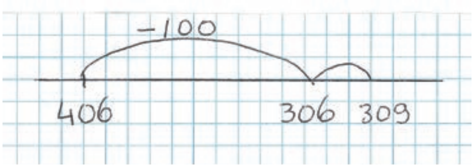
Antwoord: B

Toelichting
Sander weet dat een getal dat deelbaar is door 6 moet voorkomen in de tafel van 2 en in de tafel van 3. Dat komt omdat 6 is opgebouwd uit de priemgetallen 2 en 3. Een getal is deelbaar door 6 als het deelbaar is door 2 en ook door 3.
Karin redeneert niet correct, omdat er getallen zijn die op een 8 eindigen en wel deelbaar zijn door 6, zoals 18 en 48.
Marco redeneert wel correct. Hij weet dat 48 voorkomt in de tafel van 6. 148 = 100 + 48, dus nu gaat het erom of 100 deelbaar is door 6, en dat is niet zo.
Zie ook paragraaf 1.4, Thema deelbaarheid.

Priemgetal

1.2.8 Te veel eraf

FIGUUR 1.2.8A Te veel eraf



Merel doet 406 – 97 op de getallenlijn.
Wat vind je van haar aanpak?

1

A Merels aanpak is goed.
B Merel gebruikt de getallenlijn niet goed.
C Merels oplossing is niet goed, want ze doet 306 + 3 in plaats van 306 – 3.
D De antwoorden B en C zijn beide waar.

Antwoord: B

Toelichting

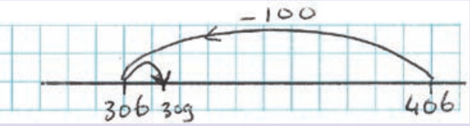
Getallenlijn

Aftrekken

Handig rekenen

De getallen op de getallenlijn staan normaliter in oplopende volgorde: kleinere getallen links, grotere getallen rechts. Bij optellen op de getallenlijn werk je van links naar rechts, maar bij aftrekken begin je meer naar rechts op de getallenlijn en maak je een boog naar links.
Bij de opgave 406 – 97 ligt handig rekenen voor de hand: eerst – 100. Maar daarna is het voor kinderen soms lastig om te weten of er nog 3 bij moet of nog 3 eraf. Je hebt 3 te veel eraf gedaan, dus die 3 moet er weer bij. Op de getallenlijn maak je een sprongetje van 3 terug: 306 + 3 = 309.

FIGUUR 1.2.8B Sprongetje terug



Merel springt op haar getallenlijn twee keer naar rechts, terwijl het kleine sprongetje in tegengestelde richting had moeten zijn. Kortom: Merels antwoord is goed en ze maakt handig gebruik van het feit dat 97 bijna een rond getal is, maar wat ze op de getallenlijn doet, klopt niet.

1.2.9 Een deelopgave

Twee kinderen maken de opgave 1470 : 35. Ze kiezen voor verschillende strategieën.
Kees deelt eerst 1470 door 7, en vervolgens de uitkomst daarvan door 5.
Marijke lost eerst 1470 : 140 op. Ze deelt 147 door 14, en vervolgens vermenigvuldigt ze de uitkomst met 4.
Welk kind past een correcte strategie toe?

A Alleen Kees
B Alleen Marijke
C Allebei
D Geen van beide

Antwoord: C

Toelichting

Deeltal

Deler

Kees deelt deeltal en deler door hetzelfde getal 7. Dus 1470 : 35 = 210 : 5 = 42. Dat is correct.
Marijke lost eerst de opgave 1470 : 140 = 147 : 14 op. Dat is 10,5, want 140 : 14 = 10 en 7 : 14 = 0,5. De oorspronkelijke deler 35 is vier keer

zo klein als 140, dus is het antwoord op 1470 : 35 vier keer zo groot:
$4 \times 10{,}5 = 42$.

1.2.10 Welke eigenschappen?

Bij de volgende uitwerking van de opgave $22 \times 37 + 37 \times 14$ worden eigenschappen van bewerkingen gebruikt, zoals de commutatieve, de distributieve en de associatieve eigenschap.

$22 \times 37 + 37 \times 14 =^{1} 22 \times 37 + 14 \times 37 =^{2} 36 \times 37 = 12 \times 3 \times 37 =^{3}$
$12 \times 111 =^{4} 1\,110 + 222 = 1\,332$

In de volgende tabel verwijzen de rode cijfers naar de cijfers in de bovenstaande bewerking, en daarmee naar mogelijke eigenschappen die – telkens van links naar rechts – in de bewerking gebruikt zijn. De eigenschappen zijn aangegeven met de kleine letters a (associatief), c (commutatief) en d (distributief). Welke van de vier volgordes van de eigenschappen bij 1 tot en met 4 is correct?

FIGUUR 1.2.10 Antwoorden eigenschappen

	1	2	3	4
A	d	d	c	a
B	c	d	a	d
C	a	c	d	d
D	d	c	d	a

Antwoord: B

Toelichting
Bij 1 wordt de commutatieve eigenschap toegepast als 37×14 wordt omgezet naar 14×37. Bij 2 wordt de distributieve eigenschap toegepast als $22 \times 37 + 14 \times 37$ wordt beschouwd als $(22 + 14) \times 37 = 36 \times 37$. Als je de bewerking omkeert, te beginnen bij 36×37, is de eigenschap misschien beter te herkennen.
Bij 3 wordt de associatieve eigenschap toegepast, als bij de vermenigvuldiging $12 \times 3 \times 37$ de deelvermenigvuldiging 3×37 wordt gekozen om allereerst uit te werken.
Bij 4 is weer sprake van de distributieve eigenschap als 12×111 wordt gesplitst in $10 \times 111 + 2 \times 111$.

Eigenschap van bewerking

1.2.11 Vermenigvuldigingstabel

FIGUUR 1.2.11 Vermenigvuldigingstabel

X	12	15	25
10	120	150	250
5	60	75	125
6			

Kim is bezig met vermenigvuldigen. Bij het vullen van de laatste rij (van 6 keer) in deze vermenigvuldigingstabel maakt ze gebruik van de rij erboven (de rij van 5 keer).
Van welke eigenschap van vermenigvuldigen maakt ze gebruik?

A Schakeleigenschap (associatieve eigenschap)
B Omkeereigenschap (commutatieve eigenschap)
C Verdeeleigenschap (distributieve eigenschap)

Antwoord: C

Toelichting
Neem de eerste vermenigvuldiging: 6 × 12 = 5 × 12 + 1 × 12 (de één-keer-meerstrategie van vermenigvuldigen).
6 × 12 kun je ook opschrijven als (5 + 1) × 12 = 5 × 12 + 1 × 12. Je mag dus de 12 als het ware over de 5 en de 1 verdelen. Deze eigenschap van vermenigvuldigen heet de verdeeleigenschap of distributieve eigenschap van vermenigvuldigen.

Distributieve eigenschap

1.2.12 Evenveel 'groeien'

Sanne vraagt zich af hoeveel langer haar moeder is. Ze gaan aan de slag met een meetlint uit de naaidoos. Sanne is 94 cm lang en haar moeder is 172 cm lang. Nu het verschil nog. Lastig, vindt Sanne. Moeder weet een handige manier om erachter te komen. Ze zegt: 'We doen net of we allebei heel hoge hakken aandoen.'
Welke strategie heeft Sannes moeder voor ogen?

A 172 – 100 + 6
B 94 + 6 + 72
C 178 – 100
D 172 – 4 – 90

Antwoord: C

Toelichting
Het antwoord is C. Sannes moeder maakt gebruik van de eigenschap dat het verschil van 172 – 94 niet verandert als je beide getallen met hetzelfde getal vermeerdert of vermindert. In dit geval slaat het 'hoge hakken aandoen' op het vermeerderen van beide getallen met 6, dus 172 – 94 = (172 + 6) – (94 + 6) = 178 – 100 = 78 (zie ook opgave 1.2.18).

1.2.13 Splitsen met teveel

FIGUUR 1.2.13 Splitsen – met teveel

Reken uit op jouw manier. Denk aan: *splitsen – met teveel*
Reken uit met splitsen.

810 : 9 =	124 : 4 =	261 : 9 =
828 : 9 =	459 : 9 =	483 : 7 =

In de methode *Rekenrijk* staat voor groep 6 een oefening met delen. Sommige leerlingen moeten splitsen, anderen mogen hun eigen manier kiezen, bijvoorbeeld splitsen of ‘met teveel’. Probeer zelf aan de hand van deze opgaven te bedenken wat ‘met teveel’ hier betekent.
Op welke eigenschap berusten deze oplossingsmanieren bij delen?

A Associatieve eigenschap
B Commutatieve eigenschap
C Distributieve eigenschap
D Compensatie-eigenschap en distributieve eigenschap

Antwoord: C

Toelichting

Delen

Distributieve eigenschap

Voor de bewerking delen geldt de distributieve eigenschap, die voor kinderen ook wel splitsen wordt genoemd. Je splitst het deeltal in twee delen. 828 : 9 = 810 : 9 + 18 : 9 = 90 + 2 = 92. Bij het laatste rijtje kun je mooi delen ‘met teveel’, ofwel 261 : 9 = 270 : 9 – 9 : 9 = 30 – 1 = 29. Deze oplossingsmanier berust op dezelfde distributieve eigenschap.

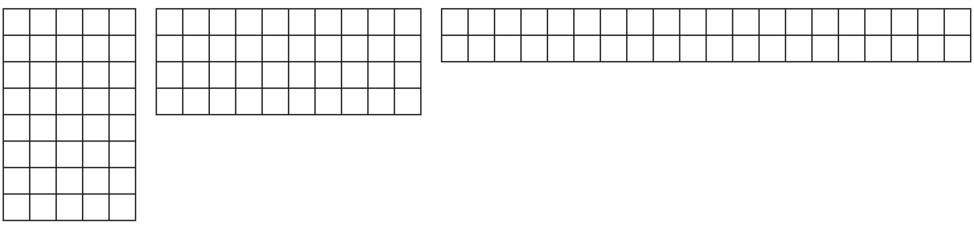
Commutatieve eigenschap

Associatieve eigenschap

De commutatieve eigenschap en de associatieve eigenschap zijn niet geldig bij delen, maar alleen bij optellen en vermenigvuldigen. Zoek zo nodig na wat deze eigenschappen betekenen in het begrippenregister onder ‘eigenschap van bewerking’.

1.2.14 Vermenigvuldigingen met dezelfde uitkomst

FIGUUR 1.2.14 Rechthoeken bij vermenigvuldigen



Bij elk plaatje noteren de kinderen een vermenigvuldiging.
Tijdens de bespreking zien ze dat alle vermenigvuldigingen dezelfde uitkomst hebben.
Hiermee wil juf Ria een strategie van vermenigvuldigen met de kinderen aan de orde stellen.

Welke strategie is dat?

A Bij een vermenigvuldiging mag je de volgorde van de factoren veranderen.
B Bij een vermenigvuldiging van meerdere factoren mag je elke twee willekeurige factoren als eerste met elkaar vermenigvuldigen.
C Bij een vermenigvuldiging mag je een van de factoren verdubbelen als je de andere halveert.

Antwoord: C

Toelichting
Alle rechthoeken hebben dezelfde oppervlakte: 40. De eerste rechthoek is 8 × 5, de tweede 4 × 10 en de derde 2 × 20.

Factor

Associatieve eigenschap

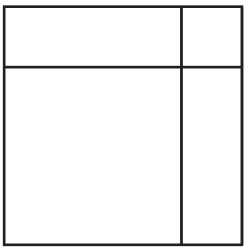
De rechthoeken laten zien dat je bij een vermenigvuldiging een van de factoren mag verdubbelen als je de andere halveert. Dat 8 × 5 = 4 × 10 = 2 × 20 zie je aan het feit dat ze dezelfde uitkomst hebben. Je kunt echter ook beredeneren dat het zo is zonder dat je de sommen uitrekent, door de associatieve eigenschap toe te passen: bij een vermenigvuldiging van getallen met meerdere factoren mag je elke twee willekeurige factoren als eerste met elkaar vermenigvuldigen.

$8 \times 5 = (4 \times 2) \times 5 = 4 \times (2 \times 5) = 4 \times 10 = (2 \times 2) \times 10 = 2 \times (2 \times 10) = 2 \times 20$

1.2.15 99 × 99

Een leerling maakt de opgave: 99 × 99 = 10 000 – 1 = 9999 en vraagt de leraar of de uitwerking goed is. De leraar gebruikt het volgende model (zie figuur) om de leerling zelf de oplossing te laten controleren.

FIGUUR 1.2.15A Model 1



Kies één van de volgende uitspraken.

A Ongeschikt model, maar de verdeling in vieren is wel juist.
B Overbodig, de oplossing is goed; dit model kan onnodige verwarring geven.
C Het model kan inzicht geven in de verdeeleigenschap ter controle van de oplossing.
D Het model geeft de aftrekking niet goed weer.

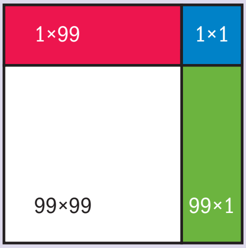
Antwoord: C

Toelichting

Een veelvoorkomende fout bij een vermenigvuldiging als 99 × 99 is dat wel-iswaar gedacht wordt aan de mooie getallen ‘in de buurt’ (hier 100 × 100), maar dat in dit geval 99 × 99 dan wordt uitgerekend als 100 × 100 – 1. Die verkeerde gedachte kan ontstaan door het trekken van de – onjuiste – parallel met de optelling 99 + 99. Daar geldt wel 99 + 99 = 100 + 100 – 2. De verdeel- of distributieve eigenschap wordt dan vergeten of niet begrepen.

Distributieve eigenschap

FIGUUR 1.2.15B Model 2



Het model geeft inderdaad inzicht in de vermenigvuldigstructuur en daarmee in de verdeeleigenschap. Je ziet dat 99 × 99 = 99 × 99 + 99 × 1 + 1 × 99 + 1 × 1.

Inzicht

Vermenigvuldigen

1.2.16 Model?

FIGUUR 1.2.16 Reken uit

Reken uit

4 x 60 =				2	4	0
40 x 60 =			2	4	0	0
400 x 60 =	...	...	...	...	...	...
4000 x 60 =	...	...	...	...	...	...

In een methode voor groep 6 staat een oefening voor het vermenigvuldigen met grotere getallen. Hoe heet het model dat ernaast is afgebeeld?

A Kolomsgewijs rekenen
B Lijnmodel
C Machten van tien
D Positieschema

Antwoord: D

Toelichting

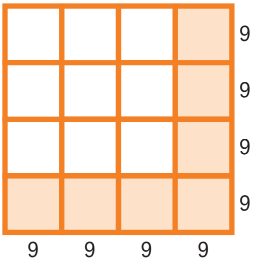
De methode zet de uitkomsten van de vermenigvuldigopgaven precies onder elkaar: eenheden onder elkaar, tientallen onder elkaar, honderdtallen onder elkaar, enzovoort. Daarmee kunnen leerlingen ontdekken dat het

Vermenigvuldiger
Decimaal positioneel getalsysteem
Positieschema

antwoord steeds tien keer zo groot wordt als de vermenigvuldiger ook tien keer zo groot wordt. Dit is inherent aan het decimaal positioneel getalsysteem.
Het onder elkaar zetten van de cijfers op dezelfde positie in een schema heet een positieschema. Vaak staat er H – T – E boven, voor honderdtal, tiental en eenheid. Dat staat er hier niet boven.

1.2.17 Visualiseren met vierkantjes

FIGUUR 1.2.17 Schema bij $36^2 - 7 \times 9^2$



De opdracht $36^2 - 7 \times 9^2$ wordt met dit schema gevisualiseerd.
Welke van de oplossingsstrategieën hieronder wordt/worden ook met het schema gevisualiseerd?
I $36^2 - 7 \times 9^2 = 27^2$
II $36^2 - 7 \times 9^2 = 1296 - 63 \times 9$
III $36^2 - 7 \times 9^2 = 9 \times 81$

A Alleen oplossingsstrategie I
B Oplossingsstrategie I en III
C Oplossingsstrategie II en III
D Oplossingsstrategie I, II en III

Antwoord: B

Toelichting
Met dit schema wordt oplossingsstrategie I gevisualiseerd: alle kleine vierkantjes zijn $9 \times 9 = 9^2$. Het grote vierkant heeft per zijde vier kleine vierkantjes, dus zijden van 36 en een oppervlakte van 36^2. In het schema zijn zeven kleine vierkantjes gekleurd; als je die van het grote vierkant afhaalt, houd je negen kleine vierkantjes over, ofwel $27 \times 27 = 27^2$. In sommentaal: $36^2 - 7 \times 9^2 = 27^2$.
Met dit schema wordt ook oplossingsstrategie III gevisualiseerd: de opgave $36^2 - 7 \times 9^2$ zie je net als hiervoor. Maar de overblijvende negen kleine vierkantjes worden per stuk berekend op 81, dus 9×81.
Oplossingsstrategie II wordt *niet* gevisualiseerd. Nergens kun je het getal 1296 zien.

1.2.18 Verschil zien

Welk model is geschikt om leerlingen te ondersteunen bij het begrijpen van de strategie dat het verschil van twee getallen niet verandert als je beide met hetzelfde getal vermeerdert of vermindert?

A De kralenketting
B Het strookmodel
C Het rechthoekmodel

Antwoord: B

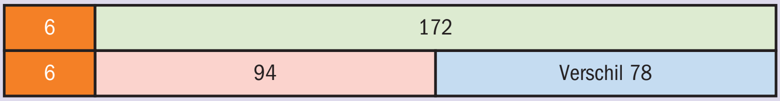
Toelichting

Verschil

Het verschil van twee getallen verandert niet als je beide met hetzelfde getal vermeerdert of vermindert, bijvoorbeeld: 172 – 94 = (172 + 6) – (94 + 6) = 178 – 100 = 78. Je kunt dit goed laten zien met een strookmodel.

Strookmodel

FIGUUR 1.2.18 Verschil zien



Strategie

Je kunt die strategie vooral goed gebruiken als je door het vermeerderen (of verminderen) een mooi, rond getal kunt aftrekken. In dit voorbeeld levert het vermeerderen met 6 het getal 100 op als getal dat wordt afgetrokken.

1.3 Maatschappelijke relevantie

1.3.1 Pepernoten

1.3.1 Pepernoten

DE VOLKSKRANT, 6 DECEMBER 2014

De meeste pepernoten komen uit Harderwijk, de vestigingsplaats van Van Delft Biscuit. Het bedrijf bakt daar elk najaar drie miljard pepernoten en heeft daarmee zeventig procent van de Nederlandse markt in handen.

Hoeveel pepernoten eet de Nederlander gemiddeld per jaar?

A 50 pepernoten
B 150 pepernoten
C 250 pepernoten
D 500 pepernoten

Antwoord: C

Toelichting

Schattend rekenen

Gezien de genoemde aantallen in de tekst en in de antwoorden gaat het hier om schattend rekenen. Het zullen heus niet precies 3 miljard pepernoten zijn. Die 3 miljard pepernoten zijn 70% van het totale aantal pepernoten dat per jaar gebakken wordt. Dus 100% is ongeveer de helft erbij, is bijna 4,5 miljard pepernoten.

Referentiegetal

Het aantal pepernoten moet je delen door het aantal Nederlanders. Hoeveel inwoners er in Nederland zijn, is een referentiegetal dat je moet kennen. Dus 4,5 miljard delen door 17 miljoen. 4,5 miljard is 4500 miljoen. Als je 4500 miljoen deelt door 15 miljoen, kom je op 300 pepernoten per persoon. Deze berekening is nauwkeurig genoeg om te weten dat antwoord C het juiste antwoord is.

1.3.2 Reizen met de hsl

FIGUUR 1.3.2 Reizen met de hsl

In de figuur zie je een spoorlijn lopen van de aan de Atlantische Oceaan gelegen stad Santos, naar de aan de Grote Oceaan gelegen stad Ilo.
Hoe lang ongeveer denk je dat deze hsl onderweg zal zijn op het traject van Santos naar Ilo?

A Ongeveer één etmaal
B Ongeveer twee etmalen
C Ongeveer drie etmalen
D Ongeveer vier etmalen

Antwoord: A

Toelichting
Volgens de schaal van de kaart zal de afstand van Santos naar Ilo ongeveer 4500 km zijn. Als de trein, inclusief de vijf stops, een gemiddelde snelheid heeft van zo'n 250 km/u, is hij dus 4500 : 250 = 18 uur onderweg. Antwoord A zit daar het dichtst bij.
Anders geredeneerd: antwoord B valt af, want de hsl zal – ook gemiddeld – veel sneller rijden dan 4500 : 48 ≈ 90 km/u. De antwoorden C en D vallen dan helemaal af.

Schaal
Gemiddelde
Snelheid

1.3.3 Wereldrecord

1.3.3A Wereldrecord

TROUW, 24 FEBRUARI 2015

Van Rhijn scherpt haar eigen wereldrecord aan

Marlou van Rhijn heeft tijdens de Fazaa International, een Grand Prix voor paralympische atleten in Dubai, haar wereldrecord op de 100 meter verbeterd. De Noord-Hollandse 'blade runner' finishte in de finale geholpen door een nog net toegestane rugwind (1,8 m/sec) na 12,85 seconden. Haar mondiale toptijd in de T43/44-klasse stond op 12,96.

Marlou van Rhijn heeft haar wereldrecord verbeterd.
Wat was haar gemiddelde snelheid ongeveer?

A 3 km/uur
B 20 km/uur
C 30 km/uur
D 60 km/uur

Antwoord: C

Toelichting

Verhoudings-tabel

We maken een verhoudingstabel en lossen daarin het probleem op.

1.3.3B Gemiddelde snelheid

Afstand	100 m	1000 m = 1 km	30 km
Tijd	ongeveer 13s	ongeveer 130 s = ongeveer 2 min	2 × 30 = 60 min = 1 uur

1.3.4 Rijksmuseum

Afgelopen schooljaar bezochten 130 duizend schoolkinderen het Rijksmuseum. Het museum heeft zich ten doel gesteld dat alle Nederlandse kinderen De Nachtwacht moeten hebben gezien voordat ze naar de middelbare school gaan.
Is 130 duizend schoolkinderen per jaar genoeg om dit doel te halen?

A Ja, 100 duizend kinderen per jaar is genoeg.
B Ja, 130 duizend kinderen per jaar is genoeg.
C Nee, het moeten 200 duizend kinderen per jaar worden.
D Nee, het moeten 1 600 000 kinderen per jaar worden.

Antwoord: C

Toelichting

Manier 1
Wellicht weet je dat er 1,5 miljoen leerlingen op de basisschool zitten. Die moeten binnen acht jaar tijd één keer naar het Rijksmuseum, dus ongeveer 200 000 leerlingen per jaar.

Manier 2
Als je het referentiegetal van manier 1 niet kent, weet je wel dat er 17 miljoen Nederlanders zijn. Die worden gemiddeld 75 jaar oud. Dat komt erop neer dat er ongeveer 200 000 personen per jaar geboren worden. (Waarbij we dus cijfers voor migratie maar even buiten beschouwing laten). Op de basisscholen zitten acht cohorten, dus acht keer 200 000 kinderen. Die kunnen over acht jaar verspreid het museum bezoeken. Ongeveer 200 000 leerlingen per jaar.

Referentiegetal

1

1.3.5 Aantal trucks

FIGUUR 1.3.5 Aantal trucks

De vrachtwagens van het bedrijf Emarathon leggen gezamenlijk zo'n 10 920 000 km af.
Hoeveel trucks zal het vrachtvervoersbedrijf naar schatting in bedrijf hebben, als je bedenkt dat een chauffeur volgens het rijtijdenbesluit negen uur per dag kan rijden, afwisselend per week een dag en twee dagen vrij moet nemen en een maand vakantie heeft?

A 7
B 70
C 170
D 270

1

Gemiddeld

Antwoord: B

Toelichting
Antwoord A zou betekenen dat er 10 920 000 : 7 = 1 560 000 km per vrachtwagen per jaar zou worden gereden; dat is onmogelijk.
Met 170 trucs (C) zou gemiddeld slechts 64235 km per jaar worden gereden en zou het internationale vervoersbedrijf failliet gaan; met 270 helemaal.
Zeventig vrachtwagens betekent gemiddeld 10 920 000 : 70 = 156 000 km per vrachtwagen per jaar, dat is bij ongeveer 260 dagen (11 maanden keer 24 dagen) per jaar 156 000 : 260 = 600 km per dag. Gezien het rijtijdenbesluit zal een chauffeur per dag, dus 9 uur rijden, niet veel meer halen dan die 600 km gemiddeld per dag. Antwoord B lijkt dus realistisch.

1.3.6 TV top 4

FIGUUR 1.3.6 Kijkonderzoek

www.kijkonderzoek.nl

Tv top 4 van de week

1 Studio Sport Eredivisie (zo 2-11, NPO 1) – 2 984 × 000 kijkers
2 Journaal 20:00 uur (zo 2-11, NPO 1) – 2 715 000 kijkers
3 Voetbal: Ajax-Barcelona (wo 5-11, NPO 3) – 2 341 000 kijkers
4 The Voice of Holland (vr 7-11, RTL 4) – 2 255 000 kijkers

The Voice of Holland haalde deze week slechts een vierde plaats.
Hoeveel miljoen mensen meer keken naar de Studio Sport Eredivisie dan naar The Voice of Holland?

A 0,729 miljoen mensen
B 2,984 miljoen mensen
C 729 miljoen mensen
D 729 000 miljoen mensen

Miljoen

Antwoord: A

Toelichting
2 984 000 – 2 255 000 = 729 000 = 0,729 miljoen mensen.

1.3.7 Reisverzekering

Om je te verzekeren op reis kun je kiezen voor een kortlopende verzekering per reis of een doorlopende verzekering.
Bij maatschappij ‘De vliegende Hollander’ betaal je voor een kortlopende reisverzekering € 1,26 per persoon per dag (Europadekking inclusief € 4000 bagagedekking).

Voor een doorlopende reisverzekering met vergelijkbare dekking betaal je daar € 1,78 per persoon per maand.
Jij gaat meestal een keer 2 weken op reis en dan nog twee keer een lang weekend (vr-zo). Wat is voordeliger?

A Een kortlopende reisverzekering per reis.
B Een doorlopende reisverzekering die je afsluit voor het hele jaar.

Antwoord: B

Toelichting
De doorlopende reisverzekering kost je 12 x € 1,78 = € 21,36. Voor de kortlopende reisverzekeringen voor jouw reisjes, in totaal 20 dagen, betaal je €25,20.

1.3.8 5 billion dollar

De president van de VS belooft dat hij '5 billion dollar' gaat uitgeven aan een samenwerkingsproject. Een Nederlandse journalist vertaalt dat met '5 biljoen dollar'. Die vertaling is onjuist, want het Engelse woord *billion* is in het Nederlands niet biljoen, maar miljard. Hoeveel dollar scheelt dat?

A De Nederlandse journalist rekent 4995 miljard dollar te veel.
B De Nederlandse journalist rekent 4995 miljard dollar te weinig.
C De Nederlandse journalist rekent 495 miljard dollar te veel.
D De Nederlandse journalist rekent 495 miljard dollar te weinig.

Antwoord: A

Toelichting
De correcte vertaling van het bedrag vanuit het Amerikaans moest dus zijn: 5 miljard, in plaats van 5 biljoen. Een biljoen is duizend keer zoveel als een miljard. De president van de VS wil dus 5 miljard dollar uitgeven, en niet 5000 miljard. De Nederlandse journalist rekent 4995 miljard dollar te veel.

Biljoen

1.3.9 Staatsschuld

FIGUUR 1.3.9 Staatsschuld

Op 24 juni 2015 steeg de Nederlandse staatschuld met 480 euro per seconde. Stel dat die stijging een jaar lang constant blijft.
Hoeveel miljard euro is de staatsschuld precies een jaar later? Rond af op 100 miljoen euro.

1

Antwoord: 484,5 miljard

Toelichting
480 euro per seconde is 3600 × 480 = 1 728 000 euro per uur (1 uur heeft 3600 seconden).
24 × 1 728 000 = 41 472 000 euro per dag.
365 × 41 472 000 = 15 137 280 000 euro (na een jaar).
15 137 280 000 + 469 370 300 000 = 484 507 580 000 euro =
484,5 miljard euro.

Miljard

1.3.10 Tweede halve prijs

FIGUUR 1.3.10 Tweede halve prijs

Op deze reclamefolder zie je acht producten die worden aangeboden als ‘Tweede halve prijs’. Op de etiketten van het tweede zakje van rechts (Turkse abrikozen) en van het vierde zakje van rechts (Gedroogde Lerida vijgen) is iets misgegaan.
Wat precies?

A Het gaat bij die producten om ‘Twee voor de prijs van één’ in plaats van ‘Tweede voor de halve prijs’.
B De groene etiketten zijn verwisseld.
C Er is verkeerd afgerond.

Antwoord: B

Toelichting
De groene etiketten van het tweede zakje van rechts (Turkse abrikozen, 2 voor 4,48) en van het vierde zakje van rechts (Gedroogde Lerida vijgen, 2 voor 7,48) zijn per abuis verwisseld.
Een pak van 550 gram abrikozen kost 4,99, dan kosten twee pakken (met de tweede voor de halve prijs) dus €4,99 + €2,49 = €7,48. Twee pakken Lerida vijgen kosten €4,48.

1.3.11 Rembrandttentoonstelling

De tentoonstelling Late Rembrandt trok in Londen meer dan een kwart miljoen bezoekers. Het Rijksmuseum hoopte dat minimaal te evenaren. De tentoonstelling duurde dertien weken en was zeven dagen per week geopend. Hoeveel bezoekers moest het Rijksmuseum gemiddeld per dag ontvangen om het streefcijfer te halen? Rond af op een honderdtal.

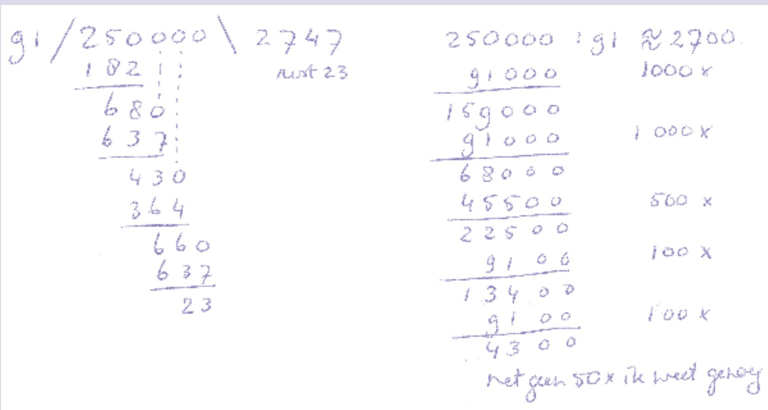
A 2500 bezoekers
B 2600 bezoekers
C 2700 bezoekers
D 2800 bezoekers

Antwoord: C

Toelichting
Deel 250 000 bezoekers door 91, want ze kunnen over 91 dagen verspreid komen. In de figuur zie je links cijferend delen (staartdeling) en rechts kolomsgewijs delen. Je hoeft niet tot het eind door te delen, omdat je toch moet afronden op een honderdtal.

Cijferen
Kolomsgewijs rekenen
Afronden

FIGUUR 1.3.11 Rembrandttentoonstelling



1

1.3.12 Boeketten maken

Een bloemist wil met zijn laatste 30 lelies, 48 rozen en 24 anjers boeketten maken met dezelfde aantallen bloemen van elke soort.
Hoeveel van zulke boeketten kan hij hiermee maximaal maken?

Antwoord: 6

Toelichting

Deler

Grootste gemene deler

De bloemist wil de 30 lelies in evenveel groepen verdelen als de 48 rozen en de 24 anjers. Dat aantal groepjes (het aantal boeketten) is dus de grootst mogelijke deler van de getallen 30, 48 en 24, ofwel de grootste gemene deler van die drie getallen. Om die te vinden kun je een van de volgende manieren gebruiken.

Schrijf voor elk getal alle delers op, op volgorde van klein naar groot. Zoek vervolgens de gemeenschappelijke delers. De allergrootste van die getallen is 6, het getal dat je zoekt.

Priemgetal

Je kunt ook de drie getallen opschrijven als een product van priemgetallen.
$30 = 2 \times 3 \times 5$
$48 = 2^4 x\ 3$
$24 = 3 \times 2^3$

De grootste gemene deler van deze getallen is te schrijven als het product van de gemeenschappelijke priemfactoren.
$30 = 2 \times 3 \times 5$
$48 = 2 \times 3 \times 2^3$
$24 = 3 \times 2 \times 2^2$

$2 \times 3 = 6$ komt in alle drie getallen voor en is daarom de grootste gemene deler.
Zie ook paragraaf 1.4, Thema deelbaarheid.

1.3.13 Aanbieding keukenhulpjes

FIGUUR 1.3.13 Aanbieding keukenhulpjes

Mila koopt drie pollepels van €2,49 en verder van elk artikel uit de folder één exemplaar.
Wat moet Mila betalen? Rond het bedrag af op hele euro's.

Antwoord: 94

Toelichting

Afronden

Zij moet betalen (gerekend van boven naar beneden in de folder): 7 + 15 + 5 + 4 + 13 + 5 + 15 + 30 = 94. Dat wordt onder aftrek van €0,13 (te veel door afronding) dus €93,87. Te betalen, afgerond op hele euro's: €94. Overigens hoef je die €0,13 dus helemaal niet bij de berekening te betrekken, want het teveel door afronding wordt toch geen euro.

1.3.14 Uit eten

Acht vrienden gaan samen uit eten. Aan het eind van de avond vragen ze de rekening. De rekening is €341,20. Ze willen ieder evenveel betalen.
Wat moet ieder betalen?

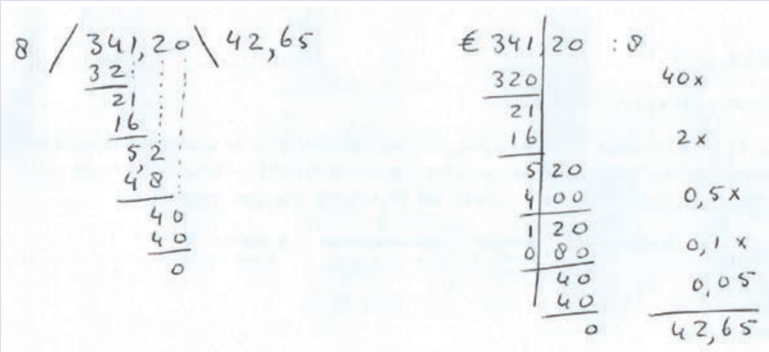
Antwoord: €42,65

Toelichting

Cijferen
Kolomsgewijs rekenen

Deel het totaalbedrag van de rekening €341,20 door 8. Dit moet je exact uitrekenen. In de figuur zie je links cijferend delen (staartdeling) en rechts kolomsgewijs delen.

FIGUUR 1.3.14 Uit eten



Je kunt ook delen zonder op de komma te letten en dan naar de situatie kijken welke orde van grootte hier past. Zonder komma kom je op 4265. Kijk terug naar de situatie: wat kan die maaltijd per persoon gekost hebben? Ruim 40 euro natuurlijk.

1.3.15 Containerschip

FIGUUR 1.3.15 Containerschip

Dit is een containerschip van de Explorer class, een serie van zeer grote containerschepen, met een lengte van 396 meter, een breedte van 52 meter en een diepgang van 16 meter. Het schip is voornamelijk geladen met 40 foot containers (12,2 m × 2,4 m × 2,6 m); die staan dus niet alleen op het dek, maar tot 16 meter onder zeeniveau.
Hoe groot schat je het aantal containers op dit schip?

A 900
B 9 000
C 90 000
D 900 000

Antwoord: B

Toelichting
Nemen we voor de lengte 360 meter (er valt een deel af voor operationele en bemanningsruimten), dan passen in de lengte zo'n dertig containers (klopt ook aardig als je ze telt in het plaatje!). In de breedte passen maximaal 50 : 2,5 = 20. Als we voor de hoogte plus diepte 40 meter rekenen (denk ook aan de diepgang), komen we op zo'n vijftien gestapelde containers. Totaal 30 × 20 × 15 = 9000 containers.

1.4 Thema deelbaarheid

Deler

1

Hoe kun je snel zien dat het getal 30 176 deelbaar is door 8? Is 89 een priemgetal? Wat is de grootste gemene deler (GGD) van 12 en 15? Het zijn vragen waarop je van de meeste leerlingen aan het eind van de basisschool een goed antwoord mag verwachten en waarvan je als leraar de nodige achtergrondkennis moet hebben. Het helpt je een diepgaand inzicht te krijgen in de structuur en de eigenschappen van getallen en bewerkingen met getallen.

1.4.1 De kenmerken van deelbaarheid door 10 en door 5

Is het getal 60745 deelbaar door 10 en door 5? Het antwoord weet je vast meteen te geven: niet door 10, maar wel door 5. De bedoeling is dat je een *algemeen* kenmerk en een bijbehorende *verklaring* kunt bedenken voor deelbaarheid door 10 en door 5. Juist bij kenmerken van deelbaarheid is het goed zelf eerst op onderzoek te gaan, omdat de kenmerken – ook de lastige – altijd verklaard kunnen worden door gebruik te maken van de tientallige structuur van getallen.

> Wat is volgens jou een algemeen kenmerk van die deelbaarheid door 10 en 5, en wat is de verklaring ervoor?

?

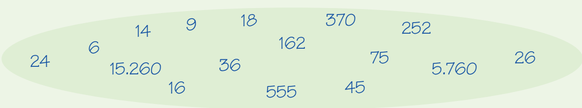
Het zal je niet verbazen dat de kenmerken van deelbaarheid door 10 en 5 bij elkaar horen.
Een getal is deelbaar door 10 als het eindigt op 0. De verklaring is simpelweg dat elk getal dat eindigt op 0, bijvoorbeeld 5780, door 10 gedeeld kan worden, omdat zo'n getal alleen maar bestaat uit tientallen, honderdtallen, enzovoorts, en die zijn uiteraard ook deelbaar door 10.
Het kenmerk van deelbaarheid door 5 lijkt op dat van 10. Een getal is deelbaar door 5 als het eindigt op 0 of 5, want de tientallen, honderdtallen, enzovoorts, zijn sowieso al deelbaar door 5.

1.4.2 Kenmerken van deelbaarheid door 2, 4 en 8

In figuur 1.4.1 zie je een opgave over deelbaarheid voor leerlingen van groep 8.

FIGUUR 1.4.1 Welke getallen zijn deelbaar door 2, 4, 5 of 10?

1 Welke van deze getallen kun je delen ...



a door 2? **b** door 5? **c** door 10? **d** door 4?

→ **Bedenk een rekenregel voor delen door 2, delen door 5, delen door 10 en delen door 4.**

> Wat is volgens jou het algemene kenmerk voor deelbaarheid door 2? En door 4?

?

De meeste leerlingen uit de bovenbouw van de basisschool kunnen je vertellen of een (heel) getal wel of niet deelbaar is door 2: 'Die getallen zitten in de tafel van 2!' Vaak kennen ze ook de begrippen even en oneven, en ze weten meestal wel dat je alle even getallen door 2 kunt delen. Daarmee komt al meteen het kenmerk van deelbaarheid door 2 in zicht:

Een (geheel) getal is deelbaar door 2 als het getal eindigt op 0, 2, 4, 6 of 8.
De verklaring is dat je tientallen – en daarmee ook honderdtallen, enzovoort – door 2 kunt delen, en dat je dus verder alleen maar op de eenheden hoeft te letten om die deelbaarheid te bepalen. Welnu, de eenheden moeten dan dus 2, 4, 6, 8 (of 0) zijn.

Het kenmerk van deelbaarheid door 4 lijkt op dat van deelbaarheid door 2: een getal is deelbaar door 4 als je het getal van de laatste twee cijfers van dat getal door 4 kunt delen. Voorbeeld: 756 is deelbaar door 4, want 56 is deelbaar door 4.
Verklaring: honderdtallen, duizendtallen, enzovoort zijn deelbaar door 4, dus om te weten of het hele getal deelbaar is door 4, hoef je alleen maar na te gaan of je het getal gevormd door de laatste twee cijfers (in het voorbeeld het getal 56) door 4 kunt delen.
Als kenmerk van deelbaarheid door 4 hoor je ook wel eens de uitspraak: een getal is deelbaar door 4 als de laatste twee cijfers van dat getal door 4 deelbaar zijn. Aan het voorbeeld 756 zie je al dat het kenmerk daarmee onjuist geformuleerd is, want 5 en 6 zijn geen van beide deelbaar door 4, terwijl het *getal* 56 dat wel is.

Het kenmerk van deelbaarheid door 8 lijkt op dat van deelbaarheid door 2 en 4: een getal is deelbaar door 8 als het getal van de laatste drie cijfers van dat getal door 8 deelbaar is.
Niet voor niets stellen we de deelbaarheid van 2, 4 en 8 in dezelfde paragraaf aan de orde.

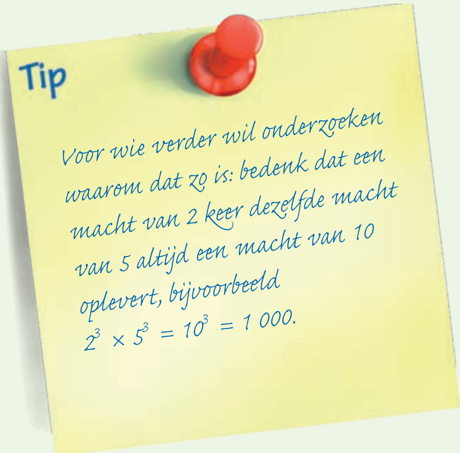
?

Waarschijnlijk lukt het je nu wel om zelf een verklaring te vinden voor het kenmerk van deelbaarheid door 8. Hoe luidt die verklaring volgens jou?

Redeneren

De verklaring van deelbaarheid door 8 vind je door te bedenken dat elk duizendtal deelbaar is door 8, immers 1000 : 8 = 125. Daarmee is dus alles wat staat voor duizendtallen en links daarvan in het getal in ieder geval al deelbaar door 8. Of bijvoorbeeld het getal 705 432 deelbaar is door 8, hangt dus af van de vraag of 432 deelbaar is door 8. En dat is zo, want 400 en 32 zijn deelbaar door 8, dus 432 ook, en dan 705 432 dus ook.

Hoe zit het nu met deelbaarheid door 16? Wel, het getal van de laatste vier cijfers moet dan deelbaar zijn door 16. Het getal 783 927 884 816 is dus deelbaar door 16, want 4816 is deelbaar door 16. Kortom: deelbaarheid door machten van 2 – dus 2, 4, 8, 16, 32 enzovoorts – heeft soortgelijke kenmerken. **Macht**



1.4.3 Het kenmerk van deelbaarheid door 3 en 9

Dat ook de kenmerken van 3 en 9 verwant zijn, zal je niet verbazen. Maar ze zien er wel heel anders uit dan die van 2, 4 en 8. Als een getal deelbaar is door 9, is dat getal ook deelbaar door 3. De omgekeerde stelling geldt niet. Slechts een derde deel van alle getallen die deelbaar zijn door 3 is bovendien deelbaar door 9, namelijk de negenvouden.
We beginnen met het kenmerk van deelbaarheid door 9 te benoemen en verklaren. Een getal is deelbaar door 9 als de som van de cijfers van dat getal deelbaar is door 9. Zo is volgens dat kenmerk het getal 6507 deelbaar door 9, want 6 + 5 + 0 + 7 = 18, en het getal 18 is deelbaar door 9.
Dit kenmerk van deelbaarheid berust op de eigenschap dat elk duizendtal een negenvoud + 1 is. Zo is 1000 = 999 + 1, en dus 2000 = 2 × 999 + 2, 3000 = 3 × 999 + 3, enzovoorts.
De verklaring dat 6507 deelbaar is door 9 vind je dus door het getal als volgt te splitsen:

$$\begin{array}{rcrcl}
6000 & = & 6 \times 999 & + & 6 \\
500 & = & 5 \times 99 & + & 5 \\
0 & = & 0 \times 9 & + & 0 \\
7 & = & & + & 7 \\
\hline
\end{array}$$

$$6507 = (6 \times 999 + 5 \times 99 + 0 \times 9) + (6 + 5 + 0 + 7) = \text{een negenvoud} + 18$$

18 is een negenvoud, dus dan is het hele getal 6507 een negenvoud, dat wil zeggen deelbaar door 9.
Merk op dat de resten altijd de cijfers van het getal zijn. Logisch, want van elk tiental, honderdtal, duizendtal, enzovoorts, blijft telkens één eenheid over bij deling door 9 (of 3).
Het kenmerk van deelbaarheid door 3 lijkt op dat van deelbaarheid door 9: een getal is deelbaar door 3 als de som van de cijfers van dat getal deelbaar is door 3. De verklaring berust ook in dit geval op de eigenschap dat

elk duizendtal een drievoud + 1 is. Zo is 1000 = 999 + 1, dus een drievoud + 1 en 2000 = 2 × 999 + 2, dus een drievoud + 2.

Rest

Het verschil met de verklaring voor het kenmerk van deelbaarheid door 9 is dat de som van de resten deelbaar moet zijn door 3. Zo is 732 niet deelbaar door 9 – want 7 + 3 + 2 = 12 – maar wel door 3, want 12 is deelbaar door 3.

Tip

Het kenmerk van deelbaarheid door 9 werd vroeger gebruikt om de uitkomst van een cijfersom te controleren met de zogenaamde 'negenproef'. Op YouTube vind je tal van voorbeelden daarvan; zoekwoord 'negenproef'.

1.4.4 Het kenmerk van deelbaarheid door 6

In deze paragraaf kijken we naar het kenmerk van deelbaarheid door 6.

?

> Is volgens jou de volgende stelling waar of onwaar? 'Een getal is deelbaar door 6 als het deelbaar is door 2 én door 3.' Hoe kun je dat 'bewijzen'?

In ieder geval is het zo dat elk zesvoud deelbaar is door 2 én door 3, want het heeft immers de delers 2 en 3. Maar geldt ook het omgekeerde? Is een getal een zesvoud, dus deelbaar door 6, als het deelbaar is door 2 én door 3? Het voorbeeld van het getal 732 klopt wat dat betreft: het is deelbaar door 2 én door 3, en is ook een zesvoud. Splits maar in 600 + 132 of 720 + 12. Is een getal te bedenken dat deelbaar is door 2 en door 3, en niet door 6? Nee. Als je alle even getallen opschrijft die ook door 3 deelbaar zijn, dus 6, 12, 18 … krijg je de tafel van 6! De stelling is dus waar.

?

> Is volgens jou de volgende stelling waar of onwaar? 'Een getal is deelbaar door 24 als het deelbaar is door 4 én door 6.' Hoe kun je dat 'bewijzen'?

Heuristiek

We gaan eerst eens op zoek naar tegenvoorbeelden. Het getal 12 is het eerste getal in de rij van natuurlijke getallen dat deelbaar is door 4 én door 6. Dat is al meteen een tegenvoorbeeld, want 12 is niet deelbaar door 24. Eén zo'n tegenvoorbeeld is voldoende om de stelling te ontkrachten!

Generaliseren

Na bestudering van de volgende paragraaf zul je in staat zijn om deze stelling op de volgende manier te generaliseren: 'Een heel getal is deelbaar door p × q als het deelbaar is door p én door q, en als bovendien p en q priemfactoren zijn.' Misschien lukt het je nu al die algemene stelling te begrijpen!? Over priem*factoren* lees je meer in subparagraaf 1.4.6.

1.4.5 Priemgetallen

Onderzoek de getallen 60, 70 en 97 op hun deelbaarheidskenmerken.

?

Welke van de drie getallen denk je dat de meeste delers heeft? Waarom?

De getallen 60 en 70 lijken in het voordeel: het zijn tienvouden en daarmee zijn ze al deelbaar door 2, 5 en 10. We kunnen de twee getallen onderzoeken op hun delers door de volgende paren vermenigvuldigingen systematisch te noteren in een schema (zie tabel 1.4.2).

Schematisch
Heuristiek

TABEL 1.4.2 Delers van 60, 70 en 97

1 × 60	1 × 70	1 × 97
2 × 30	2 × 35	?
3 × 20	5 × 14	
4 × 15	7 × 10	
5 × 12		
6 × 10		

Verder dan 6 × 10 hoeven we niet te gaan, want daarna zouden de omgekeerde vermenigvuldigingen volgen: 10 × 6, 12 × 5 enzovoorts, en die delers hebben we al. Bij 70 volgen we dezelfde systematiek. We zien dat 60 twaalf delers heeft (!) en 70 acht delers heeft.
Het getal 97 is volgens de kenmerken van deelbaarheid niet deelbaar door 2, dus ook niet door 4, 8, 16, enzovoorts, noch door 3, 6 of 9. Ook 7 valt af, want 97 = 70 + 27, en 27 is niet deelbaar door 7. Het getal 11 voldoet ook niet, want 11 × 9 = 99.

?

Waarom is verder gaan dan 11 × 7 niet nodig voor het zoeken naar de delers van 97?

Eigenlijk hoeven we vanaf 7 al niet verder te zoeken, want 8, 9 en 10 zijn geen delers, met 11 × 9 zitten we al boven de 97, en vervolgens krijgen we de omkeringen waarvan we de delers al hebben onderzocht.
Het vraagteken in de derde kolom kunnen we dus verwijderen: het getal 97 heeft precies twee delers, namelijk het getal 1 en zichzelf (97).
Zo'n getal noem je een priemgetal. Een priemgetal is een getal met precies twee verschillende delers, namelijk 1 en zichzelf. Het getal 1 is dus geen priemgetal: het heeft wel 1 en zichzelf als deler, maar heeft niet *twee verschillende* delers. In de eerste rij van het honderdveld dat hierna is weergegeven, vind je dus al vier priemgetallen, namelijk 2, 3, 5 en 7.

Priemgetal

?

Hoe kun je snel en systematisch alle priemgetallen onder de 100 vinden?

De Griekse geleerde Eratosthenes bedacht in zijn tijd (200 v Chr.) al een handige methode, de zogenoemde zeefmethode, om alle priemgetallen te bepalen, bijvoorbeeld die onder de 100. Dat deed hij als volgt:

- Het getal 1 schrappen.
- Alle tweevouden schrappen, behalve 2 zelf.

- Alle drievouden schrappen, behalve 3 zelf.
- Alle vijfvouden schrappen, behalve 5 zelf.
- Alle zevenvouden schrappen, behalve 7 zelf.
- Klaar, want acht- en tienvouden hebben we al gehad bij de twee- respectievelijk vijfvouden, en de negenvouden al bij de drievouden.

De rode, niet-weggestreepte getallen zijn de priemgetallen onder de 100 (zie figuur 1.4.3). Waarom hoef je eigenlijk niet verder te gaan dan het schrappen van de zevenvouden?
Welnu, verdergaan hoeft niet, want de achtvouden, negenvouden en tienvouden zijn geen priemgetallen; ze zijn al geschrapt bij de twee-, drie- respectievelijk vijfvouden. Daarna komt 11 als priemgetal, maar 11 zelf was al overgebleven, en alle veelvouden van 11 zijn al weggestreept bij de tweevouden, drievouden, enzovoorts.

Redeneren

Je kunt ook redeneren vanuit de gedachte dat 100 (= 10 × 10) het grootste getal is. Als een getal onder de 100 (onder 121 = 11 × 11) geen delers tot 10 heeft, heeft het na 10 ook geen delers.

?

I Waarom is 91 dus geen priemgetal?

Het getal 91 = 7 × 13 en heeft dus met 7 (<10) ook de deler 13 (>10): in totaal vier delers, namelijk 1, 7, 13 en 91 zelf.

FIGUUR 1.4.3 Het honderdveld met priemgetallen

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Wat is het nut van priemgetallen? Behalve in de wetenschap zelf spelen priemgetallen in de maatschappij een belangrijke rol, bijvoorbeeld bij het coderen en decoderen van geheime berichten, wachtwoorden en dergelijke. Van een getal als 2.339.543 zie je niet snel dat het 89 × 97 × 271 is. Een computer kan dat trouwens wel snel vinden, maar als het gaat om grote priemgetallen wordt dat ook voor de computer een klus, zeker als er ook nog diverse trucs op worden losgelaten.

1.4.6 ‘Ontbinden in priemgetallen’ op de basisschool

Voor leerlingen van de basisschool zijn priemgetallen vooral van belang voor het leren kennen van vermenigvuldigstructuren van getallen. Het kunnen ‘ontbinden in factoren’ is daarbij een waardevolle vaardigheid; dat geldt in het bijzonder voor het ‘ontbinden in *priem*factoren’. Zo geeft de volgende rij vermenigvuldigingen in volgorde alle ‘ontbindingen’ weer van 50 in twee factoren:

1 x 50
2 x 25
5 x 10
10 x 5
25 x 2
50 x 1

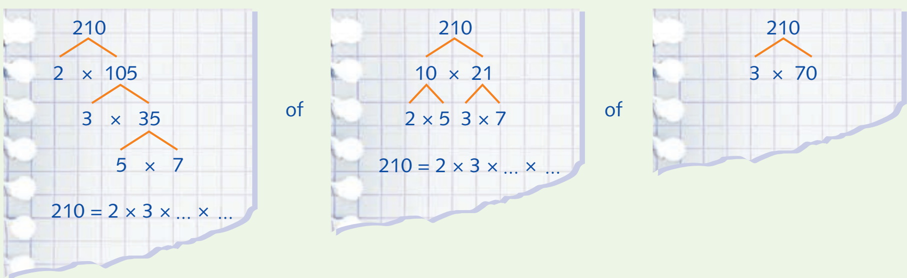
Maar dat zijn geen ontbindingen in *priem*factoren, want niet alle factoren zijn priemgetallen. Van elk heel getal bestaat maar één ontbinding in priemfactoren. Dat is, zou je kunnen zeggen, de maximale vermenigvuldigstructuur, ofwel de ‘langste ketting’ van priemfactoren. In het geval van 50 is dat $2 \times 5 \times 5 = 2 \times 5^2$.

Structuur
Priemgetal

In de volgende opgave voor groep 8 (figuur 1.4.4) moeten de leerlingen acht getallen ontbinden in priemfactoren.

FIGUUR 1.4.4 Ontbind in priemfactoren

3 Ontbind in priemgetallen



48 = 72 = 98 = 120 =
36 = 84 = 100 = 144 =

→ Wat is een handige volgorde voor de priemgetallen?

Wat is jouw antwoord op de vraag voor de leerlingen? ?

De ontbinding van het getal 210 wordt als voorbeeld gesteld; de meest linkervorm in de voorbeeldopgave is de systematische ontbinding die uiteindelijk leidt naar de ontbinding in priemfactoren, of anders gezegd: ‘de langste vermenigvuldiging’ met hele getallen.

?

Wat is volgens jou het getal onder de 100 met de langste rij factoren?

In feite is wat de leraar ‘de langste vermenigvuldiging’ van een getal noemt, de ontbinding van dat getal in priemfactoren. Onder de 100 is $96 = 2^5 \times 3$ ‘even lang’ als $64 = 2^6$; het gaat in beide gevallen om een aantal van zes priemfactoren.

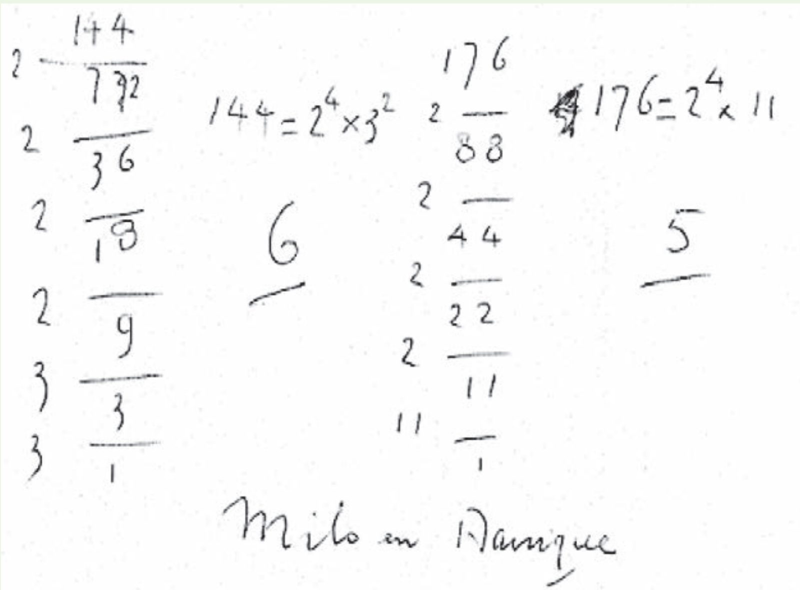
In groep 8 gaan de leerlingen in tweetallen op onderzoek naar het antwoord op de vraag met welke van de getallen 144 of 176 je de langste vermenigvuldiging kunt maken.

?

Hoe pak jij dat zelf aan?

Milo en Danique denken in eerste instantie dat het 176 zal zijn: dat is immers het grootste getal. Ze gaan aan de slag.

FIGUUR 1.4.5 De aanpak van Milo en Danique

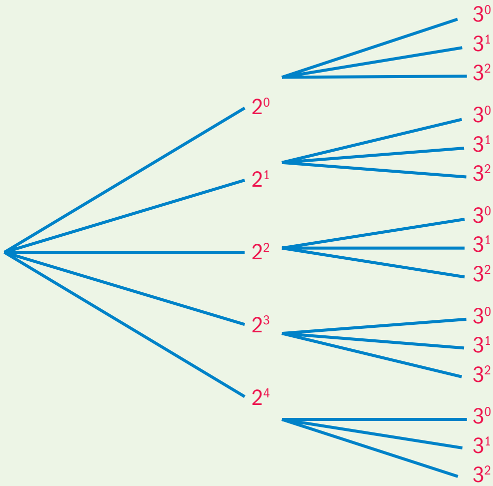


Ze gebruiken een systematische notatie om een getal te ontbinden in priemfactoren (zie figuur 1.4.5). Ze vergelijken hun oplossing met een ander koppel en concluderen samen dat 144 het met zijn zes factoren wint van 176. De getallen zijn dus te schrijven als $144 = 2^4 \times 3^2$ en $176 = 2^4 \times 11$.

?

Hoe kun je nu bijvoorbeeld vanuit $2^4 \times 3^2$ alle delers van 144 vinden? Hoeveel zijn dat?

FIGUUR 1.4.6 Delers van 144



In het schema van figuur 1.4.6 zie je alle mogelijke combinaties van priemfactoren van 144, en daarmee ook alle delers van 144. De kleinste deler is uiteraard het getal 1; dat vind je bovenaan in het schema, namelijk $2^0 \times 3^0 = 1 \times 1 = 1$. De grootste deler is uiteraard 144 zelf; die vind je onderaan in het schema, namelijk als $2^4 \times 3^2 = 144$.
Het levert in totaal vijftien delers op, in het schema vijftien ‘takjes’.

Anders dan de aanpak van 1 × 144, 2 × 72, enzovoort, geeft dit boomschema de ontbinding in priemfactoren, dus de volledige vermenigvuldigstructuur van 144 weer.

Schematisch
Priemgetal
Structuur

1.4.7 Grootste gemene deler

In tabel 1.4.2 zagen we een systematische weergave van alle delers van de getallen 60, 70 en 97.

> Zoek eens uit: welke delers hebben de drie getallen gemeenschappelijk? Wat is de grootste deler die ze gemeenschappelijk hebben? Opvallend is dat ze alle drie een even aantal delers hebben: bestaan er ook getallen met een oneven aantal delers?

?

Uiteraard hebben alle getallen de deler 1 gemeenschappelijk. Maar daar houdt het gemeenschappelijke van de delers van de drie getallen dan ook op; begrijpelijk, want 97 is een priemgetal. De meeste getallen hebben een even aantal delers. Dat geldt alleen niet voor bijvoorbeeld de getallen 1, 4, 9, 16, 25, enzovoort – de kwadraten dus. Wel logisch, want ze hebben eigenlijk een ‘dubbele’ deler. Als je de aanpak van het zoeken naar delers volgt zoals in tabel 1.4.2, krijg je voor het getal 4 bijvoorbeeld de paren 1 × 4, 2 × 2 en 4 × 1, met de 2 als ‘dubbele’. Het getal 4 heeft dus niet vier delers, maar drie, namelijk 1, 2 en 4, een oneven aantal.
De getallen 60 en 70 hebben meerdere delers gemeenschappelijk, namelijk 1, 2, 5 en 10. Daarvan is 10 dus de grootste deler die ze gemeen(schappelijk) hebben. Dat noem je de *grootste gemene deler*, ofwel de *GGD* van 60 en 70.

Kwadraat

Delen

Grootste gemene deler (GGD)

Ga op onderzoek: hoe kun je de GGD van 60 en 100 vinden met behulp van het ontbinden van beide getallen in priemfactoren? Is de GGD altijd een deler van het verschil van de beide getallen?

Voor wie het ontbinden in priemfactoren beheerst, is het niet ingewikkeld om de GGD van getallen te berekenen.

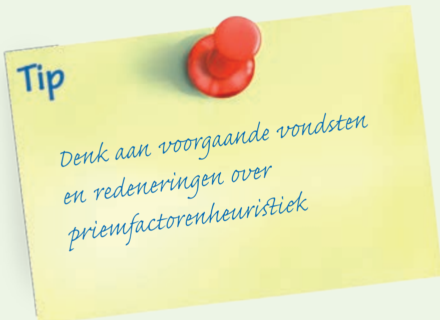
FIGUUR 1.4.7 Ontbinding van 60 en 100

	60		100
2	---------	2	---------
	30		50
2	---------	2	---------
	15		25
3	---------	5	---------
	5		5
5	---------	5	---------
	1		1

Dus $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ en $100 = 2^2 \times 5^2$

De ontbinding in priemfactoren maakt duidelijk dat 60 en 100 twee priemfactoren 2 gemeenschappelijk hebben (2^2), evenals één factor 5. Het betekent dat de GGD dan $2^2 \times 5 = 4 \times 5 = 20$ is.
Het is logisch dat de GGD van twee getallen altijd ook een deler van het verschil tussen beide getallen is. Kijk maar naar het verschil tussen de getallen 100 en 60. Geschreven met priemfactoren is dat verschil $100 - 60 = 2^2 \times 5^2 - 2^2 \times 3 \times 5$. De GGD, het getal $20 = 2^2 \times 5$, is deler van de eerste term $2^2 \times 5^2$, en ook van de tweede term $2^2 \times 3 \times 5$, dus van beide, en daarmee van het hele verschil.
Je kunt het ook aantonen door de GGD ‘buiten haakjes’ te halen: $2^2 \times 5^2 - 2^2 \times 3 \times 5 = (2^2 \times 5) \times (5 - 3) =$ ‘GGD’ $\times 2$.

Waarom is de GGD van twee opvolgende getallen altijd 1?



Hiervoor werd duidelijk dat de GGD van twee getallen altijd een deler is van het verschil van die getallen. Als het verschil 1 is, kan de GGD dus alleen maar 1 zijn.

Breuk

Waarschijnlijk heb je zonder het te beseffen weleens van de GGD gebruikgemaakt bij het vereenvoudigen van breuken. Als je bijvoorbeeld de breuk $\frac{18}{24}$ moet vereenvoudigen, kun je vereenvoudigen door bijvoorbeeld eerst teller en noemer door 2 te delen – dat wordt dan $\frac{9}{12}$ – en vervolgens teller en noemer nog eens door 3 te delen, met einduitkomst $\frac{3}{4}$. Verder kun je niet vereenvoudigen. Misschien zag je al meteen dat je teller en noemer maximaal door 6 kunt delen. Welnu: 6 is de GGD van 18 en 24.
Vooral bij grotere breuken komt het goed van pas als je kunt ontbinden in priemfactoren. Bij het voorbeeld van $\frac{18}{24}$ kun je die aanpak ook al toepassen: $\frac{18}{24} = \frac{2 \times 3 \times 3}{2 \times 2 \times 2 \times 3}$. Teller en noemer delen door de GGD ($2 \times 3 = 6$) wordt dan $\frac{3}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$. Je ziet dus dat je de GGD gemakkelijk kunt bepalen als de ontbinding in priemgetallen van de beide getallen bekend is.

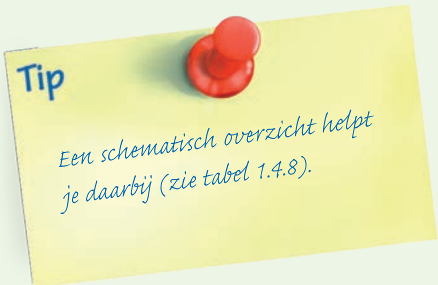
Hoe pas je die aanpak toe op de breuk $\frac{48}{132}$?

In dit geval ontbinden we eerst de beide getallen 48 en 132 in priemfactoren. Voor 48 wordt dat $2^4 \times 3$ en voor 132 is dat $2^2 \times 3 \times 11$. Het blijkt dat 48 en 132 twee factoren 2 en één factor 3 gemeenschappelijk hebben. De GGD is dus $2^2 \times 3 = 12$. We kunnen nu de breuk $\frac{48}{132}$ maximaal vereenvoudigen door teller en noemer te delen door 12, dat is de GGD van 48 en 132. Dus is $\frac{48}{132} = \frac{4}{11}$.

1.4.8 Kleinste gemene veelvoud

Kleinste gemene veelvoud (KGV)

Met behulp van het ontbinden in priemfactoren kun je ook het kleinste gemene veelvoud (KGV) van getallen berekenen.
Om een eerste idee te krijgen van wat het begrip KGV inhoudt, nemen we het voorbeeld van de getallen 50 en 60 erbij. Veelvouden van 50 zijn 50, 100, 150, 200, 250, 300, enzovoort (de ‘tafel van 50’ dus in feite). Veelvouden van 60 zijn 60, 120, 180, 240, 300, enzovoort. Het kleinste veelvoud dat 50 en 60 gemeen(schappelijk) hebben, het KGV, is dus het getal 300. Als je de ontbinding in factoren van 50 en 60 kent, namelijk dat $50 = 2 \times 5^2$ en $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, kun je het KGV van beide getallen bepalen door te bedenken dat in een veelvoud van 50 en 60 beide getallen vertegenwoordigd moeten zijn.



1

FIGUUR 1.4.8 Veelvouden van 50 en 60

Veelvouden van 50	Veelvouden van 60
$50 = 2 \times 5^2$	$60 = 2^2 \times 3 \times 5$
$100 = 2^2 \times 5^2$	$120 = 2^3 \times 3 \times 5$
$150 = 2 \times 3 \times 5^2$	$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
$200 = 2^3 \times 5^2$	$240 = 2^4 \times 3 \times 5$
$250 = 2 \times 5^3$	$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$
$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$	
$350 = 2 \times 5^2 \times 7$	
$400 = 2^4 \times 5^2$	

De priemfactoren van 50 en 60, dus van zowel 2×5^2 als van $2^2 \times 3 \times 5$, moeten in de ontbinding in priemfactoren van het KGV aanwezig zijn. Het betekent dat van elke aanwezige priemfactor de hoogste exponent gekozen moet worden. Van de factor 2 moet dat dan 2^2 zijn, van 3 is het 3^1 en van 5 is het 5^2. Het KGV is dus $2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$.

Gelijknamig

Het KGV vindt onder andere zijn toepassing bij het gelijknamig maken van breuken.

?

Hoe kun je het KGV gebruiken bij het gelijknamig maken van de breuken $\frac{7}{25}$ en $\frac{11}{60}$?

Gelijknamig maken – gelijke noemers maken – kun je onder andere doen door te zoeken naar het kleinste getal dat een veelvoud van beide noemers is, het KGV van beide noemers. De ontbinding in priemfactoren van 25 is 5^2, die van 60 is $2^2 \times 3 \times 5$. Het betekent dat het KGV van 25 en 60, de nieuwe noemer van deze breuken, het getal $2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$ is. Je ziet dat het KGV van 25 en 60 hetzelfde is als van 50 en 60. Dat komt omdat 50 een factor 2 meer heeft dan 25, en 60 heeft al factoren 2.
De gelijknamige breuken worden dan: $\frac{84}{300}$ en $\frac{55}{300}$.

Ten slotte nog een klein onderzoekje.

Product

?

Is de volgende stelling waar? ‘Voor elk tweetal hele getallen geldt dat het KGV van de getallen gelijk is aan het product van die getallen gedeeld door de GGD.’

Als je de hiervoor in de tip genoemde heuristiek gebruikt, kun je proberen met een enkel tegenvoorbeeld na te gaan of de stelling onjuist is. Maar lukt dat? Eerst maar eens uitproberen met bekende getallen. Eerder vonden we al dat de GGD van 50 en 60 het getal 10 is, en het KGV 300. Het product van 50 en 60 is 3000. Als we 3000 delen door 10, de GGD, krijgen we als quotiënt inderdaad 300, het KGV van 50 en 60. In dit geval klopt de stelling dus. **Heuristiek** **GGD** **KGV** **Quotiënt**

Kunnen we een meer algemene redenering vinden voor het 'bewijs' dat de stelling juist is?

Als we de getallen schrijven in priemfactoren, dus $50 = 2 \times 5^2$ en $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, betekent het dat we $50 \times 60 = (2 \times 5^2) \times (2^2 \times 3 \times 5)$ moeten delen door de GGD van 50 en 60, dus door 2×5. Het wil zeggen dat we de gemeenschappelijke factoren 2 en 5 uit het product van 50 en 60 moeten schrappen. Maar die zitten *dubbel* in het product, namelijk in 50 én in 60. Wat we aan factoren overhouden, is dus juist het minimale (kleinste) aantal factoren waarmee we zorgen dat het zo ontstane getal een veelvoud van 50 en tegelijkertijd een veelvoud van 60 is. Dat is juist het KGV van 50 en 60. Deze redenering is een generalisatie die algemeen geldig is voor elk tweetal hele getallen. **Redeneren** **Generaliseren**

Zie ook de opgaven 1.1.10 tot en met 1.1.15 en verder 1.2.7 en 1.3.12.

1.5 Thema talstelsels

Dit thema gaat over verschillende talstelsels en over ons decimaal positioneel talstelsel in het bijzonder. Inzicht in de wiskundige opbouw van getalsystemen geeft je een scherpere kijk op ons tientallige systeem en het rekenen daarmee.

1.5.1 Decimaal positioneel talstelsel

Wij rekenen met een decimaal positioneel talstelsel.
Decimaal wil zeggen: tientallig. 10 is in ons getalsysteem een bijzonder getal: een bundel van 10, een rond getal, een tiental. Je kunt makkelijk tellen met 10 tegelijk: 10, 20, 30, 40, enzovoort. Tot je tien bundels van 10 hebt: daar is een nieuwe naam voor, namelijk een honderdtal.

Tiental

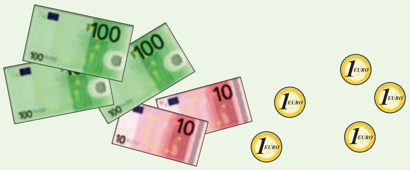
Honderdtal

Positioneel wil zeggen dat de positie waarop een cijfer staat, bepalend is voor wat het cijfer waard is. In figuur 1.5.1 zie je dat kinderen in groep 5 leren werken met honderdtallen, tientallen en eenheden. Ze oefenen met de positiewaarde of plaatswaarde: wat is de 3 waard in 325? De 3 in 325 is 300 waard, omdat hij op de derde plaats van rechts staat. De geldcontext helpt kinderen hierbij.

Positiewaarde

FIGUUR 1.5.1 Weet je nog?

1 Weet je nog? → wb blz. 33



€ 325
→ 5 euro
→ 20 euro
→ 300 euro

Vul in.

638	704	420	516
→	→	→	→ ....
→	→	→	→ ....
→	→	→	→ ....

In groep 7 leren kinderen getallen tot meer dan een miljard lezen en uitspreken. Bekijk de oefening in figuur 1.5.2.

FIGUUR 1.5.2 Grote getallen

1 Weet je nog?

→ wb blz. 12

getal	miljarden			miljoenen			duizenden			eenheden		
1 001 001 001			1	0	0	1	0	0	1	0	0	1

1 miljard,
dat is 1 000 miljoen.

1 miljoen,
dat is 1 000 duizenden.

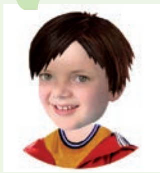
getal	miljarden			miljoenen			duizenden			eenheden		
2 359 800 000			2	3	5	9	8	0	0	0	0	0

50 000 000 (50 miljoen)

Schrijf de getallen in cijfers.

getal	miljarden			miljoenen		
negenhonderdduizend	...	...	...	...	...	...
twaalf miljoen	...	...	...	...	...	...
zeven miljard	...	...	...	...	...	...
drie komma vijf miljoen	...	...	...	...	...	

Ik weet hoe je tien miljard tien miljoen tienduizend en tien moet schrijven. Jij ook?



2 Hoeveel is het onderstreepte cijfer waard?

75.<u>8</u>93 → ...
7<u>5</u>.893 → ...
<u>7</u>5.893 → ...

14<u>6</u>.382 → ...
<u>1</u>46.382 → ...
1<u>4</u>6.382 → ...

<u>9</u> 000 000 → ...
<u>9</u> 000 000 000 → ...
9 <u>9</u>00 000 000 → ...

<u>42</u> 350 000 → ...
<u>12</u> 350 000 000 → ...
7 <u>9</u>50 000 000 → ...

Wat is het grootste getal dat kinderen in groep 7 in het aangeboden positieschema kunnen noteren? Hoe spreek je dat getal uit?

?

Het grootste getal krijg je door op elke positie een 9 te noteren, dus 999 999 999 999. Je krijgt dan twaalf keer het cijfer 9 achter elkaar. Dat spreek je uit als 'negenhonderdnegenennegentig miljard, negenhonderdnegenennegentig miljoen, negenhonderdnegenennegentig duizend en negenhonderdnegenennegentig'.

Tel bij het getal 999 999 999 999 nog 1 op. Hoe spreek je dat getal uit en hoe kun je het schrijven, zonder in de war te komen met al die nullen?

?

1 optellen bij het vorige getal levert het getal 1 biljoen op. Je schrijft dat als een 1 met twaalf nullen of als 10^{12}. We voegen deze getalnotatie toe aan het positieschema van tabel 1.5.3.

Biljoen

Positieschema

1

TABEL 1.5.3 Positieschema

Biljoen	Miljarden			Miljoenen			Duizenden			Eenheden		
10^{12}	10^{11}	10^{10}	10^{9}	10^{8}	10^{7}	10^{6}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	10^{2}	10^{1}	10^{0}
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Macht

Het systeem is helder: elke positie naar links betekent dat het cijfer op die plaats tien keer zo groot wordt, ofwel een macht van 10 erbij. Merk op dat 10^0 gelijk is aan 1. Zo kun je het systeem ook verder voortzetten naar rechts – zie tabel 1.5.4.

TABEL 1.5.4 Machten van 10

10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}

?

Wat betekent 10^{-3}?

Factor

Bij elke plaats naar rechts wordt een cijfer een factor 10 kleiner. Na de macht 0 krijg je negatieve exponenten: $10^0 = 1$, $10^{-1} = 0{,}1$ of een tiende, $10^{-2} = 0{,}01$ of een honderdste, $10^{-3} = 0{,}001$ ofwel een duizendste.

?

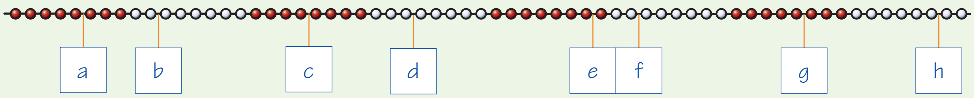
Als je tien keer een getal moet doen, kun je er gewoon een nul achter zetten: $10 \times 4 = 40$. Kinderen ontdekken dat vaak zelf al. Kun jij uitleggen waarom dat mag op grond van de opbouw van ons decimale positionele getalsysteem?

De ‘nulregel’ is verklaarbaar vanuit het positieschema. Als je een 0 achter de 4 zet, schuift de 4 een positie naar links en wordt tien keer zoveel waard.

1.5.2 Achttallig talstelsel

En als wij onze duimen nu eens niet meegeteld hadden? Dan hadden we 8 een mooi getal gevonden in plaats van 10! Dan zou 8 een mooi rond getal zijn en zou je tellen en rekenen met bundels van 8 of achttallen.
Stel je voor dat je op je vingers telt en dat de duimen niet meedoen. Je telt dan 1, 2, 3 … tot en met 7, en als je er dan 1 bij doet, heb je al je vingers (dus zonder duimen) gebruikt. Laten we dat getal geen ‘acht’ noemen, maar ‘okt’, want het is het eerste ronde getal dat een speciale naam krijgt, vergelijkbaar met de 10 in ons tientallige systeem. Je maakt ‘bundels’ of groepjes van acht in plaats van tien. En je schrijft okt dus ook als… 10!
Om aan te geven dat het geen gewone 10 is, maar een okt in het achttallig systeem voegen we er een 8 in subscript aan toe: 10_8. Na okt tel je verder: okt-één, okt-twee, okt-drie, enzovoort. In cijfers: 11_8, 12_8, 13_8.
Als je kinderen achttallig zou willen leren tellen en rekenen, zou je een aangepaste kralenketting en een aangepast rekenrek kunnen maken, waarin je steeds groepjes van acht kralen ziet in plaats van groepjes van tien kralen. De figuren 1.5.5 en 1.5.7 laten zien hoe de methode *Rekenrijk* dat doet in deeltje 8B. Natuurlijk oefen je zelf even met deze opgaven.

FIGUUR 1.5.5 Achttallige kralenketting



In het achttallig stelsel werk je met groepjes of bundels van acht in plaats van tien. Je ziet een kralenketting met acht groepjes van acht kralen. De bordjes hangen op plaatsen waarvan de leerlingen moeten zeggen welk getal daarbij hoort. De antwoorden vind je in tabel 1.5.6.

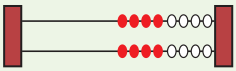
TABEL 1.5.6 Achttallige getallen

	Achttallig getal in letters	Achttallig getal in cijfers
A	Vijf	5
B	Okt-twee	12
C	Twee-okt-vier	24
D	Drie-okt-drie	33
E	Vier-okt-zeven	47
F	Vijf-okt-twee	52
G	Zes-okt-vijf	65
H	Zeven-okt-zes	76

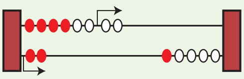
FIGUUR 1.5.7 Achttallig rekenrek

9 **Tel op in het land van Okt**

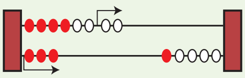
4. + 4. =	5. + 5. =	6. + 3. =	7. + 2. =
4. + 5. =	5. + 6. =	6. + 4. =	7. + 3. =
4. + 6. =	5. + 7. =	6. + 6. =	7. + 4. =



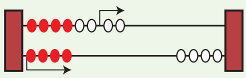
10 **Welke aftreksom staat op het okt-rekenrek?**



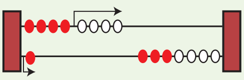
a ..... − ..... = ...



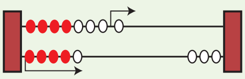
c ..... − ..... = ...



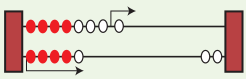
e ..... − ..... = ...



b ..... − ..... = ...



d ..... − ..... = ...



f ..... − ..... = ...

Rekenrek

Het rekenrek (figuur 1.5.7) heeft acht kralen op de bovenste staaf en acht op de onderste staaf. De kralen zijn vier om vier gekleurd. Het rekenrek kan helpen bij het achttallig optellen en aftrekken tot 20_8. Overigens zet de rekenmethode hier punten achter de cijfers, om kinderen te laten weten dat het geen gewone getallen zijn, maar achttallige getallen.

TABEL 1.5.8 Antwoorden optelsommen achttallig

Eerste rijtje	Tweede rijtje	Derde rijtje	Vierde rijtje
7_8	7_8	14_8	11_8
11_8	5_8	13_8	15_8
13_8	2_8	12_8	10_8

De antwoorden op de aftreksommen zijn als volgt:
a 13 – 5 = 6. Je schuift eerst de drie kralen van de onderste staaf weg, dan heb je okt of 10_8, en dan nog 2 eraf is 6_8.
b 11 – 5 = 4. Eerst 1 eraf is 10_8, en dan nog 4 eraf is 4_8.
c 13 – 5 = 6 (als a).
d 15 – 6 = 7.
e 14 – 6 = 6.
f 15 – 6 = 7.

Analogie

Je merkt dat het bij het rekenen in het achttallig talstelsel handig is om de bundeling in achttallen te gebruiken. Bij optellen en aftrekken over het achttal heen is het goed om via okt te rekenen: bij $5_8 + 6_8$ eerst $5_8 + 3_8 = 10_8$, en dan moet er nog 3 bij, is 13_8. Je ziet vast de analogie met de strategie van het 'aanvullen tot 10' en 'leegmaken tot 10' in groep 4.
Terug naar het achttallig talstelsel en het systeem daarin.

?

Wat is het grootste achttallige getal dat je kunt maken met drie cijfers?

Positiewaarde

In het achttallig of octaal talstel is de positiewaarde net zo geregeld als in het tientallige talstelsel, maar een positie naar links betekent nu acht keer zoveel. In tabel 1.5.9 kun je zien wat achttallige getallen waard zijn in het tientallige systeem. De getallen in blauw zijn achttallig.

TABEL 1.5.9 Omzetten van achttallig naar tientallig

8^6	8^5	8^4	8^3	8^2	8^1	8^0	Waarde in tientallig stelsel
					1	0	$= 1 \times 8 = 8$
					3	4	$= 3 \times 8 + 4 = 28$
					7	7	$= 7 \times 8 + 7 = 63$
				1	0	0	$= 1 \times 8^2 = 64$
				1	2	5	$= 1 \times 8^2 + 2 \times 8 + 5 = 64 + 16 + 5 = 85$
			2	0	0	0	$= 2 \times 8^3 = 2 \times 512 = 1\,024$

In het achttallig systeem komen de cijfers 8 en 9 niet voor. In tabel 1.5.5 zie je dat 77_8 het grootste achttallige getal is met twee cijfers. Doe je er 1 bij, dan heb je acht groepjes van acht en dat schrijf je achttallig als 100_8. Ga na dat het klopt als je het omrekent naar tientallig: 77_8 is 63 waard. Als je er één losse bij doet, is het 64 waard, dat is 8 × 8. Het grootste achttallige getal met drie cijfers is dan natuurlijk 777_8. De tientallige waarde is 7 × 64 + 7 × 8 + 7 = 511.

1.5.3 Binair talstelsel

Binair talstelsel

Het tweetallig of binair talstelsel wordt, anders dan het achttallig talstelsel, wel echt gebruikt, namelijk door de computer. Binaire getallen zijn weer op dezelfde manier opgebouwd, alleen nu is een plaats naar links slechts twee keer zoveel. In het tweetallig stelsel worden alleen de cijfers 0 en 1 gebruikt. De getallen in blauw in tabel 1.5.10 zijn tweetallig. Getallen worden al gauw heel lang!

TABEL 1.5.10 Omzetten van tweetallig naar tientallig

2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	Waarde in tientallig stelsel
					1	0	= 1 × 2 = 2
					1	1	= 1 × 2 + 1 = 3
				1	0	0	= 1 × 2^2 = 4
			1	0	0	1	= 1 × 2^3 + 1 = 9
1	0	0	0	0	1	0	= 1 × 2^6 + 2 = 64 + 2 = 66

?

Kun je nu ook bedenken hoe je een tientallig getal omzet in binair? Doe dat eens voor het tientallige getal 17.

Macht

Om een tientallig getal om te zetten in een tweetallig getal kijk je hoe vaak er een macht van 2 in zit, te beginnen met de hoogst mogelijke macht van 2. In 17 zit het getal 16, dat is 2^4. Dan moet er nog 1 bij, dus 17 = 10001_2. Kies nu zelf een getal onder de 100 en zet het om in een binair getal. Gebruik het positieschema.

?

Is het binaire getal 1000 deelbaar door 2? Door 4? Door 8?

Binair

Aan een binair getal kun je goed zien of het deelbaar is door 2, 4 of 8. Een binair getal is deelbaar door 2 als het laatste cijfer een 0 is, deelbaar door 4 als de laatste twee cijfers nullen zijn en deelbaar door 8 als de laatste drie cijfers nullen zijn. Het binaire getal 1000 is dus deelbaar door 2, door 4 en door 8. Daarvoor hoef je het niet eens om te rekenen naar tientallig (want 1000_2 = 8).

1.5.4 Hexadecimaal talstelsel

Hexadecimaal talstelsel

In de computerwereld wordt ook gewerkt met een zestientallig of hexadecimaal talstelsel. Daarbij doet zich het probleem voor dat we niet genoeg cijfers hebben voor elke positie. De cijfers worden daarom aangevuld met letters. Na 9 komen achtereenvolgens A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15 en dan pas 10 = 16.

?

Schrijf de getallen op in het hexadecimaal talstelsel van 10_{16} tot 20_{16}. Hoeveel is 20_{16} tientallig waard?

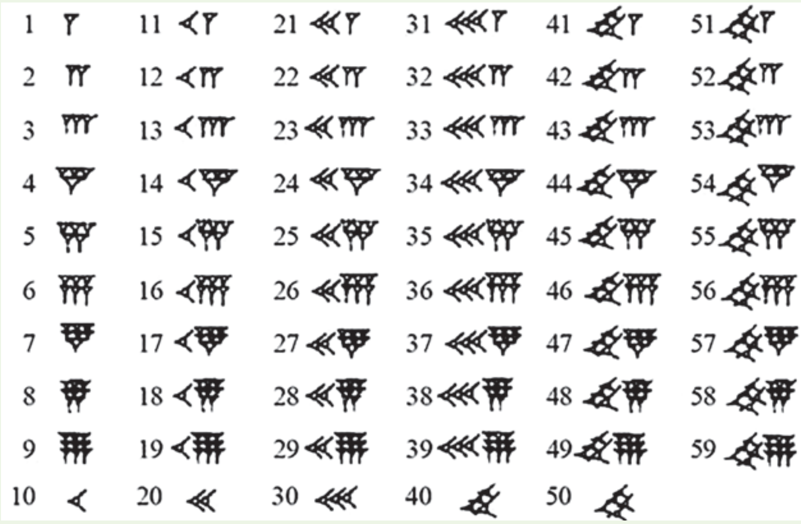
Hier komen de getallen in het zestientallig stelsel, even zonder steeds het subscript 16: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 1A, 1B, 1C, 1D, 1E, 1F, 20.
De tientallige waarde van hexadecimaal 20_{16} is gelijk aan twee bundels van 16, ofwel $2 \times 16 = 32$.

1.5.5 Sexagesimaal talstelsel

Sexagesimaal talstelsel

De Babyloniërs werkten al duizenden jaren geleden met een zestigtallig of sexagesimaal talstelsel. Dit werd afgebeeld met spijkerschrift in kleitabletten. In onze tijdsrekening komen we daar nog restanten van tegen: 1 uur = 60 minuten en 1 minuut = 60 seconden.

FIGUUR 1.5.11 Spijkerschrift



1.5.6 Romeinse getallen

Getalsysteem

Het oude Romeinse getalsysteem is wel tientallig, maar niet positioneel. Zie tabel 1.5.12.

TABEL 1.5.12 Romeinse getallen

I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

De M is altijd 1000 waard, onafhankelijk van het aantal 'letter-cijfers' dat erachter staat. Je telt gewoon de waarde van alle letters bij elkaar.
MV = 1000 + 5 = 1005.
MCCI = 1000 + 100 + 100 + 1 = 1201.

Wel is er nog een bijzonderheid. De Romeinen schreven het getal 4 eerst als IIII, maar voor de overzichtelijkheid maakten ze er later IV van. Een lagere letterwaarde voor een hogere trek je af. Dus: IX = 9, XL = 40, XC = 90, CD = 400, CM = 900.

Hoe komt het dat er in de Romeinse cijfers geen nul nodig is?

?

De nul is pas relatief laat 'ontdekt' door wiskundigen. In het oude Romeinse talstelsel was die niet nodig; pas bij de invoering van positionele talstelsels moest een cijfer ingevoerd worden dat aangeeft dat op een bepaalde positie niets staat!