samengevat.nl

samen gevat}

vwo

Wiskunde B

ThiemeMeulenhoff

www.samengevat.nl

samengevat

vwo

wiskunde B

N.C. Keemink

P. Thiel

ThiemeMeulenhoff

Vormgeving:
Criterium, Arnhem

Opmaak:
Grafivorm, Meppel

Omslagfoto:
Getty Images / Robert Daemmrich Photography Inc

Over ThiemeMeulenhoff

ThiemeMeulenhoff ontwikkelt zich van educatieve uitgeverij tot een learning design company. We brengen content, leerontwerp en technologie samen. Met onze groeiende expertise, ervaring en leeroplossingen zijn we een partner voor scholen bij het vernieuwen en verbeteren van onderwijs. Zo kunnen we samen beter recht doen aan de verschillen tussen lerenden en scholen en ervoor zorgen dat leren steeds persoonlijker, effectiever en efficiënter wordt.

Samen leren vernieuwen.

www.thiememeulenhoff.nl

ISBN 978 90 06 07880 0
eerste druk, vijfde oplage, 2022

Deze uitgave is volledig CO_2-neutraal geproduceerd.
Het voor deze uitgave gebruikte papier is voorzien van het FSC®-keurmerk.
Dit betekent dat de bosbouw op een verantwoorde wijze heeft plaatsgevonden.

voorwoord

Beste examenkandidaat,

Voor je ligt de geheel vernieuwde Samengevat, aangepast aan de exameneisen van 2018.

Alle onderwerpen die in de examens aan de orde komen, worden in dit boek kort en systematisch weergegeven.

In het eerste hoofdstuk wordt de algebra (het rekenen met letters) behandeld. In de hoofdstukken 2 t/m 7 worden alle soorten functies, differentiëren, integreren, meetkunde, parametervoorstellingen en cirkels behandeld. De grafische rekenmachines worden in hoofdstuk 8 (Texas Instruments) en hoofdstuk 9 (CASIO) samengevat.

De theorie van elk onderwerp wordt op de linkerbladzijde besproken. Hoofd- en bijzaken worden onderscheiden waardoor je inzicht krijgt in de grote lijnen van de stof en in de samenhang tussen de verschillende onderwerpen.

Op de rechterbladzijde staan de vragen die aansluiten bij de theorie van de linker bladzijde. Direct na iedere vraag volgt het antwoord. Je kunt dus direct nagaan of je de theorie van de linker bladzijde begrepen hebt en of je de stof beheerst.

Elk hoofdstuk eindigt met een korte samenvatting op de linkerpagina's en enkele denkactiviteiten op de rechterpagina's. Deze denkactiviteiten zijn complexere opgaven waarin je zelfstandig meerdere denkstappen moet nemen om het probleem op te lossen. Ook hier staan de oplossingen direct na de opgaven. Deze denkactiviteiten sluiten goed aan bij de opgaven van de schoolexamens en het centraal examen.

Met Samengevat bereid je je zelfstandig voor op het examen. Hoewel alle onderwerpen in dit boek tot de lesstof voor het centraal examen behoren, wordt kennis hiervan voor een deel ook op het schoolexamen getoetst. Om die reden en omdat Samengevat een uitgebreid trefwoordenregister bevat, is dit boek ook al goed bruikbaar in 5-VWO.

Gecombineerd met de Examenbundel VWO wiskunde B vormt deze Samengevat de beste voorbereiding op je examen: de theorie vind je in Samengevat en je oefent met de opgaven uit de Examenbundel!

Samengevat en Examenbundel zijn naast elke methode te gebruiken.

Heb je opmerkingen? Meld het ons via vo@thiememeulenhoff.nl.

Amersfoort, april 2017

hoe werk je met dit boek?

In SAMENGEVAT vormen linker- en rechterbladzijde een geheel. De begrippen die links kort worden weergegeven, worden rechts nader toegelicht (door voorbeeldvragen).

LINKERBLADZIJDE

Op de linkerbladzijde staan boomdiagrammen die de onderlinge relaties van begrippen laten zien. De linkerbladzijde dient als een checklist om snel na te gaan of de genoemde onderwerpen bekend zijn.

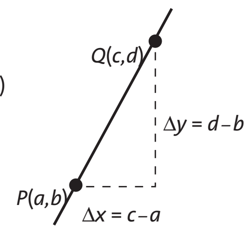
dit is het **hoofdbegrip** → **vergelijking van lijn opstellen** $y = rx + p$

begrip van 1^e orde, geeft toelichting op **vergelijking van lijn opstellen** → *eerste manier*

■ **twee punten zijn gegeven** $P(a, b)$ en $Q(c, d)$

cursieve tekst geeft de relatie met de volgende opsomming aan → *in twee stappen*

■ $r = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \dfrac{d-b}{c-a}$ berekening richtingscoëfficiënt



begrip van 2^e orde, geeft informatie als **twee punten gegeven** zijn →

■ $\boldsymbol{P(a,b)}$ in $y = rx + p$ invullen om p te berekenen of $y - b = r(x - a)$ uitwerken geeft meteen de vergelijking

begrippen van 3^e orde zijn ook mogelijk: geven toelichting op begrip van 2^e orde

of beide punten gebruiken

■ **vul $\boldsymbol{P(a, b)}$ en $\boldsymbol{Q(c, d)}$ in** de vergelijking $y = rx + p$ in; er ontstaan 2 vergelijkingen met 2 onbekenden

tweede manier

■ **uit grafiek** $y = rx + p$

twee mogelijkheden

■ **snijpunt met verticale as** is $(0, p)$ en bepaal met behulp van grafiek richtingscoëfficiënt r

■ **lees twee punten af** uit de grafiek $P(a, b)$ en $Q(c, d)$ en bereken de vergelijking met behulp van deze twee punten

RECHTERBLADZIJDE

Op de rechterbladzijde vind je nadere informatie die je nodig hebt als de begrippen links onvoldoende bekend zijn.
Bij wiskunde B bestaat de toelichting in hoofdzaak uit opgaven voorzien van voorbeelduitwerkingen.

Hier vind je een voorbeeld van een vraagstuk over een onderwerp links. → **vergelijking van een lijn opstellen als twee punten gegeven zijn**

De vraagstelling is altijd cursief.

- *Bepaal een vergelijking van de lijn door de punten (1,8) en (3,–1)*
- *eerste manier*: rc $= \dfrac{-1-8}{3-1} = \dfrac{-9}{2} = -4\dfrac{1}{2}$
  $y = -4\frac{1}{2}x + b$ bv. (1,8) invullen geeft $8 = -4\frac{1}{2} \cdot 1 + b$ dus $b = 12\frac{1}{2}$
- vergelijking wordt: $y = -4\frac{1}{2}x + 12\frac{1}{2}$
- *tweede manier*: rc $= \dfrac{-1-8}{3-1} = \dfrac{-9}{2} = -4\dfrac{1}{2}$
  bv. (1,8) invullen in $y - b = -4\frac{1}{2}(x - a)$ geeft $y - 8 = -4\frac{1}{2}(x - 1)$
  vergelijking wordt: $y = -4\frac{1}{2}x + 12\frac{1}{2}$

inhoud

1 Algebraïsche vaardigheden **rekenen zonder rekenmachine**

berekening en afronding bij verschillende manieren van vraagstelling

- **los algebraïsch op, bereken exact, los exact op**
  - **bereken** je antwoord altijd zonder rekenmachine en geef de tussenstappen
  - **geef een exact antwoord** eventueel met een wortel of breuk
    $\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$, π en e in het antwoord laten staan, dus niet benaderen
    $\frac{1}{2}$ is niet hetzelfde als 0,5 (want 0,5 is een getal tussen 0,45 en 0,549999...)
- **bereken, los op, benader** ook de grafische rekenmachine mag gebruikt worden
  - **antwoord benaderen** reken met de niet-afgeronde getallen en rond pas af aan het eind van de berekening.
- **rekenen en volgorde van bewerking**
  voorbeeld: bereken $3(2^3 \cdot 3 + 5 \cdot 2 - 12 : 4 \cdot \sqrt{9}) - 12 =$
  - **eerst binnen haakjes de uitkomst berekenen**
    - **machtsverheffen en/of worteltrekken** $3(8 \cdot 3 + 5 \cdot 2 - 12 : 4 \cdot 3) - 12 =$
    - **vermenigvuldigen en/of delen** $3 \cdot (24 + 10 - 9) - 12 =$
    - **optellen en/of aftrekken** $3 \cdot (25) - 12 =$
  - **geeft** $3 \cdot (25) - 12 = 75 - 12 = 63$

breuken gelijknamig maken schrijf als één breuk, dus als $\frac{\text{teller}}{\text{noemer}}$

- $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD}{BD} + \frac{BC}{BD} = \frac{AD + BC}{BD}$ dus $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{B}{AB} + \frac{A}{AB} = \frac{A + B}{AB}$ en $\frac{1}{A} + 1 = \frac{1}{A} + \frac{A}{A} = \frac{1 + A}{A}$
- $\frac{C}{A} + B = \frac{C}{A} + \frac{A \cdot B}{A} = \frac{C + A \cdot B}{A}$
- $A \cdot \frac{B}{C} = \frac{A}{1} \cdot \frac{B}{C} = \frac{A \cdot B}{C}$ maar is ook te schrijven als $A \cdot B \cdot \frac{1}{C} = B \cdot \frac{A}{C}$
- $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$
- $\frac{A}{\left(\frac{B}{C}\right)} = A \cdot \frac{C}{B} = \frac{A}{1} \cdot \frac{C}{B} = \frac{A \cdot C}{B}$ delen door een breuk is vermenigvuldigen met z'n omgekeerde

breuken vereenvoudigen door boven en onder door hetzelfde getal te delen

- $\frac{A \cdot C}{A \cdot B} = \frac{\cancel{A} \cdot C}{\cancel{A} \cdot B} = \frac{C}{B}$ $\left(\frac{A + C}{A \cdot B} \text{ is niet te vereenvoudigen}\right)$
- $\frac{A^3 \cdot B \cdot C^2}{A^2 \cdot B^3} = \frac{A \cdot A \cdot A \cdot B \cdot C^2}{A \cdot A \cdot B \cdot B \cdot B} = \frac{\cancel{A} \cdot \cancel{A} \cdot A \cdot \cancel{B} \cdot C^2}{\cancel{A} \cdot \cancel{A} \cdot \cancel{B} \cdot B \cdot B} = \frac{A \cdot C^2}{B^2}$
- $\frac{A^2 + AB}{A^2 \cdot B} = \frac{A \cdot (A + B)}{A \cdot A \cdot B} = \frac{\cancel{A} \cdot (A + B)}{\cancel{A} \cdot A \cdot B} = \frac{A + B}{A \cdot B}$

1.1 herschrijf onderstaande opgaven tot één breuk zonder rekenmachine

a $2\frac{3}{4}+1\frac{1}{5}=$ *c* $1\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{5}=$ *e* $3+\frac{1}{5x}+\frac{2}{x^2}$ *g* $\frac{2+x}{3x+1}+\frac{5}{x-1}=$

b $1\frac{2}{9}-\frac{3}{5}=$ *d* $\frac{3}{x}+2=$ *f* $x^2\cdot\frac{3+5x}{x^2+1}+2=$ *h* $\frac{3x+5}{4-x}-x^2+1=$

a $2\frac{3}{4}+1\frac{1}{5}=2+1+\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=3+\frac{3\cdot5}{4\cdot5}+\frac{1\cdot4}{5\cdot4}=3+\frac{15}{20}+\frac{4}{20}=3\frac{19}{20}$

b $1\frac{2}{9}-\frac{3}{5}=\frac{11\cdot5}{9\cdot5}-\frac{3\cdot9}{5\cdot9}=\frac{55}{45}-\frac{27}{45}=\frac{28}{45}$

c herschrijven tot $\frac{\text{teller}}{\text{noemer}}$ (zonder getallen er voor): $1\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{5}=\frac{11}{9}\cdot\frac{3}{5}=\frac{33}{45}=\frac{11}{15}$

d $\frac{3}{x}+2=\frac{3}{x}+\frac{2x}{x}=\frac{3+2x}{x}$

e nieuwe noemer wordt $5x^2$ dus $3+\frac{1}{5x}+\frac{2}{x^2}=\frac{3\cdot5x^2}{5x^2}+\frac{1\cdot x}{5x^2}+\frac{2\cdot5}{5x^2}=\frac{15x^2+x+10}{5x^2}$

f $x^2\cdot\frac{3+5x}{x^2+1}+2=\frac{x^2}{1}\cdot\frac{(3+5x)}{x^2+1}+\frac{2(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{3x^2+5x^3}{x^2+1}+\frac{2x^2+2}{x^2+1}=\frac{5x^3+5x^2+2}{x^2+1}$

g $\frac{2+x}{3x+1}+\frac{5}{x-1}=\frac{(2+x)(x-1)+5(3x+1)}{(3x+1)(x-1)}=\frac{x^2+16x+3}{(3x+1)(x-1)}$

h $\frac{3x+5}{4-x}-x^2+1=\frac{3x+5}{4-x}+\frac{-x^2+1}{1}=\frac{(3x+5)\cdot1+(-x^2+1)(4-x)}{4-x}=\frac{x^3-4x^2+2x+9}{4-x}$

1.2 schrijf als één breuk en vereenvoudig zo ver mogelijk

a $\frac{1\frac{2}{9}}{4\frac{2}{5}}=$ *c* $3+\frac{12a^2\cdot b\cdot c^3}{6a^3\cdot b\cdot c}=$ *e* $\frac{\frac{1}{x}+3}{\frac{2}{x}+5}=$

b $\frac{1+\frac{a}{b}}{4+\frac{c}{d}}=$ *d* $\frac{4a^2}{b^3}\cdot\frac{3a^2+b}{a^3\cdot b\cdot c}=$ *f* $\left(1-\frac{x}{y}\right)\left(\frac{1}{x-y}\right)=$

a $\frac{1\frac{2}{9}}{4\frac{2}{5}}=\frac{\left(\frac{11}{9}\right)}{\left(\frac{22}{5}\right)}=\frac{11}{9}\cdot\frac{5}{22}=\frac{55}{198}=\frac{5}{18}$

b $\frac{1+\frac{a}{b}}{4+\frac{c}{d}}=\frac{\frac{b}{b}+\frac{a}{b}}{\frac{4d}{d}+\frac{c}{d}}=\frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{4d+c}{d}}=\frac{a+b}{b}\cdot\frac{d}{4d+c}=\frac{d\cdot(a+b)}{b\cdot(4d+c)}$

c $3+\frac{12a^2\cdot b\cdot c^3}{6a^3\cdot b\cdot c}=3+\frac{2c^2}{a}=\frac{3a}{a}+\frac{2c^2}{a}=\frac{3a+2c^2}{a}$

d $\frac{4a^2}{b^3}\cdot\frac{3a^2+b}{a^3\cdot b\cdot c}=\frac{4a^2\cdot(3a^2+b)}{b^3\cdot(a^3\cdot b\cdot c)}=\frac{12a^4+4a^2\cdot b}{a^3\cdot b^4\cdot c}=\frac{a^2\cdot(12a^2+4b)}{a^3\cdot b^4\cdot c}=\frac{12a^2+4b}{a\cdot b^4\cdot c}$

e $\frac{\frac{1}{x}+\frac{3x}{x}}{\frac{2}{x}+\frac{5x}{x}}=\frac{\left(\frac{1+3x}{x}\right)}{\left(\frac{2+5x}{x}\right)}=\frac{1+3x}{x}\cdot\frac{x}{2+5x}=\frac{x(1+3x)}{x(2+5x)}=\frac{1+3x}{2+5x}$

f $\left(1-\frac{x}{y}\right)\left(\frac{1}{x-y}\right)=\left(\frac{y}{y}-\frac{x}{y}\right)\left(\frac{1}{x-y}\right)=\left(\frac{y-x}{y}\right)\left(\frac{1}{x-y}\right)=\frac{y-x}{y(x-y)}=\frac{-x+y}{y(x-y)}=\frac{-(x-y)}{y(x-y)}=\frac{-1}{y}$

breuken kruislings vermenigvuldigen

- $\boldsymbol{\frac{A}{B}=\frac{C}{D}}$ herschrijven tot $A \cdot D = B \cdot C$ mits $B \neq 0$ én $D \neq 0$

rekenen met tweedemachtswortels

- $\boldsymbol{\sqrt{A^2}=A}$ als $A \geq 0$
- $\boldsymbol{\sqrt{A^2}=-A}$ als $A < 0$
- $\boldsymbol{\sqrt{A \cdot B}=\sqrt{A} \cdot \sqrt{B}}$ mits $A \geq 0$ én $B \geq 0$
- $\boldsymbol{\sqrt{A^2 \cdot B}=\sqrt{A^2} \cdot \sqrt{B}=A \cdot \sqrt{B}}$ mits $A \geq 0$ én $B \geq 0$; als het getal onder het wortelteken te delen is door een kwadraat, dus door 4, 9 , 16, 25, 36, 49, ... dan kun je de wortel vereenvoudigen:

  voorbeelden

  - $\sqrt{18}=\sqrt{9 \cdot 2}=\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}=\sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2}=3\sqrt{2}$
  - $\sqrt{4 \cdot x}=\sqrt{4} \cdot \sqrt{x}=2 \cdot \sqrt{x}$
  - $\sqrt{8 \cdot x^3}=\sqrt{4 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot x}=\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot 2 \cdot x}=\sqrt{4} \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{2x}=2x\sqrt{2x}$
- $\boldsymbol{\sqrt{A+B}}$ is niet te vereenvoudigen want $\sqrt{A+B} \neq \sqrt{A}+\sqrt{B}$
- $\boldsymbol{\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}}$ mits $A \geq 0$ én $B > 0$
- **wortel wegwerken uit de noemer**
  - $\boldsymbol{\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \cdot \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B}}=\frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{B^2}}=\frac{\sqrt{AB}}{B}=\frac{1}{B} \cdot \sqrt{AB}}$ mits $A \geq 0$ én $B > 0$

    voorbeeld herschrijf tot een vorm zonder wortel in de noemer

    $$\sqrt{\frac{3}{7}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3 \cdot 7}}{\sqrt{7^2}}=\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{1}{7} \cdot \sqrt{21}$$
  - $\boldsymbol{\frac{A}{\sqrt{B}-D}}$ vermenigvuldig teller en noemer met $\sqrt{B}+D$

    $$\frac{A}{\sqrt{B}-D} \cdot \frac{\sqrt{B}+D}{\sqrt{B}+D}=\frac{(\sqrt{B}+D) \cdot A}{(\sqrt{B})^2-D^2}=\frac{(\sqrt{B}+D) \cdot A}{B-D^2}$$
  - $\boldsymbol{\frac{A}{\sqrt{B}+D}}$ vermenigvuldig teller en noemer met $\sqrt{B}-D$

    $$\frac{A}{\sqrt{B}+D} \cdot \frac{\sqrt{B}-D}{\sqrt{B}-D}=\frac{(\sqrt{B}-D) \cdot A}{(\sqrt{B})^2-D^2}=\frac{(\sqrt{B}-D) \cdot A}{B-D^2}$$
- $\boldsymbol{b \cdot \sqrt{A}+c \cdot \sqrt{A}=(b+c) \cdot \sqrt{A}}$
- $\boldsymbol{\sqrt{A}+B=C}$ wortel wegwerken
- **wortel isoleren** $\sqrt{A}=C-B$
  - **kwadrateer** om de wortel weg te werken $(\sqrt{A})^2=(C-B)^2$ dus $A=(C-B)^2$
  - **controleer** het antwoord in de wortelvergelijking

rekenen met wortels

- $\boldsymbol{\sqrt[q]{A^p}=A^{\frac{p}{q}}}$ bijvoorbeeld: $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[5]{x^2}=x^{\frac{2}{5}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=x^{-\frac{1}{3}}$ en $A \cdot \sqrt[q]{A^p}=A^1 \cdot A^{\frac{p}{q}}=A^{1\frac{p}{q}}$

1.3 vereenvoudig zo ver mogelijk en schrijf het antwoord zonder wortelteken in de noemer

a $2\sqrt{8} + 3\sqrt{50} =$ *b* $2\sqrt{7} \cdot 5\sqrt{35} =$ *c* $\sqrt{5} + \sqrt{3} =$

d $\sqrt{3\frac{2}{5}} =$ *e* $\dfrac{3}{\sqrt{5}+2}$ *f* $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}-3}\right)^2$ *g* $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

a $2\sqrt{8} + 3\sqrt{50} = 2\sqrt{4 \cdot 2} + 3\sqrt{25 \cdot 2} = 2\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + 3\sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2\sqrt{2} + 3 \cdot 5\sqrt{2} = 4\sqrt{2} + 15\sqrt{2}$
$= 19 \cdot \sqrt{2}$

b $2\sqrt{7} \cdot 5\sqrt{35} = 10\sqrt{245} = 10\sqrt{49} \cdot \sqrt{5} = 10\sqrt{7^2} \cdot \sqrt{5} = 10 \cdot 7 \cdot \sqrt{5} = 70\sqrt{5}$

c $\sqrt{5} + \sqrt{3} =$ kan niet verder vereenvoudigd worden

d $\sqrt{3\frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{17}{5}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{85}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{85}$ (85 is niet te delen door 4, 9, 26, 25, ... dus het antwoord is niet verder te vereenvoudigen.)

e $\dfrac{3}{\sqrt{5}+2} \cdot \dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2} = \dfrac{3(\sqrt{5}-2)}{5-4} = 3(\sqrt{5}-2) = 3\sqrt{5} - 6$

f $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}-3}\right)^2 = \dfrac{4}{5 - 6\sqrt{5} + 9} = \dfrac{4}{14 - 6\sqrt{5}} \cdot \dfrac{14 + 6\sqrt{5}}{14 + 6\sqrt{5}} = \dfrac{56 + 24\sqrt{5}}{196 - 36 \cdot 5} = \dfrac{56 + 24\sqrt{5}}{16} = 3\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\sqrt{5}$

g $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{5-3} = \dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{10} - \frac{1}{2}\sqrt{6}$

1.4 ga na welke functies hetzelfde zijn

$h(x) = \sqrt{4x - 16}$ $k(x) = 2\sqrt{x - 4}$ $p(x) = \sqrt{4x} - \sqrt{16}$

$m(x) = 2 \cdot \sqrt[4]{x^2 - 6x + 9}$ $l(x) = 0{,}5\sqrt{8x - 32}$ $n(x) = \sqrt{4x - 12}$

Herschrijf de functies en controleer welke formules hetzelfde zijn.

$h(x) = \sqrt{4x - 16} = \sqrt{4(x - 4)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x - 4} = 2\sqrt{x - 4}$

$k(x) = 2\sqrt{x - 4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x - 4} = \sqrt{4x - 16}$

$p(x) = \sqrt{4x} - \sqrt{16} \neq h(x)$ want $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a + b}$

$m(x) = 2 \cdot \sqrt[4]{x^2 - 6x + 9} = 2 \cdot \sqrt[4]{(x - 3)^2} = 2 \cdot (x - 3)^{\frac{2}{4}}$ dus

$m(x) = 2 \cdot |x - 3|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{|x - 3|} = \sqrt{|4x - 12|}$

$l(x) = \sqrt{0{,}5^2} \cdot \sqrt{8x - 32} = \sqrt{0{,}25} \cdot \sqrt{8x - 32} = \sqrt{2x - 8}$

$n(x) = \sqrt{(4x - 12)}$

Conclusie: $h(x) = k(x)$ en $m(x) = n(x)$ mits $x \geq 3$

Controleer je antwoord door de grafieken op de grafische rekenmachine te plotten; grafieken die hetzelfde zijn, vallen samen.

1.5 werk de haakjes uit en schrijf zo eenvoudig mogelijk

a $\sqrt{9x^2} =$ *b* $\sqrt[4]{16x} =$ *c* $\left(\sqrt[3]{8} + \sqrt{x}\right)^2 =$

a $\sqrt{9x^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x^2} = 3 \cdot |x|$

b $\sqrt[4]{16x} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{x} = 2 \cdot \sqrt[4]{x}$ want $2^4 = 16$

c $\left(\sqrt[3]{8} + \sqrt{x}\right)^2 = (2 + \sqrt{x})^2 = 4 + 4\sqrt{x} + x$

rekenen met letters zie ook hoofdstuk 3

optellen van dezelfde vormen, let op dat de machten en de letters hetzelfde zijn

- $\boldsymbol{A^2 + A^2 = 2 \cdot A^2}$ **en** $\boldsymbol{5A + 7A = 12A}$
    - $5 \cdot A^2 \cdot B^3 \cdot C + 7 \cdot A^2 \cdot B^3 \cdot C = 12 \cdot A^2 \cdot B^3 \cdot C$
    - $A^2 \cdot B \cdot C + 7\,A^2 \cdot B^3 \cdot C$ kunnen niet worden samengenomen
    - $A^2 + A$ en $A + AB$ kunnen niet worden samengenomen

vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen (zie ook H3 exponentiële functies)

- $\boldsymbol{A^0 = 1}$ **en** $\boldsymbol{A^1 = A}$
- $\boldsymbol{A^p \cdot A^q = A^{p+q}}$ bijvoorbeeld $A^3 \cdot A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A = A^7$
- $\boldsymbol{\frac{A^p}{A^q} = A^{p-q}}$ bijvoorbeeld $\frac{A^5}{A^3} = \frac{\cancel{A} \cdot \cancel{A} \cdot \cancel{A} \cdot A \cdot A}{\cancel{A} \cdot \cancel{A} \cdot \cancel{A}} = A^2$
- $\boldsymbol{\frac{1}{A^q} = A^{-q}}$ bijvoorbeeld $\frac{1}{A^4} = A^{-4}$
- $\boldsymbol{(A^p)^q = A^{p \cdot q}}$ bijvoorbeeld $(A^4)^3 = A^4 \cdot A^4 \cdot A^4 = A^{4 \cdot 3} = A^{12}$
- $\boldsymbol{(A \cdot B)^p = A^p \cdot B^p}$ bijvoorbeeld $(A \cdot B)^3 = A^3 \cdot B^3$
- $\boldsymbol{A^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{A} = \sqrt{A}}$ bijvoorbeeld $9^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{9} = 3$
- $\boldsymbol{A^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{A}}$ bijvoorbeeld $A^{\left(\frac{1}{5}\right)} = \sqrt[5]{A}$
- $\boldsymbol{A^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{A^p}}$ bijvoorbeeld $A^{\left(\frac{2}{5}\right)} = \sqrt[5]{A^2}$

bijzondere producten

- $\boldsymbol{(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2}$
- $\boldsymbol{(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2}$
- $\boldsymbol{(A + B)(A - B) = A^2 - B^2}$
    - dit merkwaardige product wordt gebruikt om wortels uit de noemer weg te werken

      bijvoorbeeld $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$
    - of om factoren zichtbaar te maken bij het herschrijven van formules, bijvoorbeeld

      $\frac{5a - 5b}{a^2 - b^2} = \frac{5 \cdot (a - b)}{(a - b) \cdot (a + b)} = \frac{5}{(a + b)}$ mits $a \neq b$
- $\boldsymbol{(A + B)(C + D) = A \cdot (C + D) + B \cdot (C + D) = AC + AD + BC + BD}$

1.6 ga na welke functies hetzelfde zijn

$f(x) = (x+1)(x-3)$ $\quad g(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x}$ $\quad o(x) = 2 - \dfrac{7}{x+5}$

$i(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{2x}{5}$ $\quad j(x) = \dfrac{3x^2 + 6x + 3}{x+1}$ $\quad p(x) = 3x + 3$

$m(x) = \dfrac{3+2x}{x+5}$ $\quad n(x) = 3x - 2 + \dfrac{5}{x+1}$ $\quad q(x) = \dfrac{3x^2 + x + 3}{x+1}$

- *Herschrijf de functies en controleer welke formules hetzelfde zijn.*

$f(x) = x^2 - 2x - 3$

$g(x) = \dfrac{x(x^2 - 2x - 3)}{x} = x^2 - 2x - 3$ mits $x \neq 0$

$o(x) = 2 - \dfrac{7}{x+5} = \dfrac{2(x+5)}{(x+5)} - \dfrac{7}{x+5} = \dfrac{2x+3}{x+5}$

$i(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{2x}{5} = \dfrac{5 \cdot 3}{5x} + \dfrac{2x \cdot x}{5x} = \dfrac{15 + 2x^2}{5x}$

$j(x) = \dfrac{3x^2 + 6x + 3}{x+1} = \dfrac{3(x^2 + 2x + 1)}{x+1} = \dfrac{3(x+1)^2}{x+1} = 3(x+1) = 3x + 3$ mits $x \neq -1$

$m(x) = \dfrac{3+2x}{x+5} = \dfrac{2x+3}{x+5}$

$n(x) = 3x - 2 + \dfrac{5}{x+1} = \dfrac{(3x-2)(x+1)}{(x+1)} + \dfrac{5}{x+1} = \dfrac{3x^2 + x + 3}{x+1} = q(x)$

Conclusie: $f(x) = g(x)$ mits $x \neq 0$, $o(x) = m(x)$, $n(x) = q(x)$ en $j(x) = p(x)$ mits $x \neq -1$
Controleer je antwoord door de grafieken op de grafische rekenmachine te plotten; grafieken die hetzelfde zijn, vallen samen.

1.7 werk de haakjes weg en vereenvoudig zo ver mogelijk

a $(x-2)(x+2) - (x-2)^2 =$

b $\dfrac{x}{\sqrt{3}+5} \cdot \dfrac{x-2}{\sqrt{3}-5} + 5x$

c $2x^4(3 + 5y - x^2) + (x^2)^3 - 6x^4 =$

d $a^3b^2(8 + 3a + b^2 + 3a^2b^3) + 5a^3b^2 + 7a^5b^5 =$

e $(30 - 2x^3)^2 =$

a $(x-2)(x+2) - (x-2)^2 = (x^2 - 4) - (x^2 - 4x + 4) = 4x - 8$

b $\dfrac{x}{\sqrt{3}+5} \cdot \dfrac{x-2}{\sqrt{3}-5} + 5x = \dfrac{x(x-2)}{(\sqrt{3}+5)\cdot(\sqrt{3}-5)} + 5x = \dfrac{x^2 - 2x}{\sqrt{3}^2 - 5^2} + 5x = \dfrac{x^2 - 2x}{3 - 25} + 5x =$

$\dfrac{x^2 - 2x}{-22} + 5x = -\dfrac{1}{22}x^2 + \dfrac{2}{22}x + 5x = -\dfrac{1}{22}x^2 + 5\dfrac{1}{11}x$

c $2x^4(3 + 5y - x^2) + (x^2)^3 - 6x^4 = 6x^4 + 10x^4y - 2x^6 + x^6 - 6x^4 = 10x^4y - x^6$

d $a^3b^2(8 + 3a + b^2 + 3a^2b^3) + 5a^3b^2 + 7a^5b^5 =$

$8a^3b^2 + 3a^4b^2 + a^3b^4 + 3a^5b^5 + 5a^3b^2 + 7a^5b^5 = 13a^3b^2 + 3a^4b^2 + a^3b^4 + 10a^5b^5$

e $(30 - 2x^3)^2 = (30 - 2x^3) \cdot (30 - 2x^3) = 900 - 120x^3 + 4x^6$

ontbinden in factoren / tussen haakjes zetten

wordt gebruikt bij

- **oplossen van een vergelijking die op 0 is herleid**

  voorbeelden

  - $(AB + AC) = A(B + C)$
  - $(A^3B + A^2C) = A^2(AB + C)$
  - $(A^3B^2 + AB^5) = AB^2(A^2 + B^3)$

- **vereenvoudigen van een quotiënt**

  voorbeelden

  - $\dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 16} = \dfrac{x(x-4)}{(x+4)(x-4)} = \dfrac{x}{(x+4)}$ mits $x \neq 4$
  - $\dfrac{AB + AC}{AB} = \dfrac{A(B+C)}{AB} = \dfrac{B+C}{B}$ of $\dfrac{AB+AC}{AB} = \dfrac{AB}{AB} + \dfrac{AC}{AB} = 1 + \dfrac{C}{B}$ mits $A \neq 0$
  - $\dfrac{A^3B^2 + AB^5}{AB} = \dfrac{AB^2(A^2 + B^3)}{AB} = B(A^2 + B^3)$ of
  - $\dfrac{A^3B^2 + AB^5}{AB} = \dfrac{A^3B^2}{AB} + \dfrac{AB^5}{AB} = A^2B + B^4$

kwadraat afsplitsen

- **$x^2 + px + q$ schrijven als $(x + r)^2 + s$**
  - $x^2 + 2bx + b^2 = (x + b)^2$ en $x^2 - 2bx + b^2 = (x - b)^2$ gebruiken voor kwadraat afsplitsen
  - splits het kwadraat af van $x^2 + 2bx$

    herschrijf tot $x^2 + 2bx + b^2 - b^2 = (x + b)^2 - b^2$

  voorbeelden kwadraat afsplitsen

  - $x^2 + 6x = x^2 + 6x + 9 - 9 = (x + 3)^2 - 9$
  - $x^2 - 8x + 5 = x^2 - 8x + 16 - 16 + 5 = (x - 4)^2 - 16 + 5 = (x - 4)^2 - 11$

vereenvoudigen

voorbeelden

- $A^3 + A^3 = 2A^3$ en $2A^3 + 3A^3 = 5A^3$ ($A^3 + A^2$ kan niet korter geschreven worden)
- $A^3 \cdot A^2 = A^5$ en $A^3 \cdot A^3 = A^6$
- $\sqrt{A} + \sqrt{B} =$ kan niet korter geschreven worden
- $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{AB}$ mits $A \geq 0$ en $B \geq 0$
- $\sqrt{A} + \sqrt{A} = 2\sqrt{A}$ en $2\sqrt{A} + 3\sqrt{A} = 5\sqrt{A}$
- $\sqrt{A} \cdot \sqrt{A} = A$ mits $A \geq 0$

1.8 werk haakjes weg en vereenvoudig zo ver mogelijk

a $\dfrac{(2a^2)^3}{2a \cdot 3a^5}$ *c* $11\,000 \cdot 0{,}9^t \cdot (0{,}7 - 0{,}5 \cdot 0{,}9^{2t}) =$

b $a \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - a \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 =$ *d* $0{,}007(8G)^{0{,}425} \cdot (2L)^{0{,}725} =$

a $\dfrac{(2a^2)^3}{2a \cdot 3a^5} = \dfrac{8a^6}{6a^6} = \dfrac{8}{6} = 1\frac{1}{3}$

b $a \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - a \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 = a \cdot \left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - a \cdot \left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{4a}{n}$

c $11\,000 \cdot 0{,}9^t \cdot (0{,}7 - 0{,}5 \cdot 0{,}9^{2t}) = 7700 \cdot 0{,}9^t - 5500 \cdot 0{,}9^{3t}$

d $0{,}007(8G)^{0{,}425} \cdot (2L)^{0{,}725} = 0{,}007 \cdot 8^{0{,}425} \cdot G^{0{,}425} \cdot 2^{0{,}725} L^{0{,}725} =$

$0{,}007 \cdot 4 \cdot G^{0{,}425} \cdot L^{0{,}725} = 0{,}28 \cdot G^{0{,}425} \cdot L^{0{,}725}$

1.9 kwadraat afsplitsen herschrijf in de vorm $a \cdot (x \pm p)^2 \pm q$

a $x^2 + 10x + 27 =$ *b* $x^2 + x + 5 =$ *c* $2x^2 - 12x =$

a $x^2 + 10x + 27 = x^2 + 10x + 25 + 2 = (x+5)^2 + 2$

b $x^2 + x + 5 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 5 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 5 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 4\frac{3}{4}$

c $2x^2 - 12x = 2 \cdot (x^2 - 6x + 9) - 2 \cdot 9 = 2 \cdot (x-3)^2 - 18$

1.10 herleid de volgende uitdrukkingen tot een zo eenvoudig mogelijke vorm

a $\left(6{,}9 + \dfrac{298{,}5}{\frac{L}{T} \times 3600}\right) \cdot L$ *b* $\dfrac{3000}{t} \cdot \left(1 - \frac{1}{t}\right)$ *c* $\dfrac{60v}{k + \frac{v^2}{2a}}$

a $\left(6{,}9 + \dfrac{298{,}5}{\frac{L}{T} \times 3600}\right) \cdot L = 6{,}9L + \dfrac{298{,}5L}{\frac{L}{T} \times 3600} = 6{,}9L + \dfrac{298{,}5}{\frac{3600}{T}} = 6{,}9L + \dfrac{298{,}5T}{3600} \approx 6{,}9L + 0{,}0829\mathrm{T}$

b $\dfrac{3000}{t} \cdot \left(1 - \frac{1}{t}\right) = \dfrac{3000}{t} - \dfrac{3000}{t^2} = \dfrac{3000t}{t^2} - \dfrac{3000}{t^2} = \dfrac{3000t - 3000}{t^2}$

c $\dfrac{60v}{k + \frac{v^2}{2a}} = \dfrac{60v}{\frac{2ak}{2a} + \frac{v^2}{2a}} = \dfrac{60v}{\frac{2ak + v^2}{2a}} = \dfrac{60v \cdot 2a}{2ak + v^2} = \dfrac{120av}{2ak + v^2}$

1.11 herleid de volgende uitdrukkingen tot een zo eenvoudig mogelijke vorm

a $\dfrac{A^3B + A^2C}{AB} =$ *b* $\dfrac{x^2 + 6x - 55}{x^2 - 25} =$ *c* $\dfrac{2x}{\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)} =$

a $\dfrac{A^3B + A^2C}{AB} = \dfrac{A^2(AB + C)}{AB} = \dfrac{A(AB+C)}{B}$ of $\dfrac{A^3B + A^2C}{AB} = \dfrac{A^3B}{AB} + \dfrac{A^2C}{AB} = A^2 + \dfrac{AC}{B}$

b $\dfrac{x^2 + 6x - 55}{x^2 - 25} = \dfrac{(x-5)(x+11)}{(x-5)(x+5)} = \dfrac{x+11}{x+5}$ mits $x \neq 5$

c $\dfrac{2x}{\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)} = \dfrac{2x}{1} \cdot \dfrac{x+1}{x^2-1} = \dfrac{2x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{2x}{x-1}$ mits $x \neq -1$

verschillende soorten vergelijkingen oplossen

- **vergelijkingen oplossen met behulp van algemene vormen**
  - $\boldsymbol{A \cdot B = 0} \;\Leftrightarrow\; A = 0$ of $B = 0$
  - $\boldsymbol{A \cdot B = A \cdot C} \;\Leftrightarrow\; A = 0$ of $B = C$
  - $\boldsymbol{A \cdot B = A} \;\Leftrightarrow\; A = 0$ of $B = 1$
  - $\boldsymbol{A^2 = C} \;\Leftrightarrow\; A = \sqrt{C}$ of $A = -\sqrt{C}$ mits $C \geq 0$
  - $\boldsymbol{A^2 = B^2} \;\Leftrightarrow\; A = B$ of $A = -B$
  - $\boldsymbol{\frac{A}{B} = 0} \;\Leftrightarrow\; A = 0$ en $B \neq 0$
  - $\boldsymbol{\frac{A}{B} = C} \;\Leftrightarrow\; A = B \cdot C$, met $B \neq 0$
  - $\boldsymbol{\frac{A}{B} = \frac{C}{D}} \;\Leftrightarrow\; A \cdot D = B \cdot C$, met $B \neq 0$ én $C \neq 0$
  - $\boldsymbol{\frac{A}{B} = \frac{A}{C}} \;\Leftrightarrow\; A = 0$ of $B = C$, met $B \neq 0$ én $C \neq 0$
  - $\boldsymbol{\frac{A}{B} = \frac{C}{B}} \;\Leftrightarrow\; A = C$, met $B \neq 0$
  - $\boldsymbol{\sqrt{A} = B} \;\Leftrightarrow\; A = B^2$ mits $A \geq 0$
- **lineaire vergelijking** isoleer de variabele aan de linkerkant van het = teken

  voorbeeld
  - $3x + 12 = 5x - 4 \Leftrightarrow -2x = -16 \Leftrightarrow x = 8$
- **kwadratische vergelijking** $ax^2 + bx + c = 0$

  drie manieren
  - **herleid op 0 en ontbind in factoren**

    $3x^2 + 5x - 10 = x^2 - 5x + 18 \Leftrightarrow$

    $2x^2 + 10x - 28 = 0 \Leftrightarrow$

    $x^2 + 5x - 14 = 0$

    $(x + 7)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -7$ en $x = 2$
  - **kwadraat afsplitsen**

    $x^2 + 6x - 10 = 0 \Leftrightarrow$

    $x^2 + 6x = 10 \Leftrightarrow$

    $x^2 + 6x + 9 = 19 \Leftrightarrow$

    $(x + 3)^2 = 19 \Leftrightarrow$

    $x + 3 = \pm\sqrt{19} \Leftrightarrow x = -3 \pm \sqrt{19}$

    of
  - ***abc*-formule** $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

    $x^2 + 6x - 10 = 0$, $a = 1$, $b = 6$ en $c = -10$, dus

    $$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - -4 \cdot 10}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{76}}{2} = \frac{-6 \pm 2 \cdot \sqrt{19}}{2} = -3 \pm \sqrt{19}$$

1.12 vergelijkingen exact oplossen

a $2(x^3-8)\cdot(3x+5)=0$ *d* $(2x^2-1)^2=9$ *g* $\frac{2x+1}{x-3}=\frac{2x-1}{x+1}$

b $(x-2)\cdot(x^2+5)=(x-2)\cdot(2x+5)$ *e* $(x-2)^2=(x+3)^2$ *h* $\frac{x+3}{x-5}=\frac{x+3}{2x+1}$

c $(x-2)\cdot(x^2+2x+1)=(x-2)$ *f* $\frac{2x^2-4x}{x^3+2x-5}=0$ *i* $\frac{2x+5}{x^2-9}=\frac{x-7}{x^2-9}$

a $x^3-8=0$ of $3x+5=0$ dus $x=2$ of $x=-\frac{5}{3}$

b $x-2=0$ *of* $x^2+5=2x+5$
$x=2$ of $x^2-2x=0$
$x=2$ of $x(x-2)=0$ dus $x=2$ of $x=0$

c $x-2=0$ of $x^2+2x+1=1$
$x=2$ of $x^2+2x=0$ dus $x(x+2)=0$
$x=2$ of $x=0$ of $x=-2$

d $(2x^2-1)^2=3^2$
$2x^2-1=3$ of $2x^2-1=-3$
$2x^2=4$ dus $x=\sqrt{2}$ of $x=-\sqrt{2}$ ($2x^2=-2$ dus $x^2=-1$ heeft geen oplossing)

e $x-2=x+3$ of $(x-2)=-(x+3)$
$0=5$ (heeft geen oplossing) of $2x=-1$ dus $x=-\frac{1}{2}$

f $2x^2-4x=0$ en $x^3+2x-5\neq 0$
$2x(x-2)=0$ dus $x=0$ of $x=2$ (controleer of $x^3+2x-5\neq 0$)

g $(2x+1)(x+1)=(x-3)(2x-1)$ mits $x\neq 3$ *en* $x\neq -1$
$2x^2+2x+x+1=2x^2-x-6x+3$ dus
$10x=2$ dus $x=\frac{1}{5}$

h $x+3=0$ of $x-5=2x+1$ mits $x\neq 5$ en $x\neq -\frac{1}{2}$ dus $x=-3$ of $x=-6$

i $2x+5=x-7$ mits $x^2-9\neq 0$ dus $x=-12$

1.13 vergelijkingen exact oplossen

a $6x^3+8x^2=2x^3-4x^2$ *b* $4\cdot(2x-4)^2=12$

a $6x^3+8x^2=2x^3-4x^2$ dus $4x^3+12x^2=0$ dus
$4x^2(x+3)=0$ dus
$x=0$ en $x=-3$

b $4\cdot(2x-4)^2=12$ dus $(2x-4)^2=3$ dus
$2x-4=\sqrt{3}$ $\vee$ $2x-4=-\sqrt{3}$ dus
$x=2+\frac{1}{2}\sqrt{3}\vee x=2-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

1.14 bereken met behulp van kwadraatsplitsen $x^2-8x=2x+7$

$x^2-8x=2x+7$ dus $x^2-10x=7$ dus $x^2-10x+25=7+25$ dus
$(x-5)^2=32$ dus $x-5=\sqrt{32}$ $\vee$ $x-5=-\sqrt{32}$ dus
$x=5+\sqrt{32}$ $\vee$ $x=5-\sqrt{32}$

examenbundel 〉

vwo **Nederlands**
vwo **Engels**
vwo **Duits**
vwo **Frans**
vwo **Economie**
vwo **Bedrijfseconomie**
vwo **Maatschappijwetenschappen**
vwo **Geschiedenis**
vwo **Aardrijkskunde**
vwo **Wiskunde A**
vwo **Wiskunde B**
vwo **Wiskunde C**
vwo **Scheikunde**
vwo **Biologie**
vwo **Natuurkunde**

samengevat }

vwo **Economie**
vwo **Bedrijfseconomie**
vwo **Maatschappijwetenschappen**
vwo **Geschiedenis**
vwo **Aardrijkskunde**
vwo **Wiskunde A**
vwo **Wiskunde B**
vwo **Wiskunde C**
vwo **Scheikunde**
vwo **Biologie**
vwo **Natuurkunde**
havo/vwo **Nederlands 3F/4F**
havo/vwo **Rekenen 3F**

Tips, tricks en informatie die jou helpen bij het slagen voor je eindexamen vind je op examenbundel.nl! Nog meer kans op slagen? Volg ons ook op social media. #geenexamenstress

examenidioom + examenbundel + samengevat + zeker slagen! = #geenexamenstress

examenidioom

vwo **Engels**
vwo **Duits**
vwo **Frans**

zeker slagen !

voor vmbo, havo én vwo

9 789006 078800

- **wortelvergelijking**
  - **isoleer** het wortelteken
  - **kwadrateer** beide kanten
  - **controleer** het antwoord in de wortelvergelijking

    voorbeeld $\sqrt{2x+20}+x-2=2x+4$
    - **isoleer wortelteken** $\sqrt{2x+20}=x+6$
    - **kwadrateer** geeft $2x+20=(x+6)^2$ dus
      $2x+20=x^2+12x+36$ denk aan het dubbele product
      $x^2+10x+16=0$ dus
      $(x+8)(x+2)=0$ dus $x=-8$ en $x=-2$
    - **controleer** in $\sqrt{2x+20}=x+6$ dus
      - $x=-8$: $\sqrt{-16+20}=-8+6$ klopt niet
      - $x=-2$: $\sqrt{-4+20}=-2+6$ klopt
    - **conclusie** $x=-2$
- **gecombineerde vergelijkingen**

  voorbeelden breuk en wortel
  - $\dfrac{2x+1}{2\sqrt{(x^2+x)}}=0$ gebruik $\dfrac{A}{B}=0 \;\Leftrightarrow\; A=0$ en $B\neq 0$ dus

    $2x+1=0$ en $2\sqrt{x^2+x}\neq 0$ maar ook $x^2+x>0$ (want wortel)

    $x=-\dfrac{1}{2}$ controleren geeft $\dfrac{0}{2\sqrt{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)}}$ voldoet niet, negatief getal onder de wortel

    conclusie: geen oplossing
  - $\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}=1$ gebruik $\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}=0 \;\Leftrightarrow\; A\cdot D=B\cdot C$, met $B\neq 0$ én $D\neq 0$ dus

    $\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}=\dfrac{1}{1}$ (kruisproduct geeft)

    $2x+1=2\sqrt{x^2+x}$ en $2\sqrt{x^2+x}\neq 0$ maar ook $x^2+x>0$ (want wortel)

    $(2x+1)^2=\left(2\sqrt{x^2+x}\right)^2 \Rightarrow$ (kwadrateren levert)
    $4x^2+4x+1=4\cdot(x^2+x)\Rightarrow$
    $4x^2+4x+1=4x^2+4x\Rightarrow$
    $1=0$ dit klopt niet
    conclusie: geen oplossingen

1.15 wortelvergelijking exact oplossen

a $\sqrt{-x^2+9} = \sqrt{4x+9}$ *b* $\dfrac{4}{\sqrt{t-1}} - 3 = 0$

a beide kanten kwadrateren geeft $-x^2+9 = 4x+9$.
op nul herleiden geeft $-x^2-4x = 0$ dus $-x(x+4)=0$ dus $x=0$ of $x=-4$.
controleer $x=0$: $\sqrt{0+9} = \sqrt{0+9}$ klopt
controleer $x=-4$: $\sqrt{-(-4)^2+9} = \sqrt{-16+9}$ voldoet niet, dus oplossing is $x=0$

b $\dfrac{4}{\sqrt{t-1}} = \dfrac{3}{1}$ dus $4 = 3\sqrt{t-1}$ en $t>1$ dus $16 = 9(t-1)$ dus $\dfrac{16}{9} = t-1$ dus $t = 1+\dfrac{16}{9} = 2\dfrac{7}{9}$

controleren: $\dfrac{4}{\sqrt{2\frac{7}{9}-1}} = \dfrac{3}{1}$ klopt

1.16 herschrijf tot de vorm $A =$

a $t = \dfrac{12\sqrt{x}}{\frac{1}{2}A}$ *b* $V = 2+\dfrac{5}{A+3}$ *c* $t = 3\sqrt{A+2}$

a $\dfrac{t}{1} = \dfrac{12\sqrt{x}}{\frac{1}{2}A}$ kruislings vermenigvuldigen $\frac{1}{2}A\cdot t = 12\sqrt{x}$ dus $A = \dfrac{24\sqrt{x}}{t}$

b $\dfrac{V-2}{1} = \dfrac{5}{A+3}$ dus $(V-2)(A+3)=5$ dus $(A+3) = \dfrac{5}{(V-2)}$ dus $A = \dfrac{5}{(V-2)} - 3$

c $\dfrac{t}{3} = \sqrt{A+2}$ kwadrateren $\left(\dfrac{t}{3}\right)^2 = A+2$ dus $A = \dfrac{t^2}{9} - 2 = \dfrac{1}{9}t^2 - 2$

1.17 herleid $\dfrac{1}{3x\sqrt{1-x}} = \dfrac{\sqrt{1+x}}{A}$ **tot** $A = \sqrt{9x^2-9x^4}$

$\dfrac{1}{3x\sqrt{1-x}} = \dfrac{\sqrt{1+x}}{A}$ kruislings vermenigvuldigen

$3x\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x} = A$

$3x\sqrt{(1-x)(1+x)} = A$

$\sqrt{9}\cdot\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{(1-x^2)} = A$

$\sqrt{9\cdot x^2\cdot(1-x^2)} = A$ dus $A = \sqrt{9x^2-9x^4}$

1.18 herleid $\dfrac{a}{100-a} = 0{,}00004b^3$ **tot** $a = \dfrac{100b^3}{b^3+25\ 000}$

$\dfrac{a}{100-a} = \dfrac{0{,}00004b^3}{1}$ kruislings vermenigvuldigen

$a = 0{,}00004b^3\cdot(100-a)$
$a = 0{,}004b^3 - 0{,}00004b^3\cdot a$
$a + 0{,}00004b^3\cdot a = 0{,}004b^3$
$a\cdot(1+0{,}00004b^3) = 0{,}004b^3$

$a\cdot = \dfrac{0{,}004b^3}{1+0{,}00004b^3}$ dus $a = \dfrac{0{,}004b^3}{1+0{,}00004b^3}\cdot\dfrac{25\ 000}{25\ 000}$ dus $a = \dfrac{100b^3}{b^3+25\ 000}$

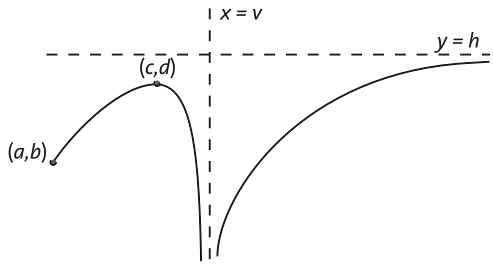
2 functies en grafieken (lineair-, macht-, wortel-, gebroken-, absoluut-)

functies algemeen een relatie waarbij ieder origineel (x) precies één beeld (y) heeft

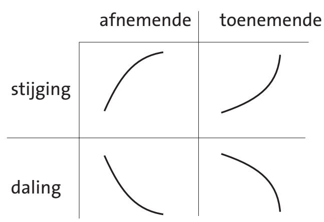
- **notaties** y als functie van x; y uitdrukken in x; in de grafiek y uitzetten tegen x
  - $\mathbf{y = 3x + 4}$ formule
  - $\mathbf{f(x) = 3x + 4}$ functievoorschrift
  - $\mathbf{f{:}x \to 3x + 4}$ pijlnotatie

kenmerkende eigenschappen grafiek

Alle onderdelen die van belang kunnen zijn bij het werken met grafieken worden hier genoemd. Per soort grafiek wordt later in dit hoofdstuk aangegeven wat van belang is.



- **domein** alle x-waarden die je in de formule mag invullen
  $D_f = [a, v\rangle \cup \langle v, \rightarrow\rangle$
- **bereik** alle y-waarden
  $B_f = \langle \leftarrow, h\rangle$
- **snijpunt y-as** bereken $f(0) =$
- **nulpunt, snijpunt x-as** los op $f(x) = 0$
- **extreme waarden** maximum, minimum, top, randpunt zoals min $f(a) = b$ en max $f(c) = d$ in de figuur
  - $\mathbf{f'(x) = 0}$ toppen of buigpunt met horizontale buigraaklijn
- **randpunt** zoals $f(a) = b$
  - **bepaal het gedrag aan de rand** de richting van de grafiek
- **asymptoot** grafiek nadert deze rechte lijn; afstand tussen de rechte lijn en de grafiek nadert op den duur naar 0;
  zoals de verticale asymptoot $x = v$ en de horizontale asymptoot $y = h$ in de figuur
- **perforatie** een gat in de grafiek
- **vorm** soort stijging of daling zie figuur
- **symmetrie**
  - **puntsymmetrie** in (0,0) als $f(x) = -f(-x)$
  - **lijnsymmetrie** in de y-as als $f(x) = f(-x)$



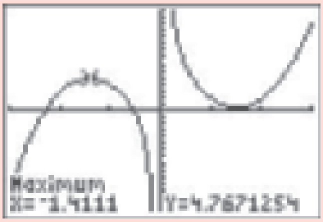
grafiek

- **grafiek tekenen** er moet een nauwkeurige grafiek op papier getekend worden met daarin de voor de vraag relevante (= belangrijke) eigenschappen
  - **assenstelsel** met schaalverdeling
  - **eenheden** wat staat er bij de assen, bijvoorbeeld km, m, cm, kg, gram, Newton, euro, centen, uren, dagen, m/sec, m^2
  - **assenverdeling** waar komt bijvoorbeeld de 1?
- **grafiek schetsen** teken een globale grafiek op papier, met daarin de voor de vraag relevante (= belangrijke) eigenschappen (gebruik bijvoorbeeld de plot)

2.1 kenmerkende eigenschappen van de grafiek

Gegeven $f(x) = x^3 - 5x + \frac{3}{x} + \sqrt{9 - x^2}$

- *Schets de grafiek en geef de kenmerkende eigenschappen van de grafiek.*



a *domein: kijk naar* $\frac{3}{x} + \sqrt{9 - x^2}$

$\frac{3}{x}$ dus $x \neq 0$

$\sqrt{9 - x^2}$ dus $9 - x^2 \geq 0$ dus $-3 \leq x \leq 3$

domein is $[-3, 3]$ en $x \neq 0$

b *bereik*

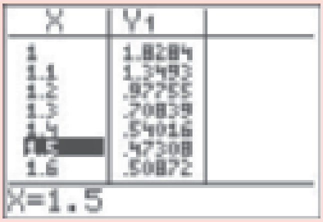
zie de globale plot; scherminstelling van de plot is: $[-3, 3] \times [-15, 15]$

bereik is $\mathbb{R}$

c *nulpunten*

nulpunten aflezen uit de plot of tabel geeft $x \approx -0{,}5$ en $x \approx -2{,}3$

d *extreme waarden*



extreme waarden: min $f(1{,}5) \approx 0{,}5$; max $f(-1{,}4) \approx 4{,}8$ en max $f(2{,}997) \approx 13{,}07$

randpunten: min $f(-3) = -13$ en max $f(3) = 13$

e *asymptoten*

asymptoten: verticale asymptoot $x = 0$

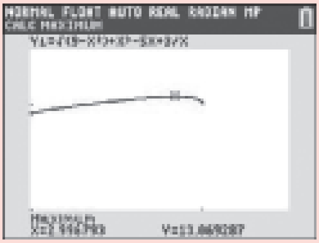
f *gedrag in de randen* $x = -3$ *en* $x = 3$

met behulp van f'

$f(x) = x^3 - 5x + \frac{3}{x} + \sqrt{9 - x^2} = x^3 - 5x + 3x^{-1} + (9 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ dus

$f'(x) = 3x^2 - 5 - 3x^{-2} + \frac{1}{2}(9 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - 2x = 3x^2 - 5 - \frac{3}{x^2} - \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$ (zie hoofdstuk 6)

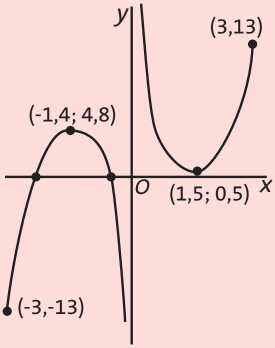
$\lim\limits_{x \downarrow -3} \left(3x^2 - 5 - \frac{3}{x^2} - \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}\right) = \infty \quad \left(3 \cdot 9 - 5 - \frac{3}{9} - \frac{-3}{\sqrt{0}}\right)$ en



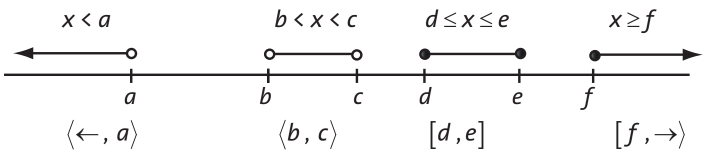
$\lim\limits_{x \uparrow 3} \left(3x^2 - 5 - \frac{3}{x^2} - \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}\right) = -\infty \quad \left(3 \cdot 9 - 5 - \frac{3}{9} - \frac{3}{\sqrt{0}}\right)$

grafiek loopt verticaal in de randen (zie uitvergrote grafiek in de plot)

g *grafiek van f*



intervalnotaties



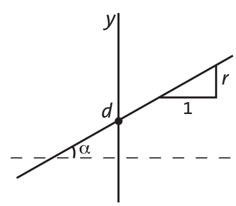
Let op het verschil tussen de open en gesloten rondjes
Let op het verschil in notatie tussen het interval [1, 2] en het punt (1, 2)

de verschillende soorten functies in dit hoofdstuk

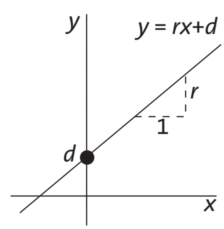
na de opsomming worden de soorten functies ook in onderstaande volgorde besproken

- **eerstegraads functies** of lineaire functies $y = rx + d$
- **tweedegraads functies** of kwadratische functies $y = ax^2 + bx + c$
- **machtsfuncties** van de vorm $y = ax^n$
  zoals bijvoorbeeld $y = 3x^4$, $y = 3x^5$, $y = 3x^{-2}$, $y = 2x^{-3}$, $y = x^{-0{,}5}$
- **hogeregraads functies** van de vorm $y = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + px^2 + qx + k$
- **wortelfuncties** van de vorm $y = a + b\sqrt{c \cdot x + d}$
- **gebroken functies** van de vorm $y = a + \dfrac{b}{x - c}$ en $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$
- **absoluutfuncties** $y = |f(x)|$

eerstegraads functies of lineaire functies

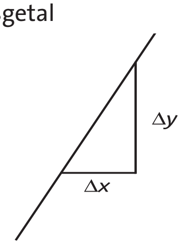


- **grafiek schetsen**
  - **teken snijpunt y-as**
  - **vorm nagaan** stijgt of daalt de lijn of loopt hij horizontaal
- **eigenschappen**
  - **domein en bereik** $\mathbb{R}$
  - **toename** (of afname) is steeds hetzelfde
  - **grafiek** is een rechte lijn
  - **vergelijking** is te schrijven in een van de vormen
    - $\boldsymbol{y = rx + d}$
    - $\boldsymbol{px + qy = s}$
    - $\boldsymbol{\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1}$ snijpunt x-as is $(a, 0)$, snijpunt y-as is $(0,b)$
  - **functievoorschrift** $f(x) = rx + d$



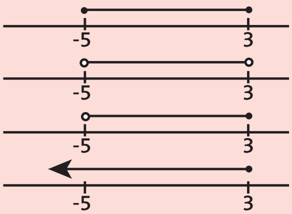
richtingscoëfficiënt r.c., helling, hellingscoëfficiënt, hellingsgetal, richtingsgetal

- **richtingscoëfficiënt** $r = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \dfrac{d - b}{c - a}$ met $P(a, b)$ en $Q(c, d)$
  - $\boldsymbol{r > 0}$ lijn stijgt, $r < 0$ lijn daalt, $r = 0$ lijn loopt horizontaal
  - **als x met 1 toeneemt** dan neemt y met r toe
  - **richtingscoëfficiënt** $r = \tan\alpha$ (α is hoek met de positieve x-as)
- $\boldsymbol{y = d}$ horizontale lijn door $(0, d)$, richtingscoëfficiënt = 0
- $\boldsymbol{x = c}$ verticale lijn door $(c, 0)$, er is geen richtingscoëfficiënt (dit is geen functie)



2.2 intervalnotatie

Ga na dat deze intervalnotaties overeenkomen met de getallenlijn.

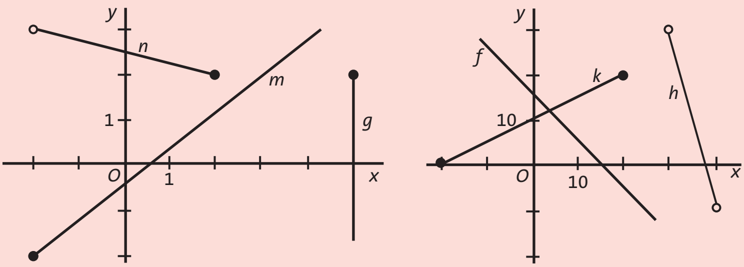


[-5,3]	$-5 \leq x \leq 3$
⟨-5,3⟩	$-5 < x < 3$
⟨-5,3]	$-5 < x \leq 3$
⟨←,3]	$x \leq 3$

2.3 domein en bereik

Gegeven zijn de grafieken *m*, *n*, *g*, *k*, *f* en *h*:

- *Geef bij elk van de grafieken het domein en het bereik met behulp van de intervalnotatie.*



Het domein bestaat uit alle *x*-waarden en het bereik uit alle *y*-waarden.

grafiek	*m*	*n*	*g*	*k*	*f*	*h*
domein	[−2, →⟩	⟨−2, 2]	{5}	[−20, 20]	ℝ	⟨30, 40⟩
bereik	[−2, →⟩	[2, 3⟩	⟨←, 2]	[0, 20]	ℝ	⟨−10, 30⟩

2.4 lijnen verschillende notaties

De richtingscoëfficiënt van lijn *m* is 3 en lijn *m* gaat door (0, 6).
Lijn *n* is een horizontale lijn door (5, 2) en lijn *k* is een verticale lijn door (5, 2).

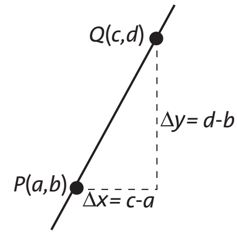
a *Bepaal vergelijkingen van de lijnen m, n en k.*

b *Schrijf de vergelijking van lijn m in de vorm* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

a $m: y = rx + d$ met rc $= r = 3$ door (0, 6) dus $d = 6$. Invullen geeft $y = 3x + 6$
$n: y = 2$ en $k: x = 5$

b $m: y = 3x + 6$ dus $-3x + y = 6$ dus $\frac{x}{-2} + \frac{y}{6} = 1$

vergelijking van lijn opstellen $y = rx + p$



- **twee punten zijn gegeven** $P(a,b)$ en $Q(c,d)$

  eerste manier

  - $\boldsymbol{r} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \dfrac{d-b}{c-a}$ berekening richtingscoëfficiënt
  - **$P(a,b)$ in $y = rx + p$ invullen** om b te berekenen

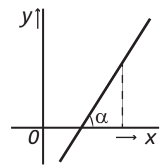
  tweede manier

  - **$y - b = r(x - a)$** uitwerken geeft meteen de vergelijking

  derde manier

  - **vul $P(a,b)$ en $Q(c,d)$** in de vergelijking $y = rx + p$ in; er ontstaan dan twee vergelijkingen met twee onbekenden r en p.

richtingshoek en lijn

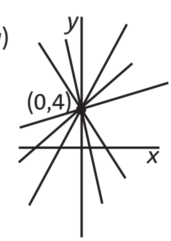


- **richtingshoek** hoek α van de lijn met de positieve x-as
- **α berekenen** $r = \tan \alpha = \dfrac{\text{overstaande zijde}}{\text{aanliggende zijde}}$

  dan geldt, met $\alpha = \text{invtan}(r)$ of $\tan^{-1}(r)$

rechte lijnen en hun eigenschappen

- **evenwijdig //** twee lijnen zijn evenwijdig als ze dezelfde richtingscoëfficiënt hebben
  - $m: y = r \cdot x + p$ en $l: y = r \cdot x + q$ zijn evenwijdig
  - $m: ax + by = c$ en $l: ax + by = d$ zijn evenwijdig
- **loodrecht $\perp$** twee lijnen m en n staan loodrecht op elkaar als het product van de richtingscoëfficiënten –1 is, dus $m \perp n$ dan geldt $\text{rc}_m \cdot \text{rc}_n = -1$
  - $m \perp n$ en $\text{rc}_m = \frac{3}{5}$ dan geldt $\text{rc}_n = -\frac{5}{3}$ (omgekeerd en tegengesteld)
  - $m: ax + by = c$ en $l: bx - ay = d$ staan loodrecht op elkaar
- **speciale vergelijkingen**
  - **lijn door (a,b) met rc = r** vergelijking $y - b = r(x - a)$
    - $y = x$ vermenigvuldigen t.o.v. de x-as met r geeft $y = r{\cdot}x$
    - $y = r \cdot x$ transleren (verschuiven) over (a, b) geeft $y - b = r(x - a)$
  - **$y = ax + 4$** lijnenwaaier door (0, 4); a is de richtingscoëfficiënt is variabel (zie figuur)
  - **$y = 3x + b$** verzameling evenwijdige lijnen met richtingscoëfficiënt 3 door (0, b); b is snijpunt y-as is variabel



- **$y = ax$** er geldt dan x en y zijn (recht) evenredig

2.5 lijnen

Van lijn *m* is de richtingscoëfficiënt 3 en lijn *m* gaat door (5, – 4)

lijn *k* gaat door (4, –1) en (–2, 2)

lijn *n* staat loodrecht op lijn *k* en gaat door (0, 0)

lijn *p* heeft als vergelijking $y = 2x + d$

a *Bepaal een vergelijking van de lijnen m, n en k.*

b *Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen lijn m en lijn k.*

c *Lijn p snijdt lijn m op x-as. Bereken d.*

d *Bepaal de vergelijkingen van de twee bissectrices van de x-as en lijn k. Gebruik twee decimalen.*

a m: rc = r = 3 en (5, – 4) invullen in $y = rx + d$

$-4 = 3 \times 5 + b$ dus $b = -19$

$m: y = 3x - 19$

k: rc $= \frac{2 - -1}{-2-4} = -\frac{1}{2}$ en (4, –1) invullen in $y = rx + d$

$-1 = -\frac{1}{2} \times 4 + b$ dus $b = 1$

$k: y = -\frac{1}{2}x + 1$

n loodrecht op k, dus $\text{rc}_n = 2$ want $\text{rc}_n \times \text{rc}_k = -1$

n gaat door (0, 0) dus $y = rx$ dus vergelijking n is $y = 2x$

b gebruik $\tan(\alpha) = r$

m: $\tan(\alpha) = 3$ dus $\alpha = 71{,}6°$

k: $\tan(\beta) = -0{,}5$ dus $\beta = -26{,}6°$

$\angle(k,m) = 71{,}6° - -26{,}6° = 98{,}2°$

de scherpe hoek tussen k en m is afgerond 82° (= 180° – 98°)

c $m: y = 3x - 19$ snijdt de x-as in $\left(6\frac{1}{3}, 0\right)$ invullen in $y = 2x + d$ geeft $0 = 2 \cdot 6\frac{1}{3} + d$

dus $d = -12\frac{2}{3}$

$y = 2x - 12\frac{2}{3}$

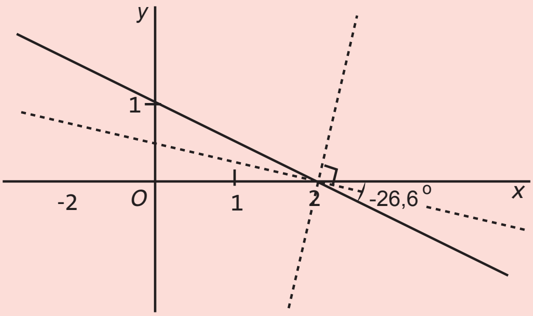
d vergelijking $k: y = -\frac{1}{2}x + 1$ en snijpunt van k met de x-as is (2, 0)

rc $= -\frac{1}{2}$ levert $\alpha = -26{,}57°$

rc $\text{bissectrice}_1 = \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \tan(-13{,}285°) = -0{,}24$

bissectrice_1: $y = -0{,}24x + b$ met (2, 0) levert bissectrice_1: $y = -0{,}24x + 0{,}48$

bissectrice_2: $y = \frac{-1}{-0{,}24}x + b$ met (2, 0) levert bissectrice_2: $y = 4{,}17x - 8{,}34$



snijpunten van lijnen

drie manieren van exact berekenen

- **gelijkstellen**
  - $m: y = ax + b$ en $n: y = cx + d$ schrijf beide lijnen in deze vorm en stel ze aan elkaar gelijk
  - $ax + b = cx + d$ los x op
  - x invullen in m of n geeft y en dus het snijpunt (x, y)
- **elimineren** van x of y
  - $\begin{matrix} ax + by = c \\ dx + hy = i \end{matrix} \left| \begin{matrix} d \\ a \end{matrix} \right|$ zorg ervoor dat of x of y wegvalt
- **substitutie** van m: $y = ax + b$ in n: $cx + dy = k$
  - m in n substitueren (invullen) geeft $cx + d(ax + b) = k$ hiermee is x op te lossen
  - x invullen in m of n geeft y en dus het snijpunt (x, y)
  - alleen ter controle grafische rekenmachine zie H8 en H9
    - herschrijf de vergelijkingen in de vorm $y = rx + d$
    - voer de vergelijking in bij y_1 en bij y_2
    - kies een geschikt window en gebruik bijvoorbeeld intersect

snijpunt benaderen met de grafische rekenmachine (zie ook hierna: vergelijking oplossen, exact of benaderen) zie hoofdstuk 8 of 9

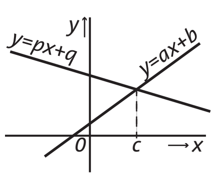
is toegestaan bij

- **bereken (niet toegestaan bij bereken algebraïsch, bereken exact of bewijs)**
- **los op**
- **bepaal**
- **benader**

eerstegraads ongelijkheid of lineaire ongelijkheid exact berekenen

- $\boldsymbol{ax + b < px + q}$
  - **bereken exact** $ax + b = px + q$
  - **plot** $y_1 = ax + b$ en $y_2 = px + q$ en lees af op welk interval $ax + b < px + q$

voorbeeld



in het voorbeeld geldt $ax + b < px + q$ als $x < c$

2.6 snijpunt berekenen door middel van gelijkstellen

- *Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van m: $y = 2x + 8$ en n: $y = 4x + 14$*

  $2x + 8 = 4x + 14$ dus $-2x = 6$

  $x = -3$ dus $y = 2 \times -3 + 8 = 2$

  coördinaten van het snijpunt zijn $(-3, 2)$

2.7 snijpunt berekenen door middel van elimineren

- *Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van $3x + 2y = 4$ en $5x - 3y = 7$*

  $$\begin{array}{l} 3x + 2y = 4 \\ 5x - 3y = 7 \end{array} \left|\begin{array}{l} 5 \\ 3 \end{array}\right| \text{ dus } \begin{array}{r} 15x + 10y = 20 \\ \underline{15x - 9y = 21} \; - \\ 19y = -1 \end{array} \quad \text{(eliminatie van } x\text{)}$$

  $y = -\frac{1}{19}$ invullen in bijvoorbeeld $3x + 2y = 4$ geeft $3x + -\frac{2}{19} = 4$

  $3x = 4\frac{2}{19}$ dus $x = 1\frac{7}{19}$ dus coördinaten van het snijpunt zijn $\left(1\frac{7}{19}, -\frac{1}{19}\right)$

2.8 snijpunt berekenen door middel van substitutie

- *Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van $y = 3x + 5$ en $3x - 4y = -38$*

  $y = 3x + 5$ substitueren in $3x - 4y = -38$

  $3x - 4(3x + 5) = -38$ dus $3x - 12x - 20 = -38$ dus $-9x = -18$ dus $x = 2$

  $x = 2$ invullen in $y = 3x + 5$ geeft $y = 3 \times 2 + 5 = 11$

  coördinaten van het snijpunt zijn $(2, 11)$

2.9 snijpunt

- *Bereken algebraïsch de coördinaten van het snijpunt van $y = 0{,}5(3 - 2x)$ en $4(y - 2) + 2x = -12$*

  Beide formules eerst eenvoudiger schrijven.

  $y = 0{,}5(3 - 2x) = 1{,}5 - x$ wordt $y = 1{,}5 - x$ en $y = -0{,}5x - 1$

  $4(y - 2) + 2x = -12$ wordt $4y - 8 + 2x = -12$ dus $4y + 2x = -4$ dus $y = -0{,}5x - 1$

  aan elkaar gelijk stellen geeft $1{,}5 - x = -0{,}5x - 1$

  $-0{,}5x = -2{,}5$ dus $x = 5$ dus $y = 1{,}5 - 5 = -3{,}5$

  coördinaten van het snijpunt zijn $(5; -3{,}5)$

2.10 eerstegraads ongelijkheid

Gegeven $f(x) = -0{,}3x + 7$ en $g(x) = 5 - 3(-2x + 1)$

- *Bereken algebraïsch: $f(x) < g(x)$ en rond af op één decimaal nauwkeurig*

  $-0{,}3x + 7 = 5 - 3(-2x + 1)$

  $-0{,}3x + 7 = 5 + 6x - 3$

  $-6{,}3x = -5$

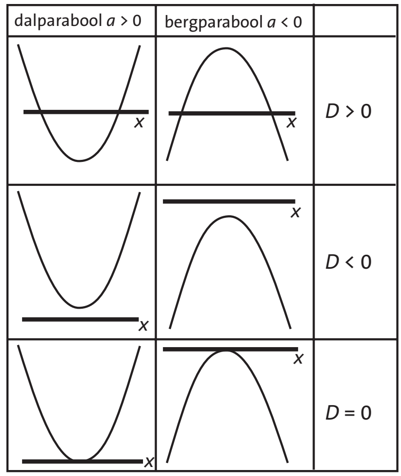
  $x \approx 0{,}8$

  Met de GR: plot $y_1 = -0{,}3x + 7$ en $y_2 = 5 - 3(-2x + 1)$

  WINDOW $[-2, 2] \times [-2, 10]$, grafiek van f ligt boven g als $x > 0{,}8$

  conclusie: $x > 0{,}8$

tweedegraads functies $f(x) = ax^2 + bx + c$



- **grafiek schetsen**
  - **parabool** dal ($a > 0$) of berg ($a < 0$)
  - **teken snijpunt *y*-as**
- **eigenschappen van $y = ax^2 + bx + c$**
  - **domein** $\mathbb{R}$
  - **bereik**
    - **als $a > 0$** dan bereik $y \geq y_{top}$
    - **als $a < 0$** dan bereik $y \leq y_{top}$
  - **snijpunt *y*-as** bepaal $f(0) =$
  - **snijpunt *x*-as** bepaal $ax^2 + bx + c = 0$

    vier manieren
    - ***abc*-formule** $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
      - **discriminant** $D = b^2 - 4ac$

        $D > 0$ twee snijpunten met *x*-as

        $D < 0$ geen snijpunt met *x*-as

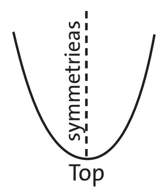
        $D = 0$ één snijpunt met *x*-as

    of
    - **ontbinden in factoren** $a(x - p)(x - q) = 0$

    of
    - **kwadraat afsplitsen**
      - **herschrijf** $ax^2 + bx + c = 0$ tot de vorm $a(x + q)^2 = p$

    of
    - **grafische rekenmachine**
  - **top exact berekenen**
    - $f'(x) = 2ax + b = 0$

      oftewel top berekenen met afgeleide $f'(x) = 0$



verschillende schrijfwijzen voor tweedegraads functies

- $y = ax^2 + bx + c$
  - $y = ax^2$ parabool met als top (0, 0)
- $y = a(x - p)^2 + q$ topvergelijking van de parabool met als top (p, q)
  - $y = x^2$ **vermenigvuldigen** t.o.v. de *x*-as met a geeft $y = ax^2$
  - $y = ax^2$ **transleren** (verschuiven) over (p, q) geeft $y = a(x - p)^2 + q$
- $y = a(x - b)(x - c)$ nulpuntenvergelijking parabool met nulpunten $x = b$ en $x = c$

2.11 parabolen

$f(x) = ax^2 - 5x + 4$

a Voor welke a heeft de grafiek een negatief minimum?

b Voor welke a ligt de top van de parabool op de lijn y = 2x?

De grafiek van g is een parabool met top (2, –3) door (0, 0)

c Geef een vergelijking voor de grafiek van g.

a negatief minimum als $a > 0$ (dalparabool) en $D > 0$ (2 snijpunten)

$D = (-5)^2 - 4 \times a \times 4 = 25 - 16a > 0$ dus $-16a > -25$ als $a < \frac{25}{16}$

$a > 0$ en $a < \frac{25}{16}$

conclusie: f heeft een negatief minimum voor $0 < a < \frac{25}{16}$

b top bepalen met: $f'(x) = 0$ en dit invullen in $y = 2x$

$f'(x) = 2ax - 5 = 0$ dus $x = \frac{5}{2a}$

$f\left(\frac{5}{2a}\right) = a \cdot \left(\frac{5}{2a}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2a} + 4 = \frac{25}{4a} - \frac{25}{2a} + 4 = \frac{25 - 50 + 16a}{4a} = \frac{-25 + 16a}{4a}$ dus

top $\left(\frac{5}{2a}, \frac{-25 + 16a}{4a}\right)$ invullen in $y = 2x$: $\frac{-25 + 16a}{4a} = 2 \cdot \frac{5}{2a}$ dus $\frac{-25 + 16a}{4a} = \frac{20}{4a}$

dus $-25 + 16a = 20$; conclusie: $a = \frac{45}{16}$

c maak gebruik van vergelijking $y = a(x - p)^2 + q$ met top (p, q)

top$(2, -3)$ dus $y = a(x - 2)^2 - 3$ door $(0, 0)$ dus $0 = a(0 - 2)^2 - 3$ dus $a = 0{,}75$

vergelijking g: $y = 0{,}75(x - 2)^2 - 3$

2.12 vergelijking parabool

a Geef een vergelijking van de parabool met top (–1, –3) door (1, 5).

b Geef een vergelijking van de parabool door (8, 0) en (12, 0) met maximum 6.

c Geef een vergelijking van de parabool door de punten (0, 5), (2, 0) en (4, –1)

a top $(-1, -3)$ dus vergelijking wordt $y = a(x + 1)^2 - 3$

$(1, 5)$ invullen geeft $5 = a(1 + 1)^2 - 3$

$4a = 8$ dus $a = 2$

vergelijking van de parabool: $y = 2(x + 1)^2 - 3$

b nulpunten $x = 8$ en $x = 12$ dus $y = a(x - 8)(x - 12)$

het maximum is 6 voor $x = 10$ ($x = 10$ is het midden van de nulpunten, $x = 8$ en $x = 12$)

$(10, 6)$ invullen geeft $6 = a(10 - 8)(10 - 12)$ dus $-4a = 6$ dus $a = -1{,}5$

vergelijking van de parabool: $y = -1{,}5(x - 8)(x - 12)$

c $y = ax^2 + bx + c$ met punt $(0,5)$ levert $y = ax^2 + bx + 5$

$x = 2$ en $y = 0$ levert $4a + 2b + 5 = 0$

$x = 4$ en $y = -1$ levert $16a + 4b + 5 = -1$

dit stelsel oplossen levert

$$\begin{array}{l|c|l} 4a + 2b + 5 = 0 & 2 & 8a + 4b + 10 = 0 \\ 16a + 4b + 5 = -1 & 1 & \underline{16a + 4b + 5 = -1} \; - \\ & & -8a \qquad + 5 = \ \ 1 \end{array}$$

Dus $a = 0{,}5$ en $b = -3{,}5$ dus vergelijking van de parabool: $y = 0{,}5x^2 - 3{,}5x + 5$

tweedegraads vergelijking exact oplossen

tweedegraadsvergelijking eerst op 0 herleiden

- $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$

  verschillende typen

  - $\boldsymbol{(x+q)^2 = b}$ dus $x + q = \sqrt{b}$ of $x + q = -\sqrt{b}$ mits $b \geq 0$
  - $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$

    oplossen door x buiten haakjes te halen

    - $x(ax + b) = 0$
    - $x = 0$ of $ax + b = 0$
  - $\boldsymbol{x^2 + bx + c = 0}$ let op voor de x staat nu een 1

    oplossen met ontbinden; (lukt niet altijd)

    - $(x + d)(x + h) = 0$ zodat $d + h = b$ en $d \cdot h = c$

      controleer met een plot: de ontbinding klopt als de grafieken van $y = x^2 + bx + c$ en $y = (x + d)(x + h)$ samenvallen

    - $x + d = 0$ of $x + h = 0$ dus $x = -d$ of $x = -h$

    oplossen met kwadraatafsplitsen

    - $\boldsymbol{x^2 + bx + c = 0}$ **herschrijven** $\left(x + \frac{1}{2}b\right)^2$ = constante, daarna verder oplossen
  - $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$

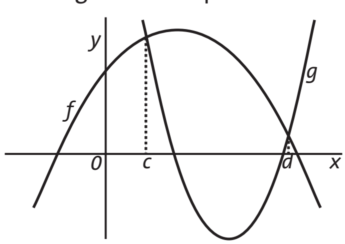
    oplossen met abc-formule

    - $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$ dus $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$ of $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$
      - discriminant $D = b^2 - 4ac$
      - $D = 0$ vergelijking heeft één oplossing
      - $D > 0$ vergelijking heeft twee oplossingen
      - $D < 0$ vergelijking heeft geen oplossing
- **bijzondere situaties**
  - $\boldsymbol{(f(x))^2 = (g(x))^2}$ dan geldt $f(x) = g(x) \vee f(x) = -g(x)$
  - $\boldsymbol{f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot h(x)}$ dan geldt $f(x) = 0 \vee g(x) = h(x)$

ongelijkheden oplossen

- $\boldsymbol{f(x) > g(x)}$ op welk interval ligt de grafiek van f boven de grafiek van g

  in de figuur is dat op het interval $\langle c, d\rangle$ of $c < x < d$



2.13 tweedegraads vergelijking

Bereken van onderstaande vergelijkingen de oplossingen

a $(2x + 3)^2 = 5$

b $x^2 - 5x + 6 = 0$

c $(2x + 3)^2 - 25 = 8(x - 1)(x + 3)$

d $3x^2 + 2x + 1 = 0$

a $2x + 3 = \sqrt{5}$ of $2x + 3 = -\sqrt{5}$ dus $2x = -3 + \sqrt{5}$ of $2x = -3 - \sqrt{5}$

$x = -1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $x = -1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$

b $(x - 3)(x - 2) = 0$ dus $x = 3$ of $x = 2$

c eerst haakjes uitwerken $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$ (merkwaardig product)

$4x^2 + 12x + 9 - 25 = 8(x^2 + 3x - x - 3)$ dus $4x^2 + 12x - 16 = 8x^2 + 16x - 24$

$-4x^2 - 4x + 8 = 0$ dus $x^2 + x - 2 = 0$

$(x + 2)(x - 1) = 0$

$x = -2$ of $x = 1$

d $3x^2 + 2x - 2 = 0$

ontbinden lukt hier niet; gebruik *abc*-formule

$a = 3$, $b = 2$ en $c = 1$ dus $D = 2^2 - 4 \times 3 \times -2 = 4 + 24 = 28$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{6} = -\frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{7}$$

2.14 gegeven zijn de functies $f(x) = (2x + 3)^2$ en $g(x) = (-x + 5)^2$

- *Bereken exact de snijpunten van de grafieken van f en g*

$(2x + 3)^2 = (-x + 5)^2$

$2x + 3 = -x + 5$ of $2x + 3 = -(-x + 5)$

$3x = 2$ of $2x + 3 = x - 5$

$x = \frac{2}{3}$ of $x = -8$

snijpunten zijn $\left(\frac{2}{3}, 18\frac{7}{9}\right)$ en $(-8, 169)$

2.15 ongelijkheid

Gegeven zijn de functies $f(x) = (2x + 5)(x + 6)$ en $g(x) = 8(2x + 5)(x - 1)$

- *Bereken exact wanneer $f(x) > g(x)$*

$(2x + 5)(x + 6) > 8(2x + 5)(x - 1)$

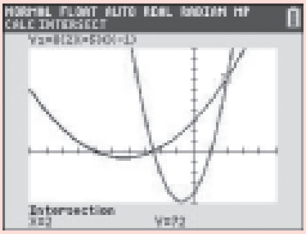
$(2x + 5)(x + 6) = 8(2x + 5)(x - 1)$

(gebruik $A \cdot B = A \cdot C$ dus $A = 0$ of $B = C$)

$2x + 5 = 0$ of $x + 6 = 8(x - 1)$

$x = -2{,}5$ of $x = 2$ $f(x)$ boven $g(x)$ zie plot

conclusie: $x \in \langle -2{,}5; 2 \rangle$

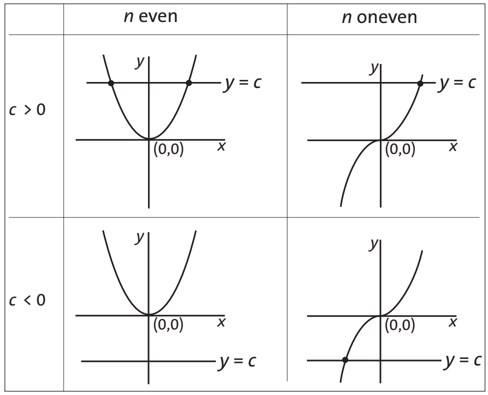


hogeregraads functies $y = ax^n$ met n een geheel getal

- **vergelijkingen machtsfuncties** exact oplossen $ax^n = c$ met n een geheel getal

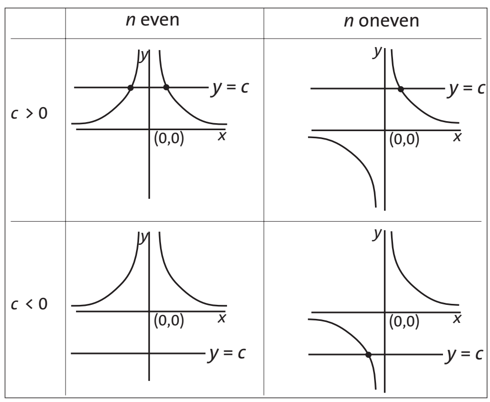
  maak gebruik van een schets van de algemene vorm

- $\boldsymbol{x^n = c}$ met $n > 0$



  - ***n* even en *c* positief** twee oplossingen $x = c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{c}$ of $x = -c^{\frac{1}{n}} = -\sqrt[n]{c}$
  - ***n* even en *c* negatief** geen oplossing
  - ***n* oneven** altijd één oplossing $x = c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{c}$

- $\boldsymbol{x^{-n} = c}$ met $n > 0$



  - ***n* even en *c* > 0** twee oplossingen $x = c^{-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{c^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{c}}$ of $x = -\dfrac{1}{\sqrt[n]{c}}$
  - ***n* even en *c* < 0** geen oplossing
  - ***n* oneven** altijd één oplossing $x = c^{-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{c^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{c}}$

- **eigenschappen en bijzondere situaties** $y = ax^n$ met n een geheel getal
  - ***n* = 2** grafiek is een parabool
  - ***n* = 0** dan geldt $y = a$ dus een horizontale lijn door $(0, a)$
  - ***n* is oneven:** de grafiek heeft een buigpunt in $(0, 0)$
  - ***n* < 0** de grafiek heeft de x-as en de y-as als asymptoot

2.16 bereken exact de oplossingen van de volgende vergelijkingen

a $x^6 = 8$ *b* $x^{-4} = 6$ *c* $x^{-9} = 0$ *d* $x^5 = 8$ *e* $x^5 = -7$

a $x^6 = 8$ dus $x = \pm 8^{\frac{1}{6}} = \pm\sqrt[6]{8}$ even macht met positief antwoord, dus twee oplossingen

b $x^{-4} = 6$ dus $x = \pm 6^{-\frac{1}{4}} = \pm\dfrac{1}{6^{\frac{1}{4}}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{6}}$ even macht met positief antwoord, dus twee oplossingen

c $x^{-9} = 0$ geen oplossing $\left(x^{-9} = \dfrac{1}{x^9}\right.$ en dit kan nooit 0 worden)

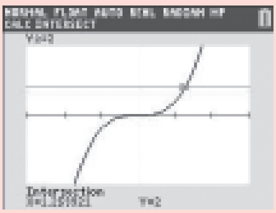
d $x^5 = 8$ dus $x = 8^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{8}$ oneven macht, dus één oplossing

e $x^5 = -7$ dus $x = (-7)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-7} = -\sqrt[5]{7}$

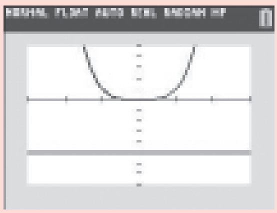
2.17 los de volgende ongelijkheden exact op

a $x^3 < 2$ *b* $x^4 > -5$ *c* $x^5 > -2$ *d* $x^{-5} < 0$

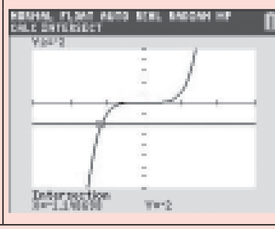
PLOT a



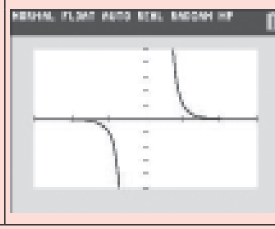
b



c



d



a $x^3 = 2$ dus $x = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ (oneven macht, dus één oplossing), zie plot $x \in \langle \leftarrow, \sqrt[3]{2}\rangle$ of $x < \sqrt[3]{2}$

b $x^4 = -5$ geen oplossing (even macht is nooit negatief), (zie plot) $x^4 > -5$ voor $x \in \mathbb{R}$

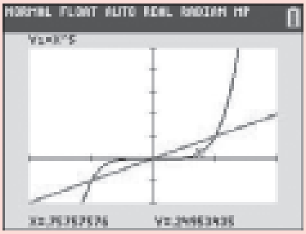
c $x^5 = -2$ dus $x = (-2)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-2} = -\sqrt[5]{2}$ (oneven macht, één oplossing) $x \in \langle -\sqrt[5]{2}, \rightarrow\rangle$ of $x > -\sqrt[5]{2}$

d $x^{-5} = 0$ geen oplossing $\left(x^{-5} = \dfrac{1}{x^5}\right)$, (zie plot) als $x < 0$ dan $x^{-5} < 0$ (als $x > 0$, dan $x^{-5} > 0$)

2.18 hogeregraads functie $y = ax^n$ met n een geheel getal

Gegeven is de functie $f(x) = x^5$ en de lijn $y = x + p$

- *Bereken voor welke waarden van p de twee grafieken precies twee punten gemeenschappelijk hebben.*



maak een plot

richtingscoëfficiënt van $y = x + p$ is 1 dus in het raakpunt aan de grafiek van f in $x = a$ geldt

$f'(a) = 1$ dus $5a^4 = 1$ dus $a = \pm\sqrt[4]{0{,}2}$

$f(\sqrt[4]{0{,}2}) = (\sqrt[4]{0{,}2})^5 = 0{,}2 \cdot \sqrt[4]{0{,}2}$ of $f(-\sqrt[4]{0{,}2}) = (-\sqrt[4]{0{,}2})^5 = -0{,}2 \cdot \sqrt[4]{0{,}2}$

dus geldt $p = 0{,}2 \cdot \sqrt[4]{0{,}2} - \sqrt[4]{0{,}2} = -0{,}8 \cdot \sqrt[4]{0{,}2}$ of $p = -0{,}2 \cdot \sqrt[4]{0{,}2} + \sqrt[4]{0{,}2} = 0{,}8 \cdot \sqrt[4]{0{,}2}$

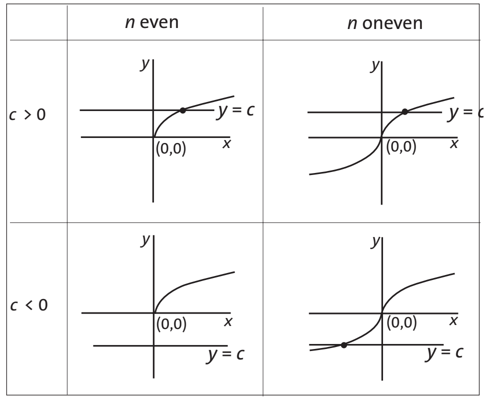
functies met een gebroken exponent $y = ax^{\frac{1}{n}}$

■ **vergelijkingen machtsfuncties** exact

oplossen $ax^{\frac{1}{n}} = c$

met n een geheel getal

maak gebruik van een schets van de algemene vorm

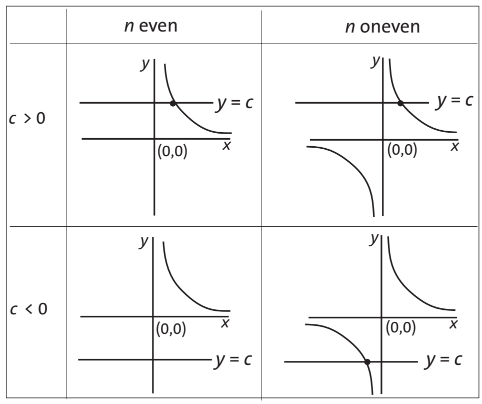


■ $x^{\frac{1}{n}} = c$ en n positief

- ■ **c positief** één oplossing $x = c^n$

  want $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = c^n$

- ■ **c negatief en n even** geen oplossing
- ■ **n oneven** altijd één oplossing



■ $x^{-\frac{1}{n}} = c$ en n positief

- ■ **c positief** één oplossing $x = \frac{1}{c^n}$ want

  $\left(x^{-\frac{1}{n}}\right)^{-n} = c^{-n}$

- ■ **c negatief en n even** geen oplossing
- ■ **n oneven** altijd één oplossing

■ $x^{\frac{a}{n}} = c$

- ■ **c positief** één oplossing $x = c^{\frac{n}{a}} = \sqrt[a]{c^n}$

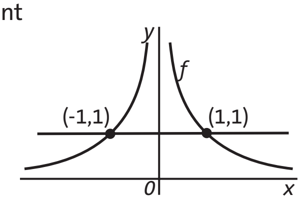
  want $\left(x^{\frac{a}{n}}\right)^{\frac{n}{a}} = c^{\frac{n}{a}}$

■ **$n = 2$** dan geldt $y = ax^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{x}$ en de grafiek is een half liggende parabool

ongelijkheden oplossen met machtsfunctie $y = ax^n$

■ **exact of algebraïsch**

- ■ **functies gelijkstellen** en vergelijking oplossen
  - ■ **bij negatieve exponent** houd rekening met asymptoten (in de plot hiernaast is bijvoorbeeld de oplossing $f(x) > 1$ gelijk aan $\langle -1,0\rangle \cup \langle 0,1\rangle$)
  - ■ **bij gebroken exponent** houd rekening met randpunt
- ■ **gebruik plot** om het interval af te lezen



2.19 bereken exact de oplossingen van de volgende vergelijkingen

a $x^{-1\frac{1}{2}} = 8$ *b* $x^{-\frac{3}{4}} = -7$ *c* $\dfrac{2}{\sqrt{x}} = -x$

a $x^{-1\frac{1}{2}} = 8$ dus $x^{-\frac{3}{2}} = 8$ dus $x = 8^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{64}} = \dfrac{1}{4}$

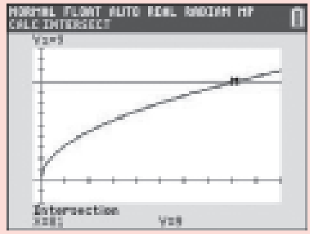
b $x^{-\frac{3}{4}} = -7$ geen oplossing

c $\dfrac{2}{\sqrt{x}} = -x$ dus $2 = -x \cdot \sqrt{x}$ kwadrateren geeft

$4 = x^2 \cdot x = x^3$

dus $x = \sqrt[3]{4}$ controle: $\dfrac{2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}} \neq -\sqrt[3]{4}$

conclusie: geen oplossing



2.20 los de volgende ongelijkheden exact op

a $\sqrt{x} \leq 9$ *b* $x^{\frac{3}{4}} < 5$

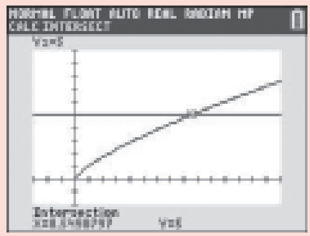
a $\sqrt{x} = 9$ dus $x = 9^2 = 81$ Het domein is $x \geq 0$ dus

$x \in [0, 81]$ of $0 \leq x \leq 81$

b $x^{\frac{3}{4}} = 5$ dus $x = 5^{\frac{4}{3}} = 5^{1\frac{1}{3}} = 5^1 \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 5 \cdot \sqrt[3]{5}$ of

$x = 5^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{625}$

Het domein is $x \geq 0$ dus $x \in \left[0, \sqrt[3]{625}\right\rangle$ of $0 \leq x < \sqrt[3]{625}$



2.21 functies met een gebroken exponent $y = ax^{\frac{1}{n}}$

Gegeven zijn de functies $f_a(x) = a\sqrt{x}$ en $g(x) = \sqrt[4]{x}$ en $h(x) = \dfrac{10}{\sqrt[3]{x^2}}$

a *Bereken exact de snijpunten van g en* f_1.

b *De grafiek van f gaat door het punt (3, 8). Bereken exact de waarde van a en schrijf a in de vorm* $p\sqrt{q}$.

c *Bereken algebraïsch h(x) > g(x).*

a $\sqrt[4]{x} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^4 = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^4 \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$

$x = 1$ of $x = 0$, dus de snijpunten zijn (0, 0) en (1, 1)

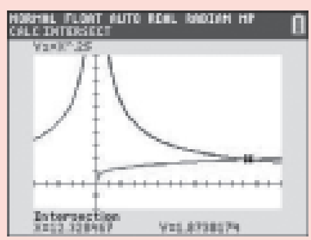
b (3, 8) invullen in $y = a\sqrt{x}$ geeft $8 = a\sqrt{3}$ dus $a = \dfrac{8}{\sqrt{3}} = \dfrac{8}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3} = \dfrac{8}{3}\sqrt{3}$

c $\dfrac{10}{\sqrt[3]{x^2}} > \sqrt[4]{x}$ het gemeenschappelijke domein is $x > 0$

$\dfrac{10}{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[4]{x}$ dus $\dfrac{10}{x^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{x^{\frac{1}{4}}}{1}$ kruislings vermenigvuldigen

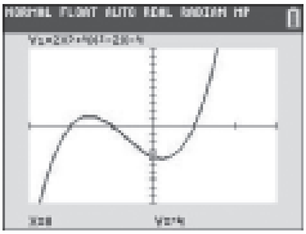
geeft $x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}} = 10$ dus $x^{\frac{11}{12}} = 10$ dus $x = 10^{\frac{12}{11}} = 10 \cdot 10^{\frac{1}{11}} = 10 \cdot \sqrt[11]{10}$

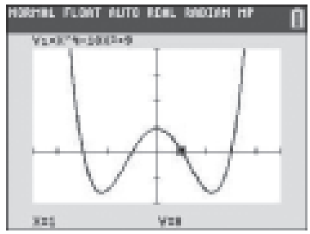
conclusie: $x \in \langle 0, 10 \cdot \sqrt[11]{10} \rangle$ (zie plot: h ligt boven g)



derde- en hogeregraads functies $y = ax^n + bx^{n-1} + ... + px^2 + qx + k$

- **grafiek schetsen**
  - **grootste exponent even** dan 'parabool'-vorm
  - **grootste exponent oneven** dan 'slinger'-vorm
  - **teken snijpunt *y*-as**
  - **geef toppen** aan





derde- en hogeregraads vergelijkingen exact oplossen

- $\boldsymbol{ax^n + bx^m + ... = 0}$
  - **ontbinden** zo groot mogelijke macht buiten haakjes

    $\boldsymbol{x^5 - 6x^4 + 8x^3 = 0}$ dus $x^3(x^2 - 6x + 8) = 0$

    $\boldsymbol{x^3(x-4)(x-2) = 0}$ dus $x = 0$ of $x = 4$ of $x = 2$
- $\boldsymbol{ax^{2m} + bx^m + c = 0}$ deze vergelijking is op te lossen als een kwadratische vergelijking
  - **stel $\boldsymbol{x^m = p}$** de vergelijking wordt dan $ap^2 + bp + c = 0$

    voorbeeld

    $x^8 - 6x^4 + 8 = 0$ wordt $p^2 - 6p + 8 = 0$ met $x^4 = p$

    oplossen zoals een tweedegraads vergelijking (zie hierboven)
  - **grafisch oplossen** als ontbinden niet lukt
- $\boldsymbol{ax^n(x-a)(x+b)^2 = 0}$ dus $x = 0$ of $x = a$ of $x = -b$

ongelijkheden oplossen met derde- en hogere machtsfuncties

- **exact of algebraïsch**
  - grafieken schetsen
  - functies gelijkstellen en vergelijking oplossen zoals bij vergelijkingen
  - gebruik plot om het interval af te lezen
- **bereken of bepaal** gebruik grafische rekenmachine is toegestaan
  - bepaal met behulp van een plot op welke intervallen de ongelijkheid klopt

2.22 hogeregraads vergelijking

Bereken van onderstaande vergelijkingen de oplossingen

a $x^9 = 2x$

b $x^8 - 2x^4 - 3 = 0$

c $x^8 - 2x^5 - 3x^2 = 0$

d $3x^2(x^3+8)(x^2-9)(x^2+1) = 0$

e $3x^7 + 12x^4 = 0$

f $(x+2)(x-9) = 1$

a $x^9 - 2x = 0$
$x(x^8 - 2) = 0$
$x = 0$ of $x^8 = 2$
$x = 0$ of $x = \sqrt[8]{2}$ of $x = -\sqrt[8]{2}$

b Stel $x^4 = p$
$p^2 - 2p - 3 = 0$ dus $(p-3)(p+1) = 0$ dus $p = 3$ of $p = -1$
$x^4 = 3$ of $x^4 = -1$ (heeft geen oplossing)
$x = \sqrt[4]{3}$ of $x = -\sqrt[4]{3}$

c $x^2(x^6 - 2x^3 - 3) = 0$ dus $x = 0$ of $x^6 - 2x^3 - 3 = 0$ stel $x^3 = p$
$p^2 - 2p - 3 = 0$ dus $(p-3)(p+1) = 0$ dus $p = 3$ of $p = -1$
$x^3 = 3$ of $x^3 = -1$
$x = \sqrt[3]{3}$ of $x = -\sqrt[3]{1} = -1$
conclusie: $x = -1$, $x = 0$, $x = \sqrt[3]{3}$

d $3x^2 = 0$ *of* $x^3 = -8$ *of* $x^2 = 9$ *of* $x^2 = -1$
$x = 0$ of $x = -2$ of $x = 3$ of $x = -3$

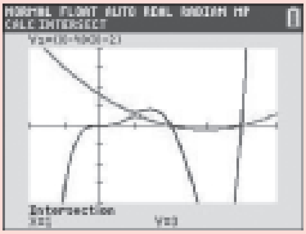
e $x^4(3x^3 + 12) = 0$
$x^4 = 0$ of $x^3 = -4$ (oneven macht heeft één oplossing)
$x = 0$ of $x = -\sqrt[3]{4}$

f $(x+2)(x-9) = 1$ let op haakjes uitwerken
$x^2 - 7x - 18 = 1$ dus $x^2 - 7x - 19 = 0$ (*abc*-formule) dus $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot -19}}{2}$
$x = \dfrac{7 \pm \sqrt{125}}{2} = \dfrac{7 \pm 5 \cdot \sqrt{5}}{2}$

2.23 ongelijkheid exact oplossen

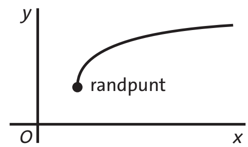
- *Bereken algebraïsch de oplossing van $x^3(x^2 - 6x + 8) < (x-4)(x-2)$.*

Bepaal de snijpunten met behulp van een berekening
$x^2 - 6x + 8 = (x-4)(x-2)$ dus
$x^3(x-4)(x-2) = (x-4)(x-2)$ (gebruik $A \cdot B = A \cdot C$ dus $A = 0$ of $B = C$)
$x^3 = 1$ of $(x-4)(x-2) = 0$
$x = 1$ of $x = 4$ of $x = 2$
Plot de grafieken van $y_1 = x^3(x-4)(x-2)$ en $y_2 = (x-4)(x-2)$
Lees af voor welke x de grafiek van y_1 onder die van y_2 ligt.



Antwoord: $x < 1$ of $2 < x < 4$ of
met de intervalnotatie: $x \in \langle \leftarrow, 1\rangle \cup \langle 2, 4\rangle$

wortelfuncties $y = a + b\sqrt{c \cdot x + d}$



- **grafiek schetsen**
  - **teken randpunt** $\left(-\frac{d}{c}, a\right)$
  - **teken snijpunt *y*-as**
- **eigenschappen**
  - **domein** $cx + d \geq 0$ (getal onder de wortel is altijd groter of gelijk aan 0)
    gebruik plot en randpunt $\left(-\frac{d}{c}, a\right)$ om het domein te bepalen
  - **bereik** gebruik plot en randpunt $\left(-\frac{d}{c}, a\right)$
  - **raaklijn in top** (is randpunt) loopt verticaal (want de grafiek is een halve liggende parabool)

wortelvergelijking exact oplossen

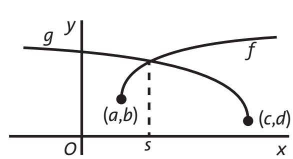
- $\boldsymbol{a + b\sqrt{c \cdot x + d} = k}$

  stappenplan
  - **isoleer** de wortel voor het '='teken
    dus herschrijf tot $\sqrt{c \cdot x + d} = \ldots$
  - **kwadrateren** links en rechts van = teken en daarna vergelijking oplossen
  - **controleren** aantal oplossingen bepalen met behulp van plot

  voorbeeld $3x - 2\sqrt{2 - x} = 1$
  isoleer de wortel dus $-2\sqrt{2 - x} = -3x + 1$
  kwadrateren en oplossen geeft $(-2\sqrt{2 - x})^2 = (-3x + 1)^2$ dus $4(2 - x) = (-3x+1)^2$
  $8 - 4x = 9x^2 - 6x + 1$ dus $9x^2 - 2x - 7 = 0$ dus $x = 1$ of $x = -\frac{7}{9}$
  controleren in $3x - 2\sqrt{2 - x} = 1$
  $x = -\frac{7}{9}$ invullen geeft $3 \cdot \frac{7}{9} - 2\sqrt{\frac{25}{9}} = 1$ klopt niet
  $x = 1$ invullen geeft $3 \cdot 1 - 2\sqrt{1} = 1$ klopt wel conclusie: $x = 1$
  (of controleer met grafische rekenmachine door $y_1 = 3x - 2\sqrt{2 - x}$ en $y_2 = 1$ te plotten en te kijken waar ze elkaar snijden)

ongelijkheden oplossen met wortelfunctie

- **exact of algebraïsch** zie boven
- **bereken of bepaal** gebruik grafische rekenmachine is toegestaan
  - **bepaal** met behulp van een plot op welke intervallen de ongelijkheid klopt
  - **let op de randpunten** en het domein
  - **in het voorbeeld** geldt: $f(x) < g(x)$ voor $[a, s\rangle$

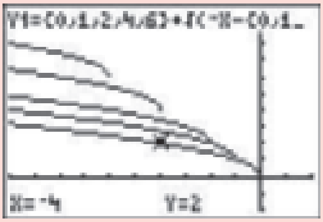


2.24 familie van wortelfuncties

$g(x) = a + \sqrt{-x-a}$

a Plot de grafiek van g voor a = 0, a = 1, a = 2, a = 4 en a = 6

b Bewijs dat de randpunten van bovenstaande grafieken op één lijn liggen.



a zie figuur hiernaast

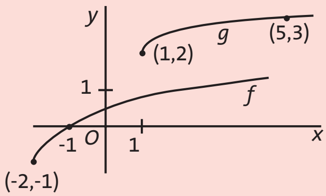
b randpunten vinden met $-x - a = 0$ dus $x = -a$ en dan $y = a$

conclusie: randpunten zijn $(-a, a)$ en deze liggen op de lijn met vergelijking $y = -x$

2.25 wortelfunctie

De getekende functies hebben een functievoorschrift van de vorm $h(x) = a + c\sqrt{x+b}$

- *Geef van beide functies het functievoorschrift.*



top van f is $(-2, -1)$ dus $y = -1 + c\sqrt{x+2}$

een punt van f is $(-1, 0)$ invullen geeft:

$0 = -1 + c\sqrt{-1+2}$ dus $c = 1$

conclusie: $f(x) = -1 + \sqrt{x+2}$

top van g is $(1, 2)$ dus de formule wordt

$y = 2 + c\sqrt{x-1}$

punt van g bijvoorbeeld $(5, 3)$ invullen geeft $3 = 2 + c\sqrt{5-1}$ dus $c = 0{,}5$

conclusie: $g(x) = 2 + 0{,}5\sqrt{x-1}$

2.26 bereken exact

a $\dfrac{2x}{\sqrt{x+5}} = x$

b $\dfrac{x^2-6x+5}{\sqrt{x-2}} = 0$

c $\dfrac{x^2-6x+5}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}$

a $2x = x \cdot \sqrt{x+5}$ kwadrateren geeft $4x^2 = x^2 \cdot (x+5) = x^3 + 5x^2$

$x^3 + x^2 = 0$ dus $x^2(x+1) = 0$

$x = 0$ of $x = -1$ controleren in $\dfrac{2x}{\sqrt{x+5}} = x$ (kloppen beiden)

conclusie: $x = 0$ of $x = -1$

b $x^2 - 6x + 5 = 0$ dus $x = 1$ of $x = 5$

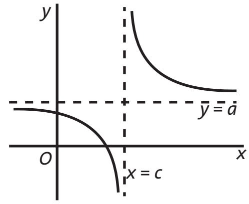
controle in $\dfrac{x^2-6x+5}{\sqrt{x-2}} = 0$ levert als antwoord alleen $x = 5$ ($x = 1$ vervalt)

c $\dfrac{x^2-6x+5}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}$ kruislings vermenigvuldigen geeft

$x^2 - 6x + 5 = x - 1$ dus $x^2 - 7x + 6 = 0$ dus $(x-6)(x-1) = 0$ dus $x = 1$ (vervalt) of $x = 6$

conclusie: $x = 6$

gebroken functie van de vorm $y = a + \dfrac{b}{x-c}$



- **grafiek schetsen**
  - **teken horizontale asymptoot** $y = a$
  - **teken verticale asymptoot** $x = c$
  - **teken snijpunt *y*-as** $f(0) =$ uitrekenen
  - **teken twee hyperbooltakken**
- **eigenschappen**
  - **domein** noemer ≠ 0 dus $\mathbb{R}$ behalve $x = c$, oftewel $\mathbb{R}\backslash\{c\}$
  - **bereik** $\mathbb{R}$ behalve $y = a$, oftewel $\mathbb{R}\backslash\{a\}$
  - **grafiek** is een hyperbool
- **puntsymmetrisch** ten opzichte van (c, a), het snijpunt van de asymptoten

gebroken functie van de vorm $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

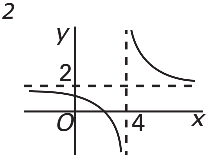
- **grafiek schetsen** gebruik de plot
  - **teken horizontale asymptoot** $y = \dfrac{a}{c}$
  - **teken verticale asymptoot** $x = -\dfrac{d}{c}$
  - **teken snijpunt *y*-as** $f(0) = ...$ uitrekenen
  - **teken twee hyperbooltakken**
- **eigenschappen**
  - **domein** $\mathbb{R}$ behalve als $cx + d = 0$ (noemer is 0) oftewel $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{d}{c}\}$
  - **bereik** $\mathbb{R}$ behalve $y = \frac{a}{c}$, oftewel $\mathbb{R}\backslash\{\frac{a}{c}\}$
- **puntsymmetrisch** ten opzichte van $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$, het snijpunt van de asymptoten

limiet, asympoot, perforatie en sprong

- **standaard limieten** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{c}{x^n} = 0$ en $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{c}{x^n} = 0$ (mits $n > 0$)
- **rechterlimiet** $\lim\limits_{x\downarrow a} f(x) =$
- **linkerlimiet** $\lim\limits_{x\uparrow a} f(x) =$
- **horizontale asymptoot** $y = a$ als $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ of $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$ bijvoorbeeld:

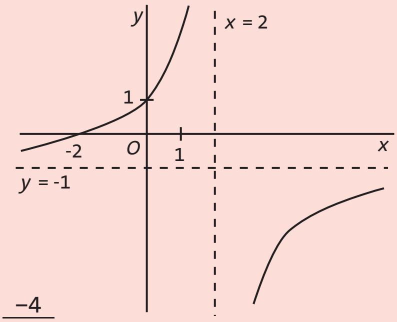
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2 + \dfrac{3}{x-4}\right) = 2 + 0 = 2$ dus horizontale asymptoot is $y = 2$

en $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2 + \dfrac{3}{x-4}\right) = 2 - 0 = 2$ dus horizontale asymptoot is $y = 2$



let op: vanwege de 2 + 0 nadert f de lijn y = 2 van boven,
vanwege de 2 – 0 nadert f de lijn y = 2 van onder.

2.27 **gebroken functie** $g(x) = a + \dfrac{b}{x+c}$



- *Geef het functievoorschrift van g.*
  horizontale asymptoot van g is
  $y = -1 = a$
  verticale asymptoot van g is $x = 2$
  dus $x + c = 0$ voor $x = 2$, dus $c = -2$
  punt van de grafiek van g is $(-2, 0)$ invullen
  $0 = -1 + \dfrac{b}{-2-2}$ dus $\dfrac{b}{-4} = 1$ dus $b = -4$ dus $g(x) = -1 + \dfrac{-4}{x-2}$

2.28 **horizontale asymptoten**

- *Bereken de horizontale asymptoten van de grafiek van* $k(x) = \dfrac{3x^3 - 2x + 5}{2x^3 + 5x}$
  horizontale asymptoot $y = 1\frac{1}{2}$ (aan linker- en rechterkant) want

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3 - 2x + 5}{2x^3 + 5x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{3x^3}{x^3} - \dfrac{2x}{x^3} + \dfrac{5}{x^3}}{\dfrac{2x^3}{x^3} + \dfrac{5x}{x^3}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3 - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{5}{x^3}}{2 + \dfrac{5}{x^2}}\right) = \frac{3 - 0 + 0}{2 + 0} = \frac{3}{2}$$

ook geldt $y = \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^3 - 2x + 5}{2x^3 + 5x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3 - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{5}{x^3}}{2 + \dfrac{5}{x^2}}\right) = \frac{3 - 0 - 0}{2 + 0} = \frac{3}{2}$

2.29 **horizontale asymptoten**

- *Bereken de horizontale asymptoten van de grafiek van* $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$

  horizontale asymptoot $y = 1$ want $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{e^x - 1} + \frac{1}{e^x - 1}\right) = 1 + 0 = 1$

  of deel boven en onder alles door ex: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{e^x}{e^x} + \dfrac{1}{e^x}}{\dfrac{e^x}{e^x} - \dfrac{1}{e^x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1 + \dfrac{1}{e^x}}{1 - \dfrac{1}{e^x}}\right) = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$

  horizontale asymptoot $y = -1$ want $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right) = \frac{0 + 1}{0 - 1} = \frac{1}{-1} = -1$

2.30 **rechter- en linkerlimiet**

- *Bereken* $\displaystyle\lim_{x\downarrow 5}\frac{x^2 - 25}{|x-5|}$ *en* $\displaystyle\lim_{x\uparrow 5}\frac{x^2 - 25}{|x-5|}$

  $|x - 5| = x - 5$ voor $x \geq 5$ en $|x - 5| = -(x - 5)$ voor $x < 5$ dus

$$\lim_{x\downarrow 5}\frac{x^2 - 25}{|x-5|} = \lim_{x\downarrow 5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)} = \lim_{x\downarrow 5}\frac{(x+5)}{1} = 10$$

$$\lim_{x\uparrow 5}\frac{x^2 - 25}{|x-5|} = \lim_{x\uparrow 5}\frac{(x-5)(x+5)}{-(x-5)} = \lim_{x\uparrow 5}\frac{(x+5)}{-1} = -10$$

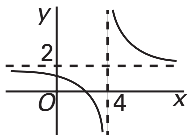
■ **verticale asymptoot** als noemer = 0 en teller ≠ 0;

- als $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x) = \infty$ of $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x) = -\infty$ dan verticale asymptoot $x = a$
- als $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x) = \infty$ of $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x) = -\infty$ dan verticale asymptoot $x = a$

voorbeeld

$\lim\limits_{x \downarrow 4}\left(2 + \dfrac{3}{x-4}\right) = 2 + \infty = \infty$ en $\lim\limits_{x \uparrow 4}\left(2 + \dfrac{3}{x-4}\right) = 2 - \infty = -\infty$ dus verticale asymptoot $x = 4$

let op: vanwege de $+\infty$ nadert f de lijn $x = 4$ rechtsboven, vanwege de $-\infty$ nadert f de lijn $x = 4$ linksonder.



■ **scheve asymptoot** macht van de teller is één hoger dan de macht van de noemer, dus als $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = ax + b$ of $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ax + b$

voorbeeld

$y = \dfrac{3x^2 - x - 2}{x - 2}$.

Herschrijven geeft $y = \dfrac{3x^2 - x - 2}{x-2} = \dfrac{3x(x-2) + 5x - 2}{x-2} = 3x + \dfrac{5(x-2)+8}{x-2} = 3x + 5 + \dfrac{8}{x-2}$

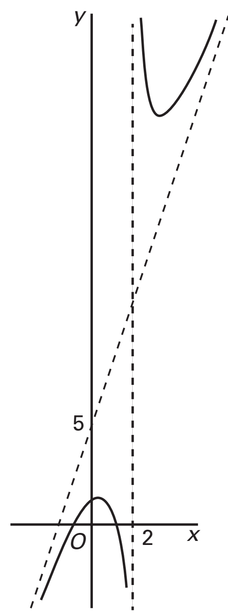
dan $\lim\limits_{x \to \infty}\left(3x + 5 + \dfrac{8}{x-2}\right) = 3x + 5 + 0 = 3x + 5$,

dus scheve asymptoot is $y = 3x + 5$

en ook $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(3x + 5 + \dfrac{8}{x-2}\right) = 3x + 5 - 0 = 3x + 5$,

dus scheve asymptoot is $y = 3x + 5$

let op: vanwege de $3x + 5 + 0$ nadert f de lijn $y = 3x + 5$ van boven,
vanwege de $3x + 5 - 0$ nadert f de lijn $y = 3x + 5$ van onder.



2.31 verticale asymptoten

- *Bereken de verticale asymptoten van* $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3x-4}$

verticale asymptoot $x = a$ als voor $x = a$ geldt: noemer = 0 en teller ≠ 0

noemer: $x^2 + 3x - 4 = 0$ dus als $x = -4$ en dan teller ≠ 0 en $x = 1$ dan teller ≠ 0

linkerlimiet $\lim\limits_{x\uparrow -4}\left(\dfrac{x^2}{x^2+3x-4}\right) = \lim\limits_{x\uparrow -4}\left(\dfrac{x^2}{(x+4)(x-1)}\right) = \lim\limits_{x\uparrow -4}\left(\dfrac{16}{-5\cdot(x+4)}\right) = \infty$ (ga na ∞) en

rechterlimiet $\lim\limits_{x\downarrow -4}\left(\dfrac{x^2}{x^2+3x-4}\right) = \lim\limits_{x\downarrow -4}\left(\dfrac{x^2}{(x+4)(x-1)}\right) = \lim\limits_{x\downarrow -4}\left(\dfrac{16}{-5\cdot(x+4)}\right) = -\infty$ (ga na $-\infty$)

linkerlimiet $\lim\limits_{x\uparrow 1}\left(\dfrac{x^2}{x^2+3x-4}\right) = \lim\limits_{x\uparrow 1}\left(\dfrac{x^2}{(x+4)(x-1)}\right) = \lim\limits_{x\uparrow 1}\left(\dfrac{1}{5\cdot(x-1)}\right) = -\infty$ (ga na $-\infty$)

linkerlimiet $\lim\limits_{x\downarrow 1}\left(\dfrac{x^2}{x^2+3x-4}\right) = \lim\limits_{x\downarrow 1}\left(\dfrac{x^2}{(x+4)(x-1)}\right) = \lim\limits_{x\downarrow 1}\left(\dfrac{1}{5\cdot(x-1)}\right) = \infty$ (ga na ∞)

dus verticale asymptoten zijn $x = -4$ en $x = 1$

2.32 verticale asymptoten

- *Bereken de verticale asymptoten van de grafiek van* $k(x) = \dfrac{3x^3-2x+5}{2x^3+5x}$

verticale asymptoot $x = a$ als voor $x = a$ geldt: noemer = 0 en teller ≠ 0

noemer: $2x^3 + 5x = 0$ dus $x \cdot (2x^2+5) = 0$ dus als $x = 0$ en dan teller ≠ 0 (teller is 5)

linkerlimiet $\lim\limits_{x\uparrow 0}\left(\dfrac{3x^3-2x+5}{2x^3+5x}\right) = \lim\limits_{x\uparrow 0}\left(\dfrac{0-0+5}{x\cdot(2x^2+5)}\right) = -\infty$ (ga na: waarom $-\infty$) en

rechterlimiet $\lim\limits_{x\downarrow 0}\left(\dfrac{0-0+5}{x\cdot(2x^2+5)}\right) = \infty$ (ga na: waarom $+\infty$)

dus verticale asymptoot is $x = 0$

let op: omdat de linkerlimiet gelijk is aan $-\infty$ nadert k de lijn $x = 0$ linksonder, omdat de rechterlimiet gelijk is aan $+\infty$ nadert k de lijn $x = 0$ rechtsboven

2.33 scheve asymptoten

- *Bereken de scheve asymptoot van de grafiek van* $g(x) = \dfrac{3x^2+5x+8}{x+2}$.

scheve asymptoot: macht van de teller is één hoger dan de macht van de noemer.

$$g(x) = \frac{3x(x+2)-x+8}{x+2} = \frac{3x(x+2)-(x+2)+10}{x+2} = \frac{3x(x+2)}{x+2} + \frac{-(x+2)}{x+2} + \frac{10}{x+2}$$

dus $g(x) = 3x - 1 + \dfrac{10}{x+2}$

dus $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x-1+\dfrac{10}{x+2}\right) = 3x-1+0 = 3x-1$ en $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x-1+\dfrac{10}{x+2}\right) = 3x-1-0 = 3x-1$

dus scheve asymptoot is $y = 3x - 1$

- **perforatie $P(a, c)$ in de grafiek** als noemer = 0 en teller = 0
  - als $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow a} f(x) = c$ en $f(a)$ bestaat niet, dan perforatie bij $x = a$

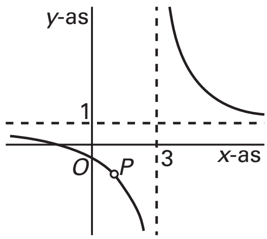
voorbeeld

$$y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-3)}$$

dan $\lim\limits_{x \uparrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x-3)} = \lim\limits_{x \uparrow 1} \frac{(x+2)}{(x-3)} = \frac{3}{-2}$

en $\lim\limits_{x \downarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x-3)} = \lim\limits_{x \downarrow 1} \frac{(x+2)}{(x-3)} = \frac{3}{-2}$

dus perforatie bij $x = 1$ en $y = -1\frac{1}{2}$ (zie punt P)



- **sprong S in de grafiek** als noemer = 0 en teller = 0
  - als $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x) = b$ en $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x) = c$ en $b \neq c$ en $f(a)$ bestaat niet, dan sprong bij $x = a$

voorbeeld

$$y = \frac{x^3 - 2x^2}{|x-2|}$$

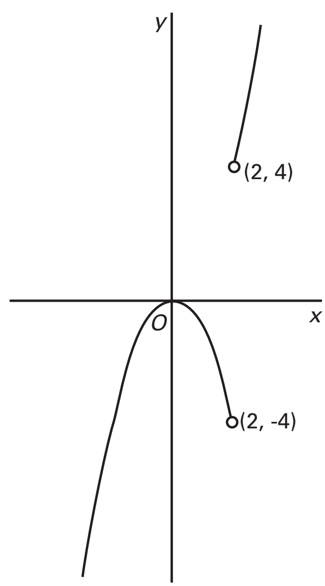
dan $\lim\limits_{x \uparrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{|x-2|} = \lim\limits_{x \uparrow 2} \frac{x^2(x-2)}{-(x-2)} = \lim\limits_{x \uparrow 2}(-x^2) = -4$

en $\lim\limits_{x \downarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{|x-2|} = \lim\limits_{x \downarrow 2} \frac{x^2(x-2)}{(x-2)} = \lim\limits_{x \downarrow 2}(x^2) = 4$

dus $\lim\limits_{x \uparrow 2} f(x) \neq \lim\limits_{x \downarrow 2} f(x)$ dus sprong bij $x = 2$

let op: vanaf links nadert y tot –4, vanaf rechts nadert y tot 4

ga na dat het linkerdeel van de grafiek hoort bij $y = x^2$ en het rechterdeel bij $y = -x^2$



2.34 perforatie en asymptoten

- *Bereken de asymptoten en de perforatie van de grafiek van* $f(x) = \dfrac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 - 9}$

horizontale asymptoot $y = 2$ want

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 - 9} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} - \frac{12}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{9}{x^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2 - \frac{2}{x} - \frac{12}{x^2}}{1 - \frac{9}{x^2}} = \frac{2 - 0 - 0}{1 - 0} = 2$$

verticale asymptoot als noemer = 0 en teller ≠ 0, perforatie als noemer = 0 en teller = 0

noemer = 0 dus $x^2 - 9 = 0$ dus $x = 3$ of $x = -3$ invullen in teller:

$x = -3$ geeft $2 \cdot (-3)^2 - 2 \cdot -3 - 12 = 12 \neq 0$ dus $x = -3$ is verticale asymptoot want

$$\lim_{x \uparrow -3} \frac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 - 9} = \lim_{x \uparrow -3} \frac{2(x^2 - x - 6)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \uparrow -3} \frac{2(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \uparrow -3} \frac{2(x+2)}{(x+3)} = \lim_{x \uparrow -3} \frac{-2}{(x+3)} = \infty$$

$$\lim_{x \downarrow -3} \frac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 - 9} = \lim_{x \downarrow -3} \frac{2(x^2 - x - 6)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \downarrow -3} \frac{2(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \downarrow -3} \frac{2(x+2)}{(x+3)} = \lim_{x \downarrow -3} \frac{-2}{(x+3)} = -\infty$$

$x = 3$ geeft $2 \cdot (3)^2 - 2 \cdot 3 - 12 = 0$ dus $x = 3$ geeft waarschijnlijk perforatie

$$\lim_{x \uparrow 3} \frac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 - 9} = \lim_{x \uparrow 3} \frac{2(x^2 - x - 6)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \uparrow 3} \frac{2(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \uparrow 3} \frac{2(x+2)}{(x+3)} = \frac{2 \cdot (3+2)}{(3+3)} = \frac{10}{6} = 1\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \downarrow 3} \frac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 - 9} = \lim_{x \downarrow 3} \frac{2(x^2 - x - 6)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \downarrow 3} \frac{2(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \downarrow 3} \frac{2(x+2)}{(x+3)} = \frac{2 \cdot (3+2)}{(3+3)} = \frac{10}{6} = 1\frac{2}{3}$$

$\displaystyle\lim_{x \uparrow 3} \frac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 - 9} = \lim_{x \downarrow 3} \frac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 - 9} = 1\frac{2}{3}$ dus perforatie $(3, 1\frac{2}{3})$

2.35 sprong

- *Bereken bij welke waarde van x de grafiek van* $y = \dfrac{|x-1|}{x^2 - x}$ *verspringt*

perforatie of sprong als noemer = 0 en teller = 0 dus bij $x = 1$

$$\lim_{x \uparrow 1} \frac{|x-1|}{x^2 - x} = \lim_{x \uparrow 1} \frac{-(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x \uparrow 1} \left(\frac{-1}{x}\right) = -1$$

en $\displaystyle\lim_{x \downarrow 1} \frac{|x-1|}{x^2 - x} = \lim_{x \downarrow 1} \frac{x-1}{x(x-1)} = \lim_{x \downarrow 1} \left(\frac{1}{x}\right) = 1$

dus $\lim_{x \uparrow 1} f(x) \neq \lim_{x \downarrow 1} f(x)$ dus sprong bij $x = 1$

let op: vanaf links nadert y tot –1, vanaf rechts tot 1. Ga na: verticale asymptoot x = 0

2.36 nulpunt en perforatie

- *Bereken het nulpunt en de perforatie van de grafiek van* $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6}$

$\dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6} = 0$ dus $x^2 - 4 = 0$ dus $x = 2$ of $x = -2$ en $x^2 + 5x + 6 \neq 0$

dus (2, 0) is nulpunt. Als $x = -2$ dan $x^2 + 5x + 6 = 0$

$\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6} = \lim_{x \to -2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+3)(x+2)} = \lim_{x \to -2} \frac{(x-2)}{(x+3)} = \frac{-4}{1} = -4$ dus perforatie (–2, –4)

gebroken vergelijking exact oplossen

verschillende vormen

- $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ geeft $f(x) = 0$ mits $g(x) \neq 0$
- **vergelijking is te herschrijven tot** $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{h(x)}{k(x)}$
  - **kruislings vermenigvuldigen** geeft $f(x) \cdot k(x) = g(x) \cdot h(x)$ mits $g(x) \neq 0$ én $k(x) \neq 0$

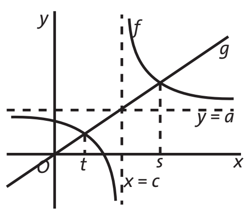
    of
  - **gelijknamig maken** $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{h(x)}{k(x)}$ wordt dan $\dfrac{f(x) \cdot k(x)}{g(x) \cdot k(x)} = \dfrac{h(x) \cdot g(x)}{k(x) \cdot g(x)}$ geeft

    $f(x) \cdot k(x) = h(x) \cdot g(x)$ mits $g(x) \neq 0$ én $k(x) \neq 0$
- **noemers zijn gelijk** $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{h(x)}{g(x)}$ geeft $f(x) = h(x)$ mits $g(x) \neq 0$
- **tellers zijn gelijk** $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x)}{h(x)}$ geeft $f(x) = 0$ of $g(x) = h(x)$ mits $g(x) \neq 0$ en $h(x) \neq 0$

ongelijkheden oplossen met gebroken functies

- **functies gelijkstellen** en vergelijking oplossen
  - **exact of algebraïsch** maak een berekening zoals boven
  - **bepaal, los op of bereken** gebruik grafische rekenmachine is toegestaan
- **maak een schets** met behulp van de plot
  - **stippel** in de schets de asymptoten
  - **let op het domein** van beide functies (noemer ≠ 0)
- **bepaal** met behulp van de schets op welke intervallen de ongelijkheid klopt

voorbeeld



$f(x) < g(x)$ voor $\langle t, c\rangle \cup \langle s, \rightarrow\rangle$

2.37 vergelijking

- *Bereken exact* $\dfrac{2}{(x+2)^3} = 5$

eerste methode

$\dfrac{2}{(x+2)^3} = \dfrac{5}{1}$ kruislings vermenigvuldigen geeft $5 \times (x+2)^3 = 2 \times 1$ dus $(x+2)^3 = \dfrac{2}{5}$

$x + 2 = \sqrt[3]{\dfrac{2}{5}}$ dus $x = -2 + \sqrt[3]{\dfrac{2}{5}}$

tweede methode

$\dfrac{2}{(x+2)^3} = \dfrac{5}{1}$ dus $(x+2)^{-3} = \dfrac{5}{2}$ dus $x + 2 = \left(\dfrac{5}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$ dus $x = -2 + \sqrt[3]{\dfrac{2}{5}}$

2.38 gebroken vergelijkingen

a *Bereken exact* $2 + \dfrac{3}{x-5} = \dfrac{5x-2}{3x+6} - 2$

b *Bereken exact* $\dfrac{x^2 - x}{x^2 + 5x + 7} = \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 6x + 9}$

c Gegeven $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ en $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$.

Bereken exact $f(x) < g(x)$

a gelijknamig maken $2 + \dfrac{3}{x-5} = \dfrac{5x-2}{3x+6} - 2$ dus $\dfrac{4}{1} + \dfrac{3}{x-5} = \dfrac{5x-2}{3x+6}$

$\dfrac{4 \cdot (x-5)}{1 \cdot (x-5)} + \dfrac{3}{x-5} = \dfrac{5x-2}{3x+6}$ dus $\dfrac{4x-17}{x-5} = \dfrac{5x-2}{3x+6}$ dus $\dfrac{(4x-17)\cdot(3x+6)}{(x-5)\cdot(3x+6)} = \dfrac{(x-5)\cdot(5x-2)}{(x-5)\cdot(3x+6)}$

$(4x-17)\cdot(3x+6) = (x-5)\cdot(5x-2)$ dus $12x^2 - 27x - 102 = 5x^2 - 27x + 10$ dus $7x^2 = 112$ dus $x^2 = 4$ dus $x = 2$ ($x = -2$ vervalt)

b tellers zijn gelijk dus $x^2 - x = 0$ of $x^2 + 5x + 7 = x^2 + 6x + 9$

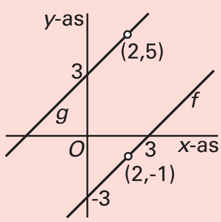
$x(x-1) = 0$ of $x = -2$,

$x = 0$ of $x = 1$ conclusie: $x = 0$ of $x = 1$ of $x = -2$

c noemers zijn gelijk dus $x^2 - 5x + 6 = x^2 + x - 6$

dus $-6x = -12$ dus $x = 2$ en noemer $\neq 0$, dus $x \neq 2$

dus geen snijpunten, zie figuur



$y_1 = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-2)}$ en $y_2 = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \dfrac{(x+3)(x-2)}{(x-2)}$

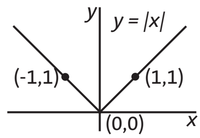
conclusie: $x \in \langle \leftarrow, 2\rangle \cup \langle 2, \rightarrow\rangle$

functies met absolute waarden

■ **$y = |f(x)|$** alle y-waarden worden positief genomen

bijvoorbeeld $|-2| = 2$, $|3| = 3$, $|0| = 0$

- ■ **$y = |x|$** is $y = x$ als $x \geq 0$ en $y = -x$ als $x < 0$
- ■ **$|f(x)|$** $= f(x)$ als $f(x) \geq 0$ en $|f(x)| = -f(x)$ als $f(x) < 0$



voorbeelden

gegeven zijn de functies $f(x) = |x|$, $g(x) = |x - 2|$ en $h(x) = |x| - 1$

- ■ door welke afbeeldingen ontstaan de grafieken van g en h uit de standaardfunctie f?

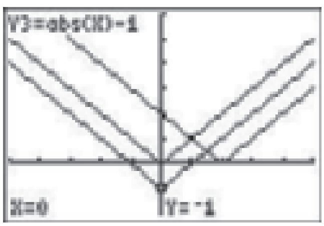
  $f(x) = |x|$ transleren over $(2, 0)$ geeft $g(x) = |x - 2|$

  $f(x) = |x|$ transleren over $(0, -1)$ geeft $h(x) = |x| - 1$
- ■ plot de grafieken en geef van de functies het domein, het bereik

  $f(x) = |x|$ domein = $\mathbb{R}$ en bereik = $[0,\rightarrow\rangle$

  $g(x) = |x - 2|$ domein = $\mathbb{R}$ en bereik = $[0,\rightarrow\rangle$

  $h(x) = |x| - 1$ domein = $\mathbb{R}$ en bereik = $[-1,\rightarrow\rangle$



oplossen vergelijking met absolute waarde

■ **isoleer de absoluutvorm** werk toe naar

- ■ $|f(x)| = g(x)$ los op $f(x) = g(x)$ en $f(x) = -g(x)$ en controleer de antwoorden
- ■ $|f(x)| = |g(x)|$ los op $f(x) = g(x)$ en $f(x) = -g(x)$

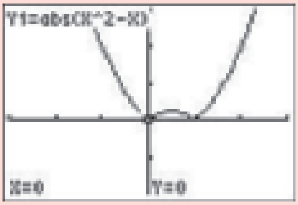
2.39 functie met absolute waarde

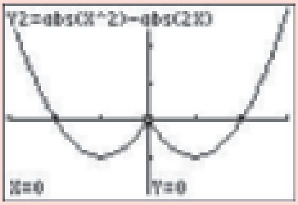
Gegeven zijn de functies

a $f(x) = |x^2 - x|$

b $g(x) = |x^2| - |2x|$

Plot de grafieken en geef van de functies het domein, *het bereik en maak een schets (onderzoek de functies eventueel met behulp van de grafische rekenmachine).*





a $f(x) = |x^2 - x|$

domein = $\mathbb{R}$ en bereik = $[0,\rightarrow\rangle$

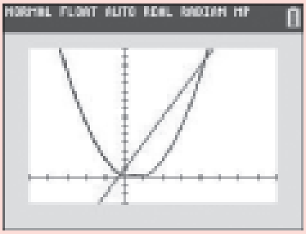
b $g(x) = |x^2| - |2x|$

domein = $\mathbb{R}$ en bereik = $[-1,\rightarrow\rangle$

2.40 oplossen vergelijking met absolute waarde

a *Bereken exact* $|x - x^2| = |3x + 1|$

b *Bereken exact* $|x - x^2| = 3x + 1$



a $x - x^2 = 3x + 1$ of $x - x^2 = -3x - 1$

$x^2 + 2x + 1 = 0$ of $x^2 - 4x - 1 = 0$ (*abc*-formule)

$(x + 1)^2 = 0$ of $a = 1$, $b = -4$ en $c = -1$

$x = -1$ of $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$

b $x - x^2 = 3x + 1$ of $x - x^2 = -3x - 1$

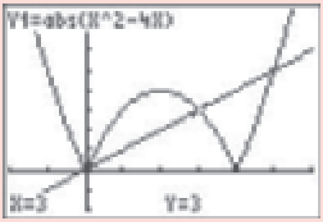
$x^2 + 2x + 1 = 0$ of $x^2 - 4x - 1 = 0$ zie verder bij a

$x = -1$ (vervalt, want $|-2| \neq -2$) of $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$ (voldoen beide, zie plot)

controle levert als antwoord $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$

2.41 ongelijkheid

- *Bereken exact* $|x^2 - 4x| \leq x$



$|x^2 - 4x| = x$ dus

$x^2 - 4x = x$ of $x^2 - 4x = -x$

$x^2 - 5x = 0$ of $x^2 - 3x = 0$

$x = 0$ of $x = 5$ of $x = 0$ of $x = 3$

plot de grafieken van $y_1 = |x^2 - 4x|$ en $y_2 = x$

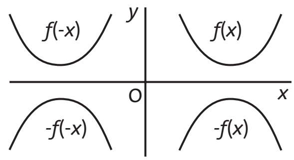
controleer de oplossingen in de plot

lees af voor welke x de grafiek van y_1 onder of op die van y_2 ligt

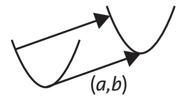
conclusie: $x = 0$ of $3 \leq x \leq 5$ of met de intervalnotatie $x \in \{0\} \cup [3, 5]$

afbeeldingen transformaties van $y = f(x)$

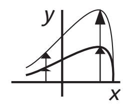
- **spiegeling**
  - **in de x-as** $y = -f(x)$
  - **in de y-as** $y = f(-x)$
  - **in de oorsprong** $y = -f(-x)$

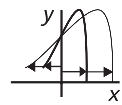


- **verschuiving** of translatie
  - **verschuiving met (a, b)** $y = f(x - a) + b$



- **vermenigvuldiging**
  - **met a** ten opzichte van de x-as geeft $y = a \cdot f(x)$
  - **met a** ten opzichte van de y-as geeft $y = f\left(\frac{1}{a} \cdot x\right)$
- **combinaties van afbeeldingen**





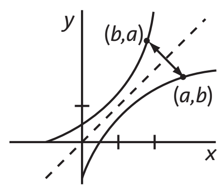
  - $\boldsymbol{y = a \cdot f(cx - b) + d}$ (c niet buiten haakjes)

    let op volgorde van afbeeldingen van $y = f(x)$

    - **translatie** over $(b, 0)$ dus $y = f(x - b)$
    - **vermenigvuldiging t.o.v. de y-as** met $\frac{1}{c}$ dus $y = f(cx - b)$
    - **vermenigvuldiging t.o.v. de x-as** met a dus $y = a \cdot f(cx - b)$
    - **translatie** over $(0, d)$ dus $y = a{\cdot}f(cx - b) + d$ of $y - d = a{\cdot}f(cx - b) + d$
  - $\boldsymbol{y = a \cdot f(c(x - b)) + d}$ (c buiten haakjes)

    let op volgorde van afbeeldingen van $y = f(x)$

    - **vermenigvuldiging t.o.v. de y-as** met $\frac{1}{c}$ dus $y = f(cx)$
    - **translatie** over $(b, 0)$ dus $y = f(c(x - b))$
    - **vermenigvuldiging t.o.v. de x-as** met a dus $y = a \cdot f(c(x - b))$
    - **translatie** over $(0, d)$ dus $y = a \cdot f(c(x - b)) + d$ of $y - d = a \cdot f(c(x - b))$
- **inverse functie** spiegeling in de lijn $y = x$



  - **(x, y) wordt afgebeeld op (y, x)**
  - **$f(a) = b$** dan $f^{\text{inv}}(b) = a$
  - **berekening** verwissel x en y en herschrijf tot $y =$
  - **domein en bereik** worden verwisseld
  - **bewijs** dat een f de inverse functie is van g

    twee manieren

    - **substitueer** $g(x)$ in $f(x)$; er moet dan gelden $f(g(x)) = x$ want $f(f^{\text{inv}}(x)) = x$

      of

    - **verwissel** de x en y in $g(x)$, herleid tot $y = ...$ en laat zien dat dit de formule van $f(x)$ oplevert
  - **geen inverse** niet bij alle functies bestaat de inverse functie

    voorbeeld

    $f(x) = x^2$ dus $y = x^2$. Spiegelen we de parabool in de lijn $y = x$ dan ontstaat een liggende parabool en dit is geen functie

    verwissel x en y geeft $x = y^2$

    herschrijven tot $y =$ geeft $y^2 = x$ dus $y = \sqrt{x}$ of $y = -\sqrt{x}$

2.42 inverse functie en afbeeldingen

a Bepaal de inverse functie van $y = 3 + \dfrac{2}{5x-3}$

b Door welke achtereenvolgende afbeeldingen ontstaat de grafiek van $y = 3 + \dfrac{2}{5x-3}$ *uit de grafiek van* $y = \dfrac{1}{x}$

a x en y verwisselen: $x = 3 + \dfrac{2}{5y-3}$

tot $y = \ldots$ herschrijven: $x - 3 = \dfrac{2}{5y-3}$ dus $5y - 3 = \dfrac{2}{x-3}$

$5y = 3 + \dfrac{2}{x-3}$ dus $y = \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5x-15}$

b $y = \dfrac{1}{x} \xrightarrow{T(3,0)} y = \dfrac{1}{x-3} \xrightarrow{\text{vermenigvuldiging t.o.v. de } y\text{-as met } \frac{1}{5}} y = \dfrac{1}{5x-3}$

$\xrightarrow{\text{vermenigvuldiging t.ov. de } x\text{-as met 2}} y = \dfrac{2}{5x-3} \xrightarrow{T(0,3)} y = 3 + \dfrac{2}{5x-3}$

2.43 inverse functie en afbeeldingen

a Bepaal de inverse functie van $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$

b Door welke achtereenvolgende afbeeldingen ontstaat de grafiek van $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$ *uit de grafiek van* $y = \dfrac{1}{x}$

a x en y verwisselen: $x = \dfrac{2y-1}{y+3}$

tot $y = \ldots$ herschrijven: $x \cdot (y+3) = 2y - 1$ dus $xy + 3x = 2y - 1$

$xy - 2y = -3x - 1$ dus $y \cdot (x-2) = -3x - 1$ dus $y = \dfrac{-3x-1}{x-2}$

b herschrijf f eerst: $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3} = \dfrac{2(x+3)-7}{x+3} = 2 + \dfrac{-7}{x+3}$

$y = \dfrac{1}{x} \xrightarrow{T(-3,0)} y = \dfrac{1}{x+3} \xrightarrow{\text{vermenigvuldiging t.o.v. de } x\text{-as met } -7} y = \dfrac{-7}{x+3}$

$\xrightarrow{T(0,\ 2)} y = 2 + \dfrac{-7}{x+3}$

2.44 inverse functie

a Bepaal de inverse functie van $y = \sqrt{x-4} + 5$

b Laat zien dat $g(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$ *de inverse functie is van* $f(x) = 2x^3 + 1$

a domein = $[4, \rightarrow\rangle$ en bereik = $[5, \rightarrow\rangle$

x en y verwisselen: $x = \sqrt{y-4} + 5$

tot $y = \ldots$ herschrijven: $x - 5 = \sqrt{y-4}$ dus

$(x-5)^2 = y - 4$ dus $(x-5)^2 + 4 = y$ dus $y = (x-5)^2 + 4$ met domein = $[5, \rightarrow\rangle$

b te bewijzen $f(g(x)) = x$

$f(x) = 2(g(x))^3 + 1 = 2 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}\right)^3 + 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) + 1 = x - 1 + 1 = x$

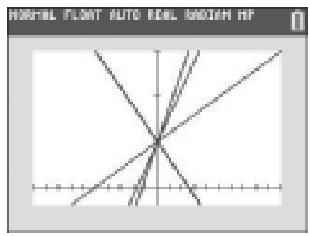
symmetrie van $y = f(x)$ bewijzen

- **lijnsymmetrie** ten opzichte van de y-as bewijs $f(x) = f(-x)$
  - **vervang x door $-x$.** Werk om tot het originele functievoorschrift $f(x)$
- **lijnsymmetrie** ten opzichte van $x = a$
  - **transleer over $(-a, 0)$** vervang elke x in de functie door $x + a$
  - **$g(x) = g(-x)$** bewijzen in de nieuwe functie $g(x) = f(x + a)$, zie hierboven
- **puntsymmetrie** ten opzichte van (0, 0) bewijs $f(x) = -f(-x)$
- **puntsymmetrie** ten opzichte van (a, b)
  - **transleer over $(-a, -b)$** $f(x)$ wordt $f(x + a) - b$
  - **$g(x) = -g(-x)$** bewijzen in de nieuwe functie $g(x) = f(x + a) - b$

functies met een parameter zie voor de grafische rekenmachine H8 en H9

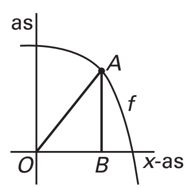
- **parameter** is een letter, bijvoorbeeld p of a, waarvoor verschillende getallen ingevuld mogen worden; per getal ontstaat één grafiek. Door verschillende waarden van de parameter te nemen, ontstaat een familie van functies en een bundel van grafieken.

  voorbeelden
  - **$f_a(x) = ax + 5$** verzameling lijnen door (0, 5) bundel grafieken tekenen voor $a = -2, 1, 3$ en 4 met GR: $y_1 = \{-2, 1, 3, 4\}x + 5$
  - **$f_p(x) = px^2 + 5$** verzameling parabolen met als top (0, 5)



formules met meerdere variabelen

- **analyseren van de formule**
  - **variabelen** kies twee variabelen (letters); de variabelen komen op de assen van de grafiek; onderzoek de bijbehorende grafiek, bijvoorbeeld met behulp van de grafische rekenmachine;
  - **parameters** beschouw de andere variabelen als parameters waar steeds andere getallen voor ingevuld kunnen worden
- **manieren van opschrijven**
  - **$v = ...$** bijvoorbeeld: druk v uit in p of schrijf v als functie van p;
  - **v wordt uitgezet tegen p** v op verticale as en p op horizontale as
- **formule maken bij een oppervlakte**
  - **oppervlakte driehoek OAB** bijvoorbeeld A is een punt op de grafiek van f en B is de projectie van A op de x-as dan oppervlakte $= \frac{1}{2} \cdot$ basis $\cdot$ hoogte $= \frac{1}{2} \cdot x \cdot f(x)$



afstanden tussen grafieken

- **verticale afstand d** tussen grafieken f en g is $d = |f(x) - g(x)|$
- **horizontale afstand h** tussen grafieken f en g is h als geldt $f(x) = g(x + h)$

2.45 symmetrie

- *Bewijs dat de grafiek van* $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 2x}$ *symmetrisch is ten opzichte van de lijn* $x = 1$

grafiek verschuiven over (–1, 0) en dan symmetrie in $x = 0$ bewijzen

$T(-1{,}0)$ dus $f(x+1) = g(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2 - 2(x+1)} = \dfrac{3}{x^2 - 1}$

$g(x) = g(-x)$ want $\dfrac{3}{x^2 - 1} = \dfrac{3}{(-x)^2 - 1}$ dus grafiek van g is symmetrisch t.o.v. de y-as

conclusie: grafiek van f is symmetrisch t.o.v. de lijn $x = 1$

2.46 symmetrie

- *Bewijs dat de grafiek van* $f(x) = \dfrac{x-3}{2-x}$ *symmetrisch is ten opzichte van (2, –1)*

grafiek verschuiven over (–2, 1) en dan symmetrie in (0, 0) bewijzen

$T(-2{,}1)$ dus $f(x+2) + 1 = \dfrac{(x+2) - 3}{2 - (x+2)} + 1 = \dfrac{x-1}{-x} + 1 = \dfrac{1}{x} = g(x)$

$g(x) = -g(-x)$ want $\dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{-x}$ dus grafiek van g is symmetrisch t.o.v. (0, 0)

conclusie: grafiek van f is symmetrisch t.o.v. (2, –1)

2.47 verticale afstand

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = (x+1)^2$

- *Bereken exact voor welke waarden van x de verticale afstand tussen de twee grafieken van f en g gelijk is aan 2*

er geldt dus $|f(x) - g(x)| = 2$

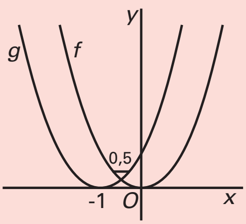
dus $|x^2 - (x+1)^2| = 2$ dus $|x^2 - (x^2 + 2x + 1)| = 2$ dus $|-2x - 1| = 2$

dus $-2x - 1 = 2$ of $-2x - 1 = -2$ dus $x = -1{,}5$ of $x = 0{,}5$

2.48 horizontale afstand

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = (x+1)^2$

- *Bereken voor welke waarden van x op de grafiek van f de horizontale afstand tussen de twee grafieken van f en g gelijk is aan 0,5*



er geldt dus $f(x) = g(x + 0{,}5)$ of $f(x) = g(x - 0{,}5)$

$f(x) = g(x + 0{,}5)$ dus $x^2 = (x + 0{,}5 + 1)^2$ dus

$x^2 = x^2 + 3x + 2{,}25$ dus $x = -0{,}75$

$f(x) = g(x - 0{,}5)$ dus $x^2 = (x - 0{,}5 + 1)^2$ dus

$x^2 = x^2 + x + 0{,}25$ dus $x = -0{,}25$

conclusie: het horizontale verschil tussen de twee grafieken van f en g is gelijk aan 0,5 voor $x = -0{,}25$ of $x = -0{,}75$

ga na: $f(-0{,}75) = (-0{,}75)^2 = 0{,}5625$ en $g(-0{,}25) = (-0{,}25 + 1)^2 = 0{,}75^2 = 0{,}5625$ én

$f(-0{,}25) = (-0{,}25)^2 = 0{,}0625$ en $g(-0{,}75) = (-0{,}75 + 1)^2 = 0{,}25^2 = 0{,}0625$

hoofdzaken

- **lineaire functies** $f(x) = ax + b$ *en* $g(x) = px + q$
- **rc** $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$
- **richtingshoek** α berekenen met $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{overstaande zijde}}{\text{aanliggende zijde}} = \text{rc}$
  - $\alpha = invtan(r)$ *of* $tan^{-1}(r)$
- ***f // g*** als $a = p$ (richtingscoëfficiënten gelijk)
- ***f* ⊥ *g*** als $a \cdot p = -1$ (product van de richtingscoëfficiënten is –1)
- $\boldsymbol{y = d}$ horizontale lijn
- $\boldsymbol{x = c}$ verticale lijn
- $\boldsymbol{y = ax}$ evenredig verband

kwadratische functies, parabool $f(x) = ax^2 + bx + c$

  - $y = a(x-p)^2 + q$ topvergelijking
  - $y = a(x-b)(x-c)$ nulpuntenvergelijking
- **vergelijking exact oplossen** herleiden op 0 en ontbinden in factoren,
  - kwadraatafsplitsen of *abc*-formule $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

machtsfuncties $f(x) = x^n$ en $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$

- **vergelijking $f(x) = a$ exact oplossen**

  het aantal oplossingen hangt af van a en de exponent. Maak altijd eerst een plot ter controle. Zie voor details het hoofdstuk bij hogere graads functies en functies met een gebroken exponent.
  - $x^n = a$ levert misschien$x = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ of $x = -a^{\frac{1}{n}} = -\sqrt[n]{a}$
  - $x^{\frac{p}{q}} = a$ levert misschien $x = a^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{a^q}$
- **controleer** (aantal) antwoorden met een plot
- **ongelijkheden** houd rekening met randpunten en asymptoten

hogere machtsfuncties $f(x) = ax^n + b^{n-1} + ... + c$

- **vergelijking exact oplossen:** herleiden op 0 en grootste macht van x buiten haakjes halen, verder ontbinden in factoren of herken een bijzondere vorm
- **controleer** (aantal) antwoorden met een plot

wortelfuncties $f(x) = a + b\sqrt{c \cdot x + d}$

- **halve liggende parabool met randpunt** $\left(-\frac{d}{c}, a\right)$
- **vergelijking exact oplossen:** wortel isoleren, links en rechts kwadrateren, antwoord altijd controleren
- **ongelijkheden:** houd rekening met randpunten en het domein

2.49 vergelijkingen gemengd

a *Bereken exact* $\frac{x^2 - 6x + 5}{\sqrt{x - 2}} = 0$

b *Bereken exact* $\frac{2x}{\sqrt{x + 5}} = |x|$

a let op domein $\frac{x^2 - 6x + 5}{\sqrt{x - 2}}$ wortel en breuk, dus $x > 2$

$x^2 - 6x + 5 = 0$ dus $x = 5$ ($x = 1$ vervalt)

b let op domein $\frac{2x}{\sqrt{x + 5}}$ wortel en breuk, dus $x > -5$

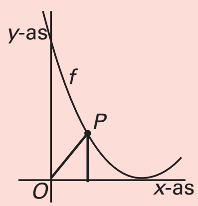
$2x = -x \cdot \sqrt{x + 5}$ of $2x = x \cdot \sqrt{x + 5}$
$4x^2 = x^2 \cdot (x + 5) = x^3 + 5x^2$
$x^3 + x^2 = 0$
$x^2(x + 1) = 0$
$x = 0$ of $x = -1$
controle levert als antwoord $x = 0$

2.50 denkactiviteit: oppervlakte driehoek

Gegeven is de functie $f(x) = (x - 6)^2$
Punt P beweegt zich tussen $x = 0$ en $x = 6$ over de grafiek van f.
De verticale lijn door P, de x-as en de lijn door O en P vormen een driehoek.

- *Bereken de maximale oppervlakte van de driehoek.*

Analyse (onderstreep, maak een schets, bepaal de deelvragen):
Deelvragen:
P ligt op de grafiek van f. Geef de coördinaten van P.
Maak een formule voor de oppervlakte van de driehoek.
Gebruik de grafische rekenmachine om de oplossing te vinden



Wat noteer je / oplossing:

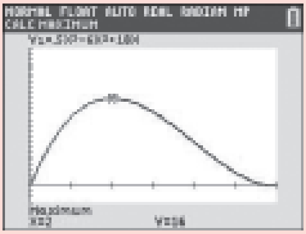
$P = (x,\ (x - 6)^2)$

opp. $= \frac{1}{2} \cdot x \cdot (x - 6)^2 = \frac{1}{2}x^3 - 6x^2 + 18x$ met $0 < x < 6\frac{1}{2}$

plot $y_1 = \frac{1}{2}x^3 - 6x^2 + 18x$ met WINDOW $[0, 6] \times [0, 25]$

CALC Max geeft $x = 2$ en $y = 16$

conclusie: de maximale oppervlakte is 16 voor $x = 2$



hoofdzaken vervolg

gebroken functies $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ of $f(x) = a + \dfrac{b}{x-c}$

- **twee hyperbooltakken**
- **asymptoten** verticaal als noemer = 0 en horizontaal bepaal $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
- **vergelijking** herleiden op het quotiënt $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$ en kruisproduct $A \times D = B \times C$
- **controleer** (aantal) antwoorden met een plot
- **ongelijkheden** houd rekening met asymptoten

functies met absolute waarden $y = |f(x)|$ alle y-waarden worden positief genomen

- $|f(x)| = f(x)$ als $f(x) \geq 0$ en $|f(x)| = -f(x)$ als $f(x) < 0$
- **vergelijking** herleiden op $|f(x)| = g(x)$ of $|f(x)| = |g(x)|$

afbeeldingen transformaties van $y = f(x)$

- **verschuiving** of translatie met (a, b) geeft $y = f(x-a) + b$
- **vermenigvuldiging** met a ten opzichte van
  - ***x*-as** geeft $y = a \cdot f(x)$
  - ***y*-as** geeft $y = f\left(\dfrac{1}{a} \cdot x\right)$
- **inverse functie** spiegeling in de lijn $y = x$; *als* $f(a) = b$ dan geldt $f^{\text{inv}}(b) = a$
  - **berekening** verwissel x en y en herschrijf tot $y = ...$

lijnsymmetrie ten opzichte van de y-as bewijs $f(x) = f(-x)$

puntsymmetrie ten opzichte van $(0, 0)$ bewijs $f(x) = -f(-x)$

parameter *a* in $y = f_a(x)$ geeft een bundel van grafieken.

verticale afstand *d* tussen grafieken f en g is $d = |f(x) - g(x)|$

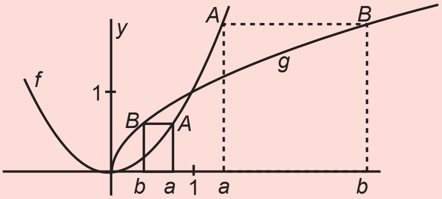
horizontale afstand *h* tussen grafieken f en g is h als geldt $f(x) = g(x+h)$

2.51 denkactiviteit oppervlakte rechthoek

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = \sqrt{x}$. Op deze grafieken liggen op dezelfde hoogte de punten $A(a, f(a))$ en $B(b, g(b))$. De verticale lijnen door A en door B, de x-as en de horizontale lijn door A en B vormen samen een rechthoek.

- *Druk de oppervlakte van deze rechthoek uit in a.*

Analyse (onderstreep, maak een schets, bepaal de deelvragen):
Oppervlakte rechthoek dus lengte maal breedte dus bereken breedte d en hoogte $f(a)$
Op dezelfde hoogte dus $f(a) = f(b)$ met d de afstand tussen A en B
Druk de oppervlakte uit in a



Deelvragen:
Druk de punten A en B uit in a
Bereken horizontale afstand $d = AB$
Geef een formule voor de rechthoek
Wat noteer je / oplossing:

$A = (a, a^2)$ en $b = (b, \sqrt{b})$ en $d = AB$

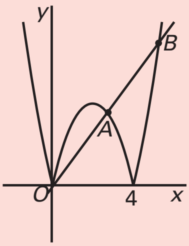
voor de linker rechthoek geldt: $a^2 = \sqrt{b} = \sqrt{a-d}$ dus $a^4 = a - d$ dus $d = a - a^4$

voor de rechter rechthoek geldt $a^2 = \sqrt{b} = \sqrt{a+d}$ dus $a^4 = a + d$ dus $d = -a + a^4$

conclusie: oppervlakte opp. $= |a - a^4| \cdot a^2$

2.52 denkactiviteit afstand

Gegeven is $f(x) = |x^2 - 4x|$ en de lijn $y = px$
Deze lijn snijdt de grafiek van f in de punten A en B (en O) waarbij B twee keer zo ver van O af ligt als A.
Bereken de waarde van p.
Analyse (onderstreep, maak een schets, bepaal de deelvragen):
Genoemd worden de punten $A(a, b)$ en $B(c, d)$
B ligt twee keer zo ver van O af als A, dus $B(2a, d)$
Met behulp van f en y zijn c en d uit te drukken in a
Dus twee onbekenden a en p, dus stelsel van twee vergelijkingen ontwikkelen en oplossen.
Deelvragen:
Druk c en d uit in a en ontwikkel het stelsel van twee vergelijkingen.
Wat noteer je / oplossing:
$A(a, b)$ en punt $B(c, d)$ zijn te schrijven als $A(a, pa)$ en $B(2a, 2pa)$ want op de lijn $y = px$
A ligt op $f(x) = |x^2 - 4x| = -x^2 + 4x$ (zie schets) dus voor A geldt $-a^2 + 4a = pa$ dus
$p = -a + 4$
B ligt op $f(x) = |x^2 - 4x| = x^2 - 4x$ dus voor B geldt $(2a)^2 - 4 \cdot 2a =$
$2pa$ dus $4a^2 - 8a = 2pa$ dus
$2a^2 - 4a = pa$ dus $p = 2a - 4$
$p = 2a - 4$ en $p = -a + 4$ dus $2a - 4 = -a + 4$ dus $a = \frac{8}{3}$ en



conclusie: $p = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$

conclusie: $p = \frac{4}{3}$

denkactiviteiten

- bij ingewikkelde opgaven spelen meerdere stappen een rol.
- ga niet meteen rekenen maar analyseer het probleem met een aantal stappen (zie hieronder).

stappenplan bij het oplossen van een complexe opgave

verdeel de oplossing van het probleem in de volgende stappen

- **analyse**
  - **lees** de hele opgave door
  - **noteer of onderstreep** de gegevens die van belang zijn
  - **maak een schets** een analyse figuur
    - zet gegevens uit de opgave in de schets
    - vul de schets aan
    - gebruik getallenvoorbeelden om de situatie duidelijk te krijgen
  - **deelvragen stellen en beantwoorden** welke onderliggende deelvragen kun je stellen bij de eindvraag en in welke volgorde los je dit op
  - **bedenk welk wiskundige oplossingen passen** bij de vraag (zie ook de hoofdzaken)

    denk aan
    - schets
    - vergelijking opstellen en oplossen
    - formule herschrijven naar andere vorm
    - waarde van parameter uitrekenen of waarde van x uitrekenen
    - welke rekenregels passen bij het probleem, welke regels kun je gebruiken?
    - abstraheer van getallenvoorbeeld naar algemene oplossing met variabele
    - rekening houden met een combinatie van vergelijkingen/grafieken

      houd bij de theorie van dit hoofdstuk speciaal rekening met
      - verband tussen twee rc's bij loodrechte of evenwijdige lijnen
      - domein, randpunten, verticale, horizontale en schuine asymptoten
      - het goed wegwerken van de haakjes
      - goed rekenen met minnen en plussen
      - aantal antwoorden (zijn er meer antwoorden, voldoen alle antwoorden)
      - limieten
- **de oplossing** wat noteer je
  - **schets/tekening**
  - **oplossing met alle stappen**
  - **controle en conclusie** als je het antwoord hebt, lees nogmaals de vraag, controleer
    - heb je de tussenberekeningen goed opgeschreven?
    - heb je antwoord gegeven op de vraag?
    - is het antwoord logisch?
    - klopt de afronding?

2.53 denkactiviteit lijnstuk en parabool

Gegeven is de functie $f(x) = 8 - \frac{1}{2}x^2$ met domein [0, 4].

$P(0, 8)$ en $Q(4, 0)$ zijn de randpunten van de grafiek en R is het punt $(a, 0)$ met $a > 4$

PR snijdt de grafiek van f in het midden van lijnstuk PR.

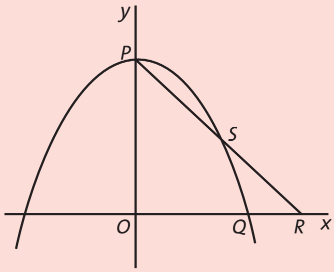
- *Bereken exact de waarde van a.*

Analyse (onderstreep, maak een schets, bepaal de deelvragen):

Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.

Het midden van $P(0, 8)$ en $R(a, 0)$ is het snijpunt S.

Voor het snijpunt S moet gelden: de y-coördinaat is 4



Wat noteer je / oplossing:

Voor snijpunt geldt: $4 = 8 - \frac{1}{2}x^2$ dus $\frac{1}{2}x^2 = 4$ dus

$x^2 = 8$ dus $x_{snijpunt} = \sqrt{8}$

conclusie: $a = 2\sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{4 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$

2.54 denkactiviteit horizontaal verbindingslijnstuk

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = \frac{1}{x^2}$ met $x > 0$.

Voor $b > 1$ snijdt de lijn $y = b$ de grafieken van g en f. Voor een zekere waarde van b is de lengte van het verbindingslijnstuk tussen de twee snijpunten maximaal.

- *Bereken exact de waarde van b.*

Analyse (onderstreep, maak een schets, bepaal de deelvragen):

Bereken exact, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan.

De lengte van het lijnstuk is $x_g - x_f$. Druk de lengte uit in b.

Maximum, dus er moet gebruik gemaakt worden van differentiëren.

Wat noteer je / oplossing:

$y = b$. dus de lengte van het lijnstuk is $x_g - x_f = \frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{b} = b^{-\frac{1}{2}} - b^{-1}$

Maximum, dus afgeleide = 0

Afgeleide is $-\frac{1}{2}b^{-\frac{3}{2}} + b^{-2} = -\frac{1}{2b\sqrt{b}} + \frac{1}{b^2}$

Dus opgelost moet worden: $-\frac{1}{2b\sqrt{b}} + \frac{1}{b^2} = 0$ dus $\frac{1}{2b\sqrt{b}} = \frac{1}{b^2}$

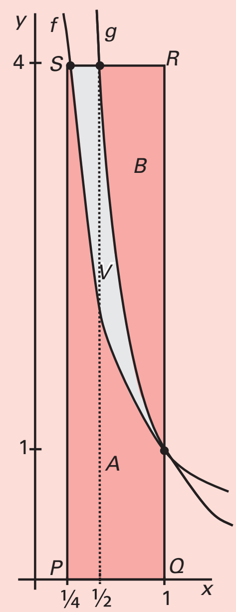
kruislings vermenigvuldigen levert $b^2 = 2b\sqrt{b}$ dus $b^2 - 2b^{1\frac{1}{2}} = 0$

dus $b^{1\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}} - 2) = 0$ dus $b = 4$ ($b = 0$ vervalt)

De lengte van het horizontale lijnstuk is dan

$\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

conclusie: de maximale lengte is $\frac{1}{4}$



3 Exponentiële en logaritmische functies

rekenregels voor machten

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$
- $a^b : a^c = \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$
- $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$
- $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$
- **negatieve exponenten** $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$
- **gebroken exponenten** $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a^1} = \sqrt{a}$ de twee in het wortelteken wordt weggelaten
- $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$ spreek uit de q-de machtswortel uit a
- $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ spreek uit de q-de machtswortel uit a tot de p-de
- $a = 10^{\log(a)}$ dus bijvoorbeeld 7 is te schrijven als $7 = 10^{\log(7)} \approx 10^{0,845}$
- $a = e^{\ln(a)}$

wetenschappelijke notatie voor een getal *g* heeft de vorm:

- $a \cdot 10^n$ met $1 < a < 10$ en n een geheel getal

  voorbeeld

  $0,00001234 = 1,234 \cdot 10^{-5}$ en $123450000 = 1,2345 \cdot 10^8$

e het getal van Euler

- **e = 2,718281...**
- $e = \lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

exponentiële vergelijking algebraïsch oplossen

werk bijvoorbeeld toe naar één van onderstaande mogelijkheden

- **schrijf met dezelfde grondtallen** tot $a^A = a^B$ of $e^A = e^B$ dan geldt $A = B$
- $a^x = c$
  - $c > 0$ twee mogelijke manieren van oplossen
    - $x = {}^a\log(c) = \frac{\log(c)}{\log(a)} = \frac{\ln(c)}{\ln(a)}$
    - **benaderen** met behulp van de grafische rekenmachine (zie H8 en H9)
  - $c \leq 0$ de vergelijking heeft geen oplossing
- $e^x = c$ dus $x = \ln(c)$ (mits $c > 0$)
- **stel bijvoorbeeld $e^x = p$ of $a^x = p$** om de vergelijking te vereenvoudigen

  voorbeeld

  $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ neem $p = e^x$ dan geldt $e^{2x} = (e^x)^2 = p^2$ en dan is de vergelijking te vereenvoudigen tot $p^2 - 3p - 4 = 0$ dus $(p - 4)(p + 1) = 0$ dus $p = 4$ of $p = -1$ dus $e^x = 4$ dus $x = \ln 4$ (en $e^x = -1$ heeft geen oplossing)

3.1 veranderen van grondtal

$f(x) = 2 \cdot 5^{2x+2}$

a Herschrijf f(x) tot de vorm $b \cdot g^x$

b Herschrijf f(x) als macht van e

a $f(x) = 2 \cdot 5^{2x+2} = 2 \cdot 5^{2x} \cdot 5^2 = 2 \cdot 25^x \cdot 25 = 50 \cdot 25^x$

b $f(x) = 50 \cdot 25^x = e^{\ln(50)} \cdot \left(e^{\ln(25)}\right)^x = e^{\ln(50)} \cdot e^{x\ln(25)} = e^{\ln(50)+x\ln(25)} \approx e^{3,9\,+\,3,2 \cdot x}$

3.2 vergelijking

Los algebraïsch op

a $3 \cdot 9^{2x+5} = 27$

b $3 \cdot 5^{2x-4} = 12$

c $(0,1)^x = 100^{x+1}$

d $e^{2x} - 4e^x = 45$

e $e^{6x} - 2e^{3x} + 1 = 0$

f $4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3^{x+1} = 8$

g $3x \cdot e^x - 2x = 0$

h $\frac{e^{2x+1}}{e^x} = 5$

i $4^x + 3 \cdot 2^{x+1} = 5$

j $\sqrt{e^x} = 2$

a $3 \cdot (3^2)^{2x+5} = 3^3$

$3^1 \cdot 3^{4x+10} = 3^3$ dus $3^{4x+11} = 3^3$ dus $4x + 11 = 3$ dus $x = -2$

b $5^{2x-4} = 4$ dus $2x - 4 = {}^5\log(4)$ dus $x = 0,5 \cdot {}^5\log(4) + 2 \approx 2,43$

(zie H8 en H9 voor berekening van ${}^5\log(4)$)

c $\left(\frac{1}{10}\right)^x = (10^2)^{x+1}$ dus $(10^{-1})^x = (10^2)^{x+1}$ dus $10^{-x} = 10^{2x+2}$ dus $-x = 2x + 2$ dus $x = -\frac{2}{3}$

d $e^{2x} - 4e^x - 45 = 0$ stel $e^x = p$

$p^2 - 4p - 45 = 0$ dus $(p+5)(p-9) = 0$ dus $p = -5$ of $p = 9$

$e^x = -5$ (heeft geen oplossing) of $e^x = 9$ dus $x = \ln(9)$

e $e^{6x} - 2e^{3x} + 1 = 0$ stel $e^{3x} = p$

$p^2 - 2p + 1 = 0$ dus $(p-1)^2 = 0$ dus $p = 1$ dus $e^{3x} = 1$ dus $3x = 0$ dus $x = 0$

f $4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3^{x+1} = 8$ dus $4 \cdot \frac{1}{3^x} + 3^x \cdot 3^1 = 8$ dus $4 \cdot \frac{1}{3^x} + 3 \cdot 3^x = 8$ stel $3^x = p$

$\frac{4}{p} + 3 \cdot p = 8$ dus $\frac{4}{p} = 8 - 3 \cdot p$ kruislings vermenigvuldigen: $4 = 8p - 3p^2$ dus $3p^2 - 8p + 4 = 0$

$p = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3}$ dus $p = 2$ of $p = \frac{2}{3}$ dus $3^x = 2$ of $3^x = \frac{2}{3}$ dus

$x = {}^3\log(2)$ of $x = {}^3\log\left(\frac{2}{3}\right)$

g $3x \cdot e^x - 2x = 0$ dus $x(3e^x - 2) = 0$ dus $x = 0$ of $e^x = \frac{2}{3}$ dus $x = 0$ of $x = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

h $\frac{e^{2x+1}}{e^x} = 5$ dus $e^{x+1} = 5$ dus $x + 1 = \ln(5)$ dus $x = -1 + \ln(5)$

i $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} = -5$ dus $(2^x)^2 - 3 \cdot 2^1 \cdot 2^x = -5$ dus $(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 5 = 0$ stel $2^x = p$

$p^2 - 6p + 5 = 0$ dus $(p-1)(p-5) = 0$ dus $p = 1$ of $p = 5$ dus $2^x = 1$ of $2^x = 5$ dus

$x = 0$ of $x = {}^2\log(5)$

j $\sqrt{e^x} = 2$ kwadrateren geeft $e^x = 4$ dus $x = \ln(4)$

exponentiële functies standaardvorm

- $\boldsymbol{y = g^x}$ standaardfunctie $g > 0$

  eigenschappen
  - $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$ domein is $\mathbb{R}$
  - $\boldsymbol{y > 0}$ bereik is $\langle 0, \rightarrow \rangle$
  - $\boldsymbol{g > 1}$ de grafiek stijgt
  - $\boldsymbol{0 < g < 1}$ de grafiek daalt
  - $\boldsymbol{y = 0}$ horizontale asymptoot
  - **als** $\boldsymbol{g > 1}$ **dan** $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} (g^x) = 0}$
  - **als** $\boldsymbol{0 < g < 1}$ **dan** $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to \infty} (g^x) = 0}$

- $\boldsymbol{y = \mathrm{e}^x}$ standaardfunctie met grondtal e

exponentiële functies algemene vorm

- $\boldsymbol{y = a \cdot \mathrm{e}^{d(x-b)} + c}$ is af te leiden uit de standaardfunctie $y = \mathrm{e}^x$

  eigenschappen
  - $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$ domein
  - $\boldsymbol{y = c}$ vergelijking van de horizontale asymptoot
  - **horizontale asymptoot**

    bereken $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

    voorbeeld

    Voor $d > 0$ geldt: $\lim\limits_{x \to \infty} (a \cdot \mathrm{e}^{d(x-b)} + c) = \infty$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} (a \cdot \mathrm{e}^{d(x-b)} + c) = c$ dus

    horizontale asymptoot is $y = c$

    ontstaat uit de standaardfunctie door achtereenvolgens (zie ook H2)
  - **vermenigvuldiging met** $\boldsymbol{a}$ **t.o.v. de** $\boldsymbol{x}$**-as:** formule wordt $y = a \cdot \mathrm{e}^x$
  - **vermenigvuldiging met** $\boldsymbol{\frac{1}{d}}$ **t.o.v. de** $\boldsymbol{y}$**-as:** formule wordt $y = a \cdot \mathrm{e}^{dx}$
  - **verschuiving** $\boldsymbol{(b, 0)}$ formule wordt $y = a \cdot \mathrm{e}^{d(x-b)}$
  - **verschuiving** $\boldsymbol{(0, c)}$ formule wordt $y = a \cdot \mathrm{e}^{d(x-b)} + c$

  let op volgorde: eerst de vermenigvuldiging met $\frac{1}{d}$ t.o.v. de y-as, daarna de verschuiving (b, 0)

3.3 **grafiek**

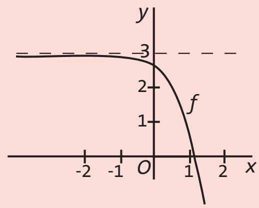
- *Teken de grafiek van $f(x) = 3 - e^{2x-1}$*

horizontale asymptoot: $y = 3$

snijpunt met x-as: $3 = e^{2x-1}$ dus $2x - 1 = \ln(3)$ dus

$x = 0{,}5 + 0{,}5\ln(3) \approx 1{,}05$ dus (1,05; 0)

enkele punten (–1; 2,95) (0; 2,63) (2; –17,09)



3.4 **exponentiële functie**

Gegeven $f(x) = 3 \cdot 2^{x+2} - 4$

a *Geef aan hoe de grafiek van f uit die van de standaardgrafiek $y = 2^x$ ontstaat.*

b *Schets de grafiek van f.*

c *Bereken in twee decimalen nauwkeurig het snijpunt met de x-as.*

d *Welke waarden neemt y aan voor $x \leq 5$?*

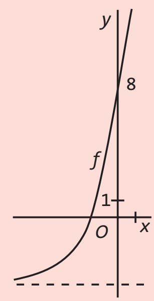
e *Herschrijf f in de vorm $y = a \cdot b^x + c$*

a $y = 2^x \xrightarrow{\text{verschuiving over } (-2,0)} y = 2^{x+2}$

$y = 2^{x+2} \xrightarrow{\text{vermenigvuldigen t.o.v. de } x\text{-as met } 3} y = 3 \cdot 2^{x+2}$

$y = 3 \cdot 2^{x+2} \xrightarrow{\text{verschuiving over } (0,-4)} y = 3 \cdot 2^{x+2} - 4$

b zie figuur hiernaast; horizontale asymptoot is $y = -4$



c $3 \cdot 2^{x+2} - 4 = 0$ dus $3 \times 2^{x+2} = 4$ dus $2^{x+2} = \dfrac{4}{3}$

$$x + 2 = {}^{2}\log\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\log\left(\frac{4}{3}\right)}{\log(2)} \approx 0{,}415037\ldots$$

$x \approx -1{,}58$ dus snijpunt is $(-1{,}58;\ 0)$ controleer dit met de grafische rekenmachine

d $x = 5$ dus $y = 3 \cdot 2^{5+2} - 4 = 380$ en horizontale asymptoot is $y = -4$

uit de grafiek volgt nu $-4 < y \leq 380$ voor $x \leq 5$

e $y = 3 \cdot 2^{x+2} - 4 = 3 \cdot 2^2 \cdot 2^x - 4 = 12 \cdot 2^x - 4$

3.5 **functie en horizontale asymptoot**

Gegeven $g(x) = 3000 \cdot (1 - e^{x-2})$

a *Geef aan hoe de grafiek van f uit die van de standaardgrafiek $y = e^x$ ontstaat.*

b *Geef de formule van de horizontale asymptoot van de grafiek van g.*

a $y = e^x \xrightarrow{\text{verschuiving over } (2,0)} y = e^{x-2}$

$y = e^{x-2} \xrightarrow{\text{spiegeling in de } x\text{-as}} y = -e^{x-2}$

$y = -e^{x-2} \xrightarrow{\text{verschuiving over } (0,1)} y = 1 - e^{x-2}$

$y = 1 - e^{x-2} \xrightarrow{\text{vermenigvuldiging t.o.v. de } x - \text{as met } 3000} y = 3000(1 - e^{x-2})$

b Bedenk wat er gebeurt met e^{x-2} voor grote negatieve waarden van x zoals –1000, –10000

$\lim\limits_{x \to -\infty}\left(3000 \cdot (1 - e^{x-2})\right) = 3000 \cdot (1 - 0) = 3000$

De horizontale asymptoot is $y = 3000$ (aan de linkerkant van de grafiek)

afgeleide f' en primitieve F van exponentiële functies f

- $F(x) = e^x$ $\quad f(x) = e^x$ $\quad f'(x) = e^x$

  let op: functie en afgeleide van $f(x) = e^x$ zijn dus hetzelfde

- $F(x) = \dfrac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$ $\quad f(x) = a^x$ $\quad f'(x) = a^x \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot a^x$

  gebruik kettingregel bij onderstaande functies

- $F(x) = \dfrac{1}{a} e^{ax}$ $\quad f(x) = e^{ax}$ $\quad f'(x) = a \cdot e^{ax}$
- $F(x) = \dfrac{1}{a \cdot \ln(g)} \cdot g^{ax}$ $\quad f(x) = g^{ax}$ $\quad f'(x) = a \cdot \ln(g) \cdot g^{ax}$

exponentiële groeifunctie hoeveelheid neemt met een vast percentage toe of af

- **$N = b \cdot g^t$** is de algemene vorm
  - **b is beginhoeveelheid** op $t = 0$
  - **g is groeifactor per tijdseenheid** per tijdseenheid wordt de waarde steeds met hetzelfde getal vermenigvuldigd
    - **$g > 1$** er is exponentiële groei; de grafiek stijgt; er is toename
    - **$0 < g < 1$** er is exponentieel verval; de grafiek daalt; er is afname
      - **$g^{1/2}$** is de groeifactor per halve tijdseenheid

- **controleren of er exponentiële groei is** als de tabel gegeven is controleer dan of voor even lange tijdsintervallen de quotiënten (delingen) gelijke uitkomsten geven dus

  $$\frac{N(1)}{N(0)} = \frac{N(2)}{N(1)} = \frac{N(3)}{N(2)} \text{ etc.}$$

- **groeifactor g bepalen**

  tabel gegeven

  - **twee opeenvolgende waarden voor N gegeven** dan bijvoorbeeld

    $$g = \frac{N(1)}{N(0)} = \frac{N(2)}{N(1)} = \frac{N(3)}{N(2)} \text{ etc.}$$

  - **twee punten gegeven** die niet één tijdseenheid uit elkaar liggen dan

    $$g = \left(\frac{N(p)}{N(q)}\right)^{\frac{1}{p-q}}$$

  - **p% toename** $g = 1 + \dfrac{p}{100}$ en p% afname $g = 1 - \dfrac{p}{100}$

    voorbeeld

    250% toename $g = 3{,}5$

- **halveringstijd t** berekenen met $g^t = 0{,}5$, dus $t = \dfrac{\log(0{,}5)}{\log(g)} = \dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(g)}$ tijd nodig om de hoeveelheid te halveren; deze tijd is onafhankelijk van de beginhoeveelheid

- **verdubbelingstijd t** berekenen met $g^t = 2$, dus $t = \dfrac{\log(2)}{\log(g)} = \dfrac{\ln(2)}{\ln(g)}$ tijd nodig om de hoeveelheid te verdubbelen; deze tijd is onafhankelijk van de beginhoeveelheid

3.6 afgeleide

Bereken de afgeleide van

a $f(x) = e^{2x+1}$

b $g(x) = 5^{2x+1}$

c $h(x) = \dfrac{1}{e^{2x}}$

a $f'(x) = 2 \cdot e^{2x+1}$

b $g'(x) = \ln(5) \cdot 2 \cdot 5^{2x+1}$ (denk aan de kettingregel)

c $h(x) = \dfrac{1}{e^{2x}} = e^{-2x}$ en dus $h'(x) = -2 \cdot e^{-2x} = \dfrac{-2}{e^{2x}}$

3.7 primitieve

Bereken de primitieve van

a $f(x) = e^{2x+1}$

b $g(x) = 5^{2x+1}$

c $h(x) = \dfrac{1}{e^{2x}}$

a $F(x) = \dfrac{1}{2} \cdot e^{2x+1}$

b $G(x) = \dfrac{1}{\ln(5)} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 5^{2x+1}$

c $h(x) = \dfrac{1}{e^{2x}} = e^{-2x}$ en dus $H(x) = \dfrac{1}{-2} \cdot e^{-2x} = \dfrac{-1}{2\,e^{2x}}$

3.8 groeifactor, groeipercentage

a De groeifactor per week is 1,4.

Bereken de groeifactor en het groeipercentage per dag en per vier weken.

b De groeifactor per etmaal is 0,8.

Bereken de groeifactor per uur en per twee dagen.

a $g = 1{,}4$ per week dus $g_{\text{per dag}} = 1{,}4^{\frac{1}{7}} \approx 1{,}0492$ dus het groeipercentage = 4,92% per dag

$g_{\text{per vier weken}} = 1{,}4^4 = 3{,}8416$ dus het groeipercentage = 284,16% per vier weken

b $g = 0{,}8$ per etmaal (24 uur), dus $g_{\text{per uur}} = 0{,}8^{\frac{1}{24}} \approx 0{,}9907...$ en $g_{\text{per twee dagen}} = 0{,}8^2 = 0{,}64$

3.9 groeifactor

Een bacterie groeit met 60% per twee jaar.

- *Bereken de groeifactor en het groeipercentage per maand.*

groeifactor per twee jaar (24 maanden) is 1,60 dus de groeifactor per maand ($\frac{1}{24}$ van twee jaar) is $1{,}60^{\left(\frac{1}{24}\right)} \approx 1{,}01978$ dus het groeipercentage is 1,978% oftewel ongeveer 2%

groeisnelheid (zie ook hoofdstuk 5 differentiëren)
- **voor $t = a$** is gelijk aan de afgeleide waarde in $t = a$

basisregels voor logaritmen
- **$^a\log(c) = b$** dan geldt $a^b = c$ mits $a > 0$ én $a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}$, $c > 0$
    - **$\ln(c) = b$ dan $c = e^b$**
    - **$^a\log(1) = 0$** want $a^0 = 1$
    - **$^a\log(a) = 1$** want $a^1 = a$
- **$\log(c) = {}^{10}\log(c)$** de 10 als grondtal wordt meestal weggelaten
- **$\ln(c) = {}^{e}\log(c)$** natuurlijke logaritme; logaritme met grondtal e (≈ 2,718281...)

rekenregels voor log(aritmen)
- **$^a\log(c) = \dfrac{\log(c)}{\log(a)} = \dfrac{^g\log(c)}{^g\log(a)} = \dfrac{\ln(c)}{\ln(a)}$** deze regel gebruiken om een functie in de rekenmachine in te voeren
- **$^a\log(c^n) = n \cdot {}^a\log(c)$**
- **$\ln(c^n) = n \cdot \ln(c)$**
- **$^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$** en $\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b)$
- **$^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$** en $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$
- **$a = {}^g\log(g^a)$** regel om een willekeurig getal als logaritme te schrijven
- **$a = \ln(e^a)$** regel om een willekeurig getal als natuurlijke logaritme te schrijven
- **$^{\frac{1}{g}}\log(a) = -{}^g\log(a)$**

logaritmische vergelijking algebraïsch oplossen
- **voorwaarden** begin altijd met het domein.

werk bv. toe naar één van onderstaande mogelijkheden
- **$\ln(A) = \ln(B)$ of $^g\log(A) = {}^g\log(B)$** er geldt dan $A = B$ (mits voldaan is aan de voorwaarden)

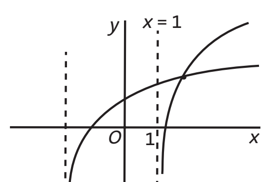
  voorbeeld: Bereken exact $\ln(x-1) + 3\ln(2) - 1 = 4$ dus $\ln(x-1) + \ln(2^3) = 5$ dus

  $\ln(x-1) + \ln(8) = \ln(e^5)$ dus $\ln(8(x-1)) = \ln(e^5)$ dus $x - 1 = \dfrac{e^5}{8}$ dus $x = \dfrac{e^5}{8} + 1$
- **stel bijvoorbeeld $\ln(x) = p$ of $^g\log(x) = p$** om de vergelijking te vereenvoudigen

  voorbeeld: $\ln^2(x) - 3\ln(x) - 4 = 0$ is te vereenvoudigen tot $p^2 - 3p - 4 = 0$ dus

  $(p-4)(p+1) = 0$ dus $p = 4$ of $p = -1$ dus

  $\ln(x) = 4$ of $\ln(x) = -1$ dus $x = e^4$ of $x = e^{-1}$
- **controleer** het antwoord met behulp van de grafische rekenmachine



logaritmische ongelijkheid algebraïsch oplossen
- **voorwaarden** begin met het domein, let op asymptoten.

  voorbeeld: Bereken exact de oplossing van $^2\log(x+2) \geq {}^2\log(x-1) + 3$

  voorwaarden $x > -2$ en $x > 1$ dus voorwaarde $x > 1$

  $^2\log(x+2) = {}^2\log(x-1) + 3$ dus $^2\log(x+2) - {}^2\log(x-1) = 3$ dus $^2\log\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right) = 3$

  $\dfrac{x+2}{x-1} = 2^3$ dus $x + 2 = 8x - 8$ dus $x = \dfrac{10}{7}$ (controleer het antwoord)

  conclusie: oplossing $x \in \left\langle 1, \frac{10}{7} \right]$ (zie schets)

3.10 rekenregels logaritmen

a *Gegeven* $^2\log(a+5)+1=b$. *Schrijf a als functie van b.*

b *Gegeven* $y = 0{,}5\ \ln(7x+2)-3$. *Schrijf x als functie van y.*

a $^2\log(a+5)=b-1$

$a+5=2^{b-1}$ dus $a=2^b\cdot 2^{-1}-5=0{,}5\cdot 2^b-5$

$a=0{,}5\cdot 2^b-5$

b $y=0{,}5\ \ln(7x+2)-3$ dus $y+3=0{,}5\ \ln(7x+2)$ dus $2y+6=\ln(7x+2)$ dus

$7x+2=e^{2y+6}$ dus $7x=e^{2y+6}-2$ dus $x=\frac{1}{7}(e^{2y+6}-2)$

3.11 vergelijking algebraïsch oplossen

a $^2\log(x+3)-3\cdot{}^{\frac{1}{2}}\log(5)=4$

b $\ln(x)-2=\ln(x-3)$

c $^2\log^2(x)\ +3\cdot{}^2\log(x)=4$

a voorwaarde: $x+3>0$ oftewel $x>-3$

$^2\log(x+3)+3\cdot{}^2\log(5)=2\log(2^4)$

$^2\log(x+3)+{}^2\log(5^3)={}^2\log(16)$

$^2\log(x+3)+{}^2\log(125)={}^2\log(16)$

$^2\log(125(x+3))={}^2\log(16)$

$125x+375=16$ dus $x=\frac{-359}{125}=-2\frac{109}{125}\approx-2{,}87$ (voldoet aan de voorwaarde)

conclusie: $x=-2\frac{109}{125}$

b voorwaarden: $x>0$ en $x-3>0$ oftewel $x>3$

$\ln(x)-\ln(e^2)=\ln(x-3)$ dus $\ln(x)=\ln(e^2)+\ln(x-3)$

$\ln(x)=\ln(e^2(x-3))$ dus $x=e^2(x-3)$

$x-e^2x=-3e^2$ dus $x(1-e^2)=-3e^2$

conclusie: $x=\dfrac{-3\,e^2}{1-e^2}$

c $^2\log^2(x)+3\cdot{}^2\log(x)=4$ stel $^2\log(x)=p$

$p^2+3p-4=0$ dus $(p-1)(p+4)=0$ dus $p=1$ of $p=-4$ dus $^2\log(x)=1$ of $^2\log(x)=-4$

conclusie: $x=2$ of $x=2^{-4}=\frac{1}{16}$

3.12 ongelijkheid

$f(x)={}^3\log(2x+4)$

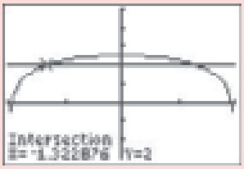
- *Los algebraïsch op* $f(x)+f(-x)<2$

$f(-x)={}^3\log(-2x+4)$

voorwaarden: $2x+4>0$ en $-2x+4>0$ dus $x>-2$ én $x<2$ dus $-2<x<2$

$^3\log(2x+4)+{}^3\log(-2x+4)=2$ dus $^3\log((2x+4)(-2x+4))={}^3\log(32)$

$-4x^2+16=9$ dus $x=\pm\sqrt{\frac{7}{4}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{7}$



plot $y_1={}^3\log(2x+4)+{}^3\log(-2x+4)$ en $y_2=2$

conclusie: $-2<x<-\frac{1}{2}\sqrt{7}$ of $\frac{1}{2}\sqrt{7}<x<2$

logaritmische functies standaardvorm

- **$y = {}^g\log(x)$ en $y = \ln(x)$** zijn standaardfuncties
  - **inverse functie** ontstaat door de grafiek te spiegelen in de lijn $y = x$
    - **$y = e^x$ en $y = \ln(x)$** zijn elkaars inverse functie
    - **$y = g^x$ en $y = {}^g\log(x)$** zijn elkaars inverse functie
  - **$g > 1$** de grafiek stijgt
  - **$0 < g < 1$** de grafiek daalt
  - **$x = 0$** is de verticale asymptoot
  - **$g > 1$** dan $\lim\limits_{x \downarrow 0}({}^g\log(x)) = -\infty$
  - **$0 < g < 1$** dan $\lim\limits_{x \downarrow 0}({}^g\log(x)) = \infty$
- **$f(x) = {}^g\log(ax + b)$** of $g(x) = \ln(ax + b)$
  - **domein** bepalen met $ax + b > 0$, verticale asymptoot als $ax + b = 0$

logaritmische functies algemene vorm

- **$y = a \cdot \ln(x - b) + c$** is af te leiden uit de standaardfunctie $y = \ln(x)$

  eigenschappen
  - **$x > b$** domein is $\langle b, \rightarrow \rangle$, $y \in \mathbb{R}$ bereik is $\mathbb{R}$
  - **verticale asymptoot** $x = b$
    - bereken $\lim\limits_{x \downarrow b}(a \cdot \ln(x - b) + c) = -\infty$

  ontstaat uit de standaardfunctie door
  - **vermenigvuldiging met a** t.o.v. de x-as; de formule wordt $y = a \cdot \ln(x)$
  - **verschuiving $(b, 0)$** de formule wordt $y = a \cdot \ln(x - b)$
  - **verschuiving $(0, c)$** de formule wordt $y = a \cdot \ln(x - b) + c$
- **plotten** $y = a \cdot {}^g\log(x - b) + c$ direct invoeren in de grafische rekenmachine (zie H8 en H9) of eerst herschrijven tot)

  $y = a \cdot \dfrac{\log(x - b)}{\log(g)} + c$ of $y = a \cdot \dfrac{\ln(x - b)}{\ln(g)} + c$

3.13 logaritmen herschrijven

$f(x) = \ln(x)$ en $g(x) = \ln(4x)$

- *Wat is het verband tussen de grafieken van f en g?*

mogelijkheid 1: f wordt afgebeeld op g door een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met $\frac{1}{4}$

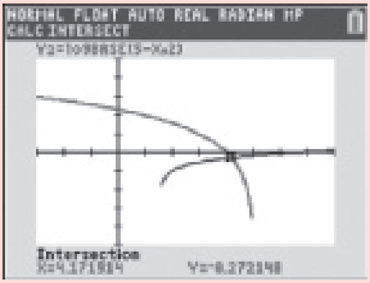
mogelijkheid 2: herschrijf $g(x)$ tot $\ln(4) + \ln(x)$

f wordt afgebeeld op g door een verschuiving over $(0, \ln(4))$

3.14 logaritmische functie

$f(x) = -1 + \log(2x - 3)$

$g(x) = {}^2\log(5 - x)$



a *Schets de grafieken van f en g in één figuur.*

b *Los op f(x) < g(x)*

c *Los op f(x) – g(x) = 1*

a Schets de grafieken van f en g.
verticale asymptoot f: $x = 1{,}5$ en g: $x = 5$

b $f(x) = g(x)$ oplossen
bijvoorbeeld met behulp van de solver of intersect van de grafische rekenmachine;
snijpunt $(4{,}17; -0{,}27)$
grafiek van f ligt onder die van g voor $1{,}5 < x < 4{,}17$ (denk aan domein)

c Voor welke x ligt de grafiek van f precies 1 boven de grafiek van g?
Los op, dus de grafische rekenmachine mag gebruikt worden.
In de grafische rekenmachine de functie $y = f(x) - g(x)$ en $y = 1$ invoeren
bepaal met behulp van de grafieken, de tabel of de solver waar de twee ingevoerde grafieken elkaar snijden.
conclusie: $x = 4{,}57$ (zie ook H8 en H9)

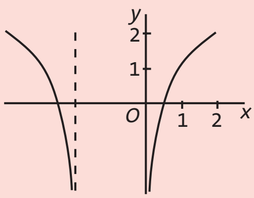
3.15 domein, asymptoten en grafiek

Gegeven $g(x) = \log(x^2 + 2x)$

a *Bepaal het domein.*

b *Geef een vergelijking van de verticale asymptoten en schets de grafiek.*

a Domein: $x^2 + 2x > 0$
$x^2 + 2x = 0$ dus $x = 0$ of $x = -2$
domein: $x < -2$ of $x > 0$ (zie schets)



b Verticale asymptoten: $x = -2$ en $x = 0$

afgeleide van logaritmische functies

- $\boldsymbol{f(x) = \ln(x)}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $\boldsymbol{f(x) = {}^g\log(x)}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{\ln(g)} \cdot \dfrac{1}{x}$

let op gebruik kettingregel, de a komt hier niet terug in de afgeleide

- $\boldsymbol{f(x) = \ln(ax)}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{a}{ax} = \dfrac{1}{x}$
- $\boldsymbol{f(x) = {}^g\log(ax)}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{\ln(g)} \cdot \dfrac{a}{ax} = \dfrac{1}{\ln(g)} \cdot \dfrac{1}{x}$

inverse f_{inv} van exponentiële en logaritmische functies

- $\boldsymbol{f(x) = e^x}$ $\qquad \boldsymbol{f_{inv}(x) = \ln(x)}$
- $\boldsymbol{h(x) = \ln(x)}$ $\qquad \boldsymbol{h_{inv}(x) = e^x}$
- $\boldsymbol{g(x) = {}^a\log(x)}$ $\qquad \boldsymbol{g_{inv}(x) = a^x}$
- $\boldsymbol{k(x) = a^x}$ $\qquad \boldsymbol{k_{inv}(x) = {}^a\log(x)}$

voorbeelden van berekening van de inverse functie door x en y te verwisselen (zie ook H2)

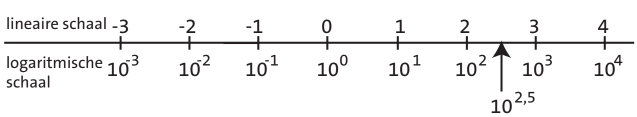
- bepaal de inverse functie van $f(x) = e^{3x+1}$
  $y = e^{3x+1}$ herschrijven tot $x = e^{3y+1}$ en herleiden op y levert
  $3y + 1 = \ln(x)$ dus $y = \dfrac{\ln(x) - 1}{3}$
- bepaal de inverse functie van $f(x) = 3 - {}^2\log(x + 4)$
  $y = 3 - {}^2\log(x + 4)$ herschrijven tot $x = 3 - {}^2\log(y + 4)$ en herleiden op y levert
  ${}^2\log(y + 4) = 3 - x$ dus $y + 4 = 2^{3-x}$ dus $y = 2^{3-x} - 4$

voorbeelden f(g(x)) = x

- bepaal de inverse functie g van $f(x) = {}^3\log(2x)$
  $f(g(x)) = x$ dus ${}^3\log(2 \cdot g(x)) = x$ dus $2 \cdot g(x) = 3^x$
  $g(x) = \dfrac{1}{2} \cdot 3^x$
- bepaal de inverse van $f(x) = 3^{2x}$
  $f(g(x)) = x$ dus $3^{2 \cdot g(x)} = x$ dus $2 \cdot g(x) = {}^3\log(x)$
  $g(x) = \dfrac{1}{2} \cdot {}^3\log(x)$

logaritmische schaal

- $\boldsymbol{10^n}$ staat op de plaats waar normaal n staat



- bij $n = 2{,}5$ staat op de logaritmische schaal de waarde $10^{2{,}5}$

3.16 afgeleide

- *Bereken de afgeleide van*

a $f(x) = \ln(2x+1)$ *b* $g(x) = {}^{5}\log(2x+1)$ *c* $h(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$

a $f'(x) = \dfrac{2}{2x+1}$

b $g(x) = \dfrac{\ln(2x+1)}{\ln(5)} = \dfrac{1}{\ln(5)} \cdot \ln(2x+1)$ dus $g'(x) = \dfrac{1}{\ln(5)} \cdot \dfrac{2}{2x+1}$

c $h(x) = \dfrac{1}{\ln(x)} = \ln(x)^{-1}$ en dus $h'(x) = -1 \cdot (\ln(x))^{-2} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{-1}{x \cdot \ln^2(x)}$

3.17 primitieve

a Laat zien dat $F(x) = x \cdot \ln(x) - x$ *de primitieve is van* $f(x) = \ln(x)$.

b Laat zien dat $F(x) = \dfrac{1}{\ln(g)}(x \cdot \ln(x) - x)$ *de primitieve is van* $f(x) = {}^{g}\log(x)$.

a $F(x) = x \cdot \ln(x) - x$ dan $F'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) + \dfrac{x}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$

$F'(x) = f(x)$ (let op gebruik productregel), dus F is de primitieve van f

b $F(x) = \dfrac{1}{\ln(g)}(x \cdot \ln(x) - x)$ dan $F'(x) = \dfrac{1}{\ln(g)}(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \dfrac{1}{x} - 1) = \dfrac{1}{\ln(g)}(\ln(x) + 1 - 1) =$

$\dfrac{1}{\ln(g)} \cdot \ln(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(g)} = {}^{g}\log(x)$ *dus* $F'(x) = f(x)$ dus F is de primitieve van f

3.18 inverse

- *Bereken de inverse van*

a $f(x) = e^{2x+1}$ b $g(x) = 5^{2x+1}$ c $h(x) = \dfrac{1}{e^{2x}}$ *d* $k(x) = 4 + \ln(5-x)$

a verwissel de x en y: $x = e^{2y+1}$ dus $2y + 1 = \ln(x)$ dus $2y = \ln(x) - 1$ dus $f_{\text{inv.}}(x) = \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}$

b verwissel de x en y: $x = 5^{2y+1}$ dus $2y + 1 = {}^{5}\log(x)$ dus $2y = {}^{5}\log(x) - 1$ dus

$g_{\text{inv.}}(x) = \frac{1}{2} \cdot {}^{5}\log(x) - \frac{1}{2}$

c $y = \dfrac{1}{e^{2x}} = e^{-2x}$ en dus $x = e^{-2y}$ dus $-2y = \ln(x)$ en $h_{\text{inv.}}(x) = -\frac{1}{2} \cdot \ln(x) = \ln(x^{-\frac{1}{2}}) = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

d $x = 4 + \ln(5-y)$ dus $\ln(5-y) = x - 4$ dus $5 - y = e^{x-4}$ dus $-y = e^{x-4} - 5$ dus

$k_{\text{inv.}}(x) = = -e^{x-4} + 5$

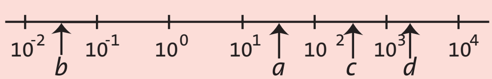
3.19 inverse met behulp van $f(g(x)) = x$

- *Gegeven is* $f(x) = 3 \cdot {}^{2}\log(-x+1)$. *Bepaal met behulp van* $f(g(x)) = x$ *de inverse van* f.

$3 \cdot {}^{2}\log(-g(x)+1) = x$ dus ${}^{2}\log(-g(x)+1) = \frac{1}{3}x$ dus $-g(x) + 1 = 2^{\frac{1}{3}x}$ dus $g(x) = 1 - 2^{\frac{1}{3}x}$

3.20 logaritmische schaal

- *Welk getal hoort bij a, b, c en d?*



$a = 10^{1,5} \approx 31{,}6$, $b = 10^{-1,5} \approx 0{,}0324$, $c = 10^{2,5} = 318$, $d = 10^{3,3} \approx 2150$

hoofdzaken

rekenregels voor machten en eigenschappen

- $a^b = c$ a is grondtal, b exponent en c uitkomst en $a > 0$ én $a \neq 1$ en $b \in \mathbb{R}$ en $c > 0$
- $a^0 = 1$ en $a^1 = a$
- $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ en $a^b : a^c = \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$
- $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$ en $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$
- **negatieve exponenten** $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$
- **gebroken exponenten** $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a^1} = \sqrt{a}$; $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$ en $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$
- $a = 10^{\log a}$ en $a = e^{\ln(a)}$

exponentiële functies tekenen

- $y = a \cdot g^{x-b} + c$ stippel eerst de horizontale asymptoot $y = c$

exponentiële groeifunctie hoeveelheid neemt met een vast percentage toe of af

- $N = b \cdot g^t$ is de algemene vorm, met $b = N(0)$ en g is groeifactor per tijdseenheid

exponentiële vergelijking (exact) oplossen, drie soorten

- $a^A = a^B$ dus $A = B$
- $a^x = c$ dan $x = {}^a\log(c) = \frac{\log(c)}{\log(a)} = \frac{\ln(c)}{\ln(a)}$
- $a^{bx+d} = c$ werk toe naar rechts en links hetzelfde grondtal a vervang c door a^g met $g = {}^a\log(c)$ (als $c \leq 0$ dan geen oplossing), dit geeft $a^{bx+d} = a^g$ dus $bx + d = g$

rekenregels voor logaritmen

- ${}^a\log(c) = b$ dan geldt $a^b = c$ mits $a > 0$ én $a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}$, $c > 0$ en
- $\ln(c) = b$ dan $c = e^b$
- $\log(c) = {}^{10}\log(c)$ en $\ln(c) = {}^e\log(c)$
- ${}^a\log(c) = \frac{\log(c)}{\log(a)} = \frac{{}^g\log(c)}{{}^g\log(a)} = \frac{\ln(c)}{\ln(a)}$
- ${}^a\log(c^n) = n \cdot {}^a\log(c)$ en $\ln(c^n) = n \cdot \ln(c)$
- ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$ en $\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b)$
- ${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$ en $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$
- $a = {}^g\log(g^a)$ en $a = \ln(e^a)$
- ${}^{\frac{1}{g}}\log(a) = -{}^g\log(a)$

logaritmische functie eigenschappen van de grafiek

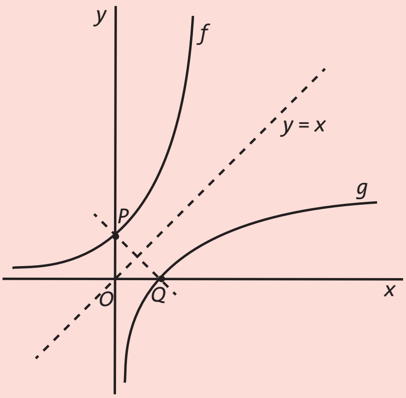
- $y = d \cdot {}^g\log(ax - b) + c$ met verticale asymptoot als $ax - b = 0$ dus $x = \frac{b}{a}$

3.21 denkactiviteit afstand

Gegeven zijn de functies van $f(x) = e^x$ en $g(x) = \ln(x)$. Op de grafieken van f en g liggen respectievelijk de twee punten P en Q.

- *Bereken de kleinst mogelijke afstand tussen deze twee punten P en Q.*

Analyse (onderstreep, schets, deelvragen, vergelijkingen):
f en g zijn elkaars spiegelbeeld (elkaars inverse) ten opzichte van de lijn $y = x$. Kleinste afstand tussen P en Q als ook de afstand tussen P en de lijn $y = x$ het kleinst is.
Dus als $f'(x) = 1$ en $g'(x) = 1$ en P en Q liggen op dezelfde loodlijn van $y = x$



Wat noteer je / oplossing:
Kleinste afstand bij $f'(x) = 1$ dus als $e^x = 1$ dus als $x = 0$ levert bijbehorende punt $P(0, 1)$
Kleinste afstand bij $g'(x) = 1$ dus als $\frac{1}{x} = 1$ dus als $x = 1$ levert bijbehorende punt $Q(1, 0)$
Loodlijn van $y = x$ door $P(0, 1)$ is $y = -x + 1$. Punt $Q(1, 0)$ ligt ook op deze loodlijn.
Dus $P(0, 1)$ en $Q(1, 0)$ zijn de punten met de kleinst mogelijke afstand.
conclusie: gevraagde afstand is $\sqrt{2}$

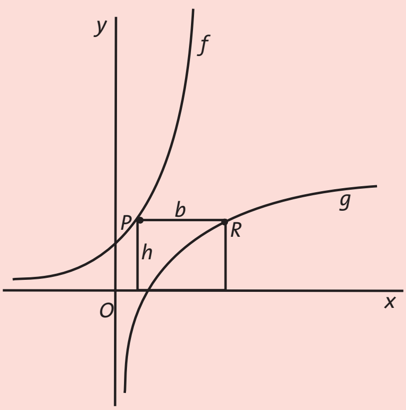
3.22 denkactiviteit vierkant

Gegeven zijn de functies $f(x) = e^x$ en $g(x) = \ln(x)$. Op de grafiek van f ligt het punt P met $x = a$ met $0 < a < 1$ en op de grafiek van g ligt op gelijke hoogte punt R. Deze punten P en R vormen samen met de x-as een rechthoek, waarbij de breedte PR drie maal zo groot is als de hoogte.

- *Bereken de waarde van a in twee decimalen nauwkeurig.*

Analyse (onderstreep, schets, deelvragen, vergelijkingen):
Maak een schets met daarin de grafieken van de functies $f(x) = e^x$ en $g(x) = \ln(x)$ en op gelijke hoogte de genoemde punten $P(a, y)$ en $R(x, y)$.
Er is sprake van een rechthoek met hoogte h is drie maal gelijk aan breedte b.
Twee decimalen, dus gebruik GR is toegestaan.

Wat noteer je / oplossing:
$P(a, e^a)$ en R op dezelfde hoogte, dus
$y = \ln(x) = e^a$ dus $x = e^{(e^a)}$
breedte $b = e^{(e^a)} - a$ en hoogte $h = e^a$
breedte = 3 · hoogte dus $b = e^{(e^a)} - a = 3e^a$
$y_1 = e^{(e^x)} - x$
$y_2 = 3e^x$ intersect levert $x \approx 0{,}57$
conclusie: $a \approx 0{,}57$



hoofdzaken vervolg

logaritmische vergelijking (exact) oplossen (indien benader, niet exact enz.: gebruik GR)

- $^{a}\log(x) = b$ herschrijven tot $x = a^b$ bijvoorbeeld $^{2}\log(x) = 3$ dus $x = 2^3 = 8$
- $c + d \cdot {}^{a}\log(kx + f) = b$ bijvoorbeeld $1 + 4 \cdot {}^{2}\log(5x - 2) = 13$ dus $^{2}\log(5x - 2) = 3$ enz.
- $^{g}\log(x) + n \cdot {}^{g}\log(b) = d - {}^{g}\log(c)$ (gebruik rekenregels)
  - $^{3}\log(x) + 2 \cdot {}^{3}\log(5) = 1 - {}^{3}\log(8)$ dus $^{3}\log(x) + {}^{3}\log(5^2) = {}^{3}\log(3) - {}^{3}\log(8)$ dus

    $^{3}\log(25x) = {}^{3}\log\left(\frac{3}{8}\right)$ dus $25x = \frac{3}{8}$ dus $x = \frac{3}{200} = 0{,}015$

ongelijkheden oplossen

- $f(x) > g(x)$ f boven de grafiek van g
- $f(x) < g(x)$ f onder de grafiek van g (let op domein en asymptoten)

inverse van exponentiële en logaritmische functies

- $f(x) = e^x$ en $g(x) = \ln(x)$ zijn elkaars inverse functies
- inverse van $k(x) = a^x$ is $m(x) = {}^{a}\log(x)$ zijn elkaars inverse functies

afgeleide f' en primitieve F van exponentiële functies f (zie ook H5)

- $F(x) = e^x$ $\quad f(x) = e^x$ $\quad f'(x) = e^x$

  let op: functie en afgeleide van $y = e^x$ zijn dus hetzelfde

- $F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$ $\quad f(x) = a^x$ $\quad f'(x) = a^x \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot a^x$

  gebruik kettingregel bij onderstaande functies

- $F(x) = \frac{1}{a} e^{ax}$ $\quad f(x) = e^{ax}$ $\quad f'(x) = a \cdot e^{ax}$
- $F(x) = \frac{1}{a \cdot \ln(g)} \cdot g^{ax}$ $\quad f(x) = g^{ax}$ $\quad f'(x) = a \cdot \ln(g) \cdot g^{ax}$

afgeleide van logaritmische functies (zie ook H5)

- $F(x) = x\ln(x) - x$ $\quad f(x) = \ln(x)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x}$
- $F(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot (x\ln(x) - x)$ $\quad f(x) = {}^{g}\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(g)} = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \ln(x)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \frac{1}{x}$

  let op: de primitieve hoef je niet te kennen

  let op gebruik kettingregel, de a komt hier niet terug in de afgeleide

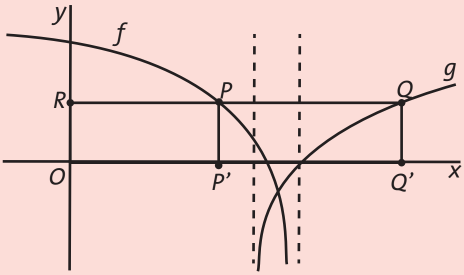
  - $f(x) = \ln(ax)$ $\quad f'(x) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$
  - $f(x) = {}^{g}\log(ax)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \frac{a}{ax} = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \frac{1}{x}$

3.23 denkactiviteit rechthoeken met gelijke oppervlakte

Gegeven zijn de functies van $f(x) = 1 + {}^2\log(10 - x)$ en $g(x) = {}^2\log(0{,}5x - 4)$. Op de grafieken van f en g liggen, op dezelfde hoogte, respectievelijk de punten $P(a, f(a))$ en Q. Recht onder P en Q liggen op de x-as, de punten $P'(a, 0)$ en Q'. De horizontale lijn door P en Q snijdt de y-as in punt R. Zo ontstaan twee rechthoeken $OP'PR$ en $P'Q'QP$. Voor zekere waarde van a zijn de oppervlaktes van beide rechthoeken gelijk.

- *Bereken voor welke waarde van a de oppervlaktes van de rechthoeken OP'PR en P'Q'QP gelijk zijn.*

Analyse (onderstreep, schets, deelvragen, vergelijkingen):
Oppervlaktes gelijk dus breedte · hoogte$_{OP'PR}$ = breedte · hoogte$_{P'Q'QP}$
$P_y = Q_y$ dus hoogte beide rechthoeken is $P_y = f(a) = 1 + {}^2\log(10 - a)$
Breedte van de rechthoeken moet gelijk zijn.
Omdat $P'(a, 0)$ geldt breedte rechthoek $OP'PR$ is a.
Dus ook breedte rechthoek $P'Q'QP$ is $Q_x - P_x = a$
dus $Q_x = 2a$



Wat noteer je / oplossing:
Hoogte P is gelijk aan hoogte Q,
dus breedte OP' is gelijk aan breedte $P'Q'$.
Omdat $P'(a, 0)$ geldt $Q'(2a, 0)$.
Dus geldt $f(a) = g(2a)$ dus $1 + {}^2\log(10 - a) = {}^2\log(0{,}5 \cdot 2a - 4)$
${}^2\log(2) + {}^2\log(10 - a) = {}^2\log(a - 4)$ dus ${}^2\log(20 - 2a) = {}^2\log(a - 4)$ dus $20 - 2a = a - 4$
conclusie: oppervlaktes van beide rechthoeken zijn gelijk voor $a = 8$

denkactiviteiten

- bij ingewikkelde opgaven spelen meerdere stappen een rol.
- ga niet meteen rekenen maar analyseer het probleem met een aantal stappen (zie hieronder).

stappenplan bij het oplossen van een complexe opgave

verdeel de oplossing van het probleem in de volgende stappen

- analyse
  - **lees** de hele opgave door
  - **noteer of onderstreep** de gegevens die van belang zijn
  - **maak een schets** een analyse figuur
    - zet gegevens uit de opgave in de schets
    - vul de schets aan
    - gebruik getallenvoorbeelden om de situatie duidelijk te krijgen
  - **deelvragen stellen en beantwoorden** welke onderliggende deelvragen kun je stellen bij de eindvraag en in welke volgorde los je dit op (in welke stukjes kun je de vraag opdelen)
  - **bedenk** welk wiskundige oplossingen passen bij de vraag (zie ook de hoofdzaken)

    denk aan
    - vergelijking opstellen en oplossen
    - formule opstellen en omschrijven
    - formule herschrijven naar andere vorm
    - waarde van parameter uitrekenen of waarde van x uitrekenen
    - welke formules passen bij het probleem
    - abstraheer van getallenvoorbeeld naar algemene oplossing met variabele
    - rekening houden met een combinatie van vergelijkingen/grafieken

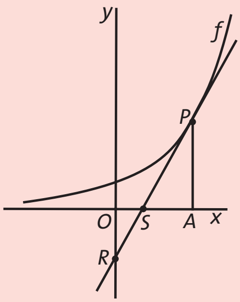
      houd bij deze theorie speciaal rekening met
      - $a^x = c$ dan $x = {}^{a}\log(c) = \dfrac{\log(c)}{\log(a)} = \dfrac{\ln(c)}{\ln(a)}$
      - correct gebruik rekenregels
      - goede groeifactor bij verschillende (tijds-)eenheden
      - verband logaritme en exponentiële vorm
      - verschil lineaire groei en exponentiële groei
      - verticale asymptoot bij logaritmische functie
      - horizontale asymptoot (grenswaarde) bij exponentiële functies
- de oplossing wat noteer je
  - **schets/tekening**
  - **oplossing met alle stappen**
  - **controle en conclusie** als je het antwoord hebt, lees nogmaals de vraag, controleer
    - heb je de tussenberekeningen goed opgeschreven?
    - heb je antwoord gegeven op de vraag?
    - is het antwoord logisch?
    - klopt de afronding?

3.24 denkactiviteit verhouding

Gegeven de functie $f(x) = e^x$ met daarop punt P met $x = a$. De raaklijn aan de grafiek van f in punt P snijdt de x-as in S en de y-as in R. Zo ontstaan ΔOSR en ΔASP met $A(a, 0)$.

- *Druk opp* ΔOSR *: opp* ΔASP *uit in* a

Analyse (onderstreep, schets, deelvragen, vergelijkingen):
Maak een schets met daarin de grafiek van de functie $f(x) = e^x$, het punt P met de raaklijn en de punten S en R. De coördinaten van P zijn te bepalen. Raaklijn dus afgeleide.
Oppervlakte driehoek $= \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$



Wat noteer je / oplossing:
Gegeven is de functie $f(x) = e^x$ en de afgeleide $f'(x) = e^x$
Raakpunt $P(a, e^a)$
Afgeleide $f'(x) = e^x$ en $f'(a) = e^a$ = richtingscoëfficient raaklijn in P
Raaklijn is dus $y = e^a x + q$
Raakpunt $P(a, e^a)$ invullen levert: $e^a = e^a \cdot a + q$ dus $q = e^a - e^a \cdot a$
Raaklijn is dus: $y = e^a x + e^a - e^a a$
Punt S berekenen met $e^a x + e^a - e^a a = 0$ dus $e^a x = -e^a + e^a a$ dus $x_S = a - 1$
Punt $R(0, e^a - e^a a)$
opp. $OSR = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (a-1) \cdot (a \cdot e^a - e^a)$ (ga na, want oppervlakte is positief)

opp. $\Delta ASP = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot e^a = \frac{1}{2} e^a$

$$\frac{\text{opp } \Delta OSR}{\text{opp } \Delta ASP} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (a-1) \cdot (a \cdot e^a - e^a)}{\frac{1}{2} e^a} = \frac{\frac{1}{2} e^a (a-1) \cdot (a-1)}{\frac{1}{2} e^a} = \frac{(a-1)^2}{1}$$

conclusie: opp ΔOSR : opp $\Delta ASP = (a-1)^2 : 1$

3.25 denkactiviteit rakende lijn aan twee grafieken

Gegeven zijn de functies van $f(x) = e^x$ en $g(x) = e^{x-1} + 2$. Er is een lijn l die de grafieken van f en g raakt in respectievelijk de punten P en Q.

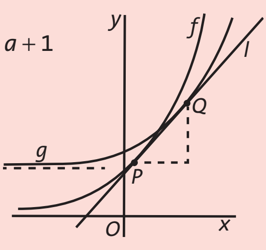
- *Stel de vergelijking van de raaklijn op.*

Analyse (onderstreep, schets, deelvragen, vergelijkingen):
Raken dus afgeleide van f en g opstellen. Noem $P(a, b)$ en $Q(p, q)$.
Zelfde raaklijn, dus zelfde helling, dus afgeleide in P en Q zijn gelijk
en helling PQ = richtingscoëfficiënt raaklijn dus $f'(a) = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$

Wat noteer je / oplossing:
$f(x) = e^x$ dus $f'(x) = e^x$ en $g'(x) = e^{x-1}$.
Helling in P is $f'(a) = e^a$ dus voor helling in Q geldt $e^{p-1} = e^a$ dus $p = a + 1$
en $q = e^{p-1} + 2 = e^a + 2$

$P(a, e^a)$ en $Q(a+1, e^a+2)$ geeft helling $PQ = \frac{e^a + 2 - e^a}{a + 1 - a} = \frac{2}{1} = 2$

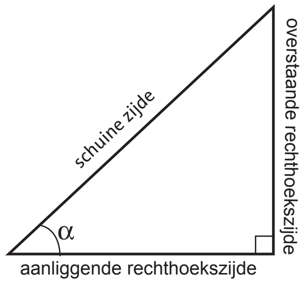
helling PQ = helling raaklijn, dus geldt $f'(a) = e^a = 2$ dus
$a = \ln(2)$ en $b = 2$ dus raaklijn $y = 2x + 2 - 2\ln(2)$



4 Periodieke functies

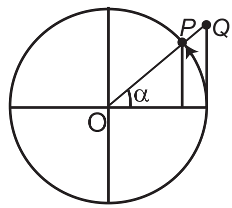
goniometrische verhoudingen in een rechthoekige driehoek

- **sin(α) =** $\dfrac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$
- **cos(α) =** $\dfrac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$
- **tan(α) =** $\dfrac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$



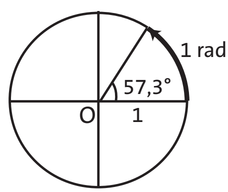
eenheidscirkel

- **straal** 1 en middelpunt (0, 0)
- **omtrek** $= 2\pi r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$
- **vergelijking** $x^2 + y^2 = 1$
- **middelpuntshoek** $= \angle POR$ met R in (1, 0) en $P(x, y)$ op de eenheidscirkel
  - **sin(α) =** y_P
  - **cos(α) =** x_P
  - **tan(α) =** $\dfrac{y_P}{x_P} = y_Q$ zie figuur



radialen en graden

- ***a* radialen** is de middelpuntshoek die hoort bij een cirkelboog die precies even lang is als *a* keer de straal van de cirkel
- ***a* radialen** is de afgelegde weg over de eenheidscirkel vanaf (1, 0)
  - **afgekort** *a* rad
- **2· π rad = 360°** hele cirkel rond; meestal laten we het woord radialen of rad weg omdat dit uit de context duidelijk is; zodra er met π gewerkt wordt, denk er dan radialen achter, let op instelling grafische rekenmachine
  - **1 rad =** $\dfrac{180°}{\pi} \approx$ **57,3°** dus $a \cdot \pi$ rad $= a \cdot 180°$
  - **180° = π rad** dus $1° = \dfrac{1}{180}\pi$ rad dus $a° = \dfrac{a}{180}\pi$ rad



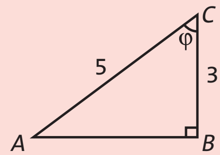
hoofdwaarde tabel uit je hoofd kennen

	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π	$1\frac{1}{2}\pi$
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1
cos(x)	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tan(x)	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	bn	0	bn

4.1 cosinus en sinus

- *Bereken in de driehoek cos(φ) en sin(φ)*

Ten opzichte van φ is BC de aanliggende rechthoekszijde, AC de schuine zijde en AB de overliggende rechthoekszijde



Stelling van Pythagoras: $AB^2 + BC^2 = AC^2$ dus $AB^2 + 3^2 = 5^2$

$AB^2 = 25 - 9 = 16$ dus $AB = 4$

$\cos(\varphi) = \frac{3}{5} = 0{,}6$ en $\sin(\varphi) = \frac{4}{5} = 0{,}8$

4.2 hoofdwaardetabel

- *Vul de tabel aan:*

rad	0π			$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$		π		
graden	0	30	45			120		270	360

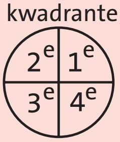
in deze tabel staan de veelvoorkomende hoeken, controleer m.b.v. hoofdwaarde tabel

4.3 kwadrant

$\frac{5}{6}\pi, -\frac{2}{5}\pi, -\frac{2}{5}$, 5, 10 in radialen

- *Geef de bijbehorende hoeken in graden en geef aan in welk kwadrant de hoek ligt.*

kwadranten



$\frac{5}{6}\pi$ rad $= \frac{5}{6} \cdot 180° = 150°$ in het tweede kwadrant

$-\frac{2}{5}\pi$ rad $= -\frac{2}{5} \cdot 180° = -72°$ in het vierde kwadrant

$-\frac{2}{5}$ rad $= -\frac{2}{5} \times \frac{180°}{\pi} = -23°$ in het vierde kwadrant (– dus draairichting negatief)

5 rad $= 5 \cdot \frac{180°}{\pi} = 286°$ in het vierde kwadrant

10 rad $= 10 \cdot \frac{180°}{\pi} = 573°$ komt overeen met $573° - 360° = 213°$ derde kwadrant

4.4 radialen

- *Geef 245°, 1200° en –352° in radialen en geef aan in welk kwadrant de hoek ligt*

$245° = \frac{245}{180}\pi = 1\frac{13}{36}\pi = 4{,}28$ rad in het derde kwadrant

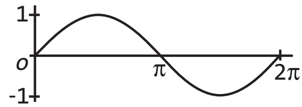
$1200° = \frac{1200}{180}\pi = 6\frac{2}{3}\pi = 20{,}94$ rad in het tweede kwadrant

$-352° = -\frac{352}{180}\pi = -1\frac{172}{180}\pi = -6{,}14$ rad in het eerste kwadrant

4.5 rekenmachine

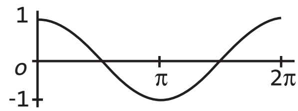
- *Bepaal* $\sin(1\frac{1}{8}\pi)$ *: controleer of de rekenmachine op rad staat;* $\sin(1\frac{1}{8}\pi) = -0{,}38$

$f(x) = \sin(x)$



- **domein** = $\mathbb{R}$
- **bereik** $[-1, 1]$
- **evenwichtsstand** $y = 0$
- **amplitude** 1
- **periode** 2π
- **extremen** maximum in $\left(\frac{1}{2}\pi, 1\right)$; minimum in $\left(1\frac{1}{2}\pi, -1\right)$ als domein is $[0, 2\pi]$
- **nulpunten** $x = k\pi$ met k een geheel getal; dus $x = -\pi$, $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$ etc.

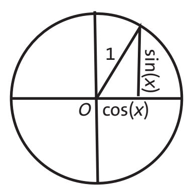
$f(x) = \cos(x)$



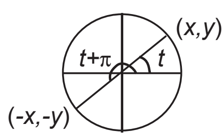
- **domein** = $\mathbb{R}$
- **bereik** $[-1, 1]$
- **evenwichtsstand** $y = 0$
- **amplitude** 1
- **periode** 2π
- **extremen** maximum in $(0, 1)$; minimum in $(\pi, -1)$ als domein is $[0, 2\pi]$
- **nulpunten** $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ met k een geheel getal; dus $x = -\frac{1}{2}\pi$, $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = 1\frac{1}{2}\pi$ etc.

goniometrische formules

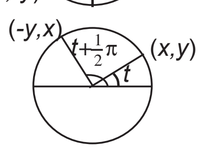
- **eigenschappen** sinus en cosinus



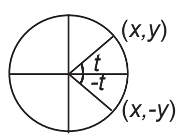
  - **kwadratenformule** (denk aan Pythagoras)
    - $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$
  - **periodeformules** zie grafieken hierboven
    - $\cos(t + 2\pi) = \cos(t)$
    - $\sin(t + 2\pi) = \sin(t)$
  - **propellerformule**
    - $\cos(t + \pi) = -\cos(t)$
    - $\sin(t + \pi) = -\sin(t)$



  - **molenformules**
    - $\cos\left(t + \frac{1}{2}\pi\right) = -\sin(t)$
    - $\sin\left(t + \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(t)$



  - **symmetrieformules**
    - $\cos(-t) = \cos(t)$
    - $\sin(-t) = -\sin(t)$



- **tangens**
  - $\tan(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$
- *t* kan in bovenstaande formules vervangen worden door at of $at + b$ enz ...
  dus bijvoorbeeld bij periodeformule (zie hierboven) geldt ook $\cos(3t + 2\pi) = \cos(3t)$

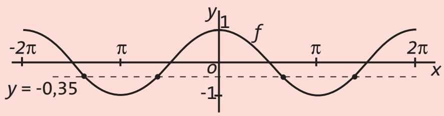
4.6 **vergelijking**

- *Los op* $2 \cdot \cos(x) = 1{,}4 + 6 \cdot \cos(x)$ *voor* $x \in [-2\pi, 2\pi]$

vergelijking herschrijven tot $\cos(x)$ = getal

$2 \cdot \cos(x) - 6 \cdot \cos(x) = 1{,}4$ dus $\cos(x) = -0{,}35$ (zie ook stippellijn in de figuur)

rekenmachine op rad



invcos(–0,35) = 1,93

$x = 1{,}93$ is een oplossing dus ook

$x = -1{,}93$

$x \in [-2\pi, 2\pi]$ dus alle waarden voor x tussen –6,2832 en 6,2832 bepalen

$x = 1{,}93 - 2\pi = -4{,}35$ of $x = -1{,}93 + 2\pi = 4{,}35$

conclusie: $x \in \{-4{,}35 ; -1{,}93 ; 1{,}93 ; 4{,}35\}$

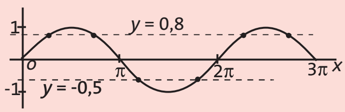
4.7 **ongelijkheid**

- *Los op* $-0{,}5 < \sin(x) < 0{,}8$ *voor* $x \in [0, 3\pi]$

los op $\sin(x) = -0{,}5$ dus $x = \text{invsin}(-0{,}5) = -0{,}52$ (valt niet in het domein)

$x = \pi - -0{,}52 = 3{,}67$ of $x = -0{,}52 + 2\pi = 5{,}76$

los op $\sin(x) = 0{,}8$



$x = \text{invsin}(0{,}8) = 0{,}93$

andere oplossingen $x = \pi - 0{,}93 = 2{,}21$,

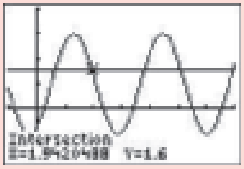
$x = 0{,}93 + 2\pi = 7{,}21$ en $x = 2{,}21 + 2\pi = 8{,}50$

gebruik de grafiek (of de plot van de rekenmachine)

$x \in [0 ; 0{,}93\rangle \cup \langle 2{,}21 ; 3{,}67\rangle \cup \langle 5{,}76 ; 7{,}21\rangle \cup \langle 8{,}50 ; 3\pi]$

4.8 **ongelijkheid**

- *Los op* $1 + 2\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) < 1{,}6$ *voor* $0 \le x \le 2\pi$



benader met de grafische rekenmachine

$1 + 2\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = 1{,}6$ dus

$x = 0{,}7$ of $x = 1{,}9$ of $x = 3{,}8$ of $x = 5{,}1$

conclusie: $0 \le x < 0{,}7$ of $1{,}9 < x < 3{,}8$ of $5{,}1 < x \le 2\pi$

4.9 **formules**

a $\cos\left(t - \frac{1}{2}\pi\right) =$ *c* $\cos(t + 3\pi) =$ *e* $\sin\left(t + 2\frac{1}{2}\pi\right) =$

b $\cos\left(t + \frac{1}{2}\pi\right) =$ *d* $\sin(t - 5\pi) =$ *f* $\sin(-t + 4\pi) =$

- *herschrijf bovenstaande formules tot de vorm a·cos(t) of b·sin(t)*

a $\cos\left(t - \frac{1}{2}\pi\right) = \sin(t)$

b $\cos\left(t + \frac{1}{2}\pi\right) = -\sin(t)$

c $\cos(t + 3\pi) = \cos(t + \pi) = -\cos(t)$

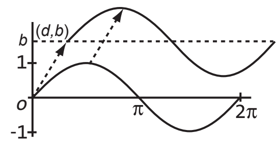
d $\sin(t - 5\pi) = \sin(t - \pi) = -\sin(t)$

e $\sin\left(t + 2\frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(t + \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(t)$

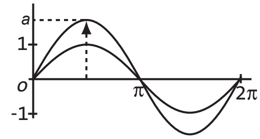
f $\sin(-t + 4\pi) = \sin(-t) = -\sin(t)$

afbeeldingen/transformaties

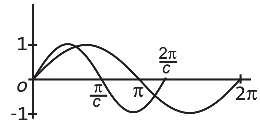
- $\boldsymbol{y = b + \sin(x - d)}$ ontstaat uit de grafiek van $y = \sin(x)$ door een translatie/verschuiving over (d, b), dus d naar rechts en b omhoog



- $\boldsymbol{y = a \cdot \sin(x)}$ ontstaat uit de grafiek van $y = \sin(x)$ door vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met a



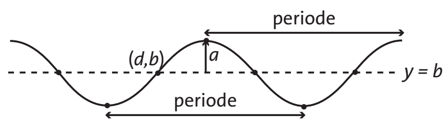
- $\boldsymbol{y = \sin(cx)}$ ontstaat uit de grafiek van $y = \sin(x)$ door vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met $\frac{1}{c}$



$f(x) = b + a \cdot \sin(c(x - d))$

- **grafiek** een sinusoïde
  - $\boldsymbol{g(x) = a \cdot \sin(cx)}$ transleren/verschuiven over (d, b), dus d naar rechts en b omhoog, geeft de grafiek van f

  noteer voor het tekenen van de grafiek

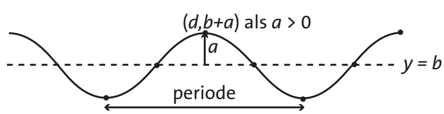


  - **evenwichtsstand** $y = b$
  - **amplitude** $|a|$
  - **periode** $\frac{2\pi}{c} = \frac{1}{\text{frequentie}}$; periode $\cdot\ c = 2\pi$
  - **startpunt** punt (d, b) op de evenwichtsstand
- **faseverschil** $\cdot$ periode $= d$
- **domein** $\mathbb{R}$
- **bereik** $[b - |a|, b + |a|]$ dus evenwichtsstand plus of min de amplitude

$f(x) = b + a \cdot \cos(c(x - d))$

- **grafiek** een sinusoïde
  - $\boldsymbol{g(x) = a \cdot \cos(cx)}$ transleren/verschuiven over (d, b), dus d naar rechts en b omhoog, geeft de grafiek van f

  noteer voor het tekenen van de grafiek

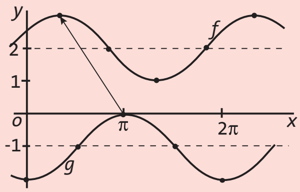


  - **evenwichtsstand** $y = b$
  - **amplitude** $|a|$
  - **periode** $\frac{2\pi}{c} = \frac{1}{\text{frequentie}}$; periode $\cdot\ c = 2\pi$
  - **startpunt** $(d, b + a)$
    dit punt is een maximum als $a > 0$ en een minimum als $a < 0$
- **domein** $\mathbb{R}$
- **bereik** $[b - |a|, b + |a|]$ dus evenwichtsstand plus of min de amplitude

4.10 functies

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 + \cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$ en $g(x) = -1 - \cos(x)$ Plot de grafieken f en g in één figuur.

- *Geef aan door welke verschuiving de grafiek van f uit die van g kan ontstaan.*



grafiek	f	g
evenwichtsstand	$y = 2$	$y = -1$
amplitude	1	1
periode	2π	2π
startpunt max.	$\left(\frac{1}{3}\pi, 3\right)$	min. $(0, -2)$

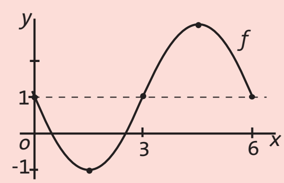
plot de grafieken ter controle

Neem bijvoorbeeld de verschuiving tussen twee willekeurige maxima.

Maximum g is $(\pi, 0)$ en maximum f is $\left(\frac{1}{3}\pi, 3\right)$: als g wordt verschoven over $\left(-\frac{2}{3}\pi, 3\right)$ dan is f het beeld van g. Zo zijn er oneindig veel mogelijkheden.

4.11 sinus

- *Teken de grafiek van* $f(x) = 1 - 2\sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right)$ *voor* $0 \leq x \leq 6$

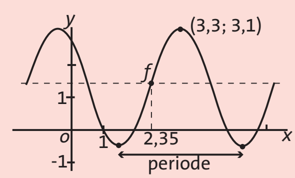


evenwichtsstand $y = 1$; amplitude is 2;

periode is $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 6$; startpunt $(0, 1)$

4.12 formule maken

- *Geef bij de grafiek een functievoorschrift in de vorm* $f(x) = b + a\sin(c(x - d))$ *en* $g(x) = b + a\sin(c(x - d))$



Bepaal met behulp van de grafiek:

het minimum $y = -0{,}4$ en maximum $y = 3{,}1$

de evenwichtsstand: $\dfrac{-0{,}4 + 3{,}1}{2} = 1{,}35 = b$

amplitude $a = 3{,}1 - 1{,}35 = 1{,}75$

periode = 3,8

de grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand in bijvoorbeeld (2,35; 1,35)

dus $f(x) = 1{,}35 + 1{,}75\sin\left(\dfrac{2\pi}{3{,}8}(x - 2{,}35)\right)$

of $g(x) = b + a\cos(c(x - d))$

lees af uit de figuur: maximum $y = 3{,}1$ voor bijvoorbeeld $x = 3{,}3$

dus $g(x) = 1{,}35 + 1{,}75\cos\left(\dfrac{2\pi}{3{,}8}(x - 3{,}3)\right)$

plot de grafiek ter controle

goniometrische formules om vergelijkingen op te lossen of formules te herschrijven

- t kan in onderstaande formules vervangen worden door at of $at + b$ enz ...

  dus bijvoorbeeld $\sin^2(3t) + \cos^2(3t) = 1$ of $\sin(6t) = 2 \cdot \cos(3t) \cdot \sin(3t)$ klopt ook
- **$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$**
  - $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$
  - $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$
- **min-teken** wegwerken
  - $-\cos(t) = \cos(t + \pi)$
  - $-\sin(t) = \sin(-t)$ of $-\sin(t) = \sin(t + \pi)$
- **sin(t) omwerken** naar cos(t) en andersom
  - $\sin(t) = \cos\left(t - \frac{1}{2}\pi\right)$ of $\sin(t) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - t\right)$
  - $\cos(t) = \sin\left(t + \frac{1}{2}\pi\right)$ of $\cos(t) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - t\right)$
- **formule met sin(t) en cos(t)** is soms te herschrijven naar tan(t)
  - $\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)} = \tan(t)$
- **verdubbelingsformules** staan op het formuleblad
  - $\sin(2t) = 2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t)$
  - $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$
  - $\cos(2t) = 2 \cdot \cos^2(t) - 1$

    want $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos^2(t) - (1 - \cos^2(t)) = 2\cos^2(t) - 1$
  - $\cos(2t) = 1 - 2 \cdot \sin^2(t)$

    want $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = (1 - \sin^2(t)) - \sin^2(t) = 1 - 2\sin^2(t)$
- **somformules en verschilformules** staan op het formuleblad

  vaak worden de formules van rechts naar links gebruikt
  - $\sin(t + u) = \sin(t) \cdot \cos(u) + \cos(t) \cdot \sin(u)$
  - $\sin(t - u) = \sin(t) \cdot \cos(u) - \cos(t) \cdot \sin(u)$
  - $\cos(t + u) = \cos(t) \cdot \cos(u) - \sin(t) \cdot \sin(u)$
  - $\cos(t - u) = \cos(t) \cdot \cos(u) + \sin(t) \cdot \sin(u)$
- **formules van Simpson/Mollweide**

  vaak worden de formules van rechts naar links gebruikt
  - $\sin(a) + \sin(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(a - b)\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(a + b)\right)$
  - $\sin(a) - \sin(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(a + b)\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(a - b)\right)$
  - $\cos(a) + \cos(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(a - b)\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(a + b)\right)$
  - $\cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(a + b)\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(a - b)\right)$

4.13 omschrijven van formules

Toon aan

a $4\cos^4(t) - 4\cos^2(t) = -\sin^2(2t)$

b $\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(t)$

c $\sin(t) - \sin(2t) \cdot \cos(t) = -\sin(t) \cdot \cos(2t)$

d $\cos(3t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t)$

werk indien nodig eerst de vergelijking om tot een bekende goniometrische formule

a $4\cos^4(t) - 4\cos^2(t) = -\sin^2(2t)$

$4\cos^4(t) - 4\cos^2(t) = -4\sin^2(t) \cdot \cos^2(t)$

$4\cos^2(t) - 4 = -4\sin^2(t)$

$4\sin^2(t) + 4\cos^2(t) = 4$

$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$

b $\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(t)$

$\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) =$

gebruik sin(–a) = –sin(a)

$-\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -\cos(t)$

c $\sin(t) - \sin(2t)\cos(t) = \sin(t) - 2\sin(t)\cos^2(t) = \sin(t)(1 - 2\cos^2(t)) = -\sin(t)\cos(2t)$

d $\cos(3t) = \cos(t + 2t) = \cos(t)\cos(2t) - \sin(t)\sin(2t) =$

$\cos(t) \cdot (2\cos^2(t) - 1) - \sin(t) \cdot 2\sin(t)\cos(t) = 2\cos^3(t) - \cos(t) - 2\sin^2(t)\cos(t) =$

$2\cos^3(t) - \cos(t) - 2(1 - \cos^2(t))\cos(t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t)$

4.14 somregel

- *Bepaal a en b als geldt:* $5\cos\left(t - \frac{2}{3}\pi\right) = a\cos(t) + b\sin(t)$

$5\cos\left(t - \frac{2}{3}\pi\right) = 5\left(\cos(t) \cdot \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \sin(t) \cdot \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right) =$

$5 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \cos(t) + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sin(t)\right) = -2\frac{1}{2} \cdot \cos(t) + 2\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sin(t)$

Conclusie: $a = -2\frac{1}{2}$ en $b = 2\frac{1}{2}\sqrt{3}$

4.15 Simpson/Mollweide

Toon aan dat

- $\begin{cases} x(t) = \cos(u - t) + \cos(t) \\ y(t) = \sin(u - t) + \sin(t) \end{cases}$ *gelijk is aan* $\begin{cases} x(t) = 2\cos\left(\frac{1}{2}u\right)\cos\left(\frac{1}{2}u - t\right) \\ y(t) = 2\sin\left(\frac{1}{2}u\right)\cos\left(\frac{1}{2}u - t\right) \end{cases}$

$x(t) = \cos(u - t) + \cos(t) = 2\cos\left(\frac{1}{2}(u - t - t)\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(u - t + t)\right) =$

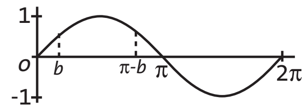
$2\cos\left(\frac{1}{2}u - t\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}u\right) = 2\cos\left(\frac{1}{2}u\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}u - t\right)$ en

$y(t) = \sin(u - t) + \sin(t) = 2\cos\left(\frac{1}{2}(u - t - t)\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(u - t + t)\right) =$

$2\cos\left(\frac{1}{2}u - t\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}u\right) = 2\sin\left(\frac{1}{2}u\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}u - t\right)$

vergelijkingen exact oplossen

- **sin(t) = a** gebruik de hoofwaarde-tabel met bekende hoeken
  - oplossing $t = b + 2k\pi$ of $t = \pi - b + 2k\pi$

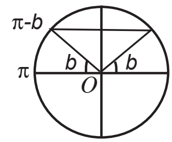


voorbeeld

$\sin(t) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$t = \frac{1}{3}\pi + 2k\pi$ of $t = \pi - \frac{1}{3}\pi + 2k\pi = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$

- **sin(t) = sin(b)**
  - oplossing $t = b + 2k\pi$ of $t = \pi - b + 2k\pi$

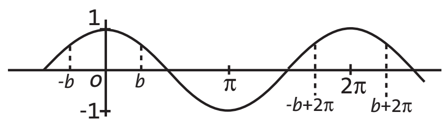


voorbeeld

$\sin(t) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)$

$t = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi$ of $t = \pi - \frac{1}{6}\pi + 2k\pi = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

- **cos(t) = a** gebruik tabel met bekende hoeken of
  - oplossing $t = b + 2k\pi$ of $t = -b + 2k\pi$

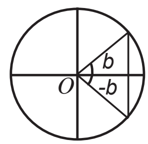


voorbeeld

$\cos(t) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$t = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi$ of $t = -\frac{1}{6}\pi + 2k\pi$

- **cos(t) = cos(a)**
  - oplossing $t = b + 2k\pi$ of $t = -b + 2k\pi$



voorbeeld

$\cos(t) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$t = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi$ of $t = -\frac{1}{6}\pi + 2k\pi$

- **oplossen met de grafische rekenmachine** zie H8 en H9
  - rekenmachine op rad zetten
  - bijvoorbeeld met calculate intersect of met $\sin^{-1}$
  - gebruik de plot om te bekijken of je alle oplossingen gevonden hebt
  - elke volgende oplossing is steeds één of meerdere periode(n) verder of terug

goniometrische vergelijkingen exact oplossen

voorbeelden

- **sin(x) = sin($2x + \frac{1}{2}\pi$)** denk aan $\sin(t) = \sin(u)$ en dan $t = u + 2k\pi$ of $t = \pi - u + 2k\pi$

$x = 2x + \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ of $x = \pi - (2x + \frac{1}{2}\pi) + 2k\pi$

$x = -\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ of $3x = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$

$x = \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}k\pi$

- **cos(x) = cos($2x + \frac{1}{2}\pi$)** denk aan $\cos(t) = \cos(u)$ en dan $t = u + 2k\pi$ of $t = -u + 2k\pi$

$x = 2x + \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ of $x = -(2x + \frac{1}{2}\pi) + 2k\pi$

$x = -\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ of $3x = -\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$

$x = -\frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}k\pi$

4.16 bereken exact

a $\cos(3x) = 1$ *b* $\sin\left(2x + \frac{1}{4}\pi\right) = 1$ *c* $\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$ *d* $2\sin\left(\frac{2}{3}x\right) = 1$

Er is geen domein gegeven, dus laat *k* in het antwoord staan; *k* is een geheel getal.

a $\cos(3x) = 1$

$3x = 0 + k2\pi$ dus $x = 0 + k\frac{2}{3}\pi$

b $\sin\left(2x + \frac{1}{4}\pi\right) = 1$

$2x + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi + k2\pi$ dus $2x = \frac{1}{4}\pi + k2\pi$ dus $x = \frac{1}{8}\pi + k\pi$

c $\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$ (kijk in de eenheidscirkel waar $\cos(A) = \frac{1}{2}$)

$x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi + k2\pi$ of $x - \frac{1}{3}\pi = -\frac{1}{3}\pi + k2\pi$

$x = \frac{2}{3}\pi + k2\pi$ $x = 0 + k2\pi$

d $2\sin\left(\frac{2}{3}x\right) = 1$

$\sin\left(\frac{2}{3}x\right) = \frac{1}{2}$ (kijk in de eenheidscirkel waar $\sin(A) = \frac{1}{2}$)

$\frac{2}{3}x = \frac{1}{6}\pi + k2\pi$ of $\frac{2}{3}x = \frac{5}{6}\pi + k2\pi$

$x = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6}\pi + k\frac{3}{2} \cdot 2\pi$ $x = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6}\pi + k\frac{3}{2} \cdot 2\pi$

$x = \frac{3}{12}\pi + k3\pi$ $x = \frac{15}{12}\pi + k3\pi$

$x = \frac{1}{4}\pi + k3\pi$ $x = 1\frac{1}{4}\pi + k3\pi$

4.17 geef alle exacte oplossingen van

a $\cos(3x - \pi) = \cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$

b $\sin(2x) = \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$

a $\cos(3x - \pi) = \cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$ denk aan $\cos(t) = \cos(u)$ en dan $t = u + 2k\pi$ of $t = -u + 2k\pi$

$3x - \pi = x + \frac{1}{4}\pi + 2k\pi$ of $3x - \pi = -\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) + 2k\pi$

$2x = 1\frac{1}{4}\pi + 2k\pi$ of $4x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$

$x = \frac{5}{8}\pi + k\pi$ of $x = \frac{3}{16}\pi + \frac{1}{2}k\pi$

b $\sin(2x) = \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$ denk aan $\sin(t) = \sin(u)$ en dan $t = u + 2k\pi$ of $t = \pi - u + 2k\pi$

$2x = x - \frac{1}{3}\pi + 2k\pi$ of $2x = \pi - \left(x - \frac{1}{3}\pi\right) + 2k\pi$

$x = -\frac{1}{3}\pi + 2k\pi$ of $3x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$

of $x = \frac{4}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi$

4.18 geef alle exacte oplossingen van

a $\cos(2x) = 1$ met domein $x \in [0, 2\pi]$

b $2\sin(3x) = -1$ met domein $x \in [0, 2\pi]$

a $\cos(2x) = 1$ dus $2x = 0 + k2\pi$ dus $x = 0 + k\pi$ dus $x = 0$ of $x = \pi$ of $x = 2\pi$

b $\sin(3x) = -\frac{1}{2}$ (kijk in de eenheidscirkel waar $\sin(A) = -\frac{1}{2}$)

$3x = 1\frac{1}{6}\pi + k2\pi$ of $3x = 1\frac{5}{6}\pi + k2\pi$

$x = \frac{7}{18}\pi + k\frac{2}{3}\pi$ $x = \frac{11}{18}\pi + k\frac{2}{3}\pi$

$x = \frac{7}{18}\pi + k\frac{12}{18}\pi$ $x = \frac{11}{18}\pi + k\frac{12}{18}\pi$

$x = \frac{7}{18}\pi \vee x = \frac{11}{18}\pi \vee x = \frac{19}{18}\pi \vee x = \frac{23}{18}\pi \vee x = \frac{31}{18}\pi \vee x = \frac{35}{18}\pi$

goniometrische vergelijkingen exact oplossen voorbeelden vervolg

- **$\sin(x) = \cos\left(2x + \frac{1}{2}\pi\right)$** denk bijvoorbeeld aan $\sin(t) = \cos\left(t - \frac{1}{2}\pi\right)$,
  vervang $\sin(x)$ door $\cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$

  $\cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(2x + \frac{1}{2}\pi\right)$

  $x - \frac{1}{2}\pi = 2x + \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ of $x - \frac{1}{2}\pi = -\left(2x + \frac{1}{2}\pi\right) + 2k\pi$

  $x = -\pi + 2k\pi$ of $3x = 2k\pi$

  $x = \frac{2}{3}k\pi$

  conclusie: $x = -\pi + 2k\pi$ of $x = \frac{2}{3}k\pi$

- **$\cos(2x) = \sin(3x + \frac{1}{2}\pi)$** denk aan $\cos(t) = \sin\left(t + \frac{1}{2}\pi\right)$, vervang $\cos(2x)$ door $\sin\left(2x + \frac{1}{2}\pi\right)$

  $\sin\left(2x + \frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(3x + \frac{1}{2}\pi\right)$

  $2x + \frac{1}{2}\pi = 3x + \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ of $2x + \frac{1}{2}\pi = \pi - \left(3x + \frac{1}{2}\pi\right) + 2k\pi$

  $x = 2k\pi$ of $5x = 2k\pi$

  $x = \frac{2}{5}k\pi$

  conclusie: $x = \frac{2}{5}k\pi$

- **$\sqrt{3}\sin(x) = \cos(x)$** denk aan $\tan(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$

  $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ dus $\tan(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ dus

  $x = \frac{1}{6}\pi + k\pi$ zie tabel

- **$-\sin(t) = \cos(2t)$** herschrijf tot bijvoorbeeld $\cos(A) = \cos(B)$
  denk aan $-\sin(A) = \sin(-A)$, dus vervang $-\sin(t)$ door $\sin(-t)$, dus geldt:
  $\sin(-t) = \cos(2t)$

  $\cos\left(\frac{1}{2}\pi + t\right) = \cos(2t)$ denk aan $\sin(A) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - A\right)$

  $\frac{1}{2}\pi + t = 2t + 2k\pi$ of $\frac{1}{2}\pi + t = -2t + 2k\pi$

  $t = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ of $3t = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$

  $t = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ of $t = \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}k\pi$

4.19 oplossen vergelijkingen met exacte berekening

- *Los op* $\sin\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)=\cos(2x)$ *(maak een plot ter controle)*

$\sin\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)=\sin\left(2x+\frac{1}{2}\pi\right)$ $\left(\text{denk aan } \cos(t)=\sin\left(t+\frac{1}{2}\pi\right)\right)$

dus $x-\frac{1}{2}\pi=2x+\frac{1}{2}\pi+2k\pi$ of $x-\frac{1}{2}\pi=\pi-\left(2x+\frac{1}{2}\pi\right)+2k\pi$

$-x=\pi+2k\pi$ of $3x=\pi+2k\pi$

$x=\pi+2k\pi$ of $x=\frac{1}{3}\pi+\frac{2}{3}k\pi$

4.20 geef alle exacte oplossingen van

a $\cos\left(2x+\frac{1}{2}\pi\right)=-\sin\left(3x+\frac{1}{3}\pi\right)$

b $-\cos\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)=\sin\left(2x+\frac{1}{3}\pi\right)$

c $\sqrt{3}\cos(x)=-\sin(x)$

d $\cos(2x+\pi)=\sin\left(2x+\frac{1}{6}\pi\right)$ met domein $x\in[0,\pi]$

a $\cos\left(2x+\frac{1}{2}\pi\right)=-\sin\left(3x+\frac{1}{3}\pi\right)$ $\left(\text{denk aan } \cos(t)=\sin\left(t+\frac{1}{2}\pi\right) \text{ en } -\sin(t)=\sin(-t)\right)$

$\sin\left(2x+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\right)=\sin\left(-3x-\frac{1}{3}\pi\right)$

$2x+\pi=-3x-\frac{1}{3}\pi+2k\pi$ of $2x+\pi=\pi-\left(-3x-\frac{1}{3}\pi\right)+2k\pi$

$5x=-1\frac{1}{3}\pi+2k\pi$ of $-x=\frac{1}{3}\pi+2k\pi$

$x=-\frac{4}{15}\pi+\frac{2}{5}k\pi$ of $x=-\frac{1}{3}\pi+2k\pi$

b $-\cos\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)=\sin\left(2x+\frac{1}{3}\pi\right)$ $\left(\text{denk aan } -\cos(t)=\cos(t+\pi) \text{ en } \cos(t)=\sin(t+\frac{1}{2}\pi)\right)$

$\cos\left(x+\frac{2}{3}\pi+\pi\right)=\sin\left(2x+\frac{1}{3}\pi\right)$

$\cos\left(x+1\frac{2}{3}\pi\right)=\sin\left(2x+\frac{1}{3}\pi\right)$

$\sin\left(x+1\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\pi\right)=\sin\left(2x+\frac{1}{3}\pi\right)$

$\sin\left(x+2\frac{1}{6}\pi\right)=\sin\left(2x+\frac{1}{3}\pi\right)$

$x+2\frac{1}{6}\pi=2x+\frac{1}{3}\pi+2k\pi$ of $x+2\frac{1}{6}\pi=\pi-\left(2x+\frac{1}{3}\pi\right)+2k\pi$

$x=1\frac{5}{6}\pi+2k\pi$ of $3x=-1\frac{1}{2}\pi+2k\pi$

$x=1\frac{5}{6}\pi+2k\pi$ of $x=-\frac{1}{2}\pi+\frac{2}{3}k\pi$

c $\sqrt{3}\cos(x)=-\sin(x)$ denk aan $\tan(t)=\frac{\sin(t)}{\cos(t)}$

$\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=-\sqrt{3}$ dus $\tan(x)=-\sqrt{3}$ dus $x=-\frac{1}{3}\pi+k\pi$ (zie tabel)

d $\cos(2x+\pi)=\sin\left(2x+\frac{1}{6}\pi\right)$ $\left(\text{denk aan } \sin(t)=\cos\left(t-\frac{1}{2}\pi\right)\right)$

$\cos(2x+\pi)=\cos\left(2x+\frac{1}{6}\pi-\frac{1}{2}\pi\right)$

$\cos(2x+\pi)=\cos\left(2x-\frac{2}{6}\pi\right)$ met domein $x\in[0,2\pi]$

$2x+\pi=2x-\frac{1}{3}\pi+2k\pi$ of $2x+\pi=-(2x-\frac{1}{3}\pi)+2k\pi$

$\pi=-\frac{1}{3}\pi+2k\pi$ (geen oplossing) of $4x=-\frac{2}{3}\pi+2k\pi$

$x=-\frac{1}{6}\pi+\frac{1}{2}k\pi$ dus

$x=\frac{1}{3}\pi$ of $x=\frac{5}{6}\pi$

goniometrische vergelijkingen exact oplossen voorbeelden vervolg

- **$\sin(x) \cdot \cos(x) - \cos(x) = 0$** cos($x$) buiten haakjes halen, ontbinden

  $\cos(x) \cdot (\sin(x) - 1) = 0$

  $\cos(x) = 0$ of $\sin(x) = 1$

  $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ of $x = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ dus $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$

- **$2\sin^2(x) - \sin(x) = 0$** sin(x) buiten haakjes halen, ontbinden

  $\sin(x) \cdot (2\sin(x) - 1) = 0$

  $\sin(x) = 0$ of $2\sin(x) = 1$

  $\sin(x) = 0$ of $\sin(x) = \frac{1}{2}$

  $x = 0 + k\pi$ of $x = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

- **$2\cos^2(x) - \cos(x) - 1 = 0$** los op zoals een kwadratische vergelijking $2p^2 - p - 1 = 0$ en gebruik de *abc*-formule (zie H2)

  $a = 2$, $b = -1$ en $c = -1$ dus $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1 = 1 + 8 = 9$

  $p = \frac{1 + \sqrt{9}}{4} = \frac{1 + 3}{4} = 1$ of $p = \frac{1 - \sqrt{9}}{4} = \frac{1 - 3}{4} = -\frac{1}{2}$ dus los op

  $\cos(x) = 1$ of $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ dus

  $x = 0 + 2k\pi$ of $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ of $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$

- **notatie $\cos^2(x)$** betekent $(\cos(x))^2$ gebruik dit om formule in de grafische rekenmachine in te voeren

goniometrische ongelijkheden exact oplossen voorbeelden

- **$\sin(x) \cdot \cos(x) < \sin^2(x)$** op interval $x \in [0, 2\pi]$

  op 0 herleiden, sin(x) buiten haakjes halen, ontbinden

  $\sin(x) \cdot \cos(x) - \sin^2(x) = 0$

  $\sin(x) \cdot (\cos(x) - \sin(x)) = 0$

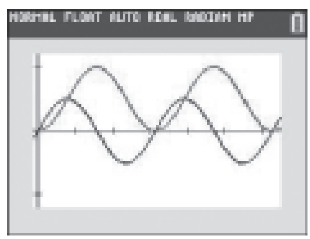
  $\sin(x) = 0$ of $\sin(x) = \cos(x)$

  $x = 0 + k\pi$, $x = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi$ of $x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$ dus

  $x = \frac{5}{4}\pi + k\pi$ en $x \in [0, 2\pi]$

  dus $x = 0$ of $x = \frac{1}{4}\pi$ of $x = \pi$ of $x = \frac{5}{4}\pi$ of $x = 2\pi$

  conclusie: $x \in \langle 0, \frac{1}{4}\pi \rangle \cup \langle \pi, 1\frac{1}{4}\pi \rangle$ (zie plot)



- **$2\sin^2(x) - \sin(x) < 0$** op interval $x \in [0, 2\pi]$:

  sin(x) buiten haakjes halen, ontbinden

  $\sin(x) \cdot (2\sin(x) - 1) = 0$

  $\sin(x) = 0$ of $2\sin(x) = 1$

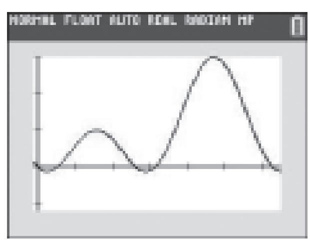
  $\sin(x) = 0$ of $\sin(x) = \frac{1}{2}$

  $x = 0 + k\pi$ of $x = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi$ of

  $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ en $x \in [0, 2\pi]$

  dus $x = 0$ of $x = \frac{1}{6}\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi$ of $x = \pi$

  conclusie: $x \in \langle 0, \frac{1}{6}\pi \rangle \cup \langle \frac{5}{6}\pi, \pi \rangle$ (zie plot)



4.21 geef alle exacte oplossingen voor $x \in [0, 2\pi]$

a $\cos^2(x) = 1$

b $\sin^2(x) = \frac{1}{2}$

c $2\cos^2(x) + \cos(x) = 0$

d $2\cos(x)\sin(x) - \sin(x) = 0$

e $\sin^3(x) - \sin(x) = 0$

f $2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 = 0$

g $\cos^2(x) = \frac{3}{4}$

a $\cos^2(x) = 1$ dus $\cos(x) = 1$ of $\cos(x) = -1$ dus $x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi$

b $\sin^2(x) = \frac{1}{2}$ dus $\sin(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad x = \frac{1}{4}\pi \quad \vee \quad x = \frac{3}{4}\pi$

$\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad x = 1\frac{1}{4}\pi \quad \vee \quad x = 1\frac{3}{4}\pi$

c $2\cos^2(x) + \cos(x) = 0$ dus $\cos(x) \cdot (2\cos(x) + 1) = 0$ dus $\cos(x) = 0 \vee 2\cos(x) + 1 = 0$

$\cos(x) = 0$ dus $x = \frac{1}{2}\pi \quad \vee \quad x = 1\frac{1}{2}\pi$

$2\cos(x) = -1$ dus $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ dus $x = \frac{2}{3}\pi \quad \vee \quad x = 1\frac{1}{3}\pi$

d $2\cos(x)\sin(x) - \sin(x) = 0$ dus $\sin(x) \cdot (2\cos(x) - 1) = 0$ dus $\sin(x) = 0$ of $\cos(x) = \frac{1}{2}$. dus

$\sin(x) = 0$ dus $x = 0 \quad \vee \quad x = \pi \quad \vee \quad x = 2\pi$

$\cos(x) = \frac{1}{2}$ dus $x = \frac{1}{3}\pi \quad \vee \quad x = 1\frac{2}{3}\pi$

e $\sin^3(x) - \sin(x) = 0$ dus $\sin(x) \cdot (\sin^2(x) - 1) = 0$ dus $\sin(x) = 0$ of $\sin^2(x) = 1$

$\sin(x) = 0 \qquad x = 0 \quad \vee \quad x = \pi \quad \vee \quad x = 2\pi$

$\sin^2(x) = 1$ dus $\sin(x) = 1$ of $\sin(x) = -1 \qquad x = \frac{1}{2}\pi \quad \vee \quad x = 1\frac{1}{2}\pi$

f $2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 = 0$ los op met de *abc*-formule: $2s^2 - 3s + 1 = 0$

$a = 2$, $b = -3$ en $c = 1$ dus $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$

$s = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4}$ dus $\sin(x) = 1$ of $\sin(x) = \frac{1}{2}$

$\sin(x) = 1$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi \qquad \sin(x) = \frac{1}{2}$ geeft $x = \frac{1}{6}\pi \quad \vee \quad x = \frac{5}{6}\pi$

g $\cos^2(x) = \frac{3}{4}$ dus $\cos(x) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ of $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \qquad x = \frac{1}{6}\pi \quad \vee \quad x = 1\frac{5}{6}\pi$

$\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \qquad x = \frac{5}{6}\pi \quad \vee \quad x = 1\frac{1}{6}\pi$

4.22 oplossen ongelijkheid met exacte berekening

- $\cos^2(t) < 0{,}5\sin(2t)$ *met domein* $[0, 2\pi]$ *(maak plot)*

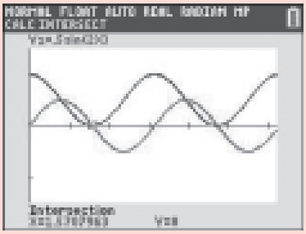
$\cos^2(t) = 0{,}5\sin(2t)$ dus $\cos^2(t) = \sin(t) \cdot \cos(t)$ (zie verdubbelingsformules) dus

$\cos^2(t) - \sin(t) \cdot \cos(t) = \cos(t)(\cos(t) - \sin(t)) = 0$ en $\cos(t) = 0$ of $\cos(t) = \sin(t)$

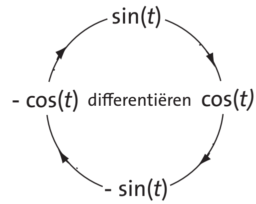
$t = \frac{\pi}{4} + k\pi$ of $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$

dus $t = \frac{1}{4}\pi$ of $t = 1\frac{1}{4}\pi$ of $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = 1\frac{1}{2}\pi$

conclusie: $\frac{1}{4}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$ of $1\frac{1}{4}\pi < t < 1\frac{1}{2}\pi$



afgeleide



- **als $x(t) = \sin(t)$** dan geldt $x'(t) = \cos(t)$
  - $\frac{d}{dt}\sin(t) = \cos(t)$

  voorbeeld met kettingregel

  - $x(t) = \sin(2t+1)$ dan geldt $x'(t) = 2 \cdot \cos(2t+1)$
- **als $x(t) = \cos(t)$** dan geldt $x'(t) = -\sin(t)$
  - $\frac{d}{dt}\cos(t) = -\sin(t)$

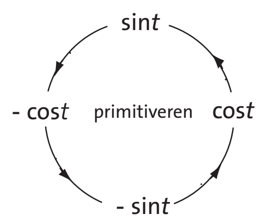
  voorbeeld met kettingregel

  - $x(t) = \cos(t^2)$ dan geldt $x'(t) = 2t \cdot -\sin(t^2) = -2t \cdot \sin(t^2)$
- **als $x(t) = \tan(t)$** dan geldt $x'(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$ en $x'(t) = 1 + \tan^2(t)$

  gebruik $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$ *en differentieer met behulp van de quotiëntregel*

  - $\frac{d\tan(t)}{dt} = \frac{1}{\cos^2(t)}$
  - $\frac{d}{dt}\tan(t) = 1 + \tan^2(t)$

primitieve



- **als $x(t) = \sin(t)$** dan geldt primitieve $X(t) = -\cos(t) + c$

  voorbeeld met kettingregel

  $x(t) = \sin(2t+1)$ dan geldt $X(t) = -\frac{1}{2} \cdot \cos(2t+1) + c$
- **als $x(t) = \cos(t)$** dan geldt $X(t) = \sin(t)$

  voorbeeld met kettingregel

  $x(t) = 3t \cdot \cos(t^2)$ dan geldt $X(t) = \frac{3}{2} \cdot \sin(t^2) + c$
- bij het primitiveren van ingewikkelder goniometrische functies wordt vaak gebruikgemaakt van verdubbelingsformules enz.

  voorbeeld primitiveren met verdubbelingsformule

  $x(t) = \cos^2(t)$ dan $x(t) = \frac{1}{2} \cdot \cos(2t) + \frac{1}{2}$ (want $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$)

  dan geldt $X(t) = \frac{1}{4} \cdot \sin(2t) + \frac{1}{2}t + c$

4.23 bepaal de afgeleide

a $y = \frac{1}{2}\sin(4x)$ *b* $y = \sin^2(3x)$ *c* $y = \sin(x) \cdot \cos(x)$ *d* $y = \frac{1}{\sin(x)}$

a $y' = \frac{1}{2}\cos(4x) \cdot 4 = 2\cos(4x)$ (kettingregel)

b $y' = 2\sin(3x) \cdot \cos(3x) \cdot 3 = 6\sin(3x) \cdot \cos(3x) = 3\sin(6x)$ (kettingregel, verdubbelingsformule)

c $y' = -\sin^2(x) + \cos^2(x)$ (productregel) of
herschrijf $y = \sin(x) \cdot \cos(x) = 0{,}5\sin(2x)$ dus $y' = 0{,}5 \cdot 2\cos(2x) = \cos(2x)$ (kettingregel)

d $y = \sin^{-1}(x)$ dus $y' = -\sin^{-2}(x) \cdot \cos(x) = \frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}$ (kettingregel)

4.24 bepaal de afgeleide

a $y = 3x^2 + 5\sin\left(4x - \frac{1}{3}\pi\right)$ *b* $y = 2x^2 \cdot \sin\left(3x + \frac{1}{6}\pi\right)$ *c* $y = 5\sin^3(x^2)$

d $y = 4\tan^3(x)$ *e* $y = \frac{1 - 2\sin(x)}{3 - \cos(2x)}$ *f* $y = \frac{3}{5\cos^6(2x)}$

a $y' = 6x + 5 \cdot 4\cos\left(4x - \frac{1}{3}\pi\right) = 6x + 20\cos\left(4x - \frac{1}{3}\pi\right)$ (kettingregel)

b gebruik de productregel
$y' = 4x \cdot \sin\left(3x + \frac{1}{6}\pi\right) + 2x^2 \cdot 3\cos\left(3x + \frac{1}{6}\pi\right) = 4x \cdot \sin\left(3x + \frac{1}{6}\pi\right) + 6x^2 \cdot \cos\left(3x + \frac{1}{6}\pi\right)$

c $y = 5\left(\sin(x^2)\right)^3$
$y' = 5 \cdot 3\left(\sin(x^2)\right)^2 \cdot \cos(x^2) \cdot 2x = 30x \cdot \sin^2(x^2) \cdot \cos(x^2)$ (kettingregel (twee maal))

d $y = 4\left(\tan(x)\right)^3$
$y' = 4 \cdot 3 \cdot (\tan(x))^2 \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} = 12 \cdot \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{12\sin^2(x)}{\cos^4(x)}$ (kettingregel)

e $y = \frac{1 - 2\sin(x)}{3 - \cos(2x)}$
$y' = \frac{(3 - \cos(2x)) \cdot -2\cos(x) - (1 - 2\sin(x)) \cdot 2\sin(2x)}{(3 - \cos(2x))^2}$ (quotiëntregel)

f $y = \frac{3}{5\cos^6(2x)} = \frac{3}{5}(\cos(2x))^{-6}$

$y' = \frac{3}{5} \cdot -6 \cdot (\cos(2x))^{-5} \cdot -\sin(2x) \cdot 2 = \frac{36}{5}(\cos(2x))^{-5} \cdot \sin(2x) = \frac{36\sin(2x)}{5\cos^5(2x)}$ (kettingregel)

4.25 bepaal de primitieve

a $f(x) = \frac{1}{2}\sin(4x)$ *b* $g(x) = \sin^2(3x)$ *c* $h(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

a $F(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\cos(4x) + c = -\frac{1}{8} \cdot \cos(4x) + c$ (kettingregel)

b denk aan $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$, dus $g(x) = \sin^2(3x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(6x)$ dus $G(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12} \cdot \sin(6x)$
(verdubbelingsformules)

c $h(x) = \sin(x) \cdot \cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ dus $H(x) = -\frac{1}{4}\cos(2x)$ (verdubbelingsformules)

samengestelde trilling

- **$f(x) = \sin(ax) + \sin(bx)$** met $a \neq b$ is een samengestelde trilling

  twee manieren om een (gemeenschappelijke) periode te bepalen.

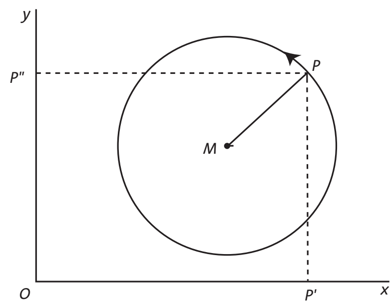
  - **de periode bepalen** van $f(x) = \sin(6x) + \sin(4x)$. De periode van $u = \sin(6x)$ is $\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$
    en de periode van $v = \sin(4x)$ is $\frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$
    schrijf de periodes met de zelfde noemer: $\frac{1}{3}\pi = \frac{2}{6}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi = \frac{3}{6}\pi$
    het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van 2 en 3 is 6
    de (gemeenschappelijke) periode is $\frac{6}{6}\pi = \pi$
  - **de periode bepalen** van $f(x) = \sin(6x) + \sin(4x)$
    de $6x$ en de $4x$ zijn beide deelbaar door 2
    de (gemeenschappelijke) periode is $\frac{2\pi}{2} = \pi$

cirkelbeweging

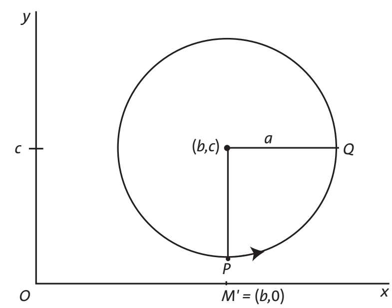
- **harmonische beweging** is een periodieke beweging ook wel trilling genoemd, om een evenwichtspunt, zodat de grafiek een sinusoïde is

  voorbeeld

  P doorloopt een cirkel met constante snelheid. Dan zijn de projecties van P op de x-as en de y-as harmonische bewegingen.



- **periodieke beweging** van P' (projectie van P op de x-as) noemen we u



  - **formule** $u(t) = b + a \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t - d)\right)$
    - b evenwichtsstand
    - a amplitude is de straal van de cirkel
    - T trillingstijd of periode; de tijd nodig om één keer de cirkel rond te komen
    - d tijdstip waarop het punt door de evenwichtsstand gaat
  - **faseverschil** $\frac{d}{\text{periode}} = \frac{d}{T}$ is het faseverschil met een punt dat op $t = 0$ stijgend (met dezelfde snelheid als P) door de evenwichtsstand gaat
    oftewel: het hoeveelste deel van een periode het punt achter of voor loopt
  - **snelheid** van $P = \frac{\text{omtrek cirkel}}{T} = \frac{2\pi r}{T}$
  - **hoeksnelheid** ω van P is de hoek (het aantal radialen) waaronder P per tijdseenheid draait $\omega = \frac{2\pi}{T}$

4.26 **samengestelde trilling**

- *Bepaal de periode van $f(x) = \sin(6x) + \sin(9x) + \sin(24x)$.*

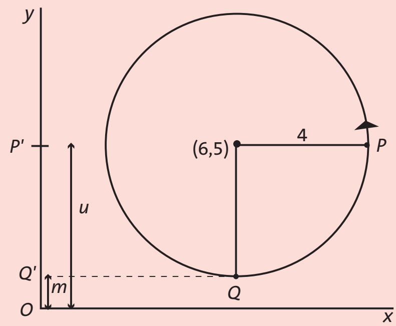
Periodes van de afzonderlijke delen zijn $\frac{2\pi}{6} = \frac{12}{36}\pi$, $\frac{2\pi}{9} = \frac{8}{36}\pi$ en $\frac{2\pi}{24} = \frac{1}{12}\pi = \frac{3}{36}\pi$

Het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van de tellers 12, 8 en 3 is 24

Dus de gemeenschappelijke periode is $\frac{24}{36}\pi = \frac{2}{3}\pi$

4.27 **punt *P* cirkelbeweging**

Punt *P* doorloopt een cirkel met een constante snelheid tegen de klok in.
Op $t = 0$ bevindt *P* zich op de plaats in de figuur.
P is in precies 6 seconden één keer rond;
P' is de projectie van *P* op een verticaal scherm en $OP' = u$.
Punt *Q* doorloopt dezelfde cirkel met dezelfde snelheid en in dezelfde richting als *P*.
Op $t = 0$ bevindt *Q* zich op de plaats in de figuur.
Q' is de projectie van *Q* op een verticaal scherm en $OQ' = m$



a *Geef een formule voor u als functie van t.*

b *Geef een formule voor m als functie van t.*

c *Bepaal de snelheid van P in m/sec.*

a De formule is van de vorm $u = b + a\sin\left(\frac{2\pi}{T}(t - d)\right)$

evenwichtsstand $b = 5$ en straal van de cirkel $= a = 4$

$T = 6$ (tijd om precies één keer rond te gaan)

stijgend door de evenwichtsstand op $t = 0$ dus $d = 0$

$u = 5 + 4\sin\left(\frac{2\pi}{6}t\right)$

b $T = 6$ dus *Q* legt $\frac{1}{4}$ cirkel af in 1,5 sec. dus op $t = 1{,}5$ gaat *Q* stijgend door de evenwichtsstand oftewel $d = 1{,}5$

de formule wordt: $m = 5 + 4\sin\left(\frac{2\pi}{6}(t - 1{,}5)\right)$

c snelheid $= \frac{\text{omtrek cirkel}}{T} = \frac{2\pi \cdot 4}{6} \approx 4{,}19$ m/sec

cirkelbeweging en bewegingsformules

- **bewegingsformules** voor een punt $P(x, y)$ in het Oxy-vlak dat met een hoeksnelheid van 1 rad/sec de eenheidscirkel doorloopt, zijn

  $$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$$

  - komt overeen met vergelijking cirkel $x^2 + y^2 = 1$
- **bewegingsformules** voor een punt $P(x, y)$ in het Oxy-vlak dat met een hoeksnelheid van ω rad/sec een cirkel doorloopt met middelpunt (a, b) en straal r zijn

  $$\begin{cases} x(t) = a + r\cos(\omega t) \\ y(t) = b + r\sin(\omega t) \end{cases}$$

  - komt overeen met vergelijking cirkel $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
  - ω (omega) geeft de hoeksnelheid aan
- **eenparige cirkelbeweging** als punt met constante snelheid cirkel doorloopt dus als

  $$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \text{constant}$$

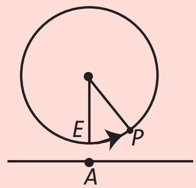
- **periode** $= \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{\text{frequentie}}$ en periode $\cdot\ \omega = 2\pi$
- **omlooptijd** en periode zijn hetzelfde
- **parametervoorstelling** de twee bewegingsformules samen vormen de parametervoorstelling, gebruikt een hulpvariabele, meestal t
  - **heeft de vorm** $x = f(t)$ en $y = g(t)$ of $\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}$ bijvoorbeeld $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$
- **parameterkromme** is de grafiek bij een parametervoorstelling
- **vergelijking van een parameterkromme** kun je ook schrijven met behulp van vectoren (zie hoofdstuk 7)

4.28 omlooptijd

Punt P maakt een cirkelbeweging met constante snelheid.

Projectie van P op de horizontale lijn door A wordt P' genoemd.

$P'A = 2\sin\left(\frac{2}{3}(t+1)\right)$ met t in seconden



a *Bepaal de omlooptijd T van P in seconden nauwkeurig.*

b *Geef in de tekening aan waar P zich bevindt op $t = 0$.*

a T = periode = $\dfrac{2\pi}{\frac{2}{3}}$ = 9,4 dus T is ongeveer 9 seconden.

b op $t = -1$ gaat P door evenwichtsstand in punt E; één keer rond is 360°, dit duurt 9,4 seconden, dus in 1 seconde legt P ongeveer 38° af.

4.29 cirkel

Een punt P beweegt over een cirkel met straal 2 en middelpunt (3, 5)

op $t = 0$ is P in het punt $(4, 5 - \sqrt{3})$

periode is 0,5

- *Geef de bijbehorende bewegingsformule voor P en bepaal de hoeksnelheid.*

periode · hoeksnelheid = 2π dus hoeksnelheid = 4π

punt P beweegt volgens $\begin{cases} x(t) = 3 + 2\cos(4\pi(t-a)) \\ y(t) = 5 + 2\sin(4\pi(t-a)) \end{cases}$

punt $(4, 5 - \sqrt{3})$ en $t = 0$ invullen geeft

$3 + 2\cos(4\pi(0-a)) = 4$ en $5 + 2\sin(4\pi(0-a)) = 5 - \sqrt{3}$

$\cos(-4\pi a) = 0{,}5$ en $\sin(-4\pi a) = -0{,}5\sqrt{3}$

je weet dat $\cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = 0{,}5$ en $\sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = -0{,}5\sqrt{3}$ dus $-4\pi a = -\frac{1}{3}\pi$ dus $a = \frac{1}{12}$

richting waarin P loopt is positief; tegen de wijzers van de klok in

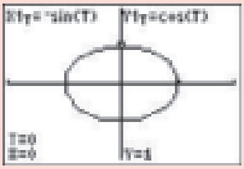
4.30 startpunt en draairichting

Punt P beweegt volgens $\begin{cases} x(t) = -\sin(t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$ en punt Q beweegt volgens $\begin{cases} x(t) = -\cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$

- *Geef voor punt P en punt Q de startpositie en de draairichting*

$t = 0$ invullen geeft voor P punt (0, 1) en voor punt Q (–1, 0)

$t = 0{,}5\pi$ is een kwart periode verder invullen geeft voor P punt (–1, 0) en voor punt Q (0, 1)

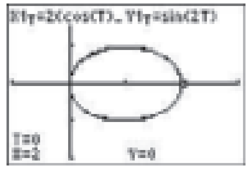


conclusie: P heeft een positieve draairichting en Q heeft een negatieve draairichting (zie ook plot voor P)

cirkel

■ **bewegingsformules** $\begin{cases} x(t) = r \cdot \cos(\omega t) \\ y(t) = r \cdot \sin(\omega t) \end{cases}$

■ komt overeen met vergelijking cirkel $x^2 + y^2 = r^2$



voorbeeld

een punt P beweegt volgens $\begin{cases} x(t) = 2\cos^2(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$ en snijdt

de lijn $y = x$ als $\sin(2t) = 2\cos^2(t)$

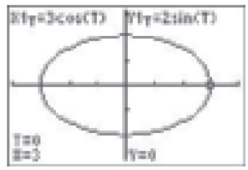
dus $2\cos(t) \cdot \sin(t) = 2\cos^2(t)$ dus

$\cos(t)(\cos(t) - \sin(t)) = 0$ dus $\cos(t) = 0$ of $\cos(t) = \sin(t)$

conclusie: $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ of $t = \frac{\pi}{4} + k\pi$

ellips

■ **bewegingsformules** $\begin{cases} x(t) = a \cdot \cos(t) \\ y(t) = b \cdot \sin(t) \end{cases}$ $(a \neq b)$

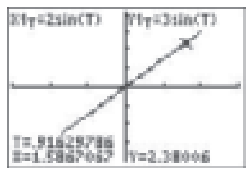


■ komt overeen met vergelijking ellips $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

■ komt overeen met vergelijking cirkel als $a = b$

rechte

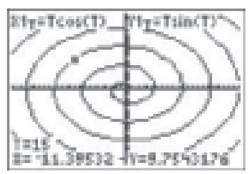
■ **bewegingsformules** $\begin{cases} x(t) = a \cdot \sin(\omega t) \\ y(t) = b \cdot \sin(\omega t) \end{cases}$



■ komt overeen met deel van de lijn $y = \frac{b}{a}x$

spiraal van Archimedes

■ **bewegingsformules** $\begin{cases} x(t) = t \cdot \cos(t) \\ y(t) = t \cdot \sin(t) \end{cases}$



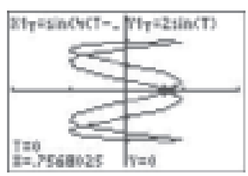
Lissajous-figuur

■ **bewegingsformules** $\begin{cases} x(t) = a + b\sin(m(t + \alpha)) \\ y(t) = c + d\sin(n(t + \beta)) \end{cases}$

■ **Lissajous-figuur** is een trillingspatroon; ontstaat als resultante van twee harmonische trillingen langs onderling loodrechte richtingen (assen)

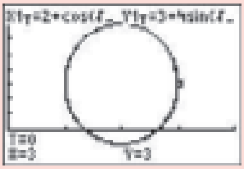
■ **sinusoïden** x en y zijn beiden sinusoïden

■ $\boldsymbol{b \neq d}$ als trillingen in amplitude verschillen dan is de Lissajous-figuur in één richting uitgerekt



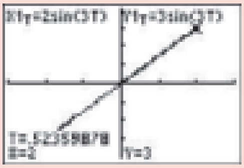
4.31 ellips

Punt P beweegt volgens $\begin{cases} x(t) = 2 + \cos(\sqrt{t}) \\ y(t) = 3 + 4\sin(\sqrt{t}) \end{cases}$



- *Beschrijf de figuur*
- ellips, lengte horizontale as is 2, lengte verticale as is 8
- x ligt tussen 1 en 3 en y ligt tussen –1 en 7
- centrum (2, 3)

4.32 rechte



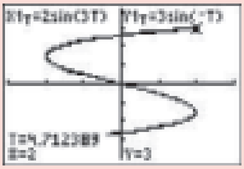
a *Schets de figuur van* $\begin{cases} x(t) = 2 \cdot \sin(3t) \\ y(t) = 3 \cdot \sin(3t) \end{cases}$

b *Schets de figuur van* $\begin{cases} x(t) = 2 \cdot \sin(3t) \\ y(t) = 3 \cdot \sin(-t) \end{cases}$

a figuur is een deel van de rechte lijn $y = 1{,}5x$ met beginpunt (–2, –3) en eindpunt (2, 3)

b belangrijkste punten zijn

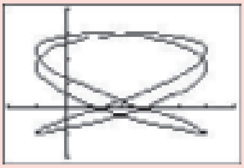
t	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$1\frac{1}{6}\pi$	$1\frac{1}{2}\pi$	$1\frac{5}{6}\pi$	2π
x	0	2	–2	2	0	–2	2	–2	0
y	0	–1,5	–3	–1,5	0	1,5	3	1,5	0



de punten (–2, –3) en (2, 3) zijn keerpunten (zie ook H7)

4.33 Lissajous

Gegeven is de kromme K $\begin{cases} x(t) = 2 + 3\sin\left(\frac{1}{2}\pi\left(t - \frac{1}{6}\right)\right) \\ y(t) = 1 + 2\cos\left(\frac{1}{3}\pi\left(t - \frac{1}{3}\right)\right) \end{cases}$



a *Bepaal de periode van de beweging van K.*

b *Bepaal exact de snijpunten van K met de x-as.*

c *Hoe vaak snijdt de kromme de x-as in één periode.*

a De periode van x is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$ en de periode van y is $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 6$ dus de periode van K is 12.

b $y = 0$ dus $1 + 2\cos\left(\frac{1}{3}\pi\left(t - \frac{1}{3}\right)\right) = 0$ dus $\cos\left(\frac{1}{3}\pi\left(t - \frac{1}{3}\right)\right) = -\frac{1}{2}$ dus

$\frac{1}{3}\pi\left(t - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ of $\frac{1}{3}\pi\left(t - \frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ dus

$t - \frac{1}{3} = 2 + 6k$ of $t - \frac{1}{3} = -2 + 6k$ dus

$t = 2\frac{1}{3} + 6k$ of $t = -1\frac{2}{3} + 6k$

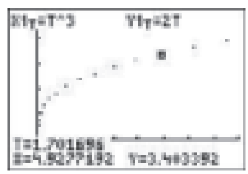
c 4 keer nl. voor $t = 2\frac{1}{3}$, $t = 4\frac{1}{3}$, $t = 8\frac{1}{3}$ en $t = 10\frac{1}{3}$

afstand

- **afstand** $P(x, y)$ tot $O(0, 0)$
  - **op tijdstip t** t invullen in $OP = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$
- **grootste afstand** van $P(x, y)$ tot $O(0, 0)$
  - **berekenen** met $OP = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ is maximaal
    dus als $x^2(t) + y^2(t)$ is maximaal
    dus als $(x^2(t) + y^2(t))' = 0$
  - **beredeneren** met maximum of minimum van $\sin(t)$ en $\cos(t)$ is 1 of –1
  - **benaderen**
    - **TI-84** plot $y_1 = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2}$ en CALC en 4: maximum
    - **CASIO** plot $y_1 = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2}$ en SHIFT G-Solv MAX

snelheid

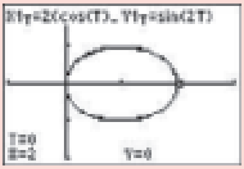
- **richting** van de snelheid van een punt P met positie $P((x(t), y(t))$ valt langs de raaklijn in dat punt $P((x(t), y(t))$
- **snelheid** van $P((x(t), y(t))$ op tijdstip t
  - berekenen met $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ en t invullen



- **zichtbaar maken** op grafische rekenmachine
  - **TI-84** MODE en Dot levert een stippellijn waarbij een grotere afstand tussen de stippen naar een grotere snelheid verwijst
    met Tstep (WINDOW) stapafstand instellen
  - **CASIO** SHIFT SET UP kies Draw Type : plot, dit levert een stippellijn waarbij een grotere afstand tussen de stippen naar een grotere snelheid verwijst
    met pitch (SHIFT V-Window) stapafstand instellen
- **maximale/minimale snelheid** van $P((x(t), y(t))$
  - **berekenen** met $v'(t) = 0$ dus $\left(\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\right)' = 0$
    dus $\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right)' = 0$ (zonder wortelteken)
    t invullen in $v(t)$ geeft de maximale/minimale snelheid
  - **beredeneren** met het maximum of minimum van $\sin(t)$ en $\cos(t)$ is 1 of –1
  - **benaderen**
    - **TI-84** plot $y_1 = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ en CALC en 4: maximum
    - **CASIO** plot $y_1 = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ en SHIFT G-Solv MAX
- **baanversnelling** van $P((x(t), y(t))$ op tijdstip t
  - **berekenen** met $v'(t)$ waarbij $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$
  - **versnelling in de x-richting** is $x''(t)$ en in de y-richting is $y''(t)$

4.34 afstand

Een punt P beweegt volgens $\begin{cases} x(t) = 2\cos^2(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$



- *Bereken de grootst mogelijke afstand van P tot de oorsprong.*

afstand dus

$\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{4\cos^4(t) + \sin^2(2t)} = \sqrt{4\cos^4(t) + 4\sin^2(t)\cdot\cos^2(t)} =$

$\sqrt{4\cos^2(t)(\cos^2(t) + \sin^2(t))} = 2|\cos(t)|$ conclusie: grootst mogelijke afstand is 2

4.35 snelheid

Een punt P beweegt volgens $\begin{cases} x(t) = 2\cos^2(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$

a Bereken exact de snelheid op tijdstip $t = \frac{1}{6}\pi$

b Bereken exact de versnelling in de y-richting voor $t = \frac{1}{6}\pi$.

a $x'(t) = -4\cos(t)\cdot\sin(t)$ en $x'\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -4\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = -\sqrt{3}$

$y'(t) = 2\cos(2t)$ en $y'\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 2\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$

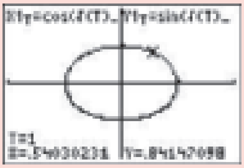
$v(t) = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

b $y(t) = \sin(2t)$ dus $y'(t) = 2\cos(2t)$ dus $y''(t) = -4\sin(2t)$ dus

de versnelling in de y-richting is $y''\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -4\sin\left(2\cdot\frac{1}{6}\pi\right) = -2\sqrt{3}$

4.36 snelheid

Punt P beweegt volgens $\begin{cases} x(t) = \cos(\sqrt{t}) \\ y(t) = \sin(\sqrt{t}) \end{cases}$ (zie plot)



- *Bereken exact voor welke t geldt v(t) = 1.*

$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{\left(\frac{-\sin(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}\right)^2 + \left(\frac{\cos(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}\right)^2} = \sqrt{\frac{(\sin^2(\sqrt{t}) + \cos^2(\sqrt{t})}{4t}}$

$v(t) = \sqrt{\frac{1}{4t}} = 1$ dus als $t = \frac{1}{4}$

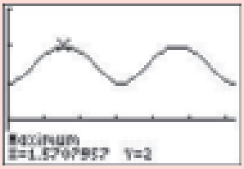
4.37 maximale snelheid

Punt P beweegt volgens $\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$

- *Bereken exact voor welke t de snelheid van P maximaal is.*

$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(-2\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} = \sqrt{4\sin^2(t) + \cos^2(t)} = \sqrt{3\sin^2(t) + 1}$

$v(t)$ maximaal dus $v'(t) = 0$ dus ook $(3\sin^2(t) + 1)' = 0$ (zonder wortelteken)



$v(t)$ is maximaal of minimaal als $2\cdot 3\cdot\sin(t)\cdot\cos(t) = 0$

dus als $t = 0 + \frac{1}{2}k\pi$

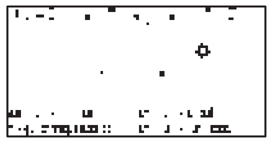
$v(t)$ is maximaal als $t = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ zie plot van $v(t)$

uiterste waarden

- **berekenen**
  - **hoogste of laagste punt** $y'(t) = 0$ want $y(t)$ is maximaal of minimaal
  - **meest linkse of rechtse punt** $x'(t) = 0$ want $x(t)$ is maximaal of minimaal
- **beredeneren** uiterste waarden beredeneren met behulp van maximale waarde van $\sin(t)$ en $\cos(t)$ is 1 en minimale waarde van $\sin(t)$ en $\cos(t)$ is -1
- **benaderen** met de grafische rekenmachine zie H8 en H9

helling of richting van de raaklijn aan parameterkromme

- **berekenen** met $\frac{dy}{dt}$ delen door $\frac{dx}{dt}$ oftewel $\frac{y'}{x'}$
- **verticale raaklijn** als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$
- **horizontale raaklijn** als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$
- **grafische rekenmachine**
  - **TI-84** 2nd CALC in grafiekenscherm t = ... invoeren geeft gevraagde waarde van de helling
  - **CASIO** SHIFT SET UP kies Derivative : On, als met SHIFT Trace over de kromme wordt gelopen komt automatisch ook de richtingscoëfficiënt op het scherm



keerpunt

- **berekenen**
  - **$x'(t) = 0$ én $y'(t) = 0$** want bij keerpunt geldt $v(t) = 0$ dus $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = 0$ dus $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 0$ én dus $x'(t) = 0$ én $y'(t) = 0$
    - let op: $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$ dan verticale raaklijn/buigpunt
    - let op: $x'(t) \neq 0$ en $y'(t) = 0$ dan horizontale raaklijn/buigpunt
- **helling keerpunt** benaderen met $\frac{y'}{x'}$ of met behulp van $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ en $\frac{\Delta y}{\Delta t}$
  - bereken het keerpunt en de bijbehorende t waarde: $t = a$
  - benader de helling met behulp van het differentiequotiënt tussen het punt met $t = a$ en $t = a + 0{,}001$ of door $t = a + 0{,}001$ in te vullen in $\frac{y'}{x'}$

voorbeeld

- bepaal helling in het keerpunt met $t = \frac{1}{2}\pi$ van $\begin{cases} x(t) = \sin^2(t) \\ y(t) = 4\sin(t) \end{cases}$

keerpunt want $x'\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0$ en $y'\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 4\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0$

benadering helling door $t = \frac{1}{2}\pi + 0{,}001$ in te vullen in

$$\frac{y'}{x'} = \frac{4\cos(t)}{2\sin(t) \cdot \cos(t)} = \frac{2}{\sin(t)} = \frac{2}{\sin\left(\frac{1}{2}\pi + 0{,}001\right)} \approx 2$$

conclusie: de helling in het keerpunt met $t = \frac{1}{2}\pi$ is bij benadering 2.

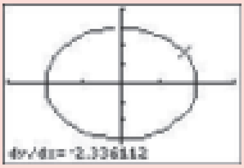
4.38 **snelheid en richting**

Een punt P beweegt volgens $\begin{cases} x(t) = 2\sin(t) \\ y(t) = 3\cos(t) \end{cases}$

a *Bereken de snelheid van P in het hoogste punt.*

b *Benader in twee decimalen de richting van de parameter kromme als t = 1.*

a hoogste punt als $y(t) = 3\cos(t)$ is maximaal, dus $t = 0$



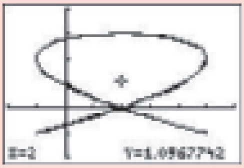
$x'(0) = 2\cos(0) = 2$ en $y'(0) = -3\sin(0) = 0$

gevraagde snelheid $= \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

b helling $= \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{y'(1)}{x'(1)} = \dfrac{-3\sin(1)}{2\cos(1)} \approx -2{,}34$

4.39 **keerpunt en helling**

Gegeven is de kromme K $\begin{cases} x(t) = 2 + 3\sin\left(\frac{1}{2}\pi\left(t - \frac{1}{6}\right)\right) \\ y(t) = 1 + 2\cos\left(\frac{1}{3}\pi\left(t - \frac{1}{6}\right)\right) \end{cases}$



a *Bereken exact de coördinaten van de keerpunten.*

b *Bepaal de helling in het rechter keerpunt.*

a keerpunt als $x'(t) = 0$ en $y'(t) = 0$

$x'(t) = 1\frac{1}{2}\pi\cos\left(\frac{1}{2}\pi\left(t - \frac{1}{6}\right)\right) = 0$ dus $\cos\left(\frac{1}{2}\pi\left(t - \frac{1}{6}\right)\right) = 0$ dus

$\frac{1}{2}\pi\left(t - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}\pi + k\pi$

$t - \frac{1}{6} = 1 + 2k$ dus $t = 1\frac{1}{6} + 2k$

$y'(t) = -\frac{2}{3}\pi\sin\left(\frac{1}{3}\pi\left(t - \frac{1}{6}\right)\right) = 0$ dus $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\left(t - \frac{1}{6}\right)\right) = 0$ dus

$\frac{1}{3}\pi\left(t - \frac{1}{6}\right) = 0 + k\pi$

$t - \frac{1}{6} = 0 + 3k$ dus $t = \frac{1}{6} + 3k$

dus $x'(t) = 0$ en tegelijkertijd $y'(t) = 0$ als $t = 3\frac{1}{6}$ en $t = 9\frac{1}{6}$

keerpunten zijn $\begin{cases} x\left(3\frac{1}{6}\right) = 2 + 3\sin\left(\frac{1}{2}\pi\left(3\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)\right) = -1 \\ y\left(3\frac{1}{6}\right) = 1 + 2\cos\left(\frac{1}{3}\pi\left(3\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)\right) = -1 \end{cases}$ dus $(-1, -1)$

$\begin{cases} x\left(9\frac{1}{6}\right) = 2 + 3\sin\left(\frac{1}{2}\pi\left(9\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)\right) = 5 \\ y\left(9\frac{1}{6}\right) = 1 + 2\cos\left(\frac{1}{3}\pi\left(9\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)\right) = -1 \end{cases}$ dus $(5, -1)$

b helling in $(5, -1)$ dus als $t = 9\frac{1}{6}$:

kies een t-waarde dicht bij $t = 9\frac{1}{6}$ bijvoorbeeld $t = 9\frac{1}{6} + 0{,}001$

$x'\left(9\frac{1}{6} + 0{,}001\right) = 1\frac{1}{2}\pi\cos\left(\frac{1}{2}\pi\left(9\frac{1}{6} + 0{,}001 - \frac{1}{6}\right)\right) \approx -0{,}0074$

$y'\left(9\frac{1}{6} + 0{,}001\right) = -\frac{2}{3}\pi\sin\left(\frac{1}{3}\pi\left(9\frac{1}{6} + 0{,}001 - \frac{1}{6}\right)\right) \approx 0{,}0022$

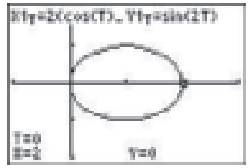
$\dfrac{y'}{x'} \approx \dfrac{0{,}0022}{-0{,}0074} \approx -0{,}296$

van bewegingsformule naar vergelijking met *x* en *y*

eerste manier

- **ga uit van** $\sin^2(at) + \cos^2(at) = 1$
  - **vervang sin(*at*) en cos(*at*)** in $\sin^2(at) + \cos^2(at) = 1$ zodat een vergelijking in *x* en *y* ontstaat

voorbeeld 1



- **punt *P* beweegt volgens** $\begin{cases} x(t) = 2\cos^2(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$
  - herschrijf $x(t) = 2\cos^2(t)$ en dus $\cos^2(t) = \frac{x}{2}$
  - herschrijf $y(t) = \sin(2t) = 2\sin(t) \cdot \cos(t)$

    dus $\sin(t) = \frac{y}{2\cos(t)}$ en $\cos(t) = \sqrt{\frac{x}{2}}$ dus $\sin(t) = \frac{y}{2 \cdot \sqrt{\frac{x}{2}}}$ dus $\sin^2(t) = \frac{y^2}{2x}$
  - vervang sin(*t*) en cos(*t*) in $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$

    $\frac{y^2}{2x} + \frac{x}{2} = 1$ levert $y^2 + x^2 = 2x$ en $x^2 - 2x + y^2 = 0$

    herschrijven tot $(x-1)^2 + y^2 = 1$ dus cirkel met middelpunt (1,0) en straal 1

voorbeeld 2

- **punt *P* beweegt volgens** $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \cdot \cos(t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$
  - herschrijf $y(t) = \cos(t)$ dus $\cos^2(t) = y^2$
  - herschrijf $x(t) = \sin(t) \cdot \cos(t)$ dus $\sin(t) = \frac{x}{\cos(t)} = \frac{x}{y}$ dus $\sin^2(t) = \frac{x^2}{y^2}$
  - vervang sin(*t*) en cos(*t*) in $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ dus $\frac{x^2}{y^2} + y^2 = 1$ of $x^2 + y^4 = y^2$

tweede manier met substitutie, herken de goniometrische formules

- **herschrijf** $x(t) = \ldots$ en $y(t) = \ldots$ en substitueer $x(t)$ in $y(t)$ of andersom

voorbeeld 1

- **punt *P* beweegt volgens** $\begin{cases} x(t) = 4\sin(t)\cos(t) + 1 \\ y(t) = 3\sin(2t) \end{cases}$
  - $x(t) = 2\sin(2t) + 1$ en $y(t) = 3\sin(2t)$ dus $y(t) = 1\frac{1}{2} \cdot x(t) - 1\frac{1}{2}$ dus $y = 1\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$

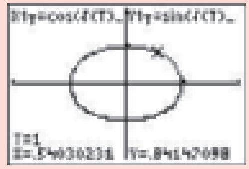
voorbeeld 2

- **punt *P* beweegt volgens** $\begin{cases} x(t) = 2\cos^2(t) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases}$
  - $y(t) = \cos(2t) = 2 \cdot \cos^2(t) - 1 = x(t) - 1$ dus $y = x - 1$

derde manier als de vergelijking al bekend is

- **substitueer** de bewegingsformules in de vergelijking (*x* en *y* vallen dan weg)
- **gebruik goniometrische formules** tot er een ware bewering ontstaat zoals 0 = 0

4.40 van bewegingsvergelijking naar vergelijking met *x* en *y*: cirkel

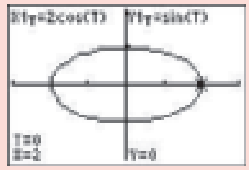


Punt P beweegt volgens $\begin{cases} x(t) = \cos(\sqrt{t}) \\ y(t) = \sin(\sqrt{t}) \end{cases}$ (zie plot)

- *Toon aan dat de bijbehorende grafiek een cirkel is.*

$x = \cos(\sqrt{t})$ en $y = \sin(\sqrt{t})$ vervang $\sin(\sqrt{t})$ $\cos(\sqrt{t})$ in
$\sin^2(\sqrt{t}) + \cos^2(\sqrt{t}) = 1$ geeft $y^2 + x^2 = 1^2$
conclusie: parameterkromme is een cirkel.

4.41 van bewegingsvergelijking naar vergelijking met *x* en *y*: ellips



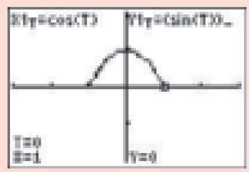
Punt P beweegt volgens $\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$ (zie plot)

- *Toon aan dat de bijbehorende grafiek een ellips is.*

herschrijf $x = 2\cos(t)$ en dus $\cos^2(t) = \dfrac{x^2}{4}$ en $y = \sin(t)$ en dus
$\sin^2(t) = y^2$ vervang $\sin(t)$ en $\cos(t)$ in $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ geeft $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$
conclusie: parameterkromme is een ellips

4.42 van bewegingsvergelijking naar vergelijking met *x* en *y*: parabool

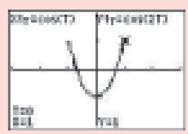
- *Laat zien dat de parameterkromme* $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin^2(t) \end{cases}$ *een deel van een parabool is.*



$x = \cos(t)$ dus $\cos^2(t) = x^2$ en $\sin^2(t) = y$
vervang $\cos(t)$ en $\sin(t)$ in $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ geeft $y + x^2 = 1$ dus
$y = -x^2 + 1$ dus parameterkromme is deel van een parabool

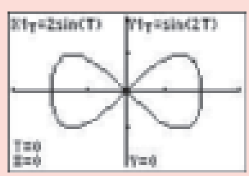
4.43 van bewegingsvergelijking naar vergelijking met *x* en *y*: parabool

- *Laat zien dat de parameterkromme* $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases}$ *een deel van een parabool is.*



$x = \cos(t)$ dus $\cos^2(t) = x^2$ en $y = \cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$ dus $\sin^2(t) = \dfrac{1-y}{2}$
vervang $\cos(t)$ en $\sin(t)$ in $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ dus $\dfrac{1-y}{2} + x^2 = 1$ dus
$y = 2x^2 - 1$
conclusie: parameterkromme is een deel van een parabool

4.44 bewegingsformules omschrijven naar *x* en *y*



- *Laat zien dat deze bewegingsformules* $\begin{cases} x(t) = 2\sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$ *voldoen aan de vergelijking* $x^4 - 4x^2 + 4y^2 = 0$

$16\sin^4(t) - 4 \cdot 4\sin^2(t) + 4 \cdot \sin^2(2t) =$
$16\sin^4(t) - 16\sin^2(t) + 16\cos^2(t)\sin^2(t) = 16\sin^4(t) - 16\sin^2(t) + 16(1 - \sin^2(t))\sin^2(t) =$
$16\sin^4(t) - 16\sin^2(t) + 16\sin^2(t) - 16\sin^4(t) = 0$ dus $x^4 - 4x^2 + 4y^2 = 0$

oppervlakte berekenen

- **herschrijf** tot $y(x)$ en werk bewegingsformules $\begin{cases} x(t) = \\ y(t) = \end{cases}$ om naar een vergelijking van de vorm $y(x) =$
- **bepaal primitieve** van $y(x)$ Bereken met de primitieve van $y(x)$ de oppervlakte van het gevraagde gebied of benader de oppervlakte met behulp van de grafische rekenmachine.

voorbeeld oppervlakte (begrensd door x-as en het deel van de grafiek dat boven de x-as ligt)

- **punt *P*** beweegt volgens $\begin{cases} x(t) = 2\sin(t) \\ y(t) = 3\cos(t) \end{cases}$ Bepaal de oppervlakte begrensd door x-as en het deel van de grafiek dat boven de x-as ligt.

  eerste methode herschrijf om naar y(x)=

  - herschrijf $x(t) = 2\sin(t)$ dus $\sin(t) = \frac{x}{2}$ en $\sin^2(t) = \left(\frac{x}{2}\right)^2$

    $y(t) = 3\cos(t)$ dus $\cos(t) = \frac{y}{3}$ en $\cos^2(t) = \left(\frac{y}{3}\right)^2$
  - vervang $\sin(t)$ en $\cos(t)$ in $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ dus $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$

    herschrijven tot $y = \sqrt{9\left(1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)} = 3\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$
  - benader de oppervlakte $= 3\int_{-2}^{2}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = 9{,}42$
    - TI-84 gebruik in basisscherm MATH MATH 9: fnInt(

      vul op de puntjes de gegevens in: $\int_{\ldots}^{\ldots} \ldots\, d\ldots = \int_{-2}^{2}\sqrt{\left(1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}\,dx$
    - CASIO gebruik in RUN menu OPTN CALC $\int$ dx:

      tik in: $\int\left(\sqrt{\left(1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}, -2, 2\right) \cdot 3$

  tweede methode beredeneer

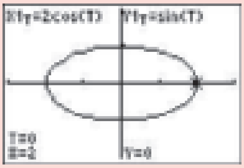
  - de parameterkromme $\begin{cases} x(t) = 2\sin(t) \\ y(t) = 3\cos(t) \end{cases}$ heeft de vorm van een ellips
  - de ellips ontstaat uit de eenheidscirkel door een verticale vermenigvuldiging met 3 en een horizontale vermenigvuldiging met 2
  - oppervlakte van de cirkel is dus met 6 vermenigvuldigd

    de oppervlakte van de eenheidscirkel is π

    dus de oppervlakte van de halve ellips is 3π

4.45 oppervlakte ellips

Punt P beweegt volgens $\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$

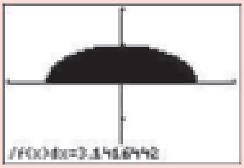


a Benader de oppervlakte van de ellips in twee decimalen nauwkeurig.

b Wat is waarschijnlijk het exacte antwoord? Verklaar dit.

a Herschrijf de bewegingsformule tot $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ dus

vergelijking bovenste helft is $y = \sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2}$;



snijpunten x-as: (–2, 0) en (2, 0)

oppervlakte bovenste helft $\int_{-2}^{2} \sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2}\, dx$

oppervlakte totaal benaderen met bv.

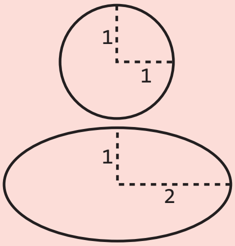
TI-84: basisscherm met MATH 9: fnINT(

$2 \cdot \text{fnInt}\left(\sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2}, x, -2, 2\right)$ levert 6,2831 dus oppervlakte ellips is 6,28

CASIO in basisscherm met OPTN CALC $\int(\sqrt{(1 - 0{,}25x^2)}, -2{,}2) \times 2 = 6{,}28$

b Echte oppervlakte ellips is waarschijnlijk 2π

ellips = $\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$



alle x-coördinaten worden twee keer zo groot als bij de cirkel, dus ook de oppervlakte wordt twee keer zo groot

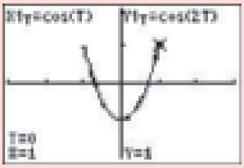
oppervlakte cirkel = π dus oppervlakte ellips = 2π

4.46 oppervlakte berekenen

$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases}$

- *Bereken de exacte oppervlakte tussen parameterkromme en de x-as.*

Herschrijf de bewegingsformule tot $y = 2x^2 - 1$ (zie opg. 4.43)



snijpunten x-as zijn $(-\sqrt{0{,}5}, 0)$ en $(\sqrt{0{,}5}, 0)$

oppervlakte = $-\int_{-\sqrt{0,5}}^{\sqrt{0,5}} (2x^2 - 1)\, dx = -\left[\frac{2}{3}x^3 - x\right]_{-\sqrt{0,5}}^{\sqrt{0,5}} =$

$-\left(\left(\frac{2}{3} \cdot 0{,}5 \cdot \sqrt{0{,}5} - \sqrt{0{,}5}\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 0{,}5 \cdot -\sqrt{0{,}5} + \sqrt{0{,}5}\right)\right) = 1\frac{1}{3}\sqrt{0{,}5}$

snelheid

- $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ met $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

versnelling van $P((x(t), y(t))$ op tijdstip t

- **$v'(t)$** waarbij $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$
  - **versnelling** in de x-richting is $x''(t)$ en in de y-richting is $y''(t)$

baanlengte parameterkromme berekenen

- **baanlengte over interval** $[a, b]$ is $L = \int_a^b v(t)\,dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$ met $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

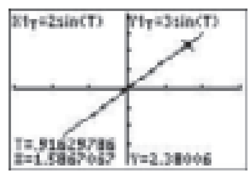
of

- **herschrijf** tot een vergelijking van de vorm $y(x) = ...$

  werk bewegingsformules $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ om naar $y(x) = ...$ dus zonder t

- **lengte** $= \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$ lengte van grafiek over het interval $[a, b]$

  voorbeeld lengte

  - **punt P beweegt volgens** $\begin{cases} x(t) = 2\sin(t) \\ y(t) = 3\sin(t) \end{cases}$
  - **herschrijf** tot $y = ax$;

    $x = 2\sin(t)$ dus $\sin(t) = \frac{1}{2}x$

    dus $y = \frac{3}{2}x$

    $x = 2\sin(t)$ dus x-interval loopt van -2 tot 2
  - **lengte met integraal** $= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}\,dx =$

    $\int_{-2}^{2} \sqrt{\frac{13}{4}}\,dx = \left[\sqrt{\frac{13}{4}}\,x\right]_{-2}^{2} = 4\sqrt{\frac{13}{4}} = 2\sqrt{13}$

  of

  - **lengte met Pythagoras** keerpunten als $x'(t) = 2\cos(t) = 0$ en $y'(t) = 3\cos(t) = 0$ dus als

    $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ dit levert twee keerpunten $(2, 3)$ en $(-2, -3)$

    lengte lijnstuk $= \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

4.47 parabool

Een punt P beweegt volgens $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases}$

a Bereken de richting van de parameterkromme in het rechter snijpunt met de x-as.

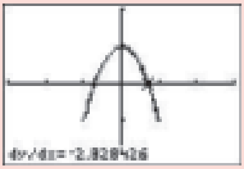
b Bewijs dat de parameterkromme twee keerpunten heeft.

c Bepaal de richting in het rechter keerpunt.

d Bewijs dat de parameterkromme een deel van parabool is.

e Bereken de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek en de x-as.

f Bepaal de lengte van de parameterkromme.



a snijpunt x–as: $y(t) = 0$ dus $\cos(2t) = 0$ dus $t = \frac{\pi}{4}$

$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-2\sin(2t)}{\cos(t)}$ dus $\text{rc} = \frac{-2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-4}{\sqrt{2}} \approx -2{,}83$

b keerpunt als $v(t) = 0$ dus $\cos^2(t) + 4\sin^2(2t) = 0$

$4\sin^2(2t) = 16\sin^2(t)\cos^2(t)$ dus $\cos^2(t) + 16\sin^2(t)\cos^2(t) = \cos^2(t)(1 + 16\sin^2(t)) = 0$

dus $\cos^2(t) = 0$ dus $t = \frac{\pi}{2}$ of $t = \frac{3\pi}{2}$ ($\sin^2(t) = \frac{-1}{16}$ heeft geen oplossing) geeft

als keerpunten $(1, -1)$ en $(-1, -1)$ controleren door parameterkromme te plotten

c rechter keerpunt, dus $t = \frac{\pi}{2}$ dus $\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-2\sin(\pi)}{\cos(0{,}5\pi)} = \frac{0}{0}$ verder onderzoeken

$$\lim_{t \to 0{,}5\pi} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t \to 0{,}5\pi} \frac{-2\sin(2t)}{\cos(t)} = \lim_{t \to 0{,}5\pi} \frac{-4\cos(t) \cdot \sin(t)}{\cos(t)} = \lim_{t \to 0{,}5\pi} -4\sin(t) = -4 = \text{rc}$$

d herschrijf $x = \sin(t)$ dus $\sin^2(t) = x^2$

$\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ dus $\cos^2(t) = \frac{\cos(2t) + 1}{2} = \frac{y + 1}{2}$

vervang $\sin(2t)$ en $\cos(2t)$ in $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ dus $x^2 + \frac{y+1}{2} = 1$ dus $y = 1 - 2x^2$

controleer met een plot

conclusie: de parameterkromme is een deel van de parabool $y = 1 - 2x^2$

e snijpunten met de x-as zijn $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right)$ en $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right)$

$$\text{oppervlakte} = \int_{-\sqrt{\frac{1}{2}}}^{\sqrt{\frac{1}{2}}} (1 - 2x^2)\,dx = \left[x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-\sqrt{\frac{1}{2}}}^{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

f lengte $= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (-4x)^2}\,dx = 4{,}65$ bepalen met grafische rekenmachine

TI-84: basisscherm MATH en 9: fnInt($\sqrt{(1 + (-4x)^2)}$, x, −1, 1)

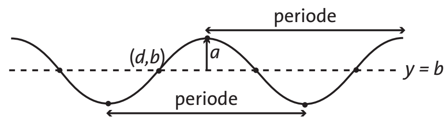
CASIO: RUN scherm OPTN CALC $\int$ dx $\int(\sqrt{(1 + (-4x)^2)}$, −1, 1)

hoofdzaken

	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π	$1\frac{1}{2}\pi$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	bn	0	bn

grafiek en formule $f(x) = b + a \cdot \sin(c(x-d))$ of $f(x) = b + a \cdot \cos(c(x-d))$

- **evenwichtsstand** $y = b$
- **amplitude** $|a|$
- **periode** $\frac{2\pi}{c}$
- **startpunt** bij sinus: (d, b), bij cosinus: $(d, b+a)$



cos(A) = B of sin(A) = B exact oplossen bij uitkomsten $B = 0,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2}\sqrt{2},\ \pm\frac{1}{2}\sqrt{3},\ \pm1$

- **noteer interval** waarbinnen vergelijking moet worden opgelost
- **bepaal minimaal één oplossing *C* exact** zie tabel en grafiek of eenheidscirkel
- **bepaal de andere oplossingen** met behulp van symmetrie grafiek en/of periode
  - $\cos(A) = B$ dan $A = C + k2\pi$ of $A = -C + 2k\pi$
  - $\sin(A) = B$ dan $A = C + k2\pi$ of $A = \pi - C + 2k\pi$

belangrijke formules

- $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$
- **verdubbelingsformules**
  - $\sin(2t) = 2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t)$
  - $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2 \cdot \cos^2(t) - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2(t)$
- **somformules en verschilformules** te gebruiken bij primitiveren en omschrijven
  - $\sin(t+u) = \sin(t) \cdot \cos(u) + \cos(t) \cdot \sin(u)$ en $\sin(t-u) = \sin(t) \cdot \cos(u) - \cos(t) \cdot \sin(u)$
  - $\cos(t+u) = \cos(t) \cdot \cos(u) - \sin(t) \cdot \sin(u)$ en $\cos(t-u) = \cos(t) \cdot \cos(u) + \sin(t) \cdot \sin(u)$
- **formules van Simpson/Mollweide**
  - $\sin(a) + \sin(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(a-b)\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)$
  - $\sin(a) - \sin(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(a+b)\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(a-b)\right)$
  - $\cos(a) + \cos(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(a-b)\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)$
  - $\cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(a+b)\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(a-b)\right)$

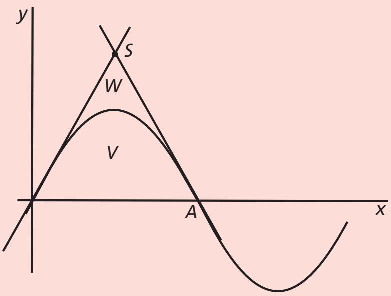
4.48 denkactiviteit vaste verhouding oppervlakte driehoek

Gegeven is de functie $f(x) = a \cdot \sin(x)$ op het interval $[0, \pi]$. De grafiek van de functie snijdt de x-as in de punten $O(0, 0)$ en $A(\pi, 0)$. De raaklijnen in de punten O en A aan de grafiek snijden elkaar in S.

De grafiek van f sluit samen met de x-as een gebied V in, de twee raaklijnen aan f sluiten samen met de grafiek van f het gebied W in.

- *De verhouding van de twee oppervlaktes V en W is onafhankelijk van a. Laat dit zien.*

Analyse (onderstreep, schets, deelvragen, vergelijkingen):

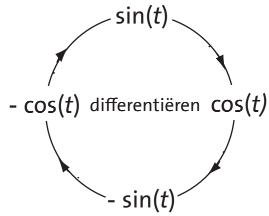


Maak een schets met daarin de grafiek van de functie $f(x) = a \cdot \sin(x)$
en de genoemde punten $O(0, 0)$ en $A(\pi, 0)$.
Er is sprake van een raaklijn, dus afgeleide en vergelijking raaklijn $y = px + q$ opstellen.
Er is sprake van een snijpunt S, dus bepaal coördinaten snijpunt S.
Oppervlakte V bepalen met integraal: bepaal primitieve van f.
Oppervlakte driehoek $= \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$
Onafhankelijk van a want in het antwoord staat geen a.

Wat noteer je / oplossing:

$f(x) = a \cdot \sin(x)$
$f'(x) = a \cdot \cos(x)$
Oppervlakte $V = \int_0^{\pi} a \cdot \sin(x)\, dx = \left[-a \cdot \cos(x)\right]_0^{\pi} = 2a$
Oppervlakte driehoek OAS bepalen met:
richting$_O$: $f'(0) = a \cdot \cos(0) = a$ en richting$_A$: $f'(\pi) = a \cdot \cos(\pi) = -a$
raaklijn$_O$: $y = ax + q$ levert met $O(0, 0)$: $y = ax$
raaklijn$_A$: $y = -ax + q$ levert met $A(\pi, 0)$: $y = -ax + \pi \cdot a$
Snijpunt S: $ax = -ax + \pi \cdot a$ levert $x = \frac{1}{2}\pi$ en $y = \frac{1}{2}\pi \cdot a$, dus $S\left(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \cdot a\right)$
Oppervlakte driehoek $OAS = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot a = \frac{1}{4}\pi^2 \cdot a$
Oppervlakte W = oppervlakte driehoek OAS – oppervlakte $V = 2a - \frac{1}{4}\pi^2 \cdot a$
Conclusie: verhouding $V : W = 2a : \left(2a - \frac{1}{4}\pi^2 \cdot a\right) = 2 : \left(2 - \frac{1}{4}\pi^2\right)$ dus onafhankelijk van a

hoofdzaken vervolg



afgeleide en primitieve

- $x(t) = \sin(t)$ dan geldt
  - $x'(t) = \cos(t)$ en primitieve $X(t) = -\cos(t)$
- $x(t) = \cos(t)$ dan geldt
  - $x'(t) = -\sin(t)$ en primitieve $X(t) = \sin(t)$
- bij het primitiveren van ingewikkelde goniometrische functies wordt vaak gebruikgemaakt van de verdubbelingsformules of de andere formules om de formule eerst in een eenvoudigere vorm te herschrijven.

cirkelbeweging en bewegingsformules

- **parametervoorstelling** (de twee bewegingsformules samen) heeft de vorm

  $\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}$ bijvoorbeeld de eenheidscirkel: $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$

  - afstand $P(x, y)$ tot $O(0, 0)$ is $OP = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$
  - snelheid v van $P((x(t), y(t))$ op tijdstip t is $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$
- **uiterste waarden en helling** berekenen
  - hoogste of laagste punt, horizontale raaklijn als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$
  - meest linkse of rechtse punt, verticale raaklijn als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$
  - helling berekenen met $\frac{dy}{dt}$ delen door $\frac{dx}{dt}$ oftewel $\frac{y'}{x'}$
- **keerpunt** berekenen $x'(t) = 0$ én $y'(t) = 0$
- **helling keerpunt** $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ benaderen door $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ en $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ op interval $[t, t + 0{,}001]$ en dan $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
- **van bewegingsformules naar** al bekende vergelijking met x en y
  - substitueer de bewegingsformule in de vergelijking (x en y vallen dan weg)
  - gebruik goniometrische formules tot er een ware bewering ontstaat zoals 0 = 0
- **oppervlakte berekenen**
  - herschrijf tot $y(x)$ werk bewegingsformules $\begin{cases} x(t) = \\ y(t) = \end{cases}$ om naar vergelijking $y(x) =$ en

    bepaal primitieve van $y(x)$
- **snelheid** $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ met $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$
- **baanlengte** over interval $[a, b]$ is $L = \int_a^b v(t)\,dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$ met $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

  of werk bewegingsformules $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ om naar $y(x) = \ldots$ dus zonder t, gebruik:

  lengte $= \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$ is lengte van grafiek over het interval $[a, b]$

4.49 denkactiviteit naar een lineaire beweging

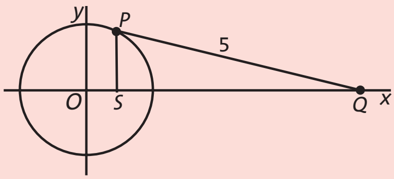
Een punt P beweegt volgens $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$

Aan punt P is een staaf PQ bevestigd met $PQ = 5$ en punt $Q(a, 0)$ beweegt over de x-as.

- *Druk a uit in t.*

Analyse (onderstreep, schets, deelvragen, vergelijkingen):
Maak een schets met daarin de cirkel, punt P en punt Q.
Er is sprake van een schuine lijn en rechthoekige driehoek, dus denk aan Pythagoras

Wat noteer je / oplossing:



$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$

$|P_x Q_x| = |Q_x - P_x| = |a - \cos(t)|$

$P_y = \sin(t)$

$PQ = 5$

Pythagoras: $SQ^2 + PS^2 = PS^2$ dus $(a - \cos(t))^2 + \sin^2(t) = 25$

$(a - \cos(t))^2 = 25 - \sin^2(t)$

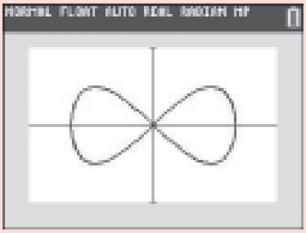
$a - \cos(t) = \pm\sqrt{25 - \sin^2(t)}$

conclusie: $a = \cos(t) \pm \sqrt{25 - \sin^2(t)}$

4.50 denkactiviteit oppervlakte exact

Een punt P beweegt volgens $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(t) \cdot \cos(t) \end{cases}$ Punt P sluit het gebied V in.

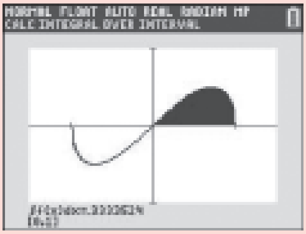
- *Bereken exact de oppervlakte van dit gebied V.*



Analyse (onderstreep, schets, deelvragen, vergelijkingen):
Oppervlakte, dus integraal, dus functievoorschrift ontwikkelen.
$y(t) = \sin(t) \cdot \cos(t) = x \cdot \cos(t)$ dus alleen nog $\cos(t)$ herschrijven naar $\sin(t)$.

Wat noteer je / oplossing:
Bewegingsformule herschrijven: $y(t) = \sin(t) \cdot \cos(t) = x \cdot \cos(t)$
en vanwege $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ geldt $\cos(t) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(t)}$ dus $y(x) = \pm x \cdot \sqrt{1 - x^2}$
kwart oppervlakte berekenen (zie plot) met

$$\text{opp.} = \int_L^R (x \cdot \sqrt{1 - x^2})\,dx = \int_L^R (x \cdot (1 - x^2)^{\frac{1}{2}})\,dx = \left[-\frac{1}{3}(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_L^R$$



R bepalen met $x(t) = \sin(t)$ is maximaal, dus $R = 1$ en $L = 0$

$$\text{opp.} = \left[-\frac{1}{3}(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 0 - -\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

conclusie: oppervlakte van gebied V is $\frac{4}{3}$

denkactiviteiten

- bij ingewikkelde opgaven spelen meerdere stappen een rol.
- ga niet meteen rekenen maar analyseer het probleem met een aantal stappen (zie hieronder).

stappenplan bij het oplossen van een complexe opgave

verdeel de oplossing van het probleem in de volgende stappen

- <u>analyse</u>
  - **lees** de hele opgave door
  - **noteer of onderstreep** de gegevens die van belang zijn
  - **maak een schets** een analyse figuur
    - zet gegevens uit de opgave in de schets
    - vul de schets aan
    - gebruik getallenvoorbeelden om de situatie duidelijk te krijgen
  - **deelvragen stellen en beantwoorden** welke onderliggende deelvragen kun je stellen bij de eindvraag en in welke volgorde los je dit op
  - **bedenk** welk wiskundige oplossingen passen bij de vraag (zie ook de hoofdzaken)

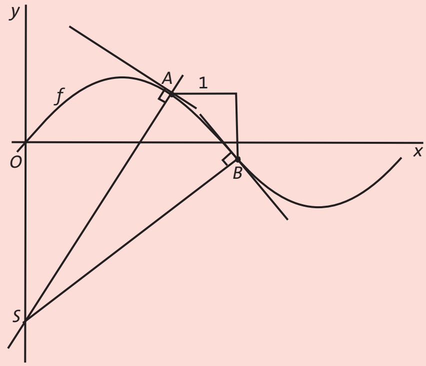
    denk aan
    - schets
    - vergelijking opstellen en oplossen
    - formule herschrijven naar andere vorm
    - waarde van parameter uitrekenen of waarde van x uitrekenen
    - welke rekenregels passen bij het probleem, welke regels kun je gebruiken?
    - abstraheer van getallenvoorbeeld naar algemene oplossing met variabele
    - rekening houden met een combinatie van vergelijkingen/grafieken

      houd bij de theorie van dit hoofdstuk speciaal rekening met
      - gebruik hoofdwaardentabel en grafiek sin en cos uit het hoofd kennen
      - rekenmachine op radialen
      - exact oplossen vergelijking denk aan de periode $2k\pi$
      - exact oplossen formules uit je hoofd kennen, denk ook aan
        $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$
      - herschrijven naar functievoorschrift formules uit je hoofd kennen
      - bewegingsformules herschrijven naar vorm $y =$
      - waarde van parameter uitrekenen of waarde van x uitrekenen
      - regels voor keerpunt, gebruik kettingregel bij differentiëren
      - welke formules passen bij het probleem, gebruik amplitude, periode enz
- <u>de oplossing</u> wat noteer je
  - **schets/tekening**
  - **oplossing met alle stappen**
  - **controle en conclusie** als je het antwoord hebt, lees nogmaals de vraag, controleer
    - heb je de tussenberekeningen goed opgeschreven?
    - heb je antwoord gegeven op de vraag?
    - is het antwoord logisch?

4.51 denkactiviteit snijden op de *y*-as.

Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$ met op de grafiek van f de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$. De horizontale afstand tussen A en B is 1 met A op interval $[0, \pi]$ en B rechts van A. Loodrecht op de raaklijnen aan f in de punten A en B staan respectievelijk de lijnen l en k. Deze lijnen l en k snijden elkaar in punt S.

- *Bereken in drie decimalen nauwkeurig voor welke x_A het punt S op de y-as ligt.*



Analyse (onderstreep, schets, deelvragen, vergelijkingen):
Drie decimalen, dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.
Horizontale afstand is 1 dus $x_B = x_A + 1$
Raaklijnen dus $f'(x)$ en $f_A'(x_A)$ en
$f_B'(x_B) = f'(x_A + 1)$
Loodrecht als product richtingen is –1
Vergelijkingen van l en k opstellen en snijden.

Wat noteer je / oplossing:
$f(x) = \sin(x)$ dus punt $A(x_A, \sin(x_A))$ en punt $B(x_B, \sin(x_B)) = B(x_A + 1, \sin(x_A + 1))$

$f'(x) = \cos(x)$ dus richting in A is: $f'(x_A) = \cos(x_A)$ en dus richting van l is $\dfrac{-1}{\cos(x_A)}$

en richting in B is: $f'(x_B) = \cos(x_B) = \cos(x_A + 1)$ en dus richting van k is $\dfrac{-1}{\cos(x_A + 1)}$

vergelijkingen loodlijnen l en k opstellen:

l: $y = \dfrac{-1}{\cos(x_A)} \cdot x + p$ met $A(x_A, \sin(x_A))$ levert $p = \sin(x_A) + \dfrac{x_A}{\cos(x_A)}$

k: $y = \dfrac{-1}{\cos(x_A + 1)} \cdot x + q$ met $B(x_A + 1, \sin(x_A + 1))$ levert $q = \sin(x_A + 1) + \dfrac{x_A + 1}{\cos(x_A + 1)}$ dus

l: $y = \dfrac{-1}{\cos(x_A)} \cdot x + \sin(x_A) + \dfrac{x_A}{\cos(x_A)}$ en k: $y = \dfrac{-1}{\cos(x_A + 1)} \cdot x + \sin(x_A + 1) + \dfrac{x_A + 1}{\cos(x_A + 1)}$

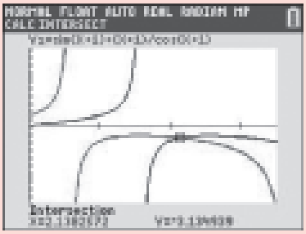
snijden op de y-as ($x = 0$), dus geldt $p = q$

dus $\sin(x_A) + \dfrac{x_A}{\cos(x_A)} = \sin(x_A + 1) + \dfrac{x_A + 1}{\cos(x_A + 1)}$

Gebruik de grafische rekenmachine en CALC intersect

dus $y_1 = \sin(x_A) + \dfrac{x_A}{\cos(x_A)}$

en $y_2 = \sin(x_A + 1) + \dfrac{x_A + 1}{\cos(x_A + 1)}$

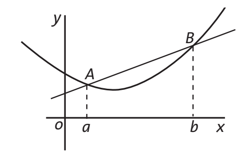


conclusie: $x_A = 2{,}138$ (en $x_B = 3{,}138$ en snijpunt y-as is $S(0; -3{,}135)$)

5 differentiëren

differentie

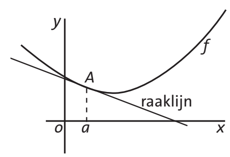
- **differentiequotiënt** van f over het interval $[a,b]$ is $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ is richtingscoëfficient van lijn AB
  - Δ is het symbool voor differentie of verschil



- **differentiaalquotiënt** is helling; richtingscoëfficiënt van raaklijn in punt A
  - als Δx nadert naar 0 dan geldt:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

  - $f'(a)$ richtingscoëfficiënt raaklijn in punt A



afgeleide functie of hellingfunctie van $f(x)$ is $f'(x)$,

- **verschillende notaties** $f'(x)$ of $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ of $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$
  - $f'(a)=y'(a)=\left[\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right]_{x=a}=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ voor $x=a$ zijn verschillende notaties voor de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in punt $A(a, f(a))$
- **$f'(x)=0$** de grafiek van f loopt horizontaal; de richtingscoëfficiënt van de raaklijn is 0; er is sprake van een maximum, minimum of buigpunt
- **$f'(x)>0$** de grafiek van f stijgt; want de richtingscoëfficiënt van de raaklijn is positief
- **$f'(x)<0$** de grafiek van f daalt, want de richtingscoëfficiënt van de raaklijn is negatief
- **$y=f'(x)$ schetsen** als $y=f(x)$ bekend is
  - **horizontaal** de grafiek van f loopt horizontaal $\Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow$ mogelijke extreme waarde (top) van f (maximum of minimum)
  - **stijgt** de grafiek van f stijgt $\Rightarrow f'(x)>0$ dus de grafiek van f' ligt boven de x-as
  - **daalt** de grafiek van f daalt $\Rightarrow f'(x)<0$ dus de grafiek van f' ligt onder de x-as

betekenis van de afgeleide in een tijd-afstand grafiek

- **$s(t)=a\cdot t^2+b\cdot t+c$** met s is de afgelegde afstand en t is de tijd
  - **snelheid** $v(t)$ van het voorwerp op tijdstip t is $s'(t)$ dus $s'(t)=v(t)$
  - **versnelling** $a(t)$ van het voorwerp op tijdstip t is $s''(t)$ dus $s''(t)=v'(t)=a(t)$

5.1 differentiequotiënt

a Bereken het differentiequotiënt over het interval [2, 7] *van* $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 1$

b Bereken het differentiequotiënt over het interval [2,999; 3,001] *van* $f(x)$.
Wat betekent deze uitkomst?

a $f(7) = 11{,}5$ en $f(2) = -1$ dus differentiequotiënt is $\dfrac{11{,}5 - -1}{7-2} = \dfrac{12{,}5}{5} = 2{,}5$

conclusie: richtingscoëfficiënt van de rechte lijn door (7; 11,5) en (2,–1) is 2,5

b $f(2{,}999) = -0{,}5009995$ en $f(3{,}001) = -0{,}4989995$ dus differentiequotiënt is

$$\frac{-0{,}4989995 - -0{,}5009995}{3{,}001-2{,}999} = \frac{0{,}002}{0{,}002} = 1$$

conclusie: richtingscoëfficiënt raaklijn aan de grafiek in (3; – 0,5) is bij benadering 1

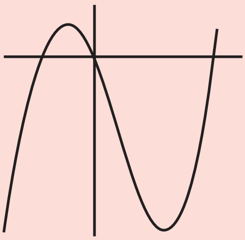
5.2 richtingraaklijn met behulp van differentiequotiënt

- *Benader (in twee decimalen nauwkeurig) met behulp van het differentiequotiënt de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan* $f(x) = 5^x - 2x$ *in het punt met x-coördinaat 3.*

r.c. raaklijn $\approx \dfrac{f(3+0{,}001) - f(3)}{3{,}001 - 3} = \dfrac{119{,}19934... - 119}{0{,}001} \approx 199{,}34$

5.3 stijgen en dalen

Gegeven is de functie $h(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$



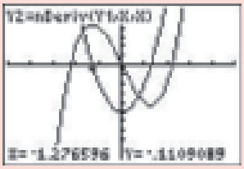
- *Bereken op welk interval de grafiek van h stijgend is.*

$h'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0$
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x-3)(x+1) = 0$ dus $x = -1$ of $x = 3$
dus de grafiek loopt horizontaal als $x = -1$ of $x = 3$
h stijgt op het interval $\langle \leftarrow, -1\rangle$ en $\langle 3, \rightarrow\rangle$ (zie plot)

5.4 grafiek van de afgeleide en grafische rekenmachine zie ook H8 en H9

- *Schets de grafiek van* $f(x) = x^3 - 5x$ *en* $f'(x)$ *in één figuur.*

met behulp van TI-84.
Voor f geldt (zie plot):
maximum in (–1,3; 4,3) dus $f'(-1{,}3) = 0$
minimum in (1,3; –4,3) dus $f'(1{,}3) = 0$
f stijgt voor $x < -1{,}3$ en voor $x > 1{,}3$ dus $f' > 0$
f daalt voor $-1{,}3 < x < 1{,}3$, dus $f' < 0$



5.5 tijd afstand functie

De afgelegde weg s in meter wordt gegeven door $s(t) = 2t^2 - 0{,}5t$, met t in minuten.

- *Bepaal de snelheid en de versnelling op tijdstip t = 5.*

Bepaal, dus de grafische rekenmachine mag gebruikt worden (zie H8 en H9).
Snelheid = $s'(t) = 4t - 0{,}5$ m/min en versnelling = $s''(t) = 4$ m/min^2
Snelheid = $s'(5) = 19{,}5$ m/min en versnelling = $s''(5) = 4$ m/min^2

regels voor differentiëren

■ $\boldsymbol{f(x) = a}$	$f'(x) = 0$ want elke lijn loopt horizontaal
■ $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$	$f'(x) = a$ want de rc van de lijn is a
■ $\boldsymbol{f(x) = x^n}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
■ $\boldsymbol{f(x) = c \cdot g(x)}$	$f'(x) = c \cdot g'(x)$
■ $\boldsymbol{f(x) = g(x) + h(x)}$	$f'(x) = g'(x) + h'(x)$ wordt ook wel somregel genoemd
■ $\boldsymbol{f(x) = ax^n + bx + c}$	$f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1} + b$ differentieer elke term apart
■ $\boldsymbol{f(x) = (2x + 3)(x - 1)}$	werk eerst de haakjes weg: $f(x) = 2x^2 + x - 3$ dus $f'(x) = 4x + 1$
■ $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x^n}}$	schrijf eerst als $f(x) = x^{-n} \Rightarrow f'(x) = -nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}$
■ $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$	schrijf eerst als $f(x) = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
■ $\boldsymbol{f(x) = \cos(x)}$	$f'(x) = -\sin(x)$
■ $\boldsymbol{f(x) = \sin(x)}$	$f'(x) = \cos(x)$
■ $\boldsymbol{f(x) = e^x}$	$f'(x) = e^x$
■ $\boldsymbol{f(x) = a^x}$	$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$ of $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$
■ $\boldsymbol{f(x) = \ln(x)}$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
■ $\boldsymbol{f(x) = {}^g\log(x)}$	$f'(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \frac{1}{x}$

5.6 **differentiëren**

a $\frac{d}{dx}(3x^2 + 4x)$

b $\frac{d}{dx}(3x^2 + 4x + 5)$

c $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$

a $\frac{d}{dx}(3x^2 + 4x) = 6x + 4$

b $\frac{d}{dx}(3x^2 + 4x + 5) = 6x + 4$

c $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}x^{-1} = -1 \cdot x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

5.7 **geef de afgeleide van**

$y = x^3 + px^2 + c$ — $y' = 3x^2 + 2px + 0 = 3x^2 + 2px$
(let op p en c zijn constanten)

$y = 3(x - 1)(2x + 3) + 5x$
$y = 3(2x^2 + 3x - 2x - 3) + 5x$
$y = 6x^2 + 8x - 9$ — $y' = 12x + 8$

$g(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$ — $g'(x) = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$

$h(x) = 3x^4\sqrt{x} = 3x^4 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 3x^{4,5}$ — $h'(x) = 3 \cdot 4{,}5x^{3,5} = 13{,}5x^{3,5} = 13{,}5x^3\sqrt{x}$

$j(x) = \cos(x) + 5\sin(x)$ — $j'(x) = -\sin(x) + 5\cos(x)$

$k(x) = 8 \cdot 3^x$ — $k'(x) = 8 \cdot \ln(3) \cdot 3^x \approx 8{,}8 \cdot 3^x$

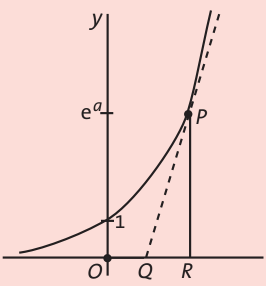
$l(x) = {}^4\log(x)$ — $l'(x) = \frac{1}{\ln(4)} \cdot \frac{1}{x} \approx \frac{1}{1{,}4x}$

$m(x) = \frac{3}{5x} + \frac{1}{2x^2} = \frac{3}{5}x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-2}$ — $m'(x) = -\frac{3}{5}x^{-2} - x^{-3} = \frac{-3}{5x^2} - \frac{1}{x^3}$

5.8 **e-macht**

Gegeven is de grafiek van $f(x) = e^x$ met de raaklijn aan f in P, de raaklijn snijdt de x-as in Q. Het voetpunt van P is R.

- *Bewijs dat |QR| onafhankelijk is van de plaats van P*



raakpunt: $P(a, e^a)$ en $R(a, 0)$ en $f'(x) = e^x$
dus raaklijn in $P(a, e^a)$: $y = e^a \cdot x + b$ met $b = e^a - a \cdot e^a$
$y = e^a \cdot x + e^a - a \cdot e^a$
snijpunt x-as dus $y = 0$ dus
$e^a \cdot x + e^a - a \cdot e^a = 0$ dus $x = a - 1$
$Q(a - 1, 0)$ en $R(a, 0)$ dus $QR = 1$
conclusie: $QR = 1$ dus onafhankelijk van de plaats van P

regels voor differentiëren vervolg

- **kettingregel** bij een enkelvoudige ketting $x \rightarrow u(x) \rightarrow y(u(x))$: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

  voorbeeld

  $x \rightarrow u = 3x^2 + 5x \rightarrow y = u^7$ dan

  $u = 3x^2 + 5x$ dus $\frac{du}{dx} = 6x + 5$ en $y = u^7 = (3x^2 + 5x)^7$ dus $\frac{dy}{du} = 7u^6 = 7(3x^2 + 5x)^6$ en

  dan $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 7u^6 \cdot (6x + 5) = 7(3x^2 + 5x)^6 \cdot (6x + 5)$

vaak voorkomende functies

- $f(x) = (u(x))^n$ — $f'(x) = n \cdot (u(x))^{n-1} \cdot u'(x)$ zie voorbeeld hierboven
- $f(x) = \sqrt{u(x)}$ — $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
- $f(x) = \cos(ax)$ — $f'(x) = -a \cdot \sin(ax)$
- $f(x) = \sin(ax)$ — $f'(x) = a \cdot \cos(ax)$
- $f(x) = \cos(u(x))$ — $f'(x) = -u'(x) \cdot \sin(u(x))$
- $f(x) = \sin(u(x))$ — $f'(x) = u'(x) \cdot \cos(u(x))$
- $f(x) = e^{u(x)}$ — $f'(x) = u'(x) \cdot e^{u(x)}$
- $f(x) = a^{u(x)}$ — $f'(x) = \ln(a) \cdot u'(x) \cdot a^{u(x)}$
- $f(x) = \ln(u(x))$ — $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$
- $f(x) = {}^{g}\log(u(x))$ — $f'(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}$

- **productregel** $p(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

  voorbeelden

  - $p(x) = 3x \cdot \sin(x)$ neem $f(x) = 3x$ en $g(x) = \sin(x)$ dus $p'(x) = 3\sin(x) + 3x \times \cos(x)$
  - $p(x) = x(x + 3)$ $= x^2 + 3x \Rightarrow p'(x) = 2x + 3$ haakjes uitwerken i.p.v. de productregel
  - $p(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$ product van meerdere factoren

    $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$

- **quotiëntregel** $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

  opmerking: $g^2(x)$ van de noemer niet verder uitwerken en $g^2(x) = (g(x))^2$

absolute waarde en differentiëren

- schrijf de functie eerst zonder absoluutstrepen
- gebruik daarna de regels voor differentiëren

  voorbeeld

  - $f(x) = |3x - 6|$ schrijven als $f(x) = 3x - 6$ voor $x \geq 2$ en $f(x) = -3x + 6$ voor $x < 2$, dus

    $f'(x) = 3$ voor $x > 2$ en $f'(x) = -3$ voor $x < 2$

differentiëren van een functie met een parameter

- $f(x) = px^n + px + cp$ — $f'(x) = p \cdot n \cdot x^{n-1} + p + 0$ (want c en p stellen getallen voor)

5.9 kettingregel

- *Differentieer de volgende functies.*

$f(x) = 3 \cdot (5x + 1)^8$ $\qquad$ $f\,'(x) = 24 \cdot 5 \cdot (5x + 1)^7 = 120 \cdot (5x + 1)^7$

(neem $u = 5x + 1$ en $y = 3u^8$)

$g(x) = \dfrac{1}{(2x - 5)\ 3} = (2x - 5)^{-3}$ $\qquad$ $g'(x) = -3 \cdot 2 \cdot (2x - 5)^{-4} = \dfrac{-6}{(2x - 5)^4}$

$j(x) = \cos(7x) + 5\sin(3x)$ $\qquad$ $j\,'(x) = -7 \cdot \sin(7x) + 15 \cdot \cos(3x)$

$k(x) = 2 \cdot 3^{5x}$ $\qquad$ $k'(x) = 2 \cdot 5 \cdot \ln(3) \cdot 3^{5x} \approx 10{,}99 \cdot 3^{5x}$

$l(x) = \ln(6x + 2)$ $\qquad$ $l\,'(x) = \dfrac{6}{6x + 2} = \dfrac{3}{3x + 1}$

$m(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 1} = (x + 1)^{-2}$ $\qquad$ $m'(x) = -2(x + 1)^{-3} = \dfrac{-2}{(x + 1)^3}$

$p(x) = (5x + 7)^{0,5}$ $\qquad$ $p'(x) = 0{,}5 \cdot 5 \cdot (5x + 7)^{-0,5} = \dfrac{2{,}5}{\sqrt{5x + 7}}$

$q(x) = 3\sqrt{x^2 + 7x} = 3 \cdot (x^2 + 7x)^{0,5}$ $\qquad$ $q'(x) = 3 \cdot 0{,}5 \cdot (2x + 7) \cdot (\,x^2 + 7x)^{-0,5}$

$= \dfrac{1{,}5 \cdot (2x + 7)}{\sqrt{x^2 + 7x}}$

$r(x) = e^{x^2 - 5x}$ $\qquad$ $r'(x) = (2x - 5) \cdot e^{x^2 - 5x}$

$s(x) = 3(\sin(x))^5$ $\qquad$ $s'(x) = 15 \cdot \cos(x) \cdot (\sin(x))^4$

5.10 productregel en quotiëntregel

- *Differentieer* $f(x) = x \cdot \sqrt{x + 1}$ *(productregel) en* $h(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$ *(quotiëntregel)*

$f(x) = x \cdot \sqrt{x + 1} = x \cdot (x + 1)^{\frac{1}{2}}$ dus $f\,'(x) = 1 \cdot (x + 1)^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{2}(x + 1)^{\frac{-1}{2}} = \sqrt{x + 1} + \dfrac{x}{2\sqrt{x + 1}}$

$$h\,'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 1) - (x^3 + 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2 - 2x}{(x^2 - 1)^2}$$

5.11 productregel en quotiëntregel voorkomen

- *Differentieer de volgende functies.*

$h(x) = (3x^2 + 5) \cdot x^{0,5} = 3x^{2,5} + 5x^{0,5}$ $\qquad$ $h'(x) = 7{,}5x^{1,5} + 2{,}5x^{-0,5} = 7{,}5x\sqrt{x} + \dfrac{2{,}5}{\sqrt{x}}$

$f(x) = x \cdot \sqrt{x + 1} = \sqrt{x^3 + x^2} = (x^3 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $f\,'(x) = \dfrac{1}{2} \cdot (x^3 + x^2)^{\frac{-1}{2}} \cdot (3x^2 + 2x) =$

$= \dfrac{3x^2 + 2x}{2\sqrt{x^3 + x^2}} = \dfrac{3x^2 + 2x}{2x \cdot \sqrt{x + 1}} = \dfrac{3x + 2}{2\sqrt{x + 1}}$

$g(x) = \dfrac{(x - 2)^2}{x} = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x} = x - 4 + 4 \cdot x^{-1}$ $\qquad$ $g'(x) = 1 - 4 \cdot x^{-2} = 1 - \dfrac{4}{x^2}$

$l(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 1} = \dfrac{x + 1}{(x + 1)(x - 1)} = \dfrac{1}{(x - 1)} = (x - 1)^{-1}$ $\qquad$ $l'(x) = -1 \cdot (x - 1)^{-2} = \dfrac{-1}{(x - 1)^2}\ (x \neq\ -1)$

$p(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = \dfrac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} = x - 1$ $\qquad$ $p'(x) = 1$ voor $x \neq\ -1$

raken

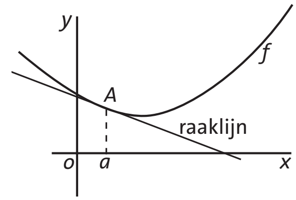
- **grafieken van f en g raken elkaar** als $f(x) = g(x)$ én $f'(x) = g'(x)$ (zie ook opg 5.20)

raaklijn

- **berekenen** als de vraag is: 'bereken exact de vergelijking van de raaklijn'

  te volgen stappen

  - **raakpunt** (a, b) bepalen; $b = f(a)$
  - $\boldsymbol{f'(x)}$ bepalen
  - $\boldsymbol{f'(a) = r}$ berekenen, is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in punt A
  - $\boldsymbol{y = rx + d}$ de vergelijking van de raaklijn opstellen, d berekenen door (a, b) in te vullen
  - **controleer** met behulp van een plot



- **met de grafische rekenmachine** als de vraag is: 'geef een vergelijking van de raaklijn' dan mag de raaklijn benaderd of berekend worden
  soms is de afgeleide functie niet te berekenen, dan grafiek of rekenmachine gebruiken voor een benadering
  - **raakpunt** (a, b) bepalen; $b = f(a)$ (mag met de grafische rekenmachine, bv. met tabel)
  - **helling** $f'(a)$ bepalen (mag met de grafische rekenmachine)

    meerdere manieren

    - **bepaal** indien mogelijk $f'(x)$ en vul voor $x = a$ in
      voorbeeld: $f(x) = x^3$ helling in $x = 2$ is gelijk aan $f'(2) = 3x^2 = 3 \cdot 2^2 = 12$
    - **grafische rekenmachine** uitkomst laten berekenen (zie H8 en H9)
    - **differentiequotiënt berekenen** als de formule van f bekend is door voor $x = a$ en bijvoorbeeld $x = a + 0{,}001$ in te vullen in f en het differentiequotiënt berekenen
      voorbeeld: $f(x) = x^3$ helling in $x = 2$ benaderen met

      $$\frac{f(2{,}001) - f(2)}{2{,}001 - 2} = \frac{2{,}001^3 - 2^3}{0{,}001} = 12{,}006\ldots \approx 12$$

    - **raaklijn tekenen** in de grafiek en de richtingscoëfficiënt aflezen
      geeft een niet nauwkeurige schatting

raaklijn aan f evenwijdig aan een gegeven rechte lijn

te volgen stappen

- **richtingscoëfficiënt** r van de gegeven lijn bepalen door de formule van de rechte lijn te herschrijven tot de vorm $y = rx + p$
- $\boldsymbol{f'(x) = r}$ vergelijking oplossen geeft de x-coördinaat $= a$ van het raakpunt
- $\boldsymbol{f(a) = b}$ $x = a$ invullen in de functie geeft de y-coördinaat $= b$ van het raakpunt
- **vergelijking raaklijn** $y = rx + q$ en q berekenen door (a, b) in te vullen

5.12 **raaklijn aan** $f(x) = x^2 - 2x$

a *Stel een vergelijking op van de raaklijn in punt A met x-coördinaat is –1*

b *Bepaal het punt op de grafiek van f waar de raaklijn evenwijdig is aan de lijn m met vergelijking* $2y - 8x = 3$

a $x = -1$ dus $f(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot -1 = 3$ dus raakpunt $A(-1, 3)$

$f'(x) = 2x - 2$ dus $\text{rc} = f'(-1) = -4 \Rightarrow$ vergelijking raaklijn $y = -4x + b$

$A(-1,3)$ invullen in $y = -4x + b$ geeft $b = -1$ dus vergelijking raaklijn: $y = -4x - 1$

b $2y - 8x = 3$ herschrijven tot $y = 4x + 1{,}5 \Rightarrow \text{rc} = 4 = \text{rc}_m = f'(x)$

$f'(x) = 2x - 2 = 4$ oplossen, dus $x = 3$ en gevraagde punt P op f is $(3, f(3)) = (3, 3)$

5.13 **gegeven is de functie** $f_a(x) = (x \cdot \ln(x))^a$

a *Neem a = 1 en bepaal de afgeleide* $f_1'(x)$

b *Neem a = –1 en laat zien dat* $f_{-1}'(x) = -(\ln(x) + 1) \cdot f_{-1}^2(x)$

de raaklijn aan de grafiek van f_{-1} in het punt (e, y) noemen we k

c *Stel met behulp van een exacte berekening de vergelijking van k op.*

a $f_1(x) = x \cdot \ln(x)$ dus $f_1'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1$ (productregel)

b $f_{-1}(x) = (x \cdot \ln(x))^{-1}$ (gebruik de kettingregel en het antwoord bij opg. a)

$$f_{-1}'(x) = -1 \cdot (x \cdot \ln(x))^{-2} \cdot (\ln(x) + 1) = \frac{-1 \cdot (\ln(x) + 1)}{(x \cdot \ln(x))^2}$$

$$-1 \cdot (\ln(x) + 1) \cdot f_{-1}^{\,2}(x) = -1 \cdot (\ln(x) + 1) \cdot ((x \cdot \ln(x))^{-1})^2 = -1 \cdot \frac{\ln(x) + 1}{(x \cdot \ln(x))^2} = f_{-1}'(x)$$

c $f_{-1}(e) = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ en $f_{-1}'(e) = \dfrac{-1 \cdot (\ln(e) + 1)}{(e \cdot \ln(e))^2} = \dfrac{-2}{e^2}$ dus $k: y = \dfrac{-2}{e^2} \cdot x + \dfrac{3}{e}$

5.14 **richting raaklijn**

$A(1, 5)$ en $B(9, 21)$ liggen op grafiek van $y = x + 4\sqrt{x}$. Lijn AB wordt evenwijdig verschoven zodat de punten A en B elkaar naderen en samenvallen in P

- *Bereken de x-coördinaat van de eindpositie van P.*

$\dfrac{21 - 5}{9 - 1} = \dfrac{16}{8} = 2$ is de richtingscoëfficiënt van de lijn door $(1, 5)$ en $(9, 21)$

dus richting in P is $y' = 2$, dus x berekenen met $y' = 1 + 4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 2$ dus $x = 4$

5.15 **raken**

- *Bewijs dat de x-as de grafiek van* $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ *raakt.*

raken aan de x-as dus als $f'(x) = 0$ en $f(x) = 0$

$f(x) = 1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 1 + 2x^{-1} + x^{-2}$ dus $f'(x) = -2x^{-2} - 2x^{-3} = \dfrac{-2}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}$

Raken als $\dfrac{-2}{x^2} - \dfrac{2}{x^3} = 0$ dus als $\dfrac{-2}{x^2} = \dfrac{2}{x^3}$ dus $x^3 = -x^2$ dus $x = -1$ ($x = 0$ vervalt)

omdat $f'(-1) = 0$ en $f(-1) = 0$ geldt $f(x)$ raakt de x-as in $(-1, 0)$.

extreme waarden exact berekenen

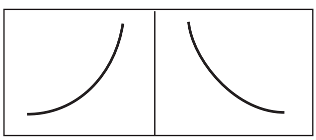
- **maximum of minimum** exact berekenen
  - **afgeleide functie** $f'(x)$ bepalen
  - **$f'(x) = 0$** exact oplossen en bij de gevonden x-coördinaten de y-coördinaten bepalen
  - **antwoord** bijvoorbeeld maximum $f(a) = c$ en minimum $f(b) = d$
- **maximum of minimum bepalen** de grafische rekenmachine mag nu gebruikt worden om maximum of minimum te benaderen; zie H8 en H9 kopje raaklijn

optimaliseren

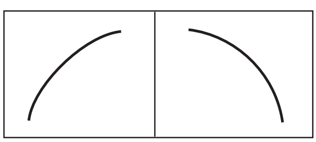
- **getallenvoorbeeld** nemen om probleem helder te krijgen
- **formule** bij het probleem opstellen
- **maximum of minimum** van de formule bepalen; met behulp van differentiëren of de grafische rekenmachine
- **controleer** of de uitkomst zinvol is

buigpunten

- **bereken** f' en f''
- **los op** $f'' = 0$ of, als dat niet mogelijk is, bepaal $f'' = 0$ met grafische rekenmachine, zeg $x = a$
- **buigpunt** is $(a, f(a))$
  - **als $f''(a) = 0$** en $f''(x)$ wisselt van teken voor $x = a$
  - als f'' een maximum of minimum heeft voor $x = a$
  - als de grafiek van hol naar bol gaat
- **hol** $f''(x) > 0$



- **bol** $f''(x) < 0$



  - in het buigpunt gaat de grafiek van hol naar bol

buigraaklijn $y = rx + b$

- **bereken buigpunt** (a, b) zoals hierboven
- **bepaal de richtingscoëfficiënt** r van de buigraaklijn: $r = f'(a)$

5.16 top berekenen

- *Bereken coördinaten van de top van de grafiek van $f(x) = x\ln(x) - x$*

  top als $f\,'(x) = x \cdot \frac{1}{x} + \ln(x) - 1 = 0$ dus $\ln(x) = 0$ dus $x = 1$ en $y = -1$

5.17 buigraaklijn

Gegeven is de functie $h(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

- *Stel met een exacte berekening de vergelijking van de buigraaklijn op.*

  $h'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ en buigpunt als $h''(x) = 6x - 6 = 0$ dus $x = 1$

  $h(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 = -11$, dus het buigpunt is $(1, -11)$

  $h'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 9 = -12$ = r.c. raaklijn.

  conclusie: vergelijking buigraaklijn is $y = -12x + 1$

5.18 buigpunten

a Bewijs dat de grafiek van $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ voor elke waarde van a, b, c en d ($a \neq 0$) precies één buigpunt heeft.

b Waar moeten a, b, c en d aan voldoen wil er sprake zijn van een horizontaal buigpunt?

a $f\,'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ en $f\,''(x) = 6ax + 2b$ Omdat $f\,''(x) = 0$ altijd precies één oplossing heeft en $f\,''(x)$ wisselt van teken in dit nulpunt heeft $f(x)$ altijd precies één buigpunt.

b horizontale raaklijn, dus geldt:

$$f\,'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0 \quad \text{en} \quad x_{1,2} = -\frac{b}{3a} \pm \frac{1}{6a}\sqrt{4b^2 - 12ac}$$

één buigpunt, dus geldt:

$$f\,''(x) = 6ax + 2b = 0 \quad \text{dus} \quad x = -\frac{b}{3a}$$

$$-\frac{b}{3a} \pm \frac{1}{6a}\sqrt{4b^2 - 12ac} = -\frac{b}{3a}$$

conclusie: $4b^2 - 12ac = 0$ dus $b^2 - 3ac = 0$ en $a \neq 0$

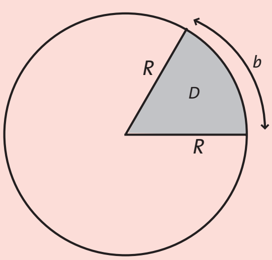
Voor d geldt geen beperkende voorwaarde, d zorgt immers voor de verticale verschuiving en verandert dus niets aan de richting van de grafiek van f.

5.19 oppervlakte minimaliseren

Met 100 cm draad wordt een deel van een cirkelschijf omspannen. De 100 cm draad wordt gebruikt voor de twee stralen R en een deel b van de cirkelboog. De keuze van R heeft invloed op de oppervlakte van het deel D van de schijf die omspannen wordt.

- *Bepaal met een exacte berekening de exacte waarde van R waarvoor geldt dat de oppervlakte van het te omspannen deel D van de cirkelschijf maximaal is.*

  $b + 2R = 100$ cm, dus $b = 100 - 2R$

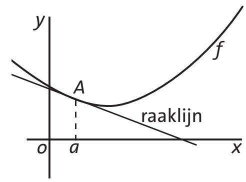


omtrek cirkel is $2\pi R$, dus deel D van het totaal $= \frac{100 - 2R}{2\pi R}$

$$\text{oppervlakte}_D = \frac{100 - 2R}{2\pi R} \cdot \pi R^2 = \frac{100R - 2R^2}{2} = 50R - R^2$$

oppervlakte maximaal als opp' $= 50 - 2R = 0$ dus als $R = 25$

hoofdzaken



afgeleide functie of hellingfunctie van $f(x)$ is $f'(x)$

- $f'(a)$ = richtingscoëfficiënt raaklijn in punt $A(a, f(a))$

regels voor differentiëren

- $f(x) = c$ — $f'(x) = 0$ want grafiek van $f(x) = c$ loopt horizontaal
- $f(x) = ax + b$ — $f'(x) = a$ want de rc van de lijn is a
- $f(x) = x^n$ — $f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = c \cdot g(x)$ — $f'(x) = c \cdot g'(x)$
- $f(x) = g(x) + h(x)$ — $f'(x) = g'(x) + h'(x)$ wordt ook wel somregel genoemd
- $f(x) = ax^n + bx + c$ — $f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1} + b$ differentieer elke term apart
- $f(x) = (2x + 3)(x - 1)$ — werk eerst de haakjes weg: $f(x) = 2x^2 + x - 3$ dus $f'(x) = 4x + 1$
- $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ — schrijf eerst als $f(x) = x^{-n} \Rightarrow f'(x) = -nx^{-n-1} = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$
- $f(x) = \sqrt{x}$ — schrijf eerst als $f(x) = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $f(x) = \cos(x)$ — $f'(x) = -\sin(x)$
- $f(x) = \sin(x)$ — $f'(x) = \cos(x)$
- $f(x) = e^x$ — $f'(x) = e^x$
- $f(x) = a^x$ — $f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$ of $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$
- $f(x) = \ln(x)$ — $f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = {}^g\log(x)$ — $f'(x) = \dfrac{1}{\ln(g)} \cdot \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = (u(x))^n$ — $f'(x) = n \cdot (u(x))^{n-1} \cdot u'(x)$
- $f(x) = \sqrt{u(x)}$ — $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
- $f(x) = \cos(ax)$ — $f'(x) = -a \cdot \sin(ax)$
- $f(x) = \sin(ax)$ — $f'(x) = a \cdot \cos(ax)$
- $f(x) = \cos(u(x))$ — $f'(x) = -u'(x) \cdot \sin(u(x))$
- $f(x) = \sin(u(x))$ — $f'(x) = u'(x) \cdot \cos(u(x))$
- $f(x) = e^{u(x)}$ — $f'(x) = u'(x) \cdot e^{u(x)}$
- $f(x) = a^{u(x)}$ — $f'(x) = \ln a \cdot u'(x) \cdot a^{u(x)}$
- $f(x) = \ln(u(x))$ — $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
- $f(x) = {}^g\log(u(x))$ — $f'(x) = \dfrac{1}{\ln g} \cdot \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
- **productregel** $p(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- **quotiëntregel** $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
- **functie met absolute waarde** werk eerst de absoluutstrepen weg

5.20 raken

- *Voor welke p raken de grafieken van $f(x) = px - 1$ en $g(x) = x^2 + 5x + 3$ elkaar?*

raken: dus $f(x) = g(x)$ én $f'(x) = g'(x)$

dus $px - 1 = x^2 + 5x + 3$ én $p = 2x + 5$

$p = 2x + 5$ invullen in $px - 1 = x^2 + 5x + 3 \Rightarrow (2x + 5)\cdot x - 1 = x^2 + 5x + 3 \Leftrightarrow$

$2x^2 + 5x - 1 = x^2 + 5x + 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ of $x = -2$

$x = 2 \Rightarrow p = 2\cdot 2 + 5 = 9$

$x = -2 \Rightarrow p = 2\cdot -2 + 5 = 1$

conclusie: de grafieken raken elkaar voor $p = 9$ of $p = 1$

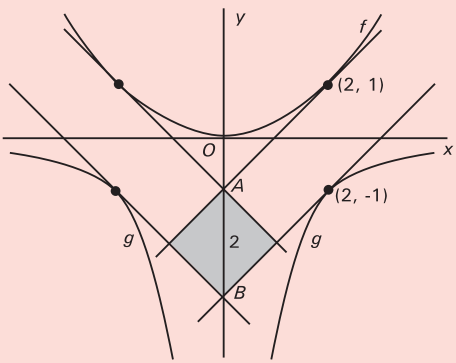
5.21 denkactiviteit vierkant

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ en $g(x) = -\frac{4}{x^2}$

De raaklijnen aan de grafiek van f en g met richtingscoëfficiënt 1 en richtingscoëfficiënt -1 sluiten een vierkant in.

- *Bereken exact de lengte van de diagonaal van dit vierkant.*

<u>Analyse</u> (onderstreep, schets, deelvragen, vergelijkingen):
Exact, dus geen grafische rekenmachine. Raaklijn, dus raakpunt en f' bepalen.
Vergelijkingen raaklijnen, dus $y = ax + b$
De figuur is symmetrisch ten opzichte van de y-as (ga dit na). Het is dus voldoende om de raaklijnen met richtingscoëfficiënt 1 te bepalen (zie schets). De raaklijnen snijden elkaar op de y-as, dus $x = 0$.
Bepaal twee tegenoverliggende hoekpunten van het vierkant en daarmee de lengte van de diagonaal.



<u>Wat noteer je / oplossing:</u>
Bepaal de raaklijn met r.c. = 1 aan $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

$f'(x) = \frac{1}{2}x = 1$ dus $x = 2$ en raakpunt is (2, 1) dus vergelijking raaklijn is $y = x - 1$

raaklijn snijdt y-as in $A(0, -1)$

Bepaal raaklijn met r.c. = 1 aan $g(x) = -\frac{4}{x^2} = -4x^{-2}$

$g'(x) = 8x^{-3} = \frac{8}{x^3} = 1$ dus $x = 2$

raakpunt is $(2, -1)$ dus vergelijking raaklijn is $y = x - 3$
raaklijn snijdt y-as in $B(0, -3)$

conclusie: lengte van de diagonaal is de afstand tussen $A(0, -1)$ en $B(0, -3)$ is 2.

hoofdzaken vervolg

raken

- **grafieken van *f* en *g* raken** als $f(x) = g(x)$ én $f'(x) = g'(x)$

raaklijn exact berekenen te volgen stappen

- **raakpunt** (a,b) bepalen; $b = f(a)$
- **$f'(x)$** berekenen
- **$f'(a) = r$** is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in punt A
- **vergelijking raaklijn** $y = rx + d$ en d berekenen door (a, b) in te vullen

raaklijn aan *f* evenwijdig aan een gegeven rechte lijn te volgen stappen

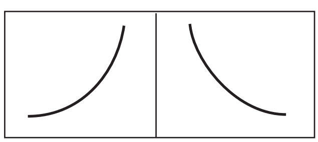
- **richtingscoëfficiënt** r van de gegeven lijn bepalen door de formule van de rechte lijn te herschrijven tot de vorm $y = rx + p$
- **$f'(x) = r$** vergelijking oplossen geeft de x-coördinaat = a van het raakpunt
- **$f(a) = b$** raakpunt (a, b)
- **vergelijking raaklijn** $y = rx + q$ en q berekenen door (a, b) in te vullen

extreme waarden (top) exact berekenen

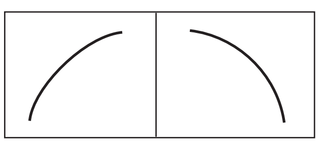
- **maximum of minimum** exact berekenen
  - **afgeleide functie** $f'(x)$ bepalen
  - **$f'(x) = 0$** oplossen en bij de gevonden x-coördinaten de y-coördinaten bepalen
  - **antwoord** bijvoorbeeld maximum $f(a) = c$ en minimum $f(b) = d$

buigpunten

- **bereken f' en f''**
- **bereken** $f'' = 0$ of, indien niet mogelijk, bepaal $f'' = 0$ met grafische rekenmachine
- **buigpunt** is $(a, f(a))$ als $f''(a) = 0$ en $f''(x)$ wisselt van teken voor $x = a$
- **hol** $f''(x) > 0$



- **bol** $f''(x) < 0$



5.22 denkactiviteit snijpunt *y*-as

Gegeven is de functie $f(x) = \sin(ax)$. Met $a > 0$. Het eerste snijpunt van de grafiek van f rechts van de Oorsprong(0, 0), noemen we A. Lijn l is de raaklijn aan de grafiek in A. Het snijpunt van lijn l en de y-as noemen we B.

- *Ga na of punt B afhankelijk is van a.*

Analyse (onderstreep, schets, deelvragen, vergelijkingen):
Maak een schets met daarin een grafiek van $f(x) = \sin(ax)$, lijn l, punt A en punt B.
Bereken de coördinaten van punt A, snijpunt met de x-as, stel vergelijking raaklijn l op, dus afgeleide en l: $y = px + q$, bereken coördinaten van punt B, snijpunt y-as.
Afhankelijk of onafhankelijk van a dus ga na: a zit wel of niet in het antwoord.

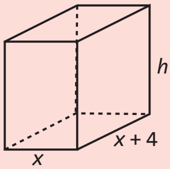
Wat noteer je / oplossing:
$f(x) = \sin(ax)$ dus punt A: $\sin(ax) = 0$ dus $ax = 0 + k\pi$ dus $x_A = \frac{k}{a}\pi$. Eerste snijpunt dus $x = \frac{\pi}{a}$
$f'(x) = a \cdot \cos(ax)$ dus richting in A is: $f'\left(\frac{\pi}{a}\right) = a \cdot \cos\left(a \cdot \frac{\pi}{a}\right) = a \cdot \cos(\pi) = -a$
l: $y = -ax + q$ door $A\left(\frac{\pi}{a}, 0\right)$ levert $q = \pi$ dus l: $y = -ax + \pi$
conclusie: het snijpunt met de y-as is $B(0, \pi)$, dus onafhankelijk van a.

5.23 denkactiviteit oppervlakte minimaliseren

Een pak met deksel in de vorm van een balk heeft een totale inhoud van 1 liter.
Het pak heeft als grondvlak een rechthoek; de breedte is 4 cm langer dan de lengte.
Voor het berekenen van de oppervlakte worden plakranden niet meegerekend.

- *Bepaal bij welke afmetingen, in mm nauwkeurig, het pak een minimale oppervlakte heeft.*

Analyse (onderstreep, schets, deelvragen, vergelijkingen):
inhoud I = 1 liter = 1 dm^3 = 1000 cm^3
noem bijvoorbeeld de lengte x, de breedte $x + 4$ en de hoogte h (neem bijvoorbeeld alle maten in cm)
maak een schets



Wat noteer je / oplossing:
$I = x \cdot (x+4) \cdot h = 1000 \Rightarrow h = \dfrac{1000}{x(x+4)}$
oppervlakte O van het pak

$$O = 2x(x+4) + 2xh + 2(x+4)h = 2x(x+4) + 2x \cdot \frac{1000}{x(x+4)} + 2(x+4) \cdot \frac{1000}{x(x+4)}$$

$$O = 2x^2 + 8x + \frac{2000}{x+4} + \frac{2000}{x}$$

Voer de functie in de grafische rekenmachine in en bepaal de minimale waarde.
$x \approx 8{,}38$ cm geeft als minimum oppervlakte 607,7 cm^2
conclusie: het pak wordt 8,4 bij 12,4 bij 9,6 cm

denkactiviteiten

- bij ingewikkelde opgaven spelen meerdere stappen een rol.
- ga niet meteen rekenen maar analyseer het probleem met een aantal stappen (zie hieronder).

stappenplan bij het oplossen van een complexe opgave

verdeel de oplossing van het probleem in de volgende stappen

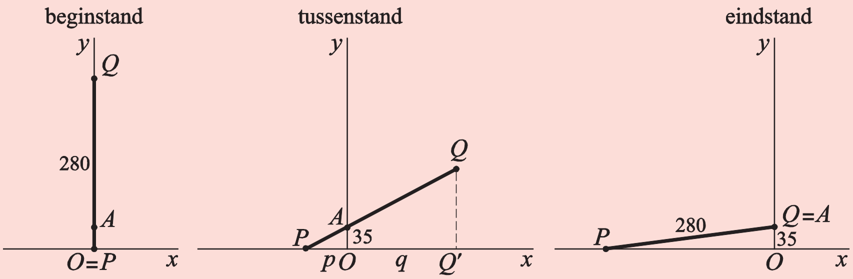
- <u>analyse</u>
  - **lees** de hele opgave door
  - **noteer of onderstreep** de gegevens die van belang zijn
  - **maak een schets** een analyse figuur
    - zet gegevens uit de opgave in de schets
    - vul de schets aan
    - gebruik getallenvoorbeelden om de situatie duidelijk te krijgen
  - **deelvragen stellen en beantwoorden** welke onderliggende deelvragen kun je stellen bij de eindvraag en in welke volgorde los je dit op (in welke stukjes kun je de vraag opdelen)
  - **bedenk** welk wiskundige oplossingen passen bij de vraag (zie ook de hoofdzaken)

    denk aan
    - vergelijking opstellen en oplossen
    - formule opstellen en omschrijven
    - waarde van parameter uitrekenen of waarde van x uitrekenen
    - welke formules passen bij het probleem
    - abstraheer van getallenvoorbeeld naar algemene oplossing met variabele
    - rekening houden met een combinatie van vergelijkingen/grafieken

      houd bij deze theorie speciaal rekening met
      - standaardafgeleiden
      - differentiëren van vormen met haakjes
      - omschrijven van wortels en quotiënten naar exponenten
      - gebruik kettingregel, productregel enz.
      - oplossen quotiëntvergelijkingen
      - raken als $f(x) = g(x)$ én $f\,'(x) = g'(x)$
      - differentiëren van een functie met een parameter
- <u>de oplossing</u> wat noteer je
  - **schets/tekening**
  - **oplossing met alle stappen**
  - **controle en conclusie** als je het antwoord hebt, lees nogmaals de vraag, controleer
    - heb je antwoord gegeven op de vraag
    - is het antwoord logisch
    - klopt de afronding

5.24 denkactiviteit verschoven staaf

Een staaf van 280 cm lang begint in een verticale stand *PQ*. Punt *P* bevindt zich dan in de oorsprong en *Q* in het punt (0, 280). Punt *P* wordt over de *x*-as naar links geschoven, terwijl de stang door het punt *A* (0, 35) blijft gaan. In de figuur zijn de beginstand, een tussenstand en de eindstand van lijnstuk *PQ* getekend.



De loodrechte projectie van *Q* op de *x*-as noemen we *A*. De afstand van *P* tot de oorsprong noemen we *p* en de afstand van *Q*' tot de oorsprong noemen we *q*. Zie de figuur.

$q = \dfrac{280p}{\sqrt{p^2+1225}} - p$ is de formule waarmee *q* wordt uitgedrukt in *p*.

- *Toon aan dat deze formule juist is en bereken exact het maximum van q.*

<u>Analyse</u> (onderstreep, schets, deelvragen, vergelijkingen):

Maak gebruik van gelijkvormige driehoeken en verhoudingen om de formule aan te tonen.

Maximum, dus afgeleide = 0, denk aan de quotiëntregel en de kettingregel.

<u>Wat noteer je / oplossing:</u>

$PA = \sqrt{p^2+35^2}$ en $PQ = 280$

ΔPOA is gelijkvormig met $\Delta PQ'Q$ dus $OP : PA = PQ' : PQ$ dus $p : \sqrt{p^2+35^2} = (p+q) : 280$

dus $\dfrac{p}{\sqrt{p^2+35^2}} \cdot 280 = (p+q)$ en $\dfrac{280p}{\sqrt{p^2+1225}} - p = q$ dus $q = \dfrac{280p}{\sqrt{p^2+1225}} - p$

Afgeleide is $q' = \dfrac{280 \cdot (p^2+1225)^{\frac{1}{2}} - 280p \cdot \frac{1}{2}(p^2+1225)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2p}{(p^2+1225)} - 1$

Vereenvoudig het quotiënt door teller en noemer te vermenigvuldigen met $(p^2+1225)^{\frac{1}{2}}$ dit

levert $q' = \dfrac{280 \cdot (p^2+1225) - 280p \cdot \frac{1}{2} \cdot 2p}{(p^2+1225) \cdot (p^2+1225)^{\frac{1}{2}}} - 1 = \dfrac{343\,000}{(p^2+1225)^{\frac{3}{2}}} - 1$

maximum dus $q' = 0$ dus $\dfrac{343\ 000}{(p^2+1225)^{\frac{3}{2}}} = 1$ dus $(p^2+1225)^{\frac{3}{2}} = 343\ 000$ dus

$p^2+1225 = 343000^{\frac{2}{3}} = 4900$ dus $p^2 = 4900 - 1225 = 3675$ dus maximum als $p = \sqrt{3675}$

$p = \sqrt{3675}$ invullen in $q = \dfrac{280 \cdot p}{\sqrt{p^2+1225}} - p = \dfrac{280 \cdot \sqrt{3675}}{\sqrt{(\sqrt{3675})^2+1225}} - \sqrt{3675} =$

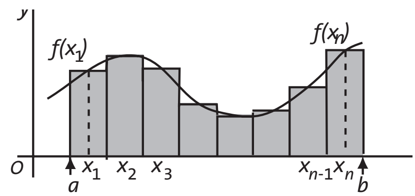
$\dfrac{280 \cdot \sqrt{3675}}{\sqrt{3675+1225}} - \sqrt{3675} = \dfrac{280 \cdot \sqrt{3675}}{70} - \sqrt{3675} = 3\sqrt{3675} - \sqrt{3675} = 3\sqrt{3675}$

conclusie: maximum van *q* is $q = 3\sqrt{3675}$ (of $q = 3\sqrt{1225 \cdot 3} = 105\sqrt{3}$)

6 Integreren

Riemannsom

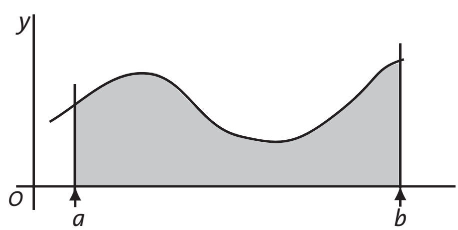
- **Riemannsom** is de optelling $f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + ... + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x + f(x_n) \cdot \Delta x$
  - $\boldsymbol{x_k}$ is een getal uit het k-de interval, bijv. het midden van de kolom
  - $\boldsymbol{f(x_k)}$ is de bij xk horende waarde van f op het k-de deelinterval
  - **oppervlakte** van de strook bij xk wordt gegeven door $f(x_k) \cdot \Delta x$



- **som-notatie** van een Riemannsom

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x$$

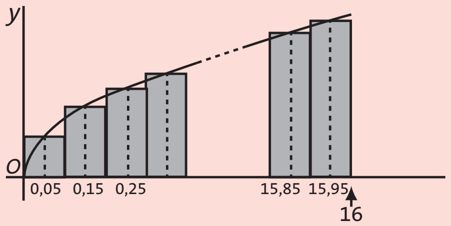
- **oppervlakte benaderen** als geldt $f(x) \geq 0$ op het interval $[a, b]$, dan geeft een Riemannsom een benadering van de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = a$ en $x = b$
- **exacte oppervlakte** wordt genoteerd als $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$
  - **integraal** van f op het interval $[a, b]$
  - **integrand** de functie f
  - **integratie-interval** $[a, b]$
- **schrijf Riemannsom als integraal** $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$
- **exacte waarde oppervlakte benaderen** bij een onbeperkte verfijning van de deelintervalletjes op $[a, b]$ nadert de Riemannsom tot de exacte waarde van de oppervlakte van het gebied (zie grijze gebied in de tekening)



6.1 oppervlakte benaderen met Riemannsom

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x}$

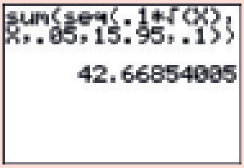
- *Benader de oppervlakte van het gebied onder de grafiek op het interval [0, 16] met behulp van een Riemannsom, gebruik 0,1 als breedte van de deelintervallen. Kies het midden van de deelintervallen voor de benadering.*



Gevraagd wordt naar de som: $0{,}1 \cdot \sqrt{0{,}05} + 0{,}1 \cdot \sqrt{0{,}15} + \ldots\ldots + 0{,}1 \cdot \sqrt{15{,}95}$

TI-84

sum(seq(0.1 · $\sqrt{x}$, x, 0.05, 15.95, 0.1)) $\approx$ 42,67

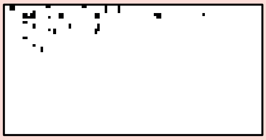


CASIO

$0{,}1 \cdot \sqrt{0{,}05} + 0{,}1 \cdot \sqrt{0{,}15} + \ldots\ldots + 0{,}1 \cdot \sqrt{15{,}95}$ is bv. te schrijven als

$\sum\limits_{n=0}^{159} 0{,}1 \cdot \sqrt{0{,}1n + 0{,}05}$ (ga dit zelf na)

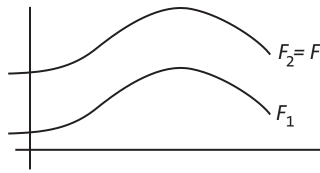
in menu RECUR $a_n = 0{,}1 \cdot \sqrt{0{,}1n + 0{,}05}$ invoeren (zie schermen);
laat voor de ondergrens n lopen van 0 tot 159 (altijd hele waarden)
onder TABL wordt ook de somrij gegeven (mits bij SET UP (boven knop MENU) Display op On is ingesteld). Dus $\sum\limits_{n=0}^{159} 0{,}1 \cdot \sqrt{0{,}1n + 0{,}05} \approx 42{,}67$



opmerking: exacte oppervlakte is $\int_0^{16} \sqrt{x}\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{1{,}5}\right]_0^{16} = 42\frac{2}{3}$

hoofdstelling van de differentiaal- en integraal rekening

- $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ waarbij $F'(x) = f(x)$
- **verband $f(x)$ en $F(x)$** $f(x)$ is de functie waaronder je de oppervlakte berekent, $F(x)$ is de functie waarmee je de oppervlakte berekent
  - **$F(x)$ noemen we de primitieve van functie $f(x)$**
  - **twee verschillende primitieven F_1 en F_2** van dezelfde functie f op een interval verschillen alleen een constante

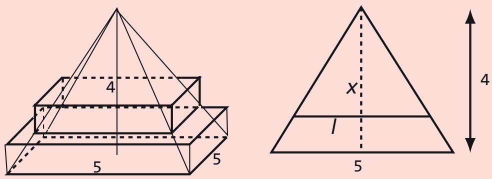


van Riemannsom naar integraal

- **oppervlakte of inhoud berekenen**
  - **stel de Riemannsom op** die de oppervlakte of inhoud benadert $\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x$
    druk $f(x)$ uit in x
  - **stel de integraal op** die de oppervlakte of inhoud exact weergeeft $\int_a^b f(x)\, dx$
  - **zoek de primitieve** van $f(x)$
  - **bereken de integraal** met $\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ of met de grafische rekenmachine (zie H8 en H9)

6.2 van Riemannsom naar integraal

- *Bereken de exacte inhoud van een piramide met lengte 5 en hoogte 4 met behulp van een integraal.*
- inhoud wordt benaderd door Riemannsom = $\sum_{k=1}^{n}$ oppervlakte(x_k) · Δx



inhoud wordt exact gegeven door $\int_0^4$ oppervlakte(x) dx

h is de hoogte = 4 dus de verhouding $x : l = 4 : 5$ zie rechter plaatje, dus $l = \frac{5}{4} \cdot x$

$$\text{oppervlakte}(x) = l \cdot l = \left(\frac{5}{4} \cdot x\right)^2 = \frac{25}{16}x^2$$

$$\int_0^4 \text{oppervlakte}(x)dx = \int_0^4 \frac{25}{16}x^2 dx = \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{25}{16}x^3\right]_0^4 = 33\frac{1}{3}$$

- berekening zonder integraal

inhoud piramide = $\frac{1}{3}$ · oppervlakte grondvlak · hoogte = $\frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 4 = 33\frac{1}{3}$

6.3 formule voor de inhoud van een bol

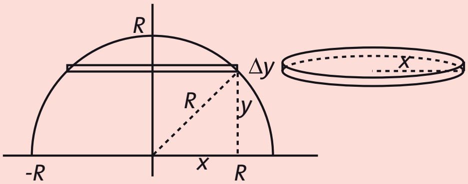
- *Stel de formule op voor de inhoud van een bol met straal R.*

Getekend is de halve cirkel met als vergelijking $y = \sqrt{R^2 - x^2}$

inhoud wordt benaderd door de Riemannsom $\sum$oppervlakte(y_k) · Δy (de som van de inhoud van de horizontale schijven), dus

inhoud wordt exact gegeven door

$\int_{-R}^{R}$ oppervlakte(y) dy



oppervlakte*(y)* uitdrukken in y levert

oppervlakte(y) = $\pi \cdot x^2 = \pi \cdot (R^2 - y^2)$ dus

$$I = \int_{-R}^{R} \text{oppervlakte}(y)dy = \int_{-R}^{R} \pi x^2 dy = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - y^2)dy = \pi\left[R^2 y - \frac{1}{3}y^3\right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

of

inhoud wordt benaderd door de Riemannsom $\sum$oppervlakte(x_k) · Δx (de som van de inhoud van de verticale schijven)

inhoud wordt exact gegeven door $\int_{-R}^{R}$ oppervlakte(x) dx

oppervlakte*(x)* uitdrukken in x levert oppervlakte(x) = $\pi \cdot y^2 = \pi \cdot (R^2 - x^2)$ dus

$$I = \int_{-R}^{R} \text{oppervlakte}(x)dx = \int_{-R}^{R} \pi y^2 dy = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx = \pi\left[R^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

rekenregels

- $\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^b (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

primitiveren van standaardfuncties

- **$f(x) = x^a$** $\int f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + c$ $a \neq -1$
- **$f(x) = \frac{1}{x}$** $\int f(x)\ \mathrm{d}x = \ln|x| + c$ $(x \neq 0)$

  $\int f(x)\ \mathrm{d}x = \ln(x) + c$ (voor $x > 0$) en

  $\int f(x)\ \mathrm{d}x = \ln(-x) + c$ (voor $x < 0$)
- **$f(x) = g^x$** $\int f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln g} \cdot g^x + c$
- **$f(x) = \mathrm{e}^x$** $\int f(x)\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c$
- **$f(x) = \ln(x)$** $\int f(x)\ \mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - x + c$
- **$f(x) = {}^g\log(x)$** $\int f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(g)}(x \cdot \ln(x) - x) + c$
- **$f(x) = \sin(x)$** $\int f(x)\ \mathrm{d}x = -\cos(x) + c$
- **$f(x) = \cos(x)$** $\int f(x)\ \mathrm{d}x = \sin(x) + c$

6.4 **bepaal de primitieve functie**

a $\int 3^x \, dx$ *b* $\int \frac{1}{x+2}\, dx$ *c* $\int 3\sin(x)\, dx$

d $\int 4x^2 \cdot \sqrt{x}\, dx$ *e* $\int \left(\frac{1}{x} - 1 + \ln(x)\right) dx$ *f* $\int \ln(2x)\, dx$

a $\frac{1}{\ln(3)} \cdot 3^x + c$

b $\ln|x+2| + c$

c $-3\cos(x) + c$

d $\int 4x^2 \cdot \sqrt{x}dx = \int 4x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}dx = \int 4x^{2\frac{1}{2}}dx = \frac{4}{3\frac{1}{2}}x^{3\frac{1}{2}} = \frac{8}{7}x^3 \cdot \sqrt{x} + c$

e $\ln|x| - x + x\ln(x) - x = \ln|x| + x\ln(x) - 2x + c$

f $\int \ln(2x)\, dx = \int (\ln(2) + \ln(x))\, dx = x\ln(2) + x\ln(x) - x + c$

(ook goed is $\frac{1}{2} \cdot (2x\ln(2x) - 2x) = x\ln(2x) - x + c$) (rekenregels logaritmen)

6.5 **integralen** voorbeelden van berekening

a $\int_1^2 (x^3 + x^2)\, dx$ *b* $\int_1^4 \left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right) dx$ *c* $\int_{-1}^1 e^{-x}dx$

d $\int_{0,5}^2 \frac{1}{2x}\, dx$ *e* $\int_1^4 {}^2\log(x)\, dx$ *f* $\int_1^4 \left(\frac{2x^3 + 4x - 5 + \sqrt{x}}{x^2}\right)dx$

de constante c mag nu weggelaten worden

a $\int_1^2 (x^3 + x^2)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \left(4 + \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = 6\frac{1}{12}$

b $\int_1^4 \left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)dx = \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4 = 4 - 2 = 2$

c $\int_{-1}^1 e^{-x}\, dx = [-e^{-x}]_{-1}^1 = -e^{-1} - -e^1 = \frac{-1}{e} + e$

d $\int_{0,5}^2 \frac{1}{2x}dx = \int_{0,5}^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}dx = \left[\frac{1}{2}\ln|x|\right]_{0,5}^2 = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(0,5) = \frac{1}{2}(\ln(2) - \ln(0,5)) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{0,5}\right)$

$= \frac{1}{2}\ln(4) = \ln(2)$

e $\frac{1}{\ln(2)}[x\ln(x) - x]_1^4 = \frac{1}{\ln(2)}((4\ln(4) - 4) - (\ln(1) - 1)) = \frac{1}{\ln(2)}(4\ln(4) - 4 - 0 + 1)$

$= \frac{4\ln(4)}{\ln(2)} - \frac{3}{\ln(2)} = 8 - \frac{3}{\ln(2)}$

f $\int_1^4 \left(\frac{2x^3 + 4x - 5 + \sqrt{x}}{x^2}\right) dx = \int_1^4 \left(\frac{2x^3}{x^2} + \frac{4x}{x^2} + \frac{-5}{x^2} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}\right) dx = \int_1^4 \left(2x + \frac{4}{x} - 5x^{-2} + x^{-1\frac{1}{2}}\right) dx =$

$\left[x^2 + 4\ln|x| + 5x^{-1} - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^4 = \left[x^2 + 4\ln|x| + \frac{5}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^4 =$

$\left(16 + 4\ln(4) + \frac{5}{4} - \frac{2}{2}\right) - (1 + 0 + 5 - 2) = 12\frac{1}{4} + 4\ln(4)$

primitiveren van $f(ax+b)$

- **primitieve** van $f(x)$ is $F(x)$ dan primitieve van $f(ax+b)$ is gelijk aan $\frac{1}{a} \cdot F(ax+b)$

voorbeelden

- $f(x) = (ax+b)^p$ — $\int f(x)\ dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{p+1}(ax+b)^{p+1} + c\ p \neq -1$
- $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ — $\int f(x)\ dx = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b| + c\ (x \neq 0)$
- $f(x) = g^{ax+b}$ — $\int f(x)\ dx = \frac{1}{a\ln(g)} g^{ax+b} + c$
- $f(x) = e^{ax+b}$ — $\int f(x)\ dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$
- $f(x) = \sin(ax+b)$ — $\int f(x)\ dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$
- $f(x) = \cos(ax+b)$ — $\int f(x)\ dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$

controle: antwoord differentiëren met de kettingregel

primitiveren van bijzondere gevallen

- **goniometrische functies**
  - $f(x) = \cos^2(x)$ herschrijven
    omdat $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ geldt $2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$ dus $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$
    dus $\int \cos^2(x)dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\right)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + c$
  - $f(x) = \sin^2(x)$ herschrijven
    omdat $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ geldt $2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$
    dus $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$
    dus $\int \sin^2(x)dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + c$
  - $f(x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$ herschrijven
    omdat $\sin(2x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$ geldt
    dus $\int 2\sin(x) \cdot \cos(x)dx = \int \sin(2x)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + c$
- **herkennen** van een functie en zijn afgeleide

voorbeelden

- $f(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$ — $\int f(x)\ dx = \ln|h(x)| + c$
- $f(x) = h'(x) \cdot e^{h(x)}$ — $\int f(x)\ dx = e^{h(x)} + c$
- $f(x) = \cos(x) \cdot \sin^n(x)$ — $\int \cos(x) \cdot (\sin(x))^n\ dx = \frac{1}{n+1}(\sin(x))^{n+1} + c$ ga dit zelf na door te differentiëren; gebruik de kettingregel

- **controleer of $F(x)$ de primitieve functie is van $f(x)$** door na te gaan of $F'(x) = f(x)$

voorbeeld

$f(x) = \cos^3(x)$ en $F(x) = \sin(x) - \frac{1}{3} \cdot \sin^3(x)$ ga dit na: $F'(x) = \cos(x) - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \cos(x) \cdot \sin^2(x)$ dus

$F'(x) = \cos(x) - \cdot \cos(x) \cdot (1 - \cos^2(x)) = \cos(x) - \cos(x) + \cos^3(x) = \cos^3(x)$

6.6 bepaal de primitieve functie

a $\int 5(2x-7)^6\,dx$ *b* $\int \frac{3}{5x+2}\,dx$ *c* $\int (0{,}5+\sin(2x-\frac{1}{4}\pi))\,dx$

d $\int 3e^{-2x+1}\,dx$ *e* $\int \cos(2x)\,dx$ *f* $\int \frac{5}{(4x-2)^5}\,dx$

a $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\cdot 5(2x-7)^8 = \frac{5}{16}(2x-7)^8 + c$

b $\frac{1}{5}\cdot 3\cdot \ln|5x+2| = \frac{3}{5}\cdot \ln|5x+2| + c$

c $0{,}5x - \frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{1}{4}\pi\right) + c$

d $-\frac{1}{2}\cdot 3e^{-2x+1} = -\frac{3}{2}e^{-2x+1} + c$

e $\frac{1}{2}\sin(2x) + c$

f $\int \frac{7}{(3x-2)^5}dx = \int 7(3x-2)^{-5}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{-1}{4}\cdot 7(3x-2)^{-4} = \frac{-7}{12}\cdot\frac{1}{(3x-2)^4} = \frac{-7}{12(3x-2)^4} + c$

6.7 bijzondere integralen

a $\int_1^2 \frac{2x}{x^2+5}\,dx$ *b* $\int_0^1 x^2\cdot e^{(x^3)}\,dx$ *c* $\int_0^{0{,}5\pi} 3\sin^2(2x)\,dx$

d $\int \cos(3x)\cdot\sin(3x)\,dx$ *e* bepaal a als $\int \cos(x)\cdot\sin^3(x)\,dx = a\cdot\sin^4(x)$

a $\int_1^2 \frac{2x}{x^2+5}\,dx = \left[\ln(x^2+5)\right]_1^2 = \ln(9) - \ln(6) = \ln(1{,}5)$

b $\int_0^1 x^2\cdot e^{(x^3)}dx = \int_0^1 \frac{1}{3}\cdot 3x^2\cdot e^{(x^3)}dx = \left[\frac{1}{3}\cdot e^{(x^3)}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot e^1 - \frac{1}{3}\cdot e^0 = \frac{1}{3}\cdot e - \frac{1}{3}$

c $\int_0^{0{,}5\pi} 3\sin^2(2x)dx = \int_0^{0{,}5\pi} 3\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(4x)\right)dx = \int_0^{0{,}5\pi}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cos(4x)\right)dx = \left[\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}\sin(4x)\right] =$

$\left[\frac{3}{2}x - \frac{3}{8}\sin(4x)\right]_0^{0{,}5\pi} = \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{3}{8}\sin(2\pi)\right) - (0-0) = \frac{3}{4}\pi$

d $\int \cos(3x)\cdot\sin(3x)dx = \int \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\cos(3x)\cdot\sin(3x)dx = \int \frac{1}{2}\cdot\sin(6x)dx = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos(6x)$

$= -\frac{1}{12}\cos(6x) + c$

e $a\cdot\sin^4(x)$ differentiëren met de kettingregel geeft $a\cdot 4\sin^3(x)\cdot\cos(x)$
er moet gelden $a\cdot 4\sin^3(x)\cdot\cos(x) = \cos(x)\cdot\sin^3(x)$ dus $4a = 1$ dus $a = \frac{1}{4}$

6.8 bijzondere integralen

- *Gegeven is de functie $f(x) = x\cdot e^{-x}$*
  De primitieve functie F gaat door het punt (0,3) en $F(x) = (ax+b)\cdot e^{-x} + c$
  Bepaal a, b en c.
  Er moet dus gelden $F'(x) = f(x)$ en $F(0) = 3$
  $F'(x) = a\cdot e^{-x} + (ax+b)\cdot -1e^{-x} = (-ax + (a-b))e^{-x}$ productregel
  $F'(x) = f(x)$ dus $(-ax+(a-b))e^{-x} = xe^{-x}$
  dit klopt als $a = -1$ (getal voor de x) en $a - b = 0$ dus $b = -1$ dus primitieve is
  $F(x) = (ax+b)\cdot e^{-x} + c = -x\cdot e^{-x} - e^{-x} + c$ en $F(0) = 3$ dus $F(0) = -0\cdot e^{-0} - e^{-0} + c = 0 - 1 + c = 3$
  dus $c = 4$.
  conclusie: $a = -1$, $b = -1$ en $c = 4$

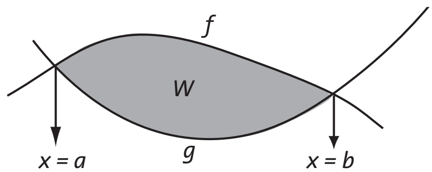
oppervlakte begrensd door de grafieken van functies berekenen

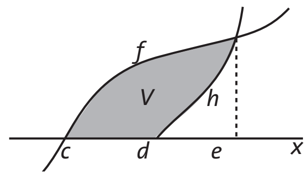
- **maak een schets** van de situatie
- **splits het gebied in handige deelgebieden** en bepaal de grenzen van deze gebieden
- **bepaal de snijpunten** van de grenzen
- **schrijf de oppervlakte als integraal**

voorbeelden

- **oppervlakte *W*** =

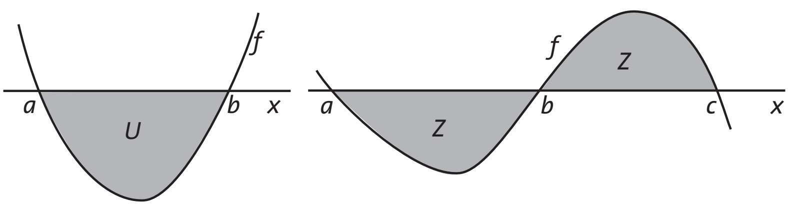
$$\int_a^b (\text{bovenste functie} - \text{onderste functie})\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = [F(x) - G(x)]_a^b$$





ga na dat de x-as hier door het gebied W mag lopen

- **oppervlakte *V*** $= \int_c^e f(x)\,\mathrm{d}x - \int_d^e h(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_c^e - [H(x)]_d^e$
- **gebied onder *x*-as** uitkomst van de integraal $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ behorende bij een gebied onder de x-as is negatief dus
  - **oppervlakte *U*** $= -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -[F(x)]_a^b$ of $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|[F(x)]_a^b\right|$
  - **oppervlakte *Z*** $= -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$ of $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$

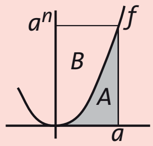


ga na dat de oppervlakte Z in de rechter figuur gesplitst moet worden

6.9 oppervlakte berekenen

Getekend is de grafiek van de functie $f(x) = x^n$ met de twee gebieden A en B.

- *Bereken exact de verhouding van de oppervlakten van A en B.*



$$\text{opp.}_A = \int_0^a x^n \, dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^a = \frac{1}{n+1}a^{n+1}$$

$$\text{opp.}_B = a \cdot a^n - \frac{1}{n+1}a^{n+1} = a^{n+1} - \frac{1}{n+1}a^{n+1} = a^{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

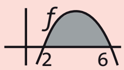
$$\text{opp.}_A : \text{opp.}_B = \frac{1}{n+1}a^{n+1} : \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)a^{n+1} = \frac{1}{n+1} : \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 : (n+1-1) = 1 : n$$

6.10 oppervlakte berekenen

Gegeven is de functie $f(x) = -0{,}5(x-2)(x-6)$

- *Bereken exact de oppervlakte van het gebied ingesloten door de x-as en de grafiek van f.*

snijpunten x-as als $-0{,}5(x-2)(x-6) = 0$ dus als $x = 2$ of $x = 6$



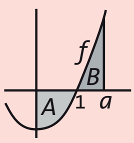
$$\text{oppervlakte} = \int_2^6 (-0{,}5x^2 + 4x - 6)dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + 2x^2 - 6x\right]_2^6 = 5\frac{1}{3}$$

6.11 oppervlakte berekenen

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 1$ met $x > 0$. Een deel van de grafiek loopt onder de x-as en een deel van grafiek loopt boven de x-as

- *Bereken exact voor welke waarde van a de oppervlakte van het gebied onder de x-as even groot is als de oppervlakte van het gebied boven de x-as.*

snijpunt x-as bij $x = 1$



$$\text{oppervlakte}_A = -\int_0^1 (x^2 - 1)dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\text{oppervlakte}_B = -\int_1^a (x^2 - 1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^a = \left(\frac{1}{3}a^3 - a\right) + \frac{2}{3}$$

gelijke oppervlakten dus $\frac{1}{3}a^3 - a = a\left(\frac{1}{3}a^2 - 1\right) = 0$

conclusie: $a = \sqrt{3}$ ($a = 0$ en $a = -\sqrt{3}$ vervallen)

6.12 oppervlakte en integraal

Gegeven is de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x}$

- *Bereken exact voor welke waarde van x de oppervlakte van het gebied ingesloten door de x-as, de grafiek van f en de lijnen x = a en x = 1 gelijk is aan 1 (neem a > 1).*

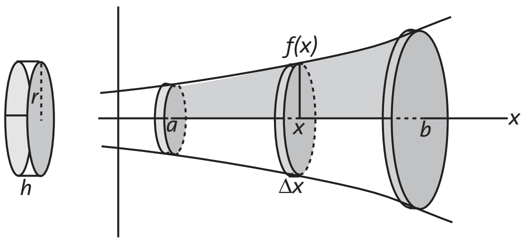
er moet gelden $\int_1^a \sqrt{x}\, dx = 1$ dus $\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^a = \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} = 1$ dus $a = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt[3]{6{,}25}$

6.13 oppervlakte benaderen

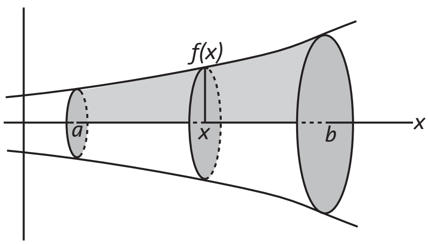
- *Bepaal in twee decimalen nauwkeurig:* $\int_e^{2e} \ln(x)\, dx$
- TI-84: tik in fnInt(ln(x), x, e, 2e) geeft 3,768338771 dus $\int_e^{2e} \ln(x)\, dx = 3{,}77$ (zie ook H8 en H9)

inhoudsberekening omwentelingslichaam bij wentelen om de *x*-as

- **omwentelingslichaam** ontstaat door deel van rechte lijn of deel van kromme lijn te wentelen om de x-as
- **inhoud cilinder** $= \pi r^2 \cdot h = \pi(f(x))^2 \cdot \Delta x = \pi y^2 \cdot \Delta x$
- **inhoud omwentelingslichaam** $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \pi \cdot (f(x_k))^2 \cdot \Delta x$



- **inhoud omwentelingslichaam** van gebied V tussen $f(x)$, de x-as en



de lijnen $x = a$ en $x = b$ is $\int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 \, dx$ of $\int_a^b \pi \cdot y^2 \, dx$

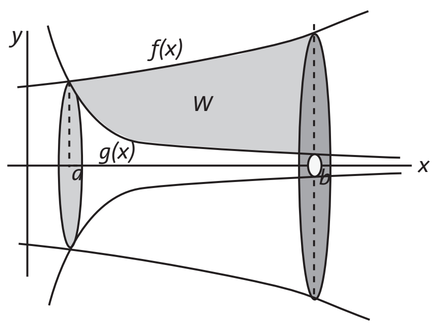
gebruik x als variabele, herschrijf y tot x

- **inhoud omwentelingslichaam** van gebied W tussen $f(x)$, $g(x)$ en

de lijnen $x = a$ en $x = b$ is

$\int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 \, dx - \int_a^b \pi \cdot (g(x))^2 \, dx$

ga na dat de inhoud beslist niet gelijk is aan $\int_a^b \pi \cdot (f(x) - g(x))^2 \, dx$



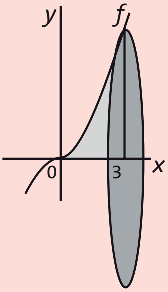
6.14 wentelen om x-as, inhoud exact berekenen

V is het vlak ingesloten door de grafieken van $x = 3$, $f(x) = x^3$ *en de x-as.* V wordt gewenteld om de x-as.

- *Bereken de exacte inhoud van dit omwentelingslichaam.*

grenzen x-interval zijn 0 en 3

$f(x) = x^3$ dus $y^2 = x^6$



inhoud $L_x = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 dx = \int_a^b \pi \cdot y^2 dx = \int_0^3 \pi \cdot x^6 dx = \pi\left[\frac{1}{7}x^7\right]_0^3 = 313\frac{3}{7} \cdot \pi$

6.15 wentelen om de x-as, inhoud benaderen

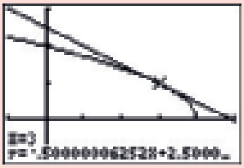
V is het gebied ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{4-x}$, de raaklijn aan f in het punt met x-coördinaat 3 en de y-as

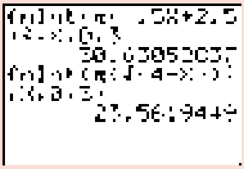
V wordt gewenteld om de x-as.

- *Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam in twee decimalen nauwkeurig.*

De grafische rekenmachine mag gebruikt worden.

De vergelijking van de raaklijn is $y = 0{,}5x + 2{,}5$ (zie H8 en 9 voor uitleg).





Inhoud $V = \int_0^3 \pi(0{,}5x + 2{,}5)^2\, dx - \int_0^3 \pi\left(\sqrt{(4-x)}\right)^2 dx \approx$

$101{,}3164 - 23{,}5619 \approx 77{,}75$

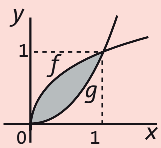
Leg uit hoe je de grafische rekenmachine hebt gebruikt.

6.16 oppervlakte en inhoud

V wordt ingesloten door $f(x) = \sqrt[n]{x}$ en $g(x) = x^n$ beide met $x \geq 0$

a *Druk de oppervlakte van V uit in n.*

de grafieken van f en g snijden elkaar in (0, 0) en (1, 1)



$\text{oppervlakte}_f = \int_0^1 x^{\frac{1}{n}}\, dx = \left[\frac{n}{1+n}x^{\frac{1+n}{n}}\right]_0^1 = \frac{n}{1+n}$

$\text{oppervlakte}_g = \int_0^1 x^n\, dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

oppervlakte gearceerde deel $= \frac{n}{1+n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}$

b *Wentel het gearceerde gebied om de x-as, noem het omwentelingslichaam L.*
Bereken voor welke waarde van n de inhoud van L gelijk is aan π.

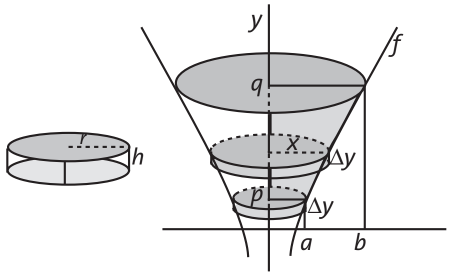
$\text{inhoud}_f = \int_0^1 \pi \cdot (f(x))^2\, dx = \int_0^1 \pi \cdot x^{\frac{2}{n}}\, dx = \left[\pi \cdot \frac{n}{2+n}x^{\frac{2+n}{n}}\right]_0^1 = \pi \cdot \frac{n}{2+n}$

$\text{inhoud}_g = \int_0^1 \pi \cdot (g(x))^2\, dx = \int_0^1 \pi \cdot x^{2n}\, dx = \left[\pi \cdot \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right]_0^1 = \pi \cdot \frac{1}{2n+1}$

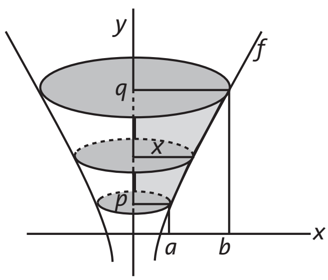
$\text{inhoud}_L = \pi$ dus $\pi \cdot \left(\frac{n}{2+n} - \frac{1}{2n+1}\right) = \pi$ dus $\frac{n}{2+n} = \frac{2n+2}{2n+1}$ dus $n = -\frac{4}{5}$

inhoudsberekening omwentelingslichaam bij wentelen om de *y*-as

- **omwentelingslichaam** ontstaat door deel van rechte lijn of deel van kromme lijn te wentelen om de *y*-as
- **inhoud cilinder** $= \pi r^2 \cdot h = \pi x^2 \cdot \Delta y$
- **inhoud omwentelingslichaam** $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \pi \cdot x^2 \cdot \Delta y$

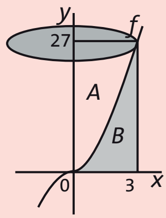


- **inhoud omwentelingslichaam** van gebied *V* tussen $f(x)$, de *y*-as en de lijnen $y = p$ en $y = q$ is $\int\limits_{p}^{q} \pi \cdot x^2 \, dy$
  - **herschrijf** $y = f(x)$ naar $x = ...$ want gebruik *y* als variabele
  - **bepaal de horizontale grenzen *p* en *q*** als het *x*-interval $[a, b]$ gegeven is, dan kan het *y*-interval $[p, q]$ bepaald worden met $f(a) = p$ en $f(b) = q$



6.17 wentelen om y-as, inhoud exact berekenen

Het deel tussen $x = 0$ en $x = 3$ van de grafiek van de functie $f(x) = x^3$ wordt gewenteld om de y-as.



- *Bereken de exacte inhoud van dit omwentelingslichaam.*

grenzen y-interval zijn $p = f(0) = 0$ en $q = f(3) = 27$

$f(x) = x^3$ dus $x = y^{\frac{1}{3}}$ dus $x^2 = y^{\frac{2}{3}}$

inhoud $L_y = \int_p^q \pi \cdot x^2 dy = \int_0^{27} \pi \cdot y^{\frac{2}{3}} dy = \pi\left[\frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}}\right]_0^{27} = \pi \cdot \frac{3}{5} \cdot 27 \cdot 9 = 145\frac{4}{5}\pi$

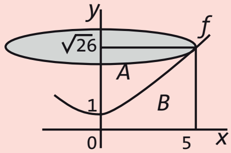
6.18 wentelen om de y-as, inhoud benaderen

V is het gebied ingesloten door de x-as, de grafiek van $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $x = 0$ en $x = 5$. V wordt gewenteld om de y-as.

- *Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat.*

de inhoud van het omwentelingslichaam tussen $p = f(0) = 1$ en $q = f(5) = \sqrt{26}$ wordt gegeven door: (cilinder met straal 5 en hoogte $\sqrt{26}$) – (A gewenteld) =

$\pi \cdot 5^2 \cdot \sqrt{26} - \int_1^{\sqrt{26}} \pi \cdot x^2\, dy = \pi \cdot 25 \cdot \sqrt{26} - \int_1^{\sqrt{26}} \pi \cdot (y^2 - 1)\, dy$



Gebruik de grafische rekenmachine (zie H8 en H9)

TI-84: $\pi \cdot 25 \cdot \sqrt{26} - \int_1^{\sqrt{26}} \pi \cdot (x^2 - 1)\, dx \approx 275{,}57$

CASIO: $\pi \cdot 25 \cdot \sqrt{26} - \int(\pi \cdot (x^2 - 1)\ ,\ 1,\ \sqrt{26})$ levert 275,57

6.19 inhoud exact

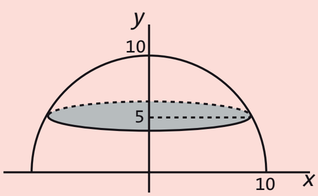
Van een bol met $r = 10$ wordt de bovenkant tot een hoogte $h = 5$ afgehaald.

- *Bereken exact de inhoud van het deel dat er af gehaald wordt.*

getekend is $x^2 + y^2 = 100$ dus $x = \sqrt{100 - y^2}$

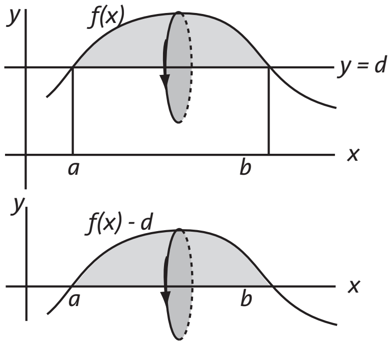
inhoud van het omwentelingslichaam tussen $y = 5$ en $y = 10$ wordt gegeven door

$\int_5^{10} \pi \cdot x^2\, dy = \int_5^{10} \pi \cdot (100 - y^2)\, dy = \pi \cdot \left[100y - \frac{1}{3}y^3\right]_5^{10} = 208\frac{1}{3}\pi$



inhoudsberekening omwentelingslichaam bij wentelen om de lijn *y* = *d*

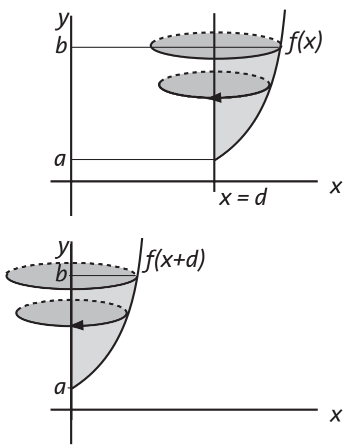
- **verschuif de functie *d* naar beneden** wentel-as wordt x-as en $f(x)$ wordt $f(x) - d$



- **formule voor wentelen om *y* = *d*** inhoud $L_x = \int_a^b \pi \cdot (f(x) - d)^2 dx$

inhoudsberekening omwentelingslichaam bij wentelen om de lijn *x* = *d*

- **verschuif de functie *d* naar links** wentel-as wordt y-as en $f(x)$ wordt $f(x + d)$



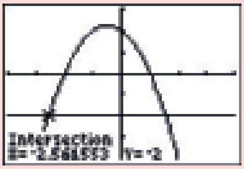
6.20 wentelen om de lijn $y = b$, inhoud benaderen

V is het gebied tussen de grafiek van de functie $f(x) = -(x-1)(x+2)$ en de lijn $y = -2$. *V* wordt gewenteld om de lijn $y = -2$.

- *Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam in 2 decimalen nauwkeurig.*

alles 2 omhoog verschuiven; wentel-as wordt nu de x-as
oftewel $h(x) = f(x) + 2 = -(x-1)(x+2) + 2 = -x^2 - x + 4$ wentelen om de x-as
linker- en rechtergrens benaderen met de grafische rekenmachine levert
$a \approx -2{,}562$ en $b \approx 1{,}562$

inhoud omwentelingslichaam $= \pi\int_a^b (-x^2 - x + 4)^2 dx$



TI-84: $\pi \int_{-2{,}562}^{1{,}562} (-x^2 - x + 4)^2 dx \approx 124{,}78$

CASIO: $\int(\pi(-x^2 - x + 4)^2, -2.562, 1.562) \approx 124{,}78$

6.21 wentelen om de lijn $x = a$, inhoud benaderen

V is het gebied ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = \ln(2x+1)$ de lijnen $x = 1$, $x = 3$ en de x-as.
Het gebied *V* wordt gewenteld om de lijn $x = 3$.

- *Bepaal de inhoud van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat.*

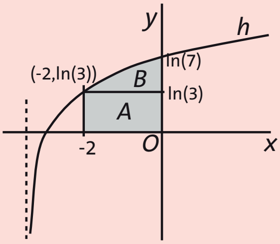
alles 3 naar links verschuiven; wentel-as wordt nu de y-as
oftewel $h(x) = f(x+3) = \ln(2(x+3)+1) = \ln(2x+7)$ wentelen om de y-as (zie tweede plaatje).

$y = \ln(2x+7)$ dus $2x+7 = e^y$ dus $x = 0{,}5e^y - 3{,}5$

A wentelen om y-as geeft cilinder met straal 2 en hoogte ln3
inhoud cilinder $= \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot \ln(3) = \pi \cdot 4 \cdot \ln(3) \approx 13{,}81$

B wentelen om y-as geeft omwentelingslichaam met inhoud

$$\int_{\ln(3)}^{\ln(7)} \pi \cdot x^2 \, dy = \int_{\ln(3)}^{\ln(7)} \pi \cdot (0{,}5e^y - 3{,}5)^2 \, dy \approx 4{,}33$$

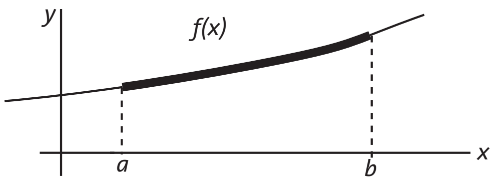


(Benader met de grafische rekenmachine zie H8 en H9.)
conclusie: inhoud is $4{,}33 + 13{,}81 \approx 18{,}1$

lengteberekening lijnstuk

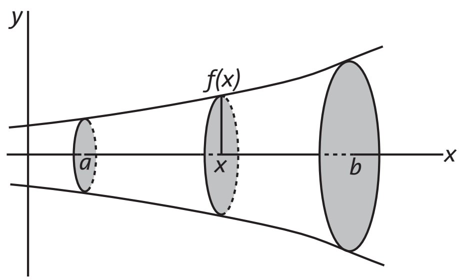
■ **formule** lengte van grafiek van functie f op x-interval $[a, b]$ is

$$\text{lengte} = \int_a^b \sqrt{1+(f\,'(x))^2}\,dx \quad (= \text{lengte dikke stuk grafiek})$$



oppervlakteberekening omwentelingslichaam

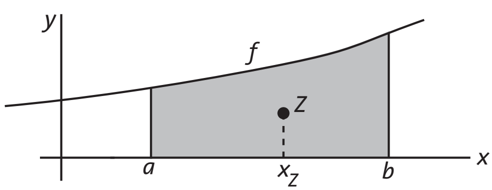
■ **formule** functie f op x-interval $[a, b]$ om x-as wentelen, levert omwentelingslichaam met



$$\text{oppervlakte} = \int_a^b 2\pi \cdot f(x) \cdot \sqrt{1+(f\,'(x))^2}\ dx$$

berekening x-coördinaat zwaartepunt (zie ook hoofdstuk 7 voor uitleg zwaartepunt)

■ **vergelijking** $x_z \cdot \int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b x \cdot f(x)\ dx$ geeft de x-coördinaat van het zwaartepunt x_z

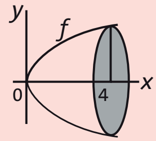


6.22 **oppervlakte omwentelingslichaam benaderen**

Grafiek van $f(x) = 2\sqrt{x}$ op het x-interval [0, 4] wordt om de x-as gewenteld. Zo ontstaat een paraboloïde.

- *Benader de oppervlakte van de paraboloïde in twee decimalen met behulp van de formule.*

$$\text{oppervlakte} = \int_a^b 2\pi \cdot f(x) \cdot \sqrt{1+(f\,'(x))^2}\ dx$$



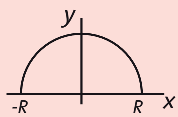
$$f(x) = 2\sqrt{x} \ \text{ en } \ f\,'(x) = x^{\frac{-1}{2}} \ \text{ en } \ (f\,'(x))^2 = x^{-1}$$

$$\text{oppervlakte} = \int_0^4 2\pi \cdot 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1+x^{-1}}\ dx = 4\pi\int_0^4 \sqrt{x+1}\ dx = 85{,}29$$

6.23 **formule oppervlakte bol bepalen met behulp van de formule op de linker bladzijde**

- *Bepaal de formule voor de oppervlakte van een bol met straal R*

$x^2 + y^2 = R^2$ dus wentel $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ op het interval $[-R, R]$ om de x-as



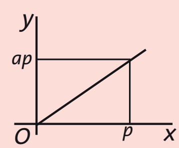
$$y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}} \text{ en } 2\pi\sqrt{R^2-x^2} \cdot \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}} = 2\pi\sqrt{R^2-x^2+x^2} = 2\pi R$$

$$\text{oppervlakte van de bol is } \int_{-R}^{R} 2\pi R\ dx = 2\pi R[x]_{-R}^{R} = 4\pi R^2$$

6.24 **lengteberekening lijnstuk** exact met behulp van de formule op de linker bladzijde

Gegeven is $y = ax$ en de punten (0, 0) en (p, ap)

- *Bereken de lengte van het lijnstuk tussen deze twee punten*



$$y = ax \text{ en } y' = a \text{ dus: lengte} = \int_0^p \sqrt{1+a^2}\ dx = \sqrt{1+a^2} \cdot [x]_0^p = p\sqrt{1+a^2}$$

opmerking: dit komt overeen met stelling van Pythagoras in een driehoek met zijden p en ap

6.25 **lengteberekening grafiek** exact met behulp van de formule op de linker bladzijde

Gegeven is $y = x^{\frac{3}{2}}$ op het interval [0, 4]

- *Bereken de exacte lengte van de grafiek op dit interval*

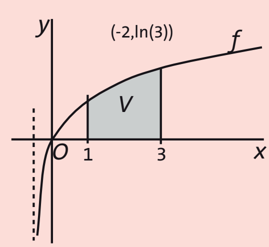
$$y = x^{\frac{3}{2}} \ \text{ en } \ y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \ \text{ dus:}$$

$$\text{lengte} = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\ dx = \left[\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{8}{27}(\sqrt{1000}-1)$$

6.26 **zwaartepunt** benadering met behulp van de formule op de linker bladzijde

Gegeven is $y = \ln(2x+1)$. Gebied V wordt ingesloten door $x = 1$, $x = 3$, de x-as en de grafiek van f.

- *Benader in één decimaal nauwkeurig de x-coördinaat van het zwaartepunt van gebied V*



$$x_z \cdot \int_1^3 \ln(2x+1)\ dx = \int_1^3 x \cdot \ln(2x+1)\ dx \ \text{ (met grafische}$$

rekenmachine) dus $x_z \cdot 3{,}1628 \approx 6{,}6014$ dus $x_z \approx 2{,}09$

hoofdzaken

primitiveren van functies

- $f(x) = x^a$ — $\int f(x)\ dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + c\ a \neq -1$
- $f(x) = \frac{1}{x}$ — $\int f(x)\ dx = \ln|x| + c\ (x \neq 0)$
  $\int f(x)\ dx = \ln(x) + c$ (voor $x > 0$) en
  $\int f(x)\ dx = \ln(-x) + c$ (voor $x < 0$)
- $f(x) = g^x$ — $\int f(x)\ dx = \frac{1}{\ln(g)} \cdot g^x + c$
- $f(x) = e^x$ — $\int f(x)\ dx = e^x + c$
- $f(x) = \ln(x)$ — $\int f(x)\ dx = x \cdot \ln(x) - x + c$
- $f(x) = {}^g\log(x)$ — $\int f(x)\ dx = \frac{1}{\ln(g)}(x \cdot \ln(x) - x) + c$
- $f(x) = \sin(x)$ — $\int f(x)\ dx = -\cos(x) + c$
- $f(x) = \cos(x)$ — $\int f(x)\ dx = \sin(x) + c$
- $f(ax + b)$ — $\int f(ax+b)\ dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + c$

  voorbeelden

  - $f(x) = (ax+b)^p$ — $\int f(x)\ dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{p+1}(ax+b)^{p+1} + c\ p \neq -1$
  - $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ — $\int f(x)\ dx = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b| + c\ (x \neq 0)$
  - $f(x) = g^{ax+b}$ — $\int f(x)\ dx = \frac{1}{a\ln(g)}g^{ax+b} + c$
  - $f(x) = e^{ax+b}$ — $\int f(x)\ dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$
  - $f(x) = \sin(ax+b)$ — $\int f(x)\ dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$
  - $f(x) = \cos(ax+b)$ — $\int f(x)\ dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$

- $f(x) = \sin^2(x)$ — $\int \sin^2(x)dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + c$
- $f(x) = \cos^2(x)$ — $\int \cos^2(x)dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\right)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + c$
- $f(x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$ — $\int 2\sin(x) \cdot \cos(x)dx = \int \sin(2x)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + c$
- $f(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$ — $\int f(x)\ dx = \ln|h(x)| + c$
- $f(x) = h'(x) \cdot e^{h(x)}$ — $\int f(x)\ dx = e^{h(x)} + c$
- $f(x) = \cos(x) \cdot \sin^n(x)$ — $\int \cos(x) \cdot (\sin(x))^n\ dx = \frac{1}{n+1}(\sin(x))^{n+1} + c$

controleer of F(x) goed is door het antwoord te differentiëren met de kettingregel, de uitkomst is dan f(x)

6.27 denkactiviteit lijnstuk en parabool

Op het domein [0, 4] is de functie f gegeven door $f(x) = 8 - \frac{1}{2}x^2$. De grafiek van f snijdt de y-as in P en de x-as in Q. R is het punt met coördinaten $(a, 0)$ met $a > 4$.
Er is een waarde van a waarvoor de grafiek van f en het lijnstuk PR elkaar snijden in het midden M van PR.

a *Bereken exact deze waarde van a.*

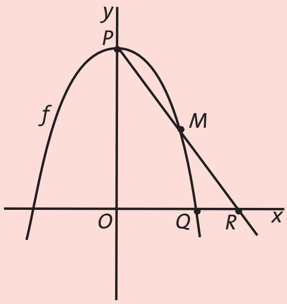
De lengte van boog PQ van de grafiek van f kan berekend worden met

lengte = $\int_0^4 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$

De lengte van boog PQ van de grafiek van f is gelijk aan de lengte van lijnstuk PR.

b *Bereken in twee decimalen nauwkeurig deze waarde van a.*

a Analyse (onderstreep, schets, deelvragen, vergelijkingen):
Zie schets: $P(0, 8)$, $R(a, 0)$ en $Q(4, 0)$. M is het midden van P en R, dus $M\left(\frac{1}{2}a, 4\right)$ en M ligt op f.



Wat noteer je / oplossing:
Voor het snijpunt moet gelden: de y-coördinaat is 4
Voor snijpunt geldt: $4 = 8 - \frac{1}{2}x^2$ dus $\frac{1}{2}x^2 = 4$ dus $x^2 = 8$ dus
$x_{snijpunt} = \sqrt{8}$
conclusie: $a = 2\sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{4 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$

b Analyse (onderstreep, schets, deelvragen, vergelijkingen):
De lengte van boog PQ van de grafiek van f kan berekend worden met
lengte = $\int_0^4 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$ dus bereken $f'(x)$
Lengte van lijnstuk PR, denk aan Pythagoras
De lengte van boog PQ van de grafiek van f is gelijk aan de lengte van lijnstuk PR.

Wat noteer je / oplossing:
$P(0, 8)$, $R(a, 0)$ dus lengte $PR = \sqrt{64 + a^2}$
$f'(x) = -x$
Lengte kromme = $\int_0^4 \sqrt{1 + x^2}\,dx \approx 9{,}294$ (gebruik grafische rekenmachine toegestaan)
$\sqrt{64 + a^2} = 9{,}294$ dus $64 + a^2 = 9{,}294^2$ dus $a = \sqrt{9{,}294^2 - 64}$
conclusie: $a \approx 4{,}73$

hoofdzaken vervolg

van Riemannsom naar integraal

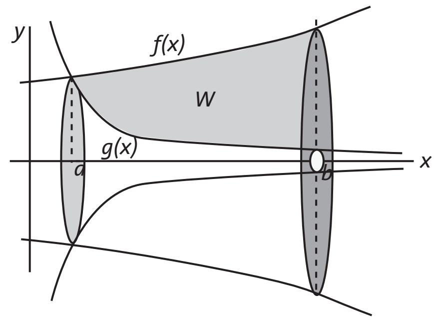
- **oppervlakte of inhoud berekenen**
- **Riemannsom** die de oppervlakte of inhoud benadert: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x = \int\limits_a^b f(x)\ dx$

oppervlakte *W* begrensd door de grafieken van functies berekenen

- **maak een schets** van de situatie
- **bepaal de snijpunten**
- **schrijf de oppervlakte als integraal: oppervlakte =**

$$\int\limits_a^b (\text{bovenste functie} - \text{onderste functie})\ dx$$

$$= \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\ dx = [F(x) - G(x)]_a^b$$



omwentelingslichamen

- **bij wenteling om de *x*-as** van gebied *W* tussen $f(x)$, $g(x)$ en de lijnen $x = a$ en $x = b$ is

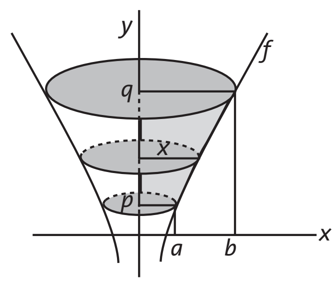
$$\pi \int\limits_a^b (f(x))^2\ dx - \pi \int\limits_a^b (g(x))^2\ dx$$

inhoudsberekening omwentelingslichaam bij wentelen om de *y*-as

- **bij wenteling om de *y*-as** van gebied *V* tussen $f(x)$, de y-as en de lijnen $y = p$ en $y = q$ is

$$\int\limits_p^q \pi \cdot x^2\ dy$$

- **bij wenteling om $y = d$**
  - **verschuif de functie *d* naar beneden** wentel-as wordt x-as en $f(x)$ wordt $f(x) - d$
- **bij wenteling om $x = d$**
  - **verschuif de functie *d* naar links** wentel-as wordt y-as en $f(x)$ wordt $f(x + d)$

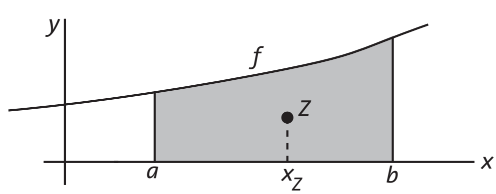


berekening x-coördinaat zwaartepunt

- **vergelijking**

$$x_z \cdot \int\limits_a^b f(x)\ dx = \int\limits_a^b x \cdot f(x)\ dx$$

geeft de x-coördinaat van het zwaartepunt x_z

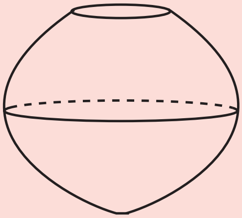


6.28 denkactiviteit vat met water

Een vat wordt gevuld met water. De formule van de oppervlakte van de waterspiegel wordt gegeven door $C(x) = 2500 \cdot \sqrt{x} - 5x^2$ in cm^2 waarbij x de hoogte in cm is van de waterspiegel boven de bodem. De maximale hoogte van de waterspiegel x is 49 cm.
Het vat begint smal, wordt breder en daarna weer smaller.

- *Bereken exact hoeveel procent van het vat is gevuld met water als het vat gevuld is tot het breedste punt. Geef je antwoord in hele procenten nauwkeurig.*

Analyse (onderstreep, schets, deelvragen, vergelijkingen):
De maximale hoogte is 49 cm.
De inhoud van het vat berekenen met $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} C(x_k) \cdot \Delta x = \int_0^{49} C(x)\ dx$
Met behulp van de afgeleide de hoogte h van het breedste punt berekenen.
Denk aan $C'(x) = 0$
Met behulp van $\int_0^{h} C(x)\ dx$ de inhoud berekenen tot h.
Percentage van het geheel berekenen.



Wat noteer je / oplossing:

Totale inhoud vat $= \int_0^{49} (2500 \cdot \sqrt{x} - 5x^2)dx = \int_0^{49} (2500 \cdot x^{\frac{1}{2}} - 5x^2)dx = \left[2500 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{1\frac{1}{2}} - \frac{5}{3} \cdot x^3\right]_0^{49} =$

$\left[2500 \cdot \frac{2}{3} \cdot x \cdot \sqrt{x} - \frac{5}{3} \cdot x^3\right]_0^{49} = 571666\frac{2}{3} - 196081\frac{2}{3} = 375585$

$C(x) = 2500 \cdot \sqrt{x} - 5x^2$ dus breedste punt als $C'(x) = 1250 \cdot x^{-\frac{1}{2}} - 10x = \frac{1250}{\sqrt{x}} - 10x = 0$

Dus $\frac{1250}{\sqrt{x}} = 10x$ dus $10x^{\frac{3}{2}} = 1250$ dus $x = 125^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{125^2} = \sqrt[3]{15625} = 25$

$\int_0^{h} (2500 \cdot \sqrt{x} - 5x^2)dx = \int_0^{25} (2500 \cdot x^{\frac{1}{2}} - 5x^2)dx = \left[2500 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{1\frac{1}{2}} - \frac{5}{3} \cdot x^3\right]_0^{25} =$

$2500 \cdot \frac{2}{3} \cdot (25)^{1\frac{1}{2}} - \frac{5}{3} \cdot (25)^3 = 208333\frac{1}{3} - 26041\frac{2}{3} = 182291\frac{2}{3}$

conclusie: $\frac{182291\frac{2}{3}}{375585} \cdot 100\% \approx 48{,}53...\%$ dus afgerond 49%

denkactiviteiten

- bij ingewikkelde opgaven spelen meerdere stappen een rol.
- ga niet meteen rekenen maar analyseer het probleem met een aantal stappen (zie hieronder).

stappenplan bij het oplossen van een complexe opgave

verdeel de oplossing van het probleem in de volgende stappen

- **analyse**
  - **lees** de hele opgave door
  - **noteer of onderstreep** de gegevens die van belang zijn
  - **maak een schets** een analyse figuur
    - zet gegevens uit de opgave in de schets
    - vul de schets aan
    - gebruik getallenvoorbeelden om de situatie duidelijk te krijgen
  - **deelvragen stellen en beantwoorden** welke onderliggende deelvragen kun je stellen bij de eindvraag en in welke volgorde los je dit op (in welke stukjes kun je de vraag opdelen)
  - **bedenk welk wiskundige oplossingen passen bij de vraag** (zie ook de hoofdzaken)

    denk aan
    - vergelijking opstellen en oplossen
    - formule opstellen en omschrijven
    - waarde van parameter uitrekenen of waarde van x uitrekenen
    - welke formules passen bij het probleem
    - abstraheer van getallenvoorbeeld naar algemene oplossing met variabele
    - rekening houden met een combinatie van vergelijkingen/grafieken

      houd bij deze theorie speciaal rekening met
      - primitieven (zie overzicht van de regels)
      - omschrijven van wortels en quotiënten naar exponenten
      - oppervlakte bepalen: maak een schets van de situatie, bepaal de verticale grenzen en denk aan oppervlakte =

        $$\int_a^b (\text{bovenste functie} - \text{onderste functie})\, dx$$
      - inhoud bepalen: maak een schets van de situatie, bepaal de verticale grenzen bij wentelen om de x-as en de horizontale grenzen bij wentelen om de y-as, denk aan inhoud =

        $$\pi\int_a^b (\text{buitenste functie})^2\, dx - \pi\int_a^b (\text{binnenste functie})^2\, dx$$
- **de oplossing** wat noteer je
  - **schets/tekening**
  - **oplossing met alle stappen**
  - **controle en conclusie** als je het antwoord hebt, lees nogmaals de vraag, controleer
    - heb je antwoord gegeven op de vraag
    - is het antwoord logisch, klopt de afronding

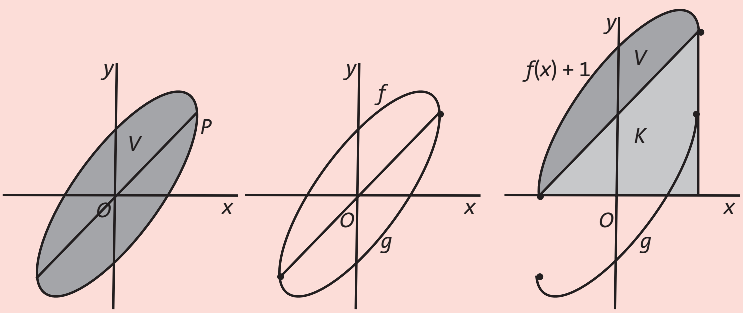
6.29 denkactiviteit oppervlakte benaderen

Een punt P beweegt volgens $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(t) + \cos(t) \end{cases}$ met domein $t \in [0, 2\pi]$

Punt P sluit het gebied in. Het gebied boven de lijn $y = x$ binnen de ingesloten figuur noemen we V.

- *Bereken in drie decimalen nauwkeurig de oppervlakte van dit gebied V.*

Analyse (onderstreep, schets, deelvragen, vergelijkingen):
In drie decimalen dus gebruik grafische rekenmachine is toegestaan.
Lijn $y = x$ snijden met de kromme.
Oppervlakte, dus integraal, dus functievoorschrift ontwikkelen.
$y(t) = \sin(t) + \cos(t) = x + \cos(t)$ dus alleen nog $\cos(t)$ herschrijven naar x oftewel $\cos(t)$ herschrijven naar $\sin(t)$.
let op gebruik integraal in verband met snijpunt x-as.



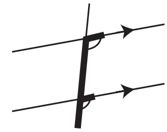
Wat noteer je / oplossing:

$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(t) + \cos(t) \end{cases}$ substitueren in $y = x$ geeft $\sin(t) + \cos(t) = \sin(t)$ dus $\cos(t) = 0$

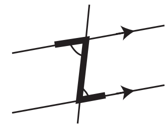
$t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = 1\frac{1}{2}\pi$. $t = \frac{1}{2}\pi$ dus $(1, 1)$ en $t = 1\frac{1}{2}\pi$ dus $(-1, -1)$
Bewegingsformule herschrijven zonder t:
$x(t) = \sin(t)$ dus $y(t) = \sin(t) + \cos(t) = x + \cos(t)$
en vanwege $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ geldt $\cos(t) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(t)} = \pm\sqrt{1 - x^2}$
dus $y(x) = x \pm \sqrt{1 - x^2}$ (zie schets $f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$ en $g(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$)
Linkergrens is $x = -1$ en rechtergrens is $x = 1$.
Dus V wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijn $y = x$.
Om een snijpunt met de x-as te voorkomen, schuiven we de grafiek van f 1 omhoog (zie schets).
Berekening met de grafische rekenmachine levert:
oppervlakte $V + K = \int_{-1}^{1} (x + \sqrt{1 - x^2} + 1)\, dx = 3{,}571$
oppervlakte driehoek $K = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$
conclusie: oppervlakte van V is $3{,}571 - 2 = 1{,}571$

7 meetkunde en cirkels

F-hoeken

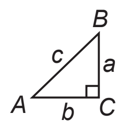


Z-hoeken

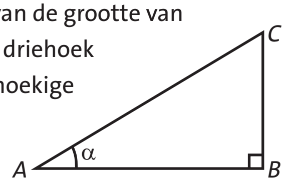


overzicht bekende meetkunde

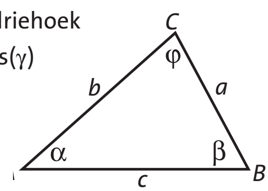
- **hoeken, lijnen en afstanden**
  - **overstaande hoeken** bij twee snijdende lijnen zijn gelijk
  - **F-hoeken of Z-hoeken**
    - als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn dan zijn de F-hoeken en Z-hoeken gelijk
- **som van hoeken** van een driehoek is 180°
  - **afstand** de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen twee meetkundige figuren
    - **afstand punt-lijn** kortste verbinding van punt tot lijn is lengte van loodlijn neergelaten vanuit dat punt op die lijn
  - **driehoeksongelijkheid** als drie punten A, B, C niet op één lijn liggen, dan geldt $|AB| + |BC| > |AC|$
- **driehoeken**



  - **stelling van Pythagoras** als ΔABC een rechte hoek in C heeft, dan geldt $a^2 + b^2 = c^2$
  - **omgekeerde stelling van Pythagoras** als in ΔABC geldt $a^2 + b^2 = c^2$, dan is hoek C recht.
  - **sinus, cosinus en tangens** gebruiken voor het berekenen van de grootte van hoeken en de lengte van zijden in een rechthoekige driehoek (zie H4) goniometrische verhoudingen in een rechthoekige driehoek



    - $\sin(\alpha) = \dfrac{BC}{AC}$ en $\cos(\alpha) = \dfrac{AB}{AC}$ en $\tan(\alpha) = \dfrac{BC}{AB}$
  - **sinus- en cosinusregel** gebruiken voor het berekenen van de lengte van lijnstukken en de grootte van hoeken in een (niet-rechthoekige) driehoek



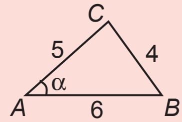
    - **cosinusregel** in elke ΔABC geldt $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$
    - **sinusregel** in elke ΔABC geldt $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$
  - **twee driehoeken zijn congruent** als ze gelijk hebben
    - ***ZZZ*** alle zijden
    - ***HZH*** een zijde en twee aanliggende hoeken
    - ***ZHZ*** twee zijden en de ingesloten hoek
    - ***ZHH*** een zijde, een aanliggende hoek en de tegenoverliggende hoek
    - ***ZZR*** twee zijden en de rechte hoek tegenover één van die zijden
  - **twee driehoeken zijn gelijkvormig** als ze gelijk hebben
    - ***hh*** twee paar hoeken
    - ***zhz*** een hoek en de verhouding van de aanliggende zijden
    - ***zzz*** de verhouding van de zijden
    - ***zzr*** een rechte hoek en de verhouding van twee niet-aanliggende zijden

met gelijkvormigheid is bijvoorbeeld de grootte van hoeken en de lengte van lijnstukken te berekenen.

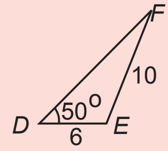
7.1 cosinusregel en sinusregel

a AB = 6, AC = 5 en BC = 4. Bereken in ΔABC hoek α in graden nauwkeurig.

b DE = 6, FE = 10 en $\angle D = 50^\circ$. Bereken in ΔDEF $\angle E$ in graden nauwkeurig.



a drie zijden zijn bekend en de driehoek is niet gelijkbenig of rechthoekig
cosinusregel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$
$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6\cos(\alpha)$ dus $\cos(\alpha) = 0{,}75$ dus $\alpha = 41^\circ$

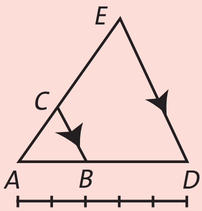


b twee zijden en een hoek zijn bekend en de driehoek is niet gelijkbenig of rechthoekig
Gebruik de cosinusregel als twee zijden en de ingesloten hoek bekend zijn. Gebruik de sinusregel als een hoek en de overliggende zijde bekend zijn.

$$\frac{10}{\sin(50^\circ)} = \frac{6}{\sin(\angle F)} \text{ dus } \sin(\angle F) = \frac{6 \cdot \sin(50^\circ)}{10} = 0{,}4596 \text{ dus } \angle F = 27^\circ$$

conclusie: $\angle E = 180^\circ - 27^\circ - 41^\circ = 112^\circ$

7.2 verhoudingen



In de figuur is $AE = 4$ en $AB : BD = 2 : 3$

- *Bereken de lengte van AC.*

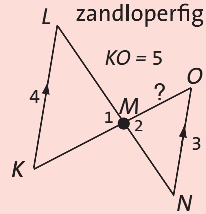
$\Delta ABC \sim \Delta ADE$ en $AB : BD = 2 : 3$ dus $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$ en

$AB : AD = 2 : 5$ dus $\dfrac{2}{5} = \dfrac{AC}{4}$ dus $AC = 1{,}6$

7.3 gelijkvormig

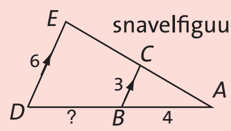
Bepaal de lengte van OM, DB en QT in de drie figuren.

zandloperfiguur

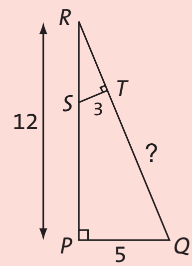


- ΔKML is gelijkvormig met ΔOMN want (*hh*)
  $\angle M_1 = \angle M_2$ (overstaande hoeken) en
  $\angle K = \angle O$ (Z-hoeken)
  noem $OM = x$ er geldt dan $\dfrac{4}{3} = \dfrac{5-x}{x}$ dus
  $x = OM = 2\frac{1}{7}$

snavelfiguur

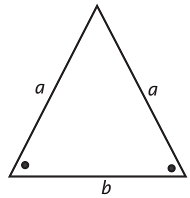


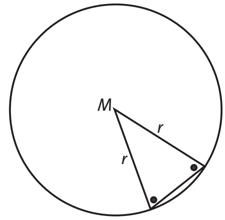
- ΔABC is gelijkvormig met ΔADE want (*hh*)
  $\angle A = \angle A$ en $\angle B = \angle D$ (F-hoeken)
  noem $DB = x$ dan geldt $\dfrac{6}{3} = \dfrac{x+4}{4}$ dus $x = DB = 4$



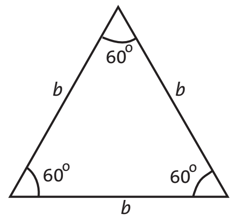
- ΔPQR is gelijkvormig met ΔTSR want (*hh*)
  $\angle P = \angle T$ (90°) en $\angle R = \angle R$
  $QR = 13$ (Pythagoras) noem $QT = x$ dan $RT = 13 - x$
  er geldt dan $\dfrac{5}{3} = \dfrac{12}{13-x}$ dus $x = QT = 5{,}8$

overzicht bekende meetkunde vervolg

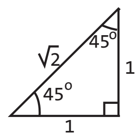


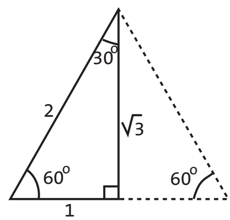


- **gelijkbenige driehoek** heeft
  - **twee gelijke zijden**
  - **twee gelijke hoeken**
  - **toepassing** een driehoek waarvan twee hoekpunten op een cirkel liggen en het derde hoekpunt op het middelpunt van die cirkel ligt, is gelijkbenig

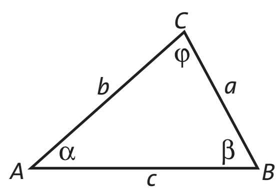


- **gelijkzijdige driehoek** heeft
  - **drie gelijke zijden**
  - **drie gelijke hoeken** van 60°
- **verhoudingen** van zijden
  - in een driehoek met hoeken van 45°, 45° en 90° verhouden de zijden zich als $1 : 1 : \sqrt{2}$
  - in een driehoek met hoeken van 30°, 60° en 90° verhouden de zijden zich als $1 : 2 : \sqrt{3}$





- **oppervlakte** van een driehoek is gelijk aan:
  - $\frac{1}{2} \times$ basis $\times$ hoogte
  - $\frac{1}{2} \times$ zijde $b \times$ zijde $c \times \sin(\alpha)$
    met α de hoek tussen zijde b en zijde c



hoofdwaarde tabel

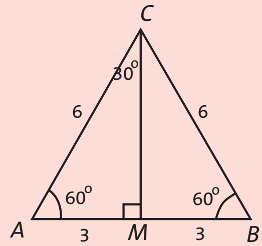
goniometrische verhoudingen in bijzondere driehoeken

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	–1
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	bn	0	bn

7.4 oppervlakte gelijkzijdige driehoek

ΔABC is gelijkzijdig met zijden 6

- *Bereken de oppervlakte van deze driehoek.*



eerste methode

CM staat loodrecht op AB dus ΔAMC is een 30°, 60°, 90° driehoek dus de zijden verhouden zich als $1 : 2 : \sqrt{3}$

Dus $CM = 3\sqrt{3}$ (of met Stelling van Pythagoras)

Dus oppervlakte $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

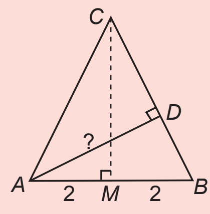
tweede methode

$\alpha = 60°$ dus oppervlakte $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin(60°) = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \frac{1}{2}\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

7.5 oppervlakte en lengte

ΔABC is gelijkbenig $AB = 4$, $AC = BC = \sqrt{20}$ en $AD \perp BC$

- *Bepaal de lengte van AD in één decimaal nauwkeurig.*



$CM = 4$ (Pythagoras in ΔAMC)

oppervlakte $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times AB \times CM = \frac{1}{2} \times CB \times AD$ dus

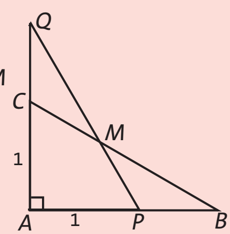
$\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = \frac{1}{2} \times \sqrt{20} \times AD$ dus $AD = \frac{16}{\sqrt{20}} \approx 3{,}6$

7.6 oppervlakteregel

Gegeven zijn de congruente ΔABC en ΔAPQ, beide 30°, 60°, 90° driehoeken met P op AB en C op AQ. M is het snijpunt van BC en PQ.

$\angle ABC = \angle AQP = 30°$, $\angle BCA = \angle APQ = 60°$, $\angle BAC = \angle PAQ = 90°$

- *Bepaal de verhouding van de oppervlaktes van vierhoek APMC en ΔPBM*



Kies bijvoorbeeld $AP = 1$, dan $AB = \sqrt{3}$ en $PB = \sqrt{3} - 1$

ΔAPM heeft dezelfde hoogte als ΔPBM

dus verhouding oppervlaktes $\Delta APM : \Delta PBM = 1 : (\sqrt{3} - 1)$

ΔAPM is congruent met ΔACM (ga na)

Dus verhouding oppervlaktes $APMC : \Delta PBM = 2 : (\sqrt{3} - 1)$

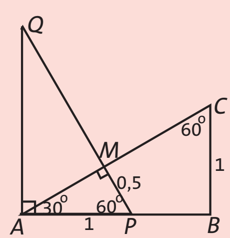
7.7 oppervlakte verhoudingen

Gegeven zijn de congruente driehoeken ΔABC en ΔAPQ, beide 30°, 60°, 90° driehoeken met P op AB en $BC = AP = 1$.

M is het snijpunt van AC en PQ

$\angle BAC = \angle AQP = 30°$, $\angle BCA = \angle APQ = 60°$, $\angle ABC = \angle PAQ = 90°$

- *Bepaal de verhouding van oppervlaktes van de ΔAPM en ΔABC*



Ga na dat ΔAPM een 30°, 60°, 90° driehoek is met

$PM : MA : AP = 1 : \sqrt{3} : 2$

Omdat $AP = 1$ geldt $PM = \frac{1}{2}$ en $MA = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Dus oppervlakte $\Delta APM = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{8}\sqrt{3}$

Oppervlakte $\Delta ABC = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Verhouding $\Delta APM : \Delta ABC = 1 : 4$

overzicht bekende meetkunde vervolg

- **vierhoeken** som van hoeken van een vierhoek is 360^o

  bijzondere vierhoeken
  - **parallellogram**
    - er zijn twee paren evenwijdige zijden
    - er zijn twee paren gelijke overstaande zijden
    - twee overstaande zijden zijn gelijk en evenwijdig
    - diagonalen delen elkaar middendoor
  - **ruit**

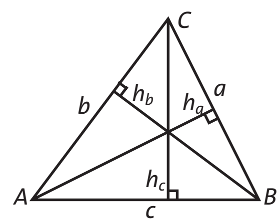
    een ruit is een parallellogram
    - met vier gelijke zijden; het is voldoende te bewijzen dat drie zijden gelijk zijn
    - met twee even lange aanliggende zijden
    - waarin een diagonaal een hoek middendoor deelt
    - waarin de diagonalen elkaar loodrecht snijden
  - **rechthoek**
    - vierhoek met vier rechte hoeken het is voldoende te bewijzen dat er drie rechte hoeken zijn
    - parallellogram met een rechte hoek
    - parallellogram met gelijke diagonalen
  - **trapezium**
    - vierhoek met twee evenwijdige zijden de twee evenwijdige zijden hoeven niet even lang te zijn
  - **cirkel** met middelpunt M en straal r is de verzameling van alle punten die afstand r tot een gegeven punt M hebben
    - raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de verbindingslijn van middelpunt en raakpunt
  - **oppervlakte cirkel** is gelijk aan $\pi \cdot r^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot d^2$

    maak gebruik van r = straal of d = diameter

hoogtelijn

- **definitie** hoogtelijn gaat vanuit een hoekpunt van een driehoek loodrecht naar de tegenoverliggende zijde
- **stelling van de drie hoogtelijnen van een driehoek** in elke ΔABC gaan de drie hoogtelijnen door één en hetzelfde punt
- **oppervlakte driehoek** $= \frac{1}{2} \times$ basis $\times$ lengte hoogtelijn

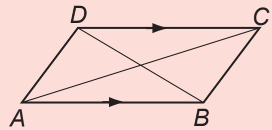
  dus geldt ook:
  - $h_a \times$ zijde a = $h_b \times$ zijde b = $h_c \times$ zijde c

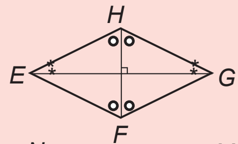


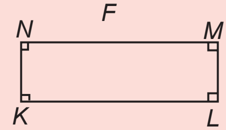
7.8 eigenschappen parallellogram, ruit en rechthoek

Getekend zijn parallellogram *ABCD*, ruit *EFGH* en rechthoek *KLMN*

- *Geef de eigenschappen van deze figuren.*
- parallellogram
  AB // *CD* en *AD* // *BC*
  AB = *CD* en *AD* = *BC*
  AC en *BD* snijden elkaar middendoor
  $\angle A = \angle C$ en $\angle D = \angle B$
- ruit is een bijzonder parallellogram
  EF = *GH* = *EH* = *FG*
  EG en *FH* snijden elkaar loodrecht middendoor
  $\angle FEG = \angle GEH$
- rechthoek is een bijzonder parallellogram
  alle hoeken zijn 90°

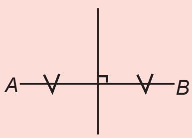




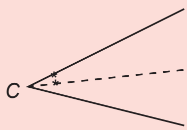


7.9 voorbeeld puntverzamelingen

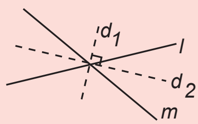
middelloodlijn van *AB*



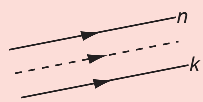
deellijn van $\angle C$



deellijnenpaar d_1 en d_2 van lijn *l* en *m*



middenparallel van lijn *k* en *n*

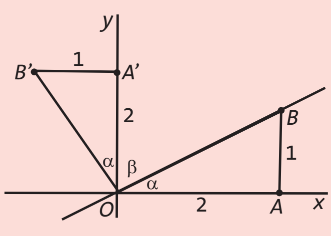


7.10 loodrechte lijn

Getekend is de lijn *OB* met vergelijking $y = \frac{1}{2}x$

- *Bewijs met behulp van de figuur dat de lijn* $y = -2x$ *loodrecht op* $y = \frac{1}{2}x$ *staat.*
  $\alpha + \beta = 90°$
  Zie de lijn met daarop ΔOAB met zijden 2 en 1
  Draai deze driehoek over 90°, er ontstaat dan
  $\Delta OA'B'$ ook met zijden 2 en 1

  Dus $OB' \perp OB$. Helling OB' is nu -2, dus $y = -2x \perp y = \frac{1}{2}x$



7.11 hoogtelijnen

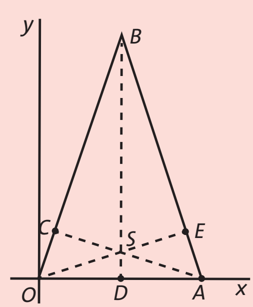
Gegeven driehoek *OAB*, met *A*(4, 0) en *B*(2, 6)

- *Bereken het snijpunt van de hoogtelijnen.*

  $\text{r.c.}_{AB} = \dfrac{6-0}{2-4} = -3$, dus $\text{r.c.}_{\text{hoogtelijn } OE} = \dfrac{1}{3}$,

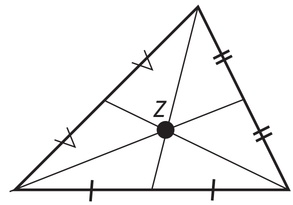
  dus hoogtelijn *OE*: $y = \frac{1}{3}x$ en hoogtelijn *BD*: $x = 2$

  conclusie: snijpunt $S\left(2, \frac{2}{3}\right)$



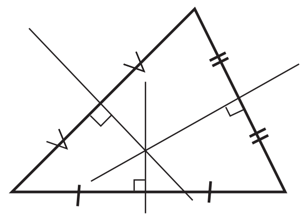
zwaartelijn

- **definitie** zwaartelijn gaat vanuit een hoekpunt van een driehoek naar het midden van de tegenoverliggende zijde
- **stelling van de drie zwaartelijnen van een driehoek** in elke ΔABC gaan de drie zwaartelijnen door één en hetzelfde punt Z
- **punt Z** verdeelt de zwaartelijnen in twee stukken met verhouding 1 : 2
- **een zwaartelijn** verdeelt een driehoek in twee stukken met gelijke oppervlakte



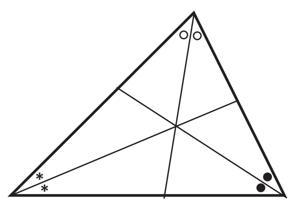
middelloodlijn

- **definitie** middelloodlijn van AB is de lijn die door het midden van AB gaat en die loodrecht op AB staat
- **middelloodlijn** van lijnstuk AB is de verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee gegeven punten A en B
- **punt met gelijke afstanden** tot twee gegeven punten A en B ligt op de middelloodlijn van lijnstuk AB
  - **notatie** $d(P, A) = d(P, B)$
- **stelling van de drie middelloodlijnen van een driehoek** in elke ΔABC gaan de drie middelloodlijnen van de drie zijden door één en hetzelfde punt; dit punt is het midden van de omgeschreven cirkel



deellijn of bissectrice

- **definitie** deellijn van $\angle A$ is de lijn die $\angle A$ in twee even grote hoeken deelt
- **punt met gelijke afstanden tot de twee benen** van een hoek ligt op de bissectrice van die hoek
- **deellijn of bissectrice** van een hoek is de verzameling van alle punten binnen die hoek die dezelfde afstand hebben tot de benen van die hoek
  - **notatie** $d(P, l) = d(P, m)$ met l en m de benen van de hoek
- **stelling van de drie deellijnen van een driehoek** in elke ΔABC gaan de drie deellijnen van de drie hoeken door een en hetzelfde punt; dit punt is het midden van de ingeschreven cirkel
- **deellijnenpaar of bissectricepaar** van twee snijdende lijnen is de verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot deze twee
  - **hoek** tussen de twee deellijnen is loodrecht, de twee deellijnen snijden elkaar loodrecht in het snijpunt van die twee lijnen



middenparallel van twee evenwijdige lijnen

- **verzameling van alle punten** die dezelfde afstand hebben tot die twee lijnen

7.12 middelloodlijn

Gegeven lijnstuk AB met $A(2, 3)$ en $B(8, -9)$

- *Stel de vergelijking op van de middelloodlijn van lijnstuk AB.*

Midden van AB is $M(5, -3)$ want $(2 + 8) : 2 = 5$ en $(3 + -9) : 2 = -3$

Richtingscoëfficiënt AB is -2 dus richtingscoëfficiënt middelloodlijn is $\frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}x + b$ door $M(5, -3)$ levert $b = -5\frac{1}{2}$ dus $y = \frac{1}{2}x - 5\frac{1}{2}$

7.13 bewijs van de stelling van de drie middelloodlijnen van een driehoek

- *Bewijs dat de drie middelloodlijnen in een driehoek door één punt gaan.*

<u>gegeven</u>

ΔABC met M als snijpunt van twee middelloodlijnen op AB en BC

<u>te bewijzen</u>

er moet gelden $AM = BM = CM$

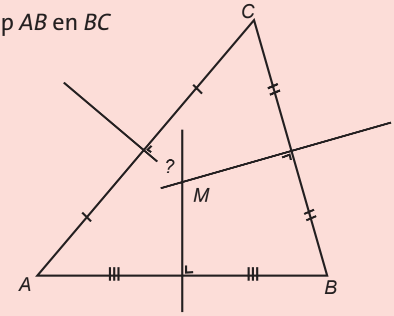
want M is het midden van de omgeschreven cirkel

<u>bewijs</u>

1 $AM = BM$ (definitie middelloodlijn)

2 $BM = CM$ (definitie middelloodlijn)

3 conclusie: $AM = BM = CM$ (regel 1 en 2)



7.14 bewijs van de stelling van de drie zwaartelijnen van een driehoek

- *Bewijs dat de drie zwaartelijnen in een driehoek door één punt S gaan.*

<u>gegeven</u>

ΔABC met S_1 als snijpunt van de twee zwaartelijnen AQ en CP en ΔABC met S_2 als snijpunt van de twee zwaartelijnen BR en CP

<u>te bewijzen</u>

De drie zwaartelijnen AQ en BR en CP gaan door één punt dus $S_1 = S_2$

<u>bewijs</u>

1 $AP = BP$ (definitie zwaartelijn)

2 $BQ = QC$ (definitie zwaartelijn)

3 $QU \parallel CP$ dus $PU = UB$

4 $AP : PU : UB = 2 : 1 : 1$ (regel 1 en 3)

5 als $QU = 3a$ dan $CP = 6a$ (verm. met 2 vanuit B)

6 als $QU = 3a$ dan $S_1P = 2a$

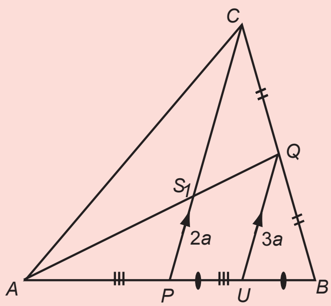
(vermenigvuldiging met $\frac{2}{3}$ vanuit A)

7 dus $PS_1 : CS_1 = 2a : 4a = 1 : 2$

8 analoge redenering in driehoek II levert $PS_2 : CS_2 = 1 : 2$

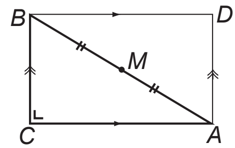
9 $S_1 = S_2$ (regel 7 en 8)

10 conclusie: de drie zwaartelijnen gaan door één punt S



Thales

- **stelling van Thales** als in ΔABC geldt $\angle C = 90°$ dan ligt punt C op de cirkel met middellijn AB



  bewijs
  - **gegeven** ΔABC met $\angle C = 90°$ met M is het midden van AB
  - **te bewijzen** $AM = BM = CM = r$ cirkel
    - teken punt D zodat $ADBC$ een rechthoek is
    - $DM = CM = AM = BM$ (want rechthoek)
    - conclusie: C ligt op de cirkel met middellijn AB

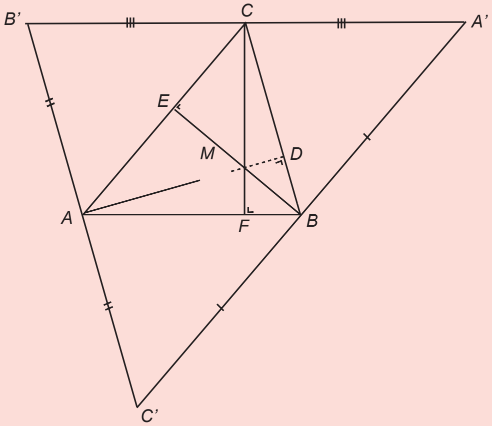
  toepassingen
  - van een rechthoekige driehoek is het midden van de schuine zijde het middelpunt van de omgeschreven cirkel
  - een driehoek waarvan een zijde de middellijn van de omgeschreven cirkel is, is rechthoekig

meetkundig redeneren

- **gebruikmaken van** Thales, F-hoeken, Z-hoeken, gelijkvormigheid, gelijkbenigheid
  - **gelijke hoeken** denk aan
    - evenwijdige lijnen
    - gelijkbenige diehoeken
    - gelijkzijdige driehoeken
    - congruente driehoeken, gelijkvormige driehoeken
  - **driehoek met hoek van 90°** denk aan cos, sin, tan, Pythagoras, Thales, middellijn van cirkel
  - **driehoek zonder hoek van 90°** denk aan sinusregel, cosinusregel
    - **sinusregel** $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$
    - **cosinusregel** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$
  - **noteer** de naam van de gebruikte stelling tussen haakjes

7.15 bewijs van de stelling van de drie hoogtelijnen van een driehoek

- *Bewijs dat de drie hoogtelijnen in een driehoek door één punt gaan.*



gegeven

ΔABC met de hoogtelijnen uit A, B en C en $\Delta A'B'C'$ met $A'C'$ evenwijdig aan AC enz.

te bewijzen

De drie hoogtelijnen AD, BE en FC gaan door één punt

bewijs

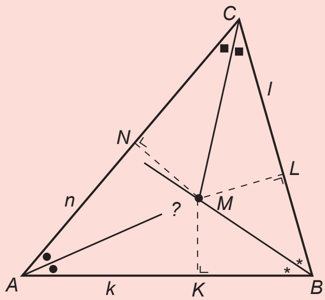
1 BE staat loodrecht op AC en dus ook loodrecht op $A'C'$
2 B is midden van $A'C'$ dus BE is de middelloodlijn van $A'C'$
3 AD is middelloodlijn van $B'C'$ en FC is die van $A'B'$
4 middelloodlijnen van een driehoek gaan door hetzelfde punt
5 conclusie: dit geldt dus ook voor de hoogtelijnen

7.16 bewijs van de stelling van de drie deellijnen van een driehoek

- *Bewijs dat de drie deellijnen in een driehoek door één punt gaan.*

gegeven

ΔABC met zijden k, l en n en M als snijpunt van twee deellijnen van de hoeken B en C en de voetpunten K, L en N



te bewijzen

er moet gelden d(M, k) = d(M, l) = d(M, n) want M is het midden van de ingeschreven cirkel

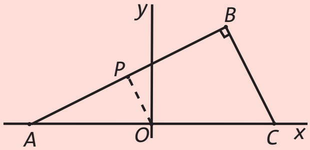
bewijs

1 $MK = ML$ (congruente driehoeken vanwege ZHH)
2 $ML = MN$ (congruente driehoeken vanwege ZHH)
3 dus $MK = ML = MN$ (regel 1 en 2)
4 conclusie: d(M, k) = d(M, l) = d(M, n)

7.17 evenwijdige lijnen

Gegeven is een assenstelsel met $A(-5, 0)$, $B(3, 4)$ en C op de x-as. $\angle ABC = 90°$, lijn $OP \mathbin{//} CB$ en P op AB.

- *Bereken de coördinaten van punt P.*



r.c.$_{AB} = \frac{1}{2}$ dus r.c.$_{BC} = -2$ en $B(3, 4)$ dus $C(5, 0)$ op de x-as.

Rechthoekige driehoek, dus cirkel met AC als middellijn en $C(5, 0)$ (Thales)

Middelpunt van de cirkel is midden van AC dus O

$OP \mathbin{//} CB$ dus ΔACB en ΔAOP zijn gelijkvormig met verhouding 2 : 1 (hrh)

Dus P ligt halverwege AB, dus $x_P = -1$ en $y_P = 2$

Dus $P(-1, 2)$

vergelijking lijn

- **vier soorten vergelijkingen**
  - $y = ax + b$
    - r.c. = a en snijpunt y-as is $(0, b)$
    - loodrechte lijn $y = -\frac{1}{a}x + c$
  - $px + qy = c$
    - gaat door $\left(0, \frac{c}{q}\right)$ en $\left(\frac{c}{p}, 0\right)$
    - loodrechte lijn $qx - py = d$
    - normaalvector van lijn l is $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ staat loodrecht op $\begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$
  - $rx + sy = 1$
    - gaat door $\left(0; \frac{1}{s}\right)$ en $\left(\frac{1}{r}; 0\right)$
    - loodrechte lijn $sx - ry = t$
  - $(y - v) = a(x - h)$
    - r.c. = a en gaat door (h, v)

stelsels van vergelijkingen

- **stelsel** heeft één of meerdere oplossingen
  - **meetkundige betekenis** snijpunten van de grafieken
- **stelsel is strijdig** $\Rightarrow$ er zijn geen oplossingen
  - **meetkundige betekenis** grafieken snijden elkaar niet, rechte lijnen lopen evenwijdig (parallel)

    bijvoorbeeld:
    - $y = 2x + 3$ en $x = \frac{1}{2}y - 1$,

      eliminatie van x levert $y = 2\left(\frac{1}{2}y - 1\right) + 3 = y + 1$

      $y = y + 1$ geldt voor geen enkele waarde van y, dus geen oplossingen
- **stelsel is afhankelijk** $\Rightarrow$ oneindig veel oplossingen
  - **meetkundige betekenis** grafieken vallen samen

    bijvoorbeeld:
    - $y = 2x + 3$ en $x = \frac{1}{2}y - 1\frac{1}{2}$,

      eliminatie van x levert $y = 2\left(\frac{1}{2}y - 1\frac{1}{2}\right) + 3 = y + 0$

      $y = y$ geldt voor alle waarden van y, dus de grafieken vallen samen

7.18 vergelijkingen rechte lijnen $ax + by = c$

Gegeven l: $3x + 5y = 7$

- *Stel de vergelijking op van de lijn k evenwijdig aan l door P(1, 2).*

l: $3x + 5y = 7$ evenwijdig dus k: $3x + 5y = c$ en $P(1, 2)$ invullen levert

k: $-5x + 3y = 13$

- *Stel de vergelijking op van de lijn n loodrecht op l door P(1, 2).*

l: $3x + 5y = 7$ loodrecht dus n: $-5x + 3y = c$ en $P(1, 2)$ invullen levert

n: $-5x + 3y = 1$

7.19 vergelijkingen rechte lijnen $y = ax + b$

Gegeven l: $y = 4x - 8$

- *Stel de vergelijking op van de lijn k evenwijdig aan l door P(4, 5).*

l: $y = 4x - 8$ evenwijdig dus k: $y = 4x + c$ en $P(4, 5)$ invullen levert

k: $y = 4x - 11$

- *Stel de vergelijking op van de lijn n loodrecht op l door P(4, 5).*

l: $y = 4x - 8$ loodrecht dus n: $y = -\frac{1}{4}x + c$ en $P(4, 5)$ invullen levert

n: $y = -\frac{1}{4}x + 6$

7.20 vergelijkingen rechte lijnen

Gegeven l: $\frac{1}{2}x + 4y = 1$. Deze lijn snijdt de x-as en y-as in A respectievelijk B.

- *Stel de vergelijking op van de lijn k loodrecht op l door het midden van A en B.*

Snijpunt x-as $A(2, 0)$ en snijpunt y-as $B\left(0, \frac{1}{4}\right)$ en dus midden $M\left(1, \frac{1}{8}\right)$

l: $\frac{1}{2}x + 4y = 1$ loodrecht dus k: $-4x + \frac{1}{2}y = c$ en $M\left(1, \frac{1}{8}\right)$ invullen levert

k: $-4x + \frac{1}{2}y = -3\frac{15}{16}$

7.21 stelsel van vergelijkingen: afhankelijk

Gegeven l: $2x + 3y = 9$ en k: $y = ax + b$

- *Bereken a en b zodat l en k afhankelijk zijn.*

l: $2x + 3y = 9$ dus l: $y = -\frac{2}{3}x + 6$ dus l en k vallen samen als $a = -\frac{2}{3}$ en $b = 6$

7.22 stelsel van vergelijkingen: strijdig

Gegeven het stelsel $\begin{cases} -5x + 8y = 40 \\ y = \frac{5}{8}x + 4 \end{cases}$

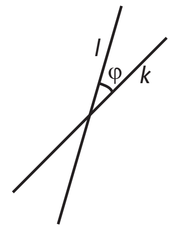
- *Los het stelsel op.*

$-5x + 8y = 40$ en $y = \frac{5}{8}x + 4$ dus $-5x + 8 \cdot \left(\frac{5}{8}x + 4\right) = 40$ dus $0x + 32 = 40$

Kan niet dus het stelsel is strijdig (de twee grafieken lopen evenwijdig, er is geen snijpunt).

hoeken tussen lijnen

- **hoek α** tussen lijn l: $y = ax + b$ en x-as berekenen met $\alpha = \tan^{-1}(a)$



- **hoek φ** tussen twee lijnen

  voorbeeld 1

  - $y = 2x + p$ en $y = -3x + q$ levert $\alpha = \tan^{-1}(2)$ en $\beta = \tan^{-1}(-3)$
    $\varphi = |\ \alpha - \beta\ | = 63{,}4° + 71{,}6° = 135{,}0°$
    gevraagde scherpe hoek is $180° - 135{,}0° = 45{,}0°$

  voorbeeld 2

  - $y = 2x + p$ en $y = 3x + q$ levert $\alpha = \tan^{-1}(2)$ en $\beta = \tan^{-1}(3)$
    gevraagde hoek is $\varphi = |\beta - \alpha| = 71{,}6° - 63{,}4° = 8{,}2°$
    onder de hoek tussen twee lijnen wordt verstaan de kleinste hoek tussen de twee lijnen (dus altijd $\leq 90°$)
    ga na dat geldt: $\varphi = |\tan^{-1}(2) - \tan^{-1}(-3)|$

- **hoek φ** tussen twee lijnen met richtingsvectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ te berekenen met

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{|x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

  voorbeeld

  - l: $y = 2x + p$ en m: $y = -3x + q$ levert $\vec{rv}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{rv}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

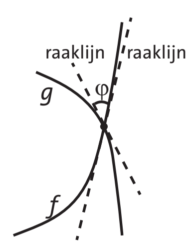
$$\text{dus } \cos(\varphi) = \frac{|x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot -3|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ dus } \varphi = 45°$$

- **loodrecht**
  - **product van de richtingscoëfficiënten is –1** $\Leftrightarrow$ twee lijnen staan loodrecht op elkaar
    - als l: $y = ax + b$ dan loodrechte lijn m: $y = -\frac{1}{a}x + c$
- **twee lijnen staan loodrecht op elkaar** $\Leftrightarrow$ het inproduct van de normaalvectoren 0 (zie ook verderop bij vectoren)
    - als l: $px + qy = c$ met $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ dan loodrechte lijn m: $qx - py = d$ met $\vec{n}_m = \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$

  toepassing

  - **afstand** kortste verbinding van punt P tot lijn l is lengte van loodlijn neergelaten vanuit dat punt P op die lijn l
- **hoek tussen twee krommen** is de hoek tussen de raaklijnen aan de twee krommen in het snijpunt
  - **hoek tussen de krommen** f en g in $S(a, b)$
    - **differentieer de functies** en bereken $f'(a)$ en $g'(a)$
    - **bereken φ** met behulp van $\varphi = |\tan^{-1}(f'(a)) - \tan^{-1}(g'(a))|$ *of*
    - **bereken de richtingsvectoren van de raaklijnen** en bepaal

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{|x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$



7.23 hoek tussen twee rechten

Gegeven zijn de lijnen l: $y = 2x + 1$, k: $y = 4x - 2$ en m: $2x + 3y = 5$

- *Bereken de hoek tussen de lijnen l en k.*

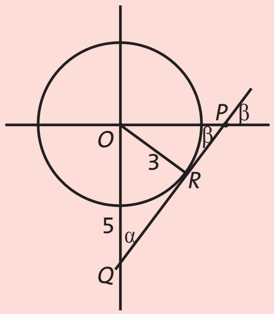
Hoek tussen l en de x-as: $\alpha = \tan^{-1}(2) = 63{,}43°$ en hoek tussen k en de x-as: $\beta = \tan^{-1}(4) = 75{,}96°$ dus hoek l,k is $75{,}96° - 63{,}43° \approx 12{,}5°$.

- *Bereken de hoek tussen de lijnen l en m.*

Hoek tussen l en de x-as: $\alpha = \tan^{-1}(2) = 63{,}4°$ en hoek tussen m en de x-as: $\beta = \tan^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = -33{,}7°$ dus hoek l,m is $76{,}0° - -33{,}7° = 109{,}7°$ dus de scherpe hoek is $70{,}3°$

7.24 meetkundig redeneren met tangens

Gegeven is de cirkel met middelpunt $O(0, 0)$ en straal = 3. Lijn l door $Q(0, -5)$ raakt de cirkel in R.



- *Stel de vergelijking van l op.*

$QR = 4$ (Pythagoras) en $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ en dus $\frac{OP}{5} = \frac{3}{4}$

dus $OP = \frac{15}{4}$ dus r.c.$_{PQ} = \tan(\beta) = \frac{OQ}{OP} = \frac{5}{\frac{15}{4}} = \frac{4}{3}$ dus

$y = \frac{4}{3}x - 5$ $\left(\text{en } y = -\frac{4}{3}x - 5\right)$

7.25 hoek berekenen met behulp van omschrijven naar vectoren

- *Bereken de hoek tussen $y = 2x + 4$ en $m{:}y = -\frac{2}{3}x - 1$*

$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ dan $\cos(\varphi) = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{|1\cdot 3 + 2\cdot -2|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{65}}$ dus $\varphi = 82{,}9°$

7.26 hoek twee krommen

- *Bereken de hoek tussen $f(x) = x^2$ en $g(x) = \sqrt{x+2}$ in $S(2, 2)$.*

$f'(x) = 2x$ dus $f'(2) = 4$ en $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$ dus $g'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2+2}} = \frac{1}{4}$

$\alpha = \tan^{-1}(4) = 76{,}0°$ en $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 14{,}0°$ dus gevraagde hoek is $62{,}0°$.

7.27 hoek met de *y*-as

- *Bereken hoek tussen y-as en K* $\begin{cases} x(t) = 3t^2 - t^3 \\ y(t) = 2t + 1 \end{cases}$ *in het bovenste snijpunt met y-as.*

Snijpunt y-as dus $x(t) = 3t^2 - t^3 = 0$ dus $t^2(3 - t) = 0$ dus $t = 0$ of $t = 3$

Bovenste snijpunt dus $t = 3$ (controleer met een plot)

$\vec{rv}_{\text{raaklijn}} = \begin{pmatrix}x'(3)\\y'(3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6t - 3t^2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\2\end{pmatrix}$ en $\vec{rv}_{y\text{-as}} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

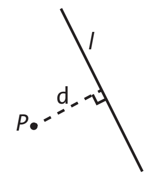
$\cos(\alpha) = \frac{|0\cdot -9 + 1\cdot 2|}{\sqrt{85}\cdot\sqrt{1}} = \frac{2}{\sqrt{85}}$ dus $\alpha \approx 77{,}5°$

afstanden

- **afstand** lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen twee meetkundige figuren
  - **notatie d (van distance)** bijvoorbeeld d(P, c) is de afstand tussen punt P en cirkel c
- **afstand punt tot punt**
  - **te berekenen met Pythagoras:** $a^2 + b^2 = c^2$ of met $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

    voorbeeld:
    - afstand tussen $A(-1, 5)$ en $B(3, -4)$ is $d = \sqrt{(-1-3)^2 + (5 - -4)^2} = \sqrt{97}$
- **afstand punt tot lijn** is lengte van loodlijn neergelaten vanuit dat punt P op die lijn l
  - te berekenen met loodlijn

    voorbeeld:



    - afstand $O(0,0)$ tot l: $y = -2x + 6$

      loodlijn door (0, 0) opstellen levert $y = \frac{1}{2}x$

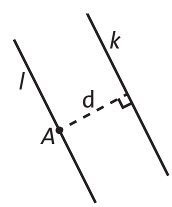
      snijden l en loodlijn levert snijpunt $S(-4, 2)$

      gevraagde afstand is d(O, S) $= \sqrt{(0 - -4)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
- **afstandsformule** afstand punt $P(x, y)$ en lijn $ax + by = c$
  - **te berekenen met formule** $\text{d}(P, k) = \left|\frac{ax_P + by_P - c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$

    voorbeeld:
    - afstand $P(-3, 4)$ tot l: $y = -2x + 6$

      l: $2x + y - 6 = 0$

      formule levert $\text{d}(P,k) = \left|\frac{2 \cdot -3 + 1 \cdot 4 - 6}{\sqrt{2^2 + 1^2}}\right| = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8}{5}\sqrt{5}$
- **afstand lijn tot lijn** (ook in de situaties twee evenwijdige lijnen, lijnstuk – lijn)
  - **te berekenen met loodlijn** (zie ook afstand punt – lijn)



    - afstand l: $y = -2x + 6$ tot k: $y = -2x + 16$
    - l // m Kies een punt $A(0, 6)$ op bijvoorbeeld l
    - loodlijn op l opstellen door $A(0, 6)$ levert bijvoorbeeld

      $y = \frac{1}{2}x + 6$
    - snijden k en loodlijn $y = \frac{1}{2}x + 6$ levert snijpunt $S(4, 8)$
    - gevraagde afstand is d(A, S) $= \sqrt{(0-4)^2 + (6-8)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
  - **te berekenen** met afstandsformule $\text{d}(P,k) = \left|\frac{ax_P + by_P - c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$
    - afstand l: $y = -2x + 6$ tot k: $y = -2x + 16$

      komt overeen met afstand $A(0, 6)$ tot k: $y = -2x + 16$. Schrijf k: $2x + y = 16$

      formule levert $\text{d}(P,k) = \left|\frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot 6 - 16}{\sqrt{2^2 + 1^2}}\right| = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

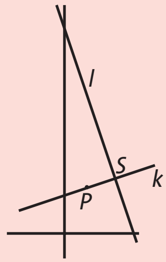
7.28 afstand punt tot lijn met behulp van een loodlijn

Bereken de afstand tussen $P(1, 2)$ *en* l*:* $y = -\frac{1}{3}x + 9$

Loodrecht op l dus $k: y = 3x + b$ door $P(1, 2)$ dus $k: y = 3x - 1$

l en k snijden levert $-\frac{1}{3}x + 9 = 3x - 1$ levert $x = 3$ en $y = 8$ dus $S(3, 8)$

gevraagde afstand $|PS| = \sqrt{(3-1)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$



7.29 afstand punt tot lijn met afstandsformule

Bereken de afstand tussen $P(1, 2)$ *en* l*:* $y = -\frac{1}{3}x + 9$

$l: y = -\frac{1}{3}x + 9$ omwerken tot $l: x + 3y - 27 = 0$

$$d(P,l) = \left|\frac{x + 3y - 27}{\sqrt{1^2 + 3^2}}\right| = \left|\frac{1 + 3 \cdot 2 - 27}{\sqrt{1^2 + 3^2}}\right| = \frac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}$$

7.30 afstand lijn tot lijn met behulp van een loodlijn

- *Bereken de afstand tussen* $l: 3x + 2y = 8$ *en* $k: 3x + 2y = 21$

  $l \,//\, k$: kies $P(2, 1)$ op l en bepaal lijn m loodrecht door P op $l: 3x + 2y = 8$

  $m: -2x + 3y = -1$ dus $m: x = \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}$ substitueren in $k: 3x + 2y = 21$

  levert $3 \cdot \left(\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}\right) + 2y = 21$ dus $6\frac{1}{2}y = 19\frac{1}{2}$ dus $y = 3$ en $x = 5$ en $S(5, 3)$

  gevraagde afstand $|PS| = \sqrt{(2-5)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{13}$

7.31 afstand lijn tot lijn met afstandsformule

- *Bereken de afstand tussen* $l: 3x + 2y = 8$ *en* $k: 3x + 2y = 21$

  Neem bijvoorbeeld $l: 3x + 2y - 8 = 0$ en bijvoorbeeld punt $P(5, 3)$ op k

  $$d(P,l) = \left|\frac{3x + 2y - 8}{\sqrt{3^2 + 2^2}}\right| = \left|\frac{3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 - 8}{\sqrt{3^2 + 2^2}}\right| = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

7.32 afstand punt tot cirkel

- *Bereken de afstand tussen* $P(1, 2)$ *en* $c: (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 8$

  $Mc(-3, 4)$ en $r = \sqrt{8}$

  Afstand $|PM| = \sqrt{(1 - -3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{20}$, dus P ligt buiten de cirkel

  $d(P,c) = \sqrt{20} - \sqrt{8} = 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$

7.33 afstand lijn tot cirkel

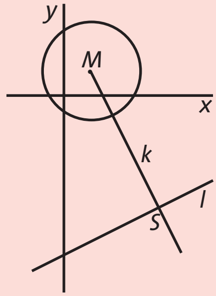
- *Bereken de afstand tussen* c*:* $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 6$ *en* l*:* $y = -\frac{1}{2}x - 7$

  Loodrecht op l dus $k: y = -2x + b$ door $M(1, 1)$ dus $k: y = -2x + 3$

  l en k snijden levert $\frac{1}{2}x - 7 = -2x + 3$ dus $x = 4$ en $y = -5$

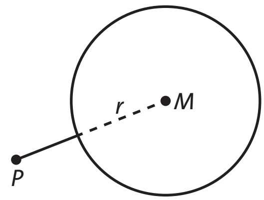
  dus $S(4, -5)$, dus gevraagde afstand is

  $|MS| - r = \sqrt{(4-1)^2 + (-5-1)^2} - \sqrt{6} = \sqrt{45} - \sqrt{6} = 3\sqrt{5} - \sqrt{6}$



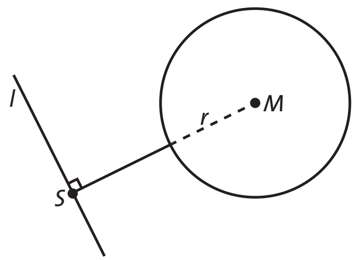
afstanden vervolg

- **afstand punt tot cirkel**



  - **te berekenen met** d(M,P) – straal cirkel

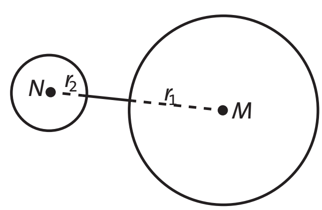
    voorbeeld
    - afstand $P(-2, 4)$ tot c: $(x-4)^2+(y-8)^2=25$
      afstand $P(-2, 4)$ tot $M(4, 8)$ is $\sqrt{52}$ dus
      $d(P,c)=\sqrt{52}-5$
  - **let op verschillende situaties:** P **binnen of buiten de cirkel**
- **cirkel** met middelpunt M en straal r
  - **d(*P*,*M*) = *r*** dan ligt P op de cirkel
  - **d(*P*,*M*) < *r*** dan ligt P binnen de cirkel
  - **d(*P*,*M*) > *r*** dan ligt P buiten de cirkel
- **afstand lijn tot cirkel**

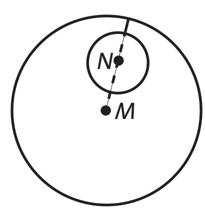


  - **te berekenen met loodlijn** op lijn l door M

    voorbeeld
    - afstand l: $y=-2x-4$ tot c:
      $(x-4)^2+(y-8)^2=25$
      loodlijn op l opstellen door $M(4, 8)$ levert
      bijvoorbeeld $y=\frac{1}{2}x+6$
      snijden l en loodlijn levert snijpunt $S\ (-4, 4)$
      $d(M,S)=\sqrt{(-4-4)^2+(4-8)^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$
      gevraagde afstand is $d(M,S)$ – straal $=4\sqrt{5}-5$
  - **te berekenen met formule** $d(M,l)=\left|\dfrac{ax_M+by_M-c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

    voorbeeld
    - afstand c: $(x-1)^2+(y-2)^2=2$ tot l: $y=-2x+6$
      dus afstand $M(1, 2)$ tot l: $y=-2x+10$
      l: $2x+y-10=0$
      formule levert $d(M,l)=\left|\dfrac{2\cdot1+1\cdot2-10}{\sqrt{2^2+1^2}}\right|=\dfrac{4}{\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}\sqrt{5}$
      afstand is $d(c,l)=\frac{4}{5}\sqrt{5}-\sqrt{2}$
- **afstand cirkel tot cirkel**





  - **te berekenen met** d(M,P) – stralen cirkels
    - afstand c_1: $(x-1)^2+(y+2)^2=10$
      tot c_2: $(x-4)^2+(y-8)^2=25$
      $d(M_1,M_2)=\sqrt{(1-4)^2+(-2-8)^2}=\sqrt{109}$
      $d(c_1,c_2)=\sqrt{109}-\sqrt{10}-5$
  - let op verschillende situaties: (maak een schets)
    c_1 binnen of buiten, raakt of snijdt c_2

7.34 afstand cirkel tot cirkel

- *Bereken de afstand tussen c*: $(x-1)^2+(y-1)^2=6$ *en d*: $(x+7)^2+(y+4)^2=9$

straal$_c=\sqrt{6}$ en straal$_d=3$ en $|M_cM_d|=\sqrt{(1--7)^2+(1--4)^2}=\sqrt{89}$

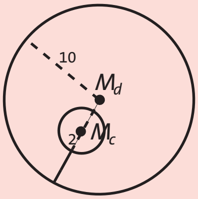
gevraagde afstand is $|M_cM_d|-3-\sqrt{6}=\sqrt{89}-3-\sqrt{6}$

7.35 afstand cirkel tot cirkel

- *Bereken de afstand tussen c*: $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ *en d*: $(x-3)^2+(y-4)^2=100$

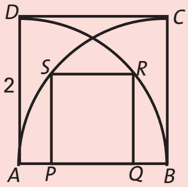
straal$_c=2$ en straal$_d=10$ en $|M_cM_d|=\sqrt{(1-3)^2+(1-4)^2}=\sqrt{13}$

gevraagde afstand is $10-|M_cM_d|-2=8-\sqrt{13}$ (zie schets)



7.36 afstand in een cirkel

Gegeven vierkant *ABCD* met zijde 2 en de kwartcirkels met middelpunten *B* en *A* en $r=2$ (zie figuur). In de figuur is een vierkant *PQSR* getekend.



- *Bereken de lengte PQ (P en Q op lijn AB) van het vierkant PQRS.*

Gegeven cirkel *c*: $x^2+y^2=4$ met middelpunt $A(0, 0)$ en straal $AB=2$

Noem lengte $AP=b$ en lengte $PQ=a$.

zijde $AB=a+2b=2$ en punt *R* is $(a+b, a)$ en *R* ligt op *c*

R invullen in cirkel *c*: $x^2+y^2=4$ geeft $(a+b)^2+a^2=4$

Voor zijde *AB*: $a+2b=2$ geldt $b=1-\frac{1}{2}a$

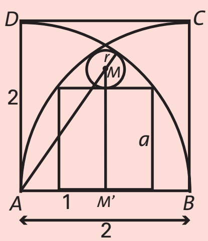
Dus $\left(a+1-\frac{1}{2}a\right)^2+a^2=4$ dus $\left(\frac{1}{2}a+1\right)^2+a^2=4$

dus $\frac{1}{4}a^2+a+1+a^2=4$ dus $1\frac{1}{4}a^2+a-3=0$

Dus $5a^2+4a-12=0$ *abc*-formule levert $a=\frac{6}{5}$ ($a=-2$ vervalt)

conclusie: lengte $PQ=a=\frac{6}{5}$

Getekend is de cirkel met middelpunt *M* en straal *r* die *RS* en beide kwart cirkels raakt



- *Bereken exact de lengte van straal r van deze kleine cirkel.*

Gebruik driehoek *AM'M* met *M'* de loodrechte projectie van *M* op *AB*.

Druk de zijden van deze driehoek uit in straal *r*.

Opmerking: gebruik het resultaat $a=\frac{6}{5}$ van de vorige opgave.

AM = straal cirkel *c* – straal kleine cirkel $=2-r$

$AM'=1$ en $MM'=\frac{6}{5}+r$

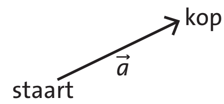
Dus $(AM)^2=(AM')^2+(M'M)^2$ wordt $(2-r)^2=1^2+\left(\frac{6}{5}+r\right)^2$

Dus $4-4r+r^2=1+\frac{36}{25}+\frac{12}{5}r+r^2$ dus $\frac{32}{5}r=\frac{39}{25}$

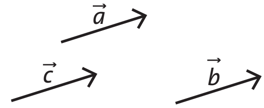
conclusie: $r=\frac{39}{160}$

vectoren

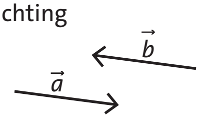
- **een vector** is een lijnstuk met een richting, een vector heeft dus een lengte en een richting
  - **beginpunt** wordt staart genoemd, eindpunt wordt kop genoemd



  - **notatie** $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ betekent p naar rechts en q omhoog
  - **kentallen** de getallen p en q heten de kentallen van de vector
  - **gelijke vectoren** hebben dezelfde lengte en dezelfde richting
    - de vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ zijn gelijk (zie figuur hiernaast).



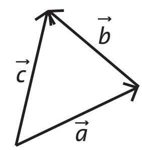
    - de vectoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ zijn niet gelijk, ze zijn tegengesteld
  - **tegengestelde vectoren** hebben dezelfde lengte en tegengestelde richting
    - de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zijn tegengesteld (zie figuur hiernaast).
    - de vectoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ of $-\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zijn tegengesteld



- **lengte van een vector**
  - **lengte van** $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ wordt berekend met $\left|\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right| = \sqrt{p^2+q^2}$ (Pythagoras)
    - lengte van $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt berekend met $\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$
- **somvector** twee vectoren optellen
  - **met kentallen** de som van de vectoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ is de vector $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$
  - **kop- staartmethode** zonder kentallen

    teken $\vec{a}$ en leg de staart $\vec{b}$ aan de kop $\vec{a}$ zie figuur hiernaast

    $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$

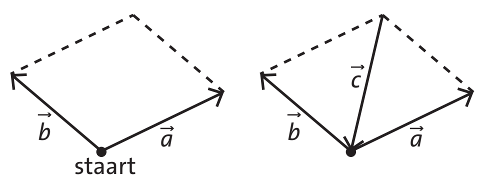


  - **parallellogram methode** zonder kentallen

    teken $\vec{a}+\vec{b}=$ door de staarten van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ aan elkaar te leggen

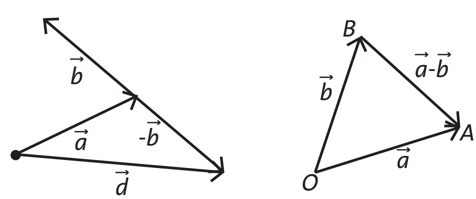
    teken het parallellogram af

    $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ $\vec{c}$ is de diagonaal van het parallellogram



- **verschilvector** twee vectoren van elkaar aftrekken
  - vector $\vec{b}$ van vector $\vec{a}$ aftrekken, is hetzelfde als het tegengestelde van vector $\vec{b}$ bij vector $\vec{a}$ optellen
    - $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+-\vec{b}=\vec{d}$
    - $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ dus

      $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$



7.37 vectoren en hun richting

gegeven $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

- *Zet vectoren met eenzelfde richting bij elkaar.*

  Gelijke richting hebben: $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$

- *Zet vectoren met tegengestelde richting bij elkaar.*

  Tegengestelde richting hebben $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

7.38 vectoren berekenen

gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$

- *Bereken de vectoren* $\vec{a} + \vec{b}$ *en* $3\vec{a} - 2\vec{b}$ *en* $-2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$

  $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix}12\\1\end{pmatrix}$ en $3\vec{a} - 2\vec{b} = \begin{pmatrix}30\\-12\end{pmatrix}$ en $-2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}$

7.39 lengte van een vector

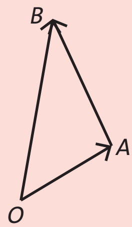
gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$

- *Bereken lengte van de vectoren* $\vec{a} - \vec{b}$ *en* $3\vec{a} + \vec{b}$ *en* $-\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}$

  $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ heeft lengte $\sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$

  $3\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix}13\\-3\end{pmatrix}$ heeft lengte $\sqrt{13^2 + (-3)^2} = \sqrt{178}$

  en $-\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\-13\end{pmatrix}$ heeft lengte $\sqrt{1^2 + (-13)^2} = \sqrt{170}$



7.40 vectoren uitdrukken

- *Druk de vector* $\overrightarrow{AB}$ *uit in* $\overrightarrow{OA}$ *en* $\overrightarrow{OB}$

  er geldt (zie figuur): $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ dus $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

7.41 vectoren berekenen

Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ en de somvector $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix}12\\-3\end{pmatrix}$

- *Bereken de verschilvector* $\vec{a} - \vec{b}$

  $\vec{b} = \begin{pmatrix}12\\-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$ en $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$

vermenigvuldigen met een getal

- **vermenigvuldiging** $k \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot p \\ k \cdot q \end{pmatrix}$

  voorbeeld $-\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

ontbinden van vectoren in loodrechte componenten

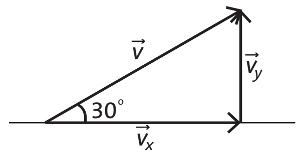
- **componenten van een vector** een vector $\vec{v}$ met lengte $|\vec{v}|$ en een hoek α met de x-as, kan ontbonden worden in
  - **horizontale component** met lengte $|\vec{v}_x| = \cos(\alpha) \cdot |\vec{v}|$ want $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{v}_x|}{|\vec{v}|}$
  - **verticale component** met lengte $|\vec{v}_y| = \sin(\alpha) \cdot |\vec{v}|$ want $\sin(\alpha) = \frac{|\vec{v}_y|}{|\vec{v}|}$

    voorbeeld
    - $\vec{v}$ heeft lengte 10 en maakt een hoek $\alpha = 30°$ met de x-as, kan ontbonden worden in een horizontale component

      $|\vec{v}_x| = 10 \cdot \cos(30°) = 5\sqrt{3}$

      en een verticale component

      $|\vec{v}_y| = 10 \cdot \sin(30°) = 5$

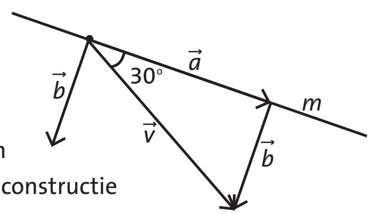


  - **ontbinden** van een vector in twee onderling loodrechte componenten, waarvan een component evenwijdig aan een gegeven lijn
  - **een vector** $\vec{v}$ met lengte $|\vec{v}|$ en een hoek α met lijn m, kan ontbonden worden in
    - een component in richting m met lengte $|\vec{a}| = \cos(\alpha) \cdot |\vec{v}|$ en
    - een tweede component loodrecht op m met lengte $|\vec{b}| = \sin(\alpha) \cdot |\vec{v}|$

      voorbeeld
      - $\vec{v}$ heeft lengte 10 en maakt een hoek $\alpha = 30°$ met lijn m, kan ontbonden worden in

        $|\vec{a}| = 10 \cdot \cos(30°) = 5\sqrt{3}$ en

        $|\vec{b}| = 10 \cdot \sin(30°) = 5\sqrt{3}$

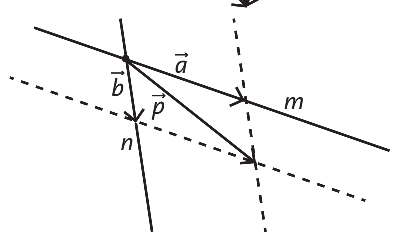


  - **parallelogramconstructie** vector $\vec{p}$ kan ontbonden worden door middel van een parallelogramconstructie
    - **ontbind** $\vec{p}$ in twee componenten evenwijdig aan m en n

      teken een parallellogram waarvan $\vec{p}$ de diagonaal is (zie figuur)

      teken de componenten $\vec{a}$ en $\vec{b}$

      (de zijden van het parallellogram)



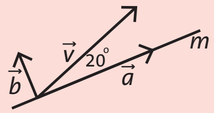
7.42 normaalvectoren

- *Geef normaalvectoren van* $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ *en* $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

Bijvoorbeeld $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}-12\\-8\end{pmatrix}$

7.43 vectoren ontbinden

Gegeven is een vector $\vec{v}$ met lengte $|\vec{v}| = 10$ en een hoek $\alpha = 20°$ met lijn m.
Deze vector $\vec{v}$ kan ontbonden worden in een component in richting m een tweede component loodrecht op m.



- *Bereken de lengte van beide componenten in twee decimalen nauwkeurig.*

Lengte van de component in richting m heeft lengte $|\vec{a}| = \cos(\alpha) \cdot |\vec{v}|$ dus geldt
$|\vec{a}| = 10 \cdot \cos(20°) = 9{,}40$
Lengte van de component loodrecht op m heeft lengte $|\vec{b}| = \sin(\alpha) \cdot |\vec{v}|$ dus geldt
$|\vec{b}| = 10 \cdot \sin(20°) = 3{,}42$

7.44 steen op een hellend vlak

Een steen ligt op een hellend vlak. De zwaartekracht op de steen is 60 N.
Het vlak maakt een hoek van 27 graden met het horizontale vlak. De wrijvingskracht is gelijk aan 15 N.

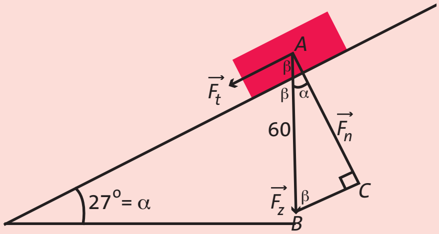
- *Bereken de kracht loodrecht op het hellende vlak, bereken de kracht evenwijdig aan het hellende vlak en ga na of de steen gaat bewegen.*

Gebruik gelijkvormige driehoeken.
In ΔABC geldt : $\angle C = 90°$ en $\beta + \alpha = 90°$ en $\alpha = 27°$
dus geldt :

$|\vec{F}_n| = |\overrightarrow{AC}| = 60 \cdot \cos(27°) \approx 53{,}5$

$|\vec{F}_t| = |\overrightarrow{CB}| = 60 \cdot \sin(27°) \approx 27{,}2$

De kracht langs het hellende vlak naar beneden is 27,2 N en de wrijvingskracht is 15 N, dus de kracht die overblijft naar beneden is 12,2 N.
Dus de steen beweegt naar beneden.



lijnen

- **opstellen parametervoorstelling of vectorvoorstelling** van een lijn door punten (a, b) en (c, d)
  - **plaatsvector of steunvector** $\binom{a}{b}$ of $\binom{c}{d}$
  - **richtingsvector** $\binom{c-a}{d-b}$ of $\binom{a-c}{b-d}$ of een vereenvoudiging van deze vectoren

    voorbeeld
    - **vectorvoorstelling opstellen** lijn door de punten (1, 2) en (4, 1) levert

      $\binom{x}{y} = \binom{1}{2} + \lambda\binom{3}{-1}$ of $\binom{x}{y} = \binom{4}{1} + \lambda\binom{-3}{1}$ of ......
- **parametervoorstelling** van een lijn maken als de vergelijking gegeven is
  - $y = ax + b$ dan $\binom{x}{y} = \binom{0}{b} + \lambda\binom{1}{a}$
  - $px + qy = c$ dan is de normaalvector $= \binom{p}{q}$ dus $\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} \frac{c}{p} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\binom{q}{-p}$

    voorbeeld
    - **vectorvoorstelling opstellen** van lijn $2x + 3y = 5$ levert bijvoorbeeld

      $\binom{x}{y} = \binom{1}{1} + \lambda\binom{-3}{2}$
- **vergelijking** van een lijn maken als de parametervoorstelling gegeven is
  - $\binom{x}{y} = \binom{a}{b} + \lambda\binom{p}{q}$ dan is de $\vec{rv} = \binom{p}{q}$ dus de normaalvector $= \binom{-q}{p}$ dus de vergelijking wordt: $-qx + py = c$

    voorbeeld
    - **vergelijking lijn opstellen** van $\binom{x}{y} = \binom{2}{-1} + \lambda\binom{-3}{4}$

      normaalvector $= \binom{4}{3}$ dus $4x + 3y = c$ met $c = 4 \cdot 2 + 3 \cdot -1 = 5$ dus $4x + 3y = 5$
- **inproduct** $\vec{a} \cdot \vec{b}$ van vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is
  - $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$ met α de grootte van de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$

    of
  - $\vec{a} = \binom{x_a}{y_a}$ en $\vec{b} = \binom{x_b}{y_b}$ dan $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$
  - **inproduct** wordt ook wel inwendig product genoemd
- **meetkundige betekenis van inproduct** het product van de lengte van vector $\vec{a}$ met de lengte van de loodrechte projectie van vector $\vec{b}$ op $\vec{a}$
- **hoek tussen vectoren** berekenen met $\cos(\varphi) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ en $\vec{a} \neq \binom{0}{0}, \vec{b} \neq \binom{0}{0}$

  want $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$ én $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ dus $\cos(\varphi) = \dfrac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

7.45 vectorvoorstelling maken bij twee gegeven punten

Geef een vectorvoorstelling van de lijn door de punten A(2, 4) *en B*(5, –8)

Steunvector $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix}5\\-8\end{pmatrix}$, richtingsvector $\begin{pmatrix}3\\-12\end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$

7.46 vectorvoorstelling maken bij gegeven vergelijkingen

Geef een vectorvergelijking bij de vergelijkingen $l: y = \frac{5}{8}x + 4$ *en* $m: \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}y = 1$

Steunvector $\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$, richtingsvector $\begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}$ dus $l: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}$

Steunvector $\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$, richtingsvector $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ dus $m: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

7.47 vergelijking maken bij een gegeven vectorvoorstelling

Geef een vergelijking van de vectorvoorstelling $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

$\vec{rv} = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ dus r.c. $= -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$ dus $y = -1\frac{1}{2}x + b$ en punt (2, 4) invullen

levert $b = 7$ dus $y = -1\frac{1}{2}x + 7$ *of*

$\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ dus $3x + 2y = b$ punt (2, 4) invullen dus $3x + 2y = 14$

7.48 bereken de hoek

- *Bereken het inproduct van* $\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ *en* $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

  inproduct is $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = 4 - 6 = -2$
- *Bereken het inproduct als* $|\vec{a}| = 3$ *en* $|\vec{b}| = 7$ *en de hoek tussen* $\vec{a}$ *en* $\vec{b}$ *is 40°*

  inproduct is $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 7 \cdot \cos(40°) = -14{,}01$
- *A*(2, 5) *en B*(–3, 10) *en C*(1, –1), *bereken hoek ACB, dus de hoek tussen de vectoren* $\overrightarrow{CA}$ *en* $\overrightarrow{CB}$

  er geldt $\cos(\varphi) = \dfrac{\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-4\\11\end{pmatrix}}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{137}} = \dfrac{1 \cdot -4 + 6 \cdot 11}{\sqrt{5069}} \approx 0{,}8708$ dus $\varphi \approx \cos^{-1}(0{,}8708) \approx 29{,}4°$
- *Bereken de hoek tussen de lijnen* $l: y = 2x + 5$ *en* $k: y = \frac{1}{4}x - 3$

  $rc._l = 2$ en $rc._k = \frac{1}{4}$ dus $\cos(\varphi) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{17}} = \dfrac{|1 \cdot 4 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{85}} \approx 0{,}6508$ dus $\varphi \approx 49{,}4°$

vectoren draaien over veelvouden van 90°

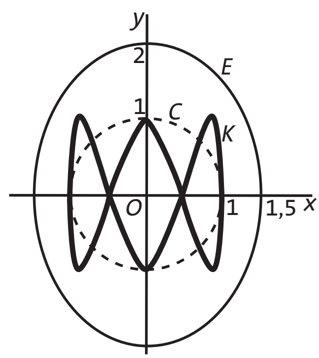
- $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$
  - **draaien over 90°** rechtsom (dus draaiing met de klok mee) wordt $\overrightarrow{OA}_R = \begin{pmatrix} y_a \\ -x_a \end{pmatrix}$
  - **draaien over 180°** wordt $\begin{pmatrix} -x_a \\ -y_a \end{pmatrix}$,
  - **draaien over 90°** linksom (dus draaiing tegen de klok in) $\overrightarrow{OA}_L = \begin{pmatrix} -y_a \\ x_a \end{pmatrix}$.
  - **draaien over 270°** rechtsom geeft ook $\begin{pmatrix} -y_a \\ x_a \end{pmatrix}$
  - **draaien over 360°** $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$ blijft $\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$

bewegingsvergelijking

- $\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}$ (zie ook H4 periodieke functies) voorbeelden zijn

  eenheidscirkel C: $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$

  of ellips E $\begin{cases} x(t) = 3\sin(t) \\ y(t) = 1{,}2 \cdot \cos(t) \end{cases}$ of K $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$



- **snijpunt x-as** $y(t) = g(t) = 0$
- **snijpunt y-as** $x(t) = f(t) = 0$
- **zichzelf snijden** op welk tijdstip snijdt de kromme zichzelf?
  - meestal is er een tweede opvallende eigenschap voor dit snijpunt, bijvoorbeeld het snijpunt ligt op de x-as, de y-as of de lijn $y = x$
  - aan de hand hiervan een vergelijking opstellen en de waarde(n) van t bepalen
  - tabel maken met daarin t, $x(t)$ en $y(t)$
  - zoek de punten die voor verschillende t-waarden eenzelfde punt $(x(t), y(t))$ hebben

voorbeeld:

- gegeven is de bewegingsformule $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$

  Bereken de coördinaten van de punten waar de kromme zichzelf snijdt.
- plot doet vermoeden dat de snijpunten op de x-as liggen (zie figuur, kromme K).
- x-as dus $y(t) = 0$ dus $\sin(3t) = 0$ dus $t = 0 + \frac{1}{3}k\pi$

t	0	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	π	$1\frac{1}{3}\pi$	$1\frac{2}{3}\pi$	2π
x	1	0,5	−0,5	−1	−0,5	0,5	1
y	0	0	0	0	0	0	0

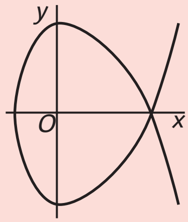
- conclusie: de kromme snijdt zichzelf in de punten $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ en $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

7.49 kromme snijdt zichzelf

Gegeven zijn de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = t^2 - 2 \\ y(t) = t^3 - 8t \end{cases}$

- *Bereken de coördinaten van het punt S waar de kromme zichzelf snijdt.*
  Plot doet vermoeden dat punt S op x-as ligt dus $t^3 - 8t = 0$ dus $t = 0$ of $t = \pm\sqrt{8}$

t	0	$\sqrt{8}$	$-\sqrt{8}$
x	-2	6	6
y	0	0	0



Dus de kromme zichzelf snijdt in $S(6, 0)$

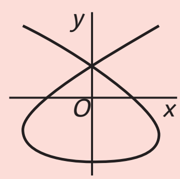
- *Roteer de kromme over 90° rechtsom.*
  Geef de bewegingsvergelijkingen van de nieuwe kromme die zo ontstaat.
  $\binom{a}{b}$ wordt $\binom{b}{-a}$ dus $\begin{cases} x(t) = t^2 - 2 \\ y(t) = t^3 - 8t \end{cases}$ wordt $\begin{cases} x(t) = t^3 - 8t \\ y(t) = -(t^2 - 2) = -t^2 + 2 \end{cases}$

7.50 bewegingsvergelijking

Gegeven zijn de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \cos(3t) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases}$

- *Bereken de coördinaten van het punt S waar de kromme zichzelf snijdt.*
  Plot doet vermoeden dat dat punt S op y-as ligt dus $\cos(3t) = 0$
  dus $3t = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ dus $t = \frac{1}{6}\pi + k\frac{2}{6}\pi$

t	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$1\frac{1}{6}\pi$	$1\frac{1}{2}\pi$	$1\frac{5}{6}\pi$
x	0	0	0	0	0	0
y	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$



Dus de kromme zichzelf snijdt in $S\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Opmerking: bij $t = \frac{1}{2}\pi$ snijdt de grafiek wél de y-as, maar niet zichzelf.

- *Roteer de kromme over 90° linksom. Geef de bewegingsvergelijkingen van de nieuwe kromme die zo ontstaat*
  $\binom{a}{b}$ wordt $\binom{-b}{a}$ dus $\begin{cases} x(t) = \cos(3t) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases}$ wordt $\begin{cases} x(t) = -\cos(2t) \\ y(t) = \cos(3t) \end{cases}$

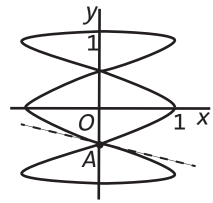
7.51 maximale afstand tot de oorsprong

Gegeven zijn de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \sin(3t) \\ y(t) = 2\sin(t) \end{cases}$

- *Bereken de maximale afstand tot de oorsprong in twee decimalen nauwkeurig.*
  Afstand is $\sqrt{\sin^2(3t) + 4\sin^2(t)}$ (Pythagoras)
  Plot grafiek $y_1 = \sqrt{(\sin(3x))^2 + (4\sin(x))^2}$
  CALC max levert $x = t = 1{,}57$ $\left(= \frac{1}{2}\pi\right)$ en $y = 2{,}23$ $(= \sqrt{5})$
  conclusie: maximale afstand is 2,23.

bewegingsvergelijking vervolg

■ **bewegingsrichting** r.c.$_{\text{raaklijn aan kromme}} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ of $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$



voorbeeld

■ bewegingsrichting van $\begin{cases} x(t) = \sin(3t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$ op tijdstip $t = \frac{2}{3}\pi$ is

$$\frac{y'\left(\frac{2}{3}\pi\right)}{x'\left(\frac{2}{3}\pi\right)} = \frac{-\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)}{3 \cdot \cos\left(3\frac{2}{3}\pi\right)} = -\frac{1}{3}\sqrt{3} \text{ of } \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{(zie gestippelde lijn)}$$

snelheid, versnelling, baanversnelling in punt *P*

■ **plaatsvector** horend bij een punt P is $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

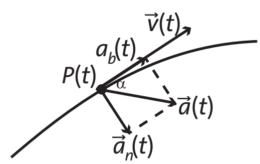
■ **vectoriële snelheid** of snelheidsvector $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ (is een vector)

■ **baansnelheid** $|v(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ (is geen vector, maar getal, snelheid)

■ **vectoriële versnelling** of versnellingsvector $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$

■ **baanversnelling** is de grootte van de versnelling in de richting van de snelheid, de uitkomst is een getal

■ **in formulevorm** $a_b(t) = \dfrac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \dfrac{\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} = \ldots$



■ **bewijs** van de formule voor de baanversnelling (gebruik de figuur)

hoek tussen twee vectoren: $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)| \cdot |\vec{a}(t)|}$

hoek in rechthoekige driehoek: $\cos(\alpha) = \dfrac{a_b(t)}{|\vec{a}(t)|} = \dfrac{\text{aanliggende zijde}}{\text{schuine zijde}}$

combineren levert $\dfrac{a_b(t)}{|\vec{a}(t)|} = \dfrac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)| \cdot |\vec{a}(t)|}$ dus $a_b(t) = \dfrac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)|}$

voorbeeld

■ $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 \\ y(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 - t \end{cases}$ dan $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 4t \\ t^2 - 4t - 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 2t + 4 \\ 2t - 4 \end{pmatrix}$

baansnelheid op $t = 3$ is $|\vec{v}(3)| = \left|\begin{pmatrix} 21 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{457} \approx 21{,}38$

baanversnelling op $t = 3$ is $a_b(3) = \dfrac{\begin{pmatrix} 21 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 21 \\ -4 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{210 - 8}{\sqrt{457}} \approx 9{,}45$

7.52 snelheid en versnelling

Gegeven zijn de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{6}t^3 + 2t^2 \\ y(t) = 2t^2 - t \end{cases}$

- *Bereken op t = 2 de snelheidsvector, de baansnelheid, de versnellingsvector en de baanversnelling.*

snelheidsvector $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2 + 4t \\ 4t - 1 \end{pmatrix}$ dus $\vec{v}(2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

versnellingsvector $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -t+4 \\ 4 \end{pmatrix}$ dus $\vec{a}(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

baansnelheid op $t = 2$ is $|v(2)| = \sqrt{(x'(2))^2 + (y'(2))^2} = \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{85}$

baanversnelling op $t = 2$ is $\vec{a}_b(2) = \dfrac{\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{12+28}{\sqrt{85}} \approx 4{,}33$

7.53 snelheid en versnelling

Gegeven zijn de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$

- *Bereken op $t = \frac{1}{3}\pi$ de baanversnelling.*

snelheidsvector $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix}$ dus $\vec{v}\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$

versnellingsvector $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -2\cos(t) \\ -4\sin(2t) \end{pmatrix}$ dus $\vec{a}\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

baanversnelling op $t = \frac{1}{3}\pi$ is $a_b\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \dfrac{\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

7.54 maximale snelheid

Gegeven zijn de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{6}t^3 \\ y(t) = 2t^2 \end{cases}$

- *Bereken het tijdstip waarop de baansnelheid minimaal is*

$\begin{cases} x'(t) = -\frac{1}{2}t^2 \\ y(t) = 4t \end{cases}$ dus $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}t^2\right)^2 + (4t)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}t^4 + 16t^2}$ is minimaal, dus ook geldt $\frac{1}{4}t^4 + 16t^2$ is minimaal, dus afgeleide $t^3 + 32t = 0$ dus $t = 0$ of $t^2 = -32$

conclusie: snelheid is minimaal voor $t = 0$, de snelheid is dan 0.

bewegingsvergelijking vervolg

- **afstand** tussen twee punten op een kromme
  - bepaal met behulp van de t-waarden de coördinaten van de punten
  - afstand bepalen met Pythagoras
- **snijpunt van kromme K met kromme M**
  - $x_K(t) = x_M(t)$ en tegelijkertijd $y_K(t) = y_M(t)$
- **horizontale raaklijn, verticale raaklijn, keerpunt** (zie ook H4 periodieke functies)
  - **horizontale raaklijn** als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$
  - **verticale raaklijn** als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$
  - **keerpunt** als $x'(t) = 0$ én tegelijkertijd $y'(t) = 0$
- **asymptoten**
  - **bepaal het interval** van t
  - **bekijk de waarden van t** waarvoor $x(t)$ of $y(t)$ naar oneindig gaan, onderzoek het gedrag van $x(t)$ of $y(t)$ in de volgende gevallen
    - **horizontale asymptoot** $y = b$ als $\lim\limits_{t \to q} x(t) = \pm\infty$ en $\lim\limits_{t \to q} y(t) = b$
    - **verticale asymptoot** $x = a$ als $\lim\limits_{t \to q} x(t) = a$ en $\lim\limits_{t \to q} y(t) = \pm\infty$
    - **perforatie** (a, b) als $x(t)$ of $y(t)$ niet bestaan voor $t = q$ en $\lim\limits_{t \to q} x(t) = a$ en $\lim\limits_{t \to q} y(t) = b$

voorbeeld

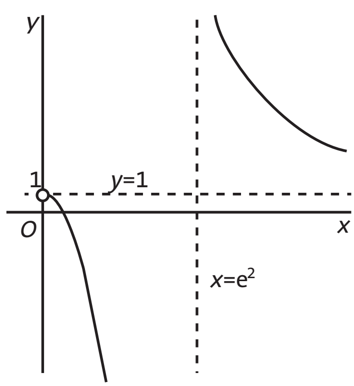
- gegeven is kromme $\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^t \\ y(t) = \dfrac{t}{t-2} \end{cases}$ dus $t \neq 2$ (noemer is ongelijk 0)

onderzoek x en y voor $t \to \pm\infty$ en $t \uparrow 2$ en $t \downarrow 2$

$\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = \lim\limits_{t \to \infty} \mathrm{e}^t = \infty$ en $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{t}{t-2} = 1$ dus horizontale asymptoot $y = 1$

$\lim\limits_{t \to -\infty} x(t) = \lim\limits_{t \to -\infty} \mathrm{e}^t = 0$ en $\lim\limits_{t \to -\infty} y(t) = \lim\limits_{t \to -\infty} \dfrac{t}{t-2} = 1$ dus perforatie (0, 1)w

$\lim\limits_{t \to 2} x(t) = \lim\limits_{t \to 2} \mathrm{e}^t = \mathrm{e}^2$ en $\lim\limits_{t \uparrow 2} y(t) = \lim\limits_{t \uparrow 2} \dfrac{t}{t-2} = -\infty$ en $\lim\limits_{t \downarrow 2} y(t) = \lim\limits_{t \downarrow 2} \dfrac{t}{t-2} = \infty$ dus verticale asymptoot $x = \mathrm{e}^2$



7.55 vergelijking raaklijn opstellen

Gegeven zijn de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{6}t^3 + 2t^2 \\ y(t) = 2t^2 - t \end{cases}$

- *Stel de vergelijking op van de raaklijn op $t = 2$*

$x'(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 4t$ en dus $x'(2) = 6$ en $y'(t) = 4t - 1$ en dus $y'(2) = 7$

helling raaklijn is dan $\frac{y'(2)}{x'(2)} = \frac{7}{6}$ dus $y = \frac{7}{6}x + b$

raakpunt R: $x(2) = 6\frac{2}{3}$ en $y(2) = 6$ dus $R\left(6\frac{2}{3}, 6\right)$ levert $y = \frac{7}{6}x - 1\frac{7}{9}$

of

snelheidsvector $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2 + 4t \\ 4t - 1 \end{pmatrix}$ dus $\vec{v}(2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

normaalvector $\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}$ dus $-7x + 6y = c$

raakpunt R: $x(2) = 6\frac{2}{3}$ en $y(2) = 6$ dus $R\left(6\frac{2}{3}, 6\right)$ levert $-7x + 6y = -10\frac{2}{3}$

7.56 keerpunten

- *Bereken de tijdstippen waarop de keerpunten van $\begin{cases} x(t) = \sin(3t) \\ y(t) = \cos(4t) \end{cases}$ bereikt worden.*

keerpunt als $x'(t) = 0$ en $y'(t) = 0$: $\begin{cases} x(t) = \sin(3t) \\ y(t) = \cos(4t) \end{cases}$ dus $\begin{cases} x'(t) = 3\cos(3t) \\ y'(t) = -4\sin(4t) \end{cases}$

$3\cos(3t) = 0$ dus $\cos(3t) = 0$ dus $t = \frac{1}{6}\pi + k\frac{1}{3}\pi$ dus $t = \frac{1}{6}\pi$, $t = \frac{1}{2}\pi$, $t = \frac{5}{6}\pi$, $t = 1\frac{1}{6}\pi$,
$t = 1\frac{1}{2}\pi$, $t = 1\frac{5}{6}\pi$

$-4\sin(4t) = 0$ dus $\sin(4t) = 0$ dus $t = 0 + k\frac{1}{4}\pi$ dus $t = 0$, $t = \frac{1}{4}\pi$, $t = \frac{1}{2}\pi$, $t = \frac{3}{4}\pi$, $t = \pi$,
$t = 1\frac{1}{4}\pi$, $t = 1\frac{1}{2}\pi$, $t = 1\frac{3}{4}\pi$, $t = 2\pi$,

conclusie: keerpunten op $t = \frac{1}{2}\pi$ en $t = 1\frac{1}{2}\pi$

7.57 asymptoten

- *Bereken de asymptoten van $\begin{cases} x(t) = \ln(t - 2) \\ y(t) = \frac{5}{t} \end{cases}$*

$t - 2 > 0$ dus $t > 2$

onderzoek x en y voor $t \to \infty$ en $t \downarrow 2$ want $t \to -\infty$ en $t \uparrow 2$ vervallen.

$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \ln(t - 2) = \infty$ en $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{5}{t} = 0$

dus horizontale asymptoot $y = 0$, oftewel de x-as (aan de linkerkant)

$\lim_{t\downarrow 2} x(t) = \lim_{t\downarrow 2} \ln(t - 2) = -\infty$ en $\lim_{t\downarrow 2} y(t) = \lim_{t\downarrow 2} \frac{5}{t} = \frac{5}{2}$

dus horizontale asymptoot $y = 2\frac{1}{2}$ (rechts)

- **zwaartepunt of evenwichtspunt in driehoek** is het snijpunt van de drie zwaartelijnen van die driehoek
  - **zwaartelijn** gaat vanuit een hoekpunt van een driehoek naar het midden van de tegenoverliggende zijde
  - **het zwaartepunt *Z*** verdeelt elke zwaartelijn in de verhouding 1 : 2
  - **voor het zwaartepunt *Z*** in ΔABC geldt $x_Z = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C)$ en $y_Z = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)$

    voorbeeld
    - Bereken de coördinaten van het zwaartepunt Z van ΔABC met $A(0, 0)$, $B(9, 0)$ en $C(6, 9)$

      $x_Z = \frac{1}{3}(0 + 9 + 6) = 5$ en $y_Z = \frac{1}{3}(0 + 0 + 9) = 3$

      dus $Z(5, 3)$
- **met behulp van vectoren** zwaartepunten in een driehoek bepalen (alle punten hebben dezelfde weging)
  - voor ΔABC geldt $\vec{Z} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$ in het voorbeeld hierboven:

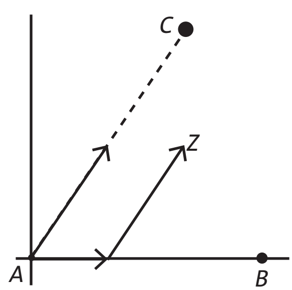
    $$\vec{Z} = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}9\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$$
- **zwaartepunt** bij een systeem van meerdere punten met een verschillende weging
  - voor een systeem van puntmassa's $m_1, m_2, ..., m_n$ in de punten $P_1, P_2, ..., P_n$ geldt:

    $\vec{z}_{systeem} = \frac{m_1}{m_T} \cdot \vec{p}_1 + \frac{m_2}{m_T} \cdot \vec{p}_2 + ... + \frac{m_n}{m_T} \cdot \vec{p}_n$ waarbij m_T is het totaal van de puntmassa's

    voorbeeld

    Het voorbeeld hierboven met $m_A = 2$, $m_B = 4$ en $m_C = 6$ geeft:

    $$\vec{Z} = \frac{2}{12} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \frac{4}{12} \cdot \begin{pmatrix}9\\0\end{pmatrix} + \frac{6}{12} \cdot \begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$



7.58 afstand tussen twee punten

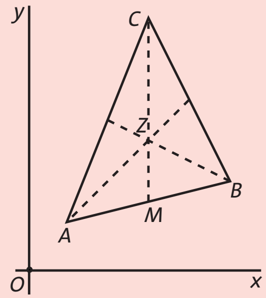
Gegeven zijn de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{6}t^3 + 2t^2 \\ y(t) = 2t^2 - t \end{cases}$

- *Bereken in twee decimalen de afstand tussen de punten met t = 1 en t = 2*

omdat $\begin{cases} x(1) = -\frac{1}{6} + 2 = 1\frac{5}{6} \\ y(1) = 2 - 1 = 1 \end{cases}$ en $\begin{cases} x(2) = -\frac{8}{6} + 8 = 6\frac{2}{3} \\ y(2) = 8 - 2 = 6 \end{cases}$

geldt voor de afstand $\sqrt{\left(6\frac{2}{3} - 1\frac{5}{6}\right)^2 + (6-1)^2} \approx 6{,}95$

7.59 zwaartepunt



Gegeven A, B en C met de vectoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ en $\overrightarrow{OC}$

- *Druk het zwaartepunt Z (of $\overrightarrow{OZ}$) uit in $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ en $\overrightarrow{OC}$.*

Noem M het midden van AB (zie figuur)

Maak gebruik van $MZ : ZC = 1 : 2$ (zwaartepunt)

1. $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MZ}$ en $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MZ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$
2. $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$ (uit 1)
3. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ dus $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$
4. $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}$
5. $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$
6. $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC})$ (uit 1, 2 en 3)
7. $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ (volgt uit 6, 2 en 5)

conclusie: $\overrightarrow{OZ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

7.60 zwaartepunt

Gegeven zijn de punten $A(1, 4)$, $B(8, 17)$ en $C(6, -6)$

- *Bereken het zwaartepunt Z van driehoek ABC.*

voor het zwaartepunt Z geldt $x_Z = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C)$ en $y_Z = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)$

dus $x_Z = \frac{1}{3}(1 + 8 + 6) = 5$ en $y_Z = \frac{1}{3}(4 + 17 + -6) = 5$ dus $Z(5, 5)$

of

met behulp van vectoren $\vec{Z} = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\17\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\-6\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}15\\15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$ dus $Z(5, 5)$

7.61 zwaartepunt bij verschillende massa's

Gegeven zijn de punten $A(-4, 2)$, $B(8, 12)$, $C(7, -9)$ en $D(1, -2)$. Deze punten hebben respectievelijk de massa's 2, 5, 8 en 3

- *Bereken het zwaartepunt Z van vierhoek ABCD*

Totale massa is $2 + 5 + 8 + 3 = 18$.

$\vec{Z} = \left(\frac{2}{18}\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix} + \frac{5}{18}\cdot\begin{pmatrix}8\\12\end{pmatrix} + \frac{8}{18}\cdot\begin{pmatrix}7\\-9\end{pmatrix} + \frac{3}{18}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix}91\\-14\end{pmatrix}$ dus $Z = \left(\frac{91}{18}, \frac{-14}{18}\right)$

cirkels

- **twee vergelijkingen van een cirkel**
  - **middelpuntsvergelijking** van cirkel met $M(a, b)$ en straal r: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

    ga na dat hier sprake is van een verschuiving a naar rechts en b omhoog van de cirkel $x^2+y^2=r^2$

    voorbeeld: $M(4, 8)$ en $r=\sqrt{34}$ is c_1: $(x-4)^2+(y-8)^2=34$
  - **vergelijking cirkel** $x^2+ax+y^2+bx+c=0$ bijv. c_1: $x^2-8x+y^2-16x+46=0$

    kwadraat afsplitsen van $x^2-8x+y^2-16x+46=0$ levert

    $(x-4)^2-16+(y-8)^2-64+46=0$ dus $(x-4)^2+(y-8)^2=34$
    - **transformaties** ga na dat hier sprake is van een verschuiving 4 naar rechts en 8 omhoog van de cirkel $x^2+y^2=34$
  - **parametervoorstelling van cirkel** met vergelijking $x^2+y^2=r^2$ is

    $P(t)=\begin{cases} x(t)=r\cdot\cos(t) \\ y(t)=r\cdot\sin(t) \end{cases}$ (cirkel met straal r en middelpunt (0, 0))
    - bewegingsvergelijking eenheidscirkel $\begin{cases} x(t)=\cos(t) \\ y(t)=\sin(t) \end{cases}$
  - **parametervoorstelling van een cirkel** met vergelijking $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ is

    $\begin{cases} x(t)=a+r\cos(t) \\ y(t)=b+r\sin(t) \end{cases}$ ook te schrijven als $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+r\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ cirkel

    met straal r en middelpunt (a, b)
- **snijpunten berekenen**
  - **van lijn l en cirkel c** herleid l op x of y en substitueer in c

    voorbeeld

    snijpunt bepalen van $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ en $y+x=4$

    $y=-x+4$ substitueren levert $(x-1)^2+(-x+2)^2=25$

    $x^2-3x-10=0$ dus $x=-2$ en $x=5$

    invullen in l levert $(-2, 6)$ en $(5, -1)$
    - ga na: $x=-2$ en $x=5$ niet invullen in de cirkel
  - **van twee cirkels** c_1 en c_2 herleid de twee cirkels op x^2+y^2

    voorbeeld

    $x^2+y^2=10$ en $(x+5)^2+(y-5)^2=40$

    herleiden op x^2+y^2 levert $x^2+y^2=10$ en $x^2+y^2=-10x+10y-10$

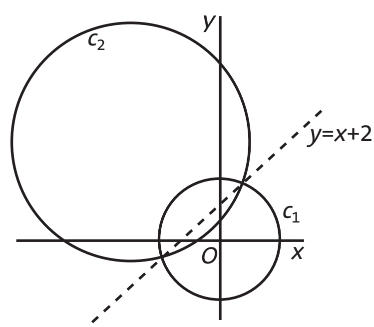
    dus $10=-10x+10y-10$ dus $y=x+2$ (dit is de lijn door de snijpunten)

    $x^2+y^2=10$ snijden met $y=x+2$ levert

    $x^2+(x+2)^2=10$

    dus $2x^2+4x-6=0$ en dit oplossen

    levert $S_1(1, 3)$ en $S_2(-3, -1)$



7.62 transformaties

Gegeven zijn $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x + 4$, $h(x) = 2^x$, $p(x) = \sin(x)$ en c: $x^2 + y^2 = 10$

- *Geef de vergelijkingen van de beelden bij onderstaande afbeeldingen: 2 naar rechts én 3 omhoog verschuiven óf vermenigvuldigd ten opzichte van de x-as met 4 óf vermenigvuldigd ten opzichte van de y-as met 5*

	T(2, 3)	$V_{x\text{-as},4}$	$V_{y\text{-as},5}$
$f(x) = x^2$	$y = (x-2)^2 + 3$	$y = 4x^2$	$y = \left(\frac{1}{5}x\right)^2$
$g(x) = 3x + 4$	$y = 3(x-2) + 4 + 3 = 3x + 1$	$y = 4 \cdot (3x+4) =$ $12x + 16$	$y = 3 \cdot \left(\frac{1}{5}x\right) + 4 =$ $\frac{3}{5} \cdot x + 4$
$h(x) = 2^x$	$y = 2^{(x-2)} + 3$	$y = 4 \cdot 2^x$	$y = 2^{\left(\frac{1}{5} \cdot x\right)}$
$p(x) = \sin(x)$	$y = \sin(x-2) + 3$	$y = 4 \cdot \sin(x)$	$y = \sin\left(\frac{1}{5}x\right)$
$x^2 + y^2 = 10$	$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$	$\left(\frac{1}{4}x\right)^2 + y^2 = 10$	$x^2 + \left(\frac{1}{5}y\right)^2 = 10$

7.63 vier verschillende notaties van cirkels

c_1: $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$ en c_2: $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 20$ en c_3: $M(2, -9)$ en $r = 7$

c_4: $\begin{cases} x(t) = 2 + 7\cos(t) \\ y(t) = -1 + 7\sin(t) \end{cases}$

- *Schrijf elke cirkel ook in de drie andere vormen.*

c_1: $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 3$; $M(1, -2)$ en $r = \sqrt{8}$; $\begin{cases} x(t) = 1 + \sqrt{8}\cos(t) \\ y(t) = -2 + \sqrt{8}\sin(t) \end{cases}$

c_2: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 33$; $M(2, -3)$ en $r = \sqrt{33}$; $\begin{cases} x(t) = 2 + \sqrt{33}\cos(t) \\ y(t) = -3 + \sqrt{33}\sin(t) \end{cases}$

c_3: $(x-2)^2 + (y+9)^2 = 49$; $x^2 + y^2 - 4x + 18y = -36$; $\begin{cases} x(t) = 2 + 7\cos(t) \\ y(t) = -9 + 7\sin(t) \end{cases}$

c_4: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 49$; $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 44$; $M(2, -1)$ en $r = 7$

7.64 cirkel en lijn én cirkel en cirkel snijden

- *Bereken de snijpunten van* c_1: $(x-1)^2 + (y-6)^2 = 50$ *en* l: $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = 1$

c_1: $(x-1)^2 + (y-6)^2 = 50$ en l: $y = \frac{1}{2}x - 2$ substitutie levert c_1: $(x-1)^2 + \left(\frac{1}{2}x - 2 - 6\right)^2 = 50$

dus c_1: $x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{4}x^2 - 8x + 64 = 50$ dus c_1: $1\frac{1}{4}x^2 - 10x + 15 = 0$ dus c_1: $x^2 - 8x + 12 = 0$

dus snijpunten $A(2, -1)$ en $B(6, 1)$

- *Bereken de snijpunten:* c_1: $(x-1)^2 + (y-6)^2 = 50$ *en* c_2: $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 10$

Herleid op $x^2 + y^2$ levert c_1: $x^2 + y^2 = 2x + 12y + 13$ en c_2: $x^2 + y^2 = 10x - 4y - 19$ dus

$2x + 12y + 13 = 10x - 4y - 19$ dus $16y = 8x - 32$ dus l: $y = \frac{1}{2}x - 2$ op deze lijn liggen de snijpunten, dus deze lijn snijden met c_1: $(x-1)^2 + (y-6)^2 = 50$ geeft $A(2, -1)$ en $B(6, 1)$ (zie eerste onderdeel)

cirkels vervolg

- **raken** stellingen
  - **raaklijnstelling** raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt
  - **raaklijn van twee rakende cirkels** staat loodrecht op de verbindingslijn van de middelpunten van die twee cirkels
  - **als vanuit een punt *P* buiten de cirkel twee raaklijnen** aan die cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van punt P tot de twee raakpunten gelijk
- **vergelijking van een raaklijn** opstellen alleen richting is gegeven
  - **met discriminant** D = 0

    voorbeeld

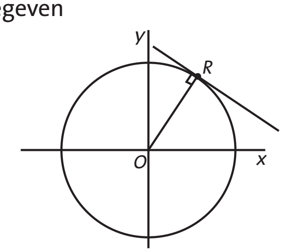
    - $x^2 + y^2 = 25$ en richtingscoëfficiënt raaklijn is $\frac{3}{4}$ dus raaklijn wordt $y = \frac{3}{4}x + q$

    eliminatie levert $x^2 + \left(\frac{3}{4}x + q\right)^2 = 25$ dus $\frac{25}{16}x^2 + \frac{6}{4}qx + q^2 - 25 = 0$

    raken dus D = 0 dus $\left(\frac{6}{4}q\right)^2 - 4 \cdot \frac{25}{16} \cdot (q^2 - 25) = 0$ dus $-\frac{64}{16}q^2 + \frac{2500}{16} = 0$

    dus $q = \frac{25}{4}$ of $q = -\frac{25}{4}$

    conclusie raaklijn: $y = \frac{3}{4}x + 6\frac{1}{4}$ of $y = \frac{3}{4}x - 6\frac{1}{4}$
- **vergelijking van een raaklijn** opstellen raakpunt *R* op de cirkel is gegeven
  - **raaklijn loodrecht op straal**

    voorbeeld

    - $x^2 + y^2 = 13$ en raakpunt $R(2, 3)$ op de cirkel c

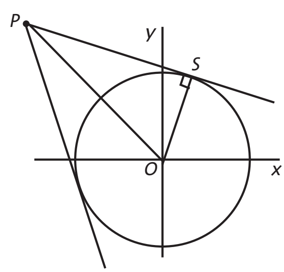
    richting straal is $\frac{3-0}{2-0} = \frac{3}{2}$ en richting raaklijn is $-\frac{2}{3}$

    dus rl.: $y = -\frac{2}{3}x + b$ door (2, 3) levert rl.: $y = -\frac{2}{3}x + 5\frac{1}{3}$
- **vergelijking van een raaklijn** *l* opstellen punt *P* buiten de cirkel is gegeven

  methode 1:

  - stel vergelijking passende hulpcirkel op met middelpunt *P* en straal *PS*

    voorbeeld:

    - $c : x^2 + y^2 = 10$ en $P(-5, 5)$

    (raakpunt *S* op cirkel *c*)

    $OP = \sqrt{50}$, straal $OS = \sqrt{10}$ en $SP = \sqrt{40}$

    (Pythagoras in ΔOPS, met $\angle S = 90°$)

    passende cirkel met middelpunt *P* en straal *SP*:

    $(x+5)^2 + (y-5)^2 = 40$

    $(x+5)^2 + (y-5)^2 = 40$ snijden met $x^2 + y^2 = 10$

    levert $x - y + 2 = 0$ (de lijn waar de raakpunten op liggen)

    $x^2 + y^2 = 10$ snijden met $x - y + 2 = 0$ levert $S_1(1, 3)$ en $S_2(-3, -1)$

    rc. raaklijn$_1$ $= \frac{5-3}{-5-1} = -\frac{1}{3}$ door $S_1(1, 3)$ levert rl.: $y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$

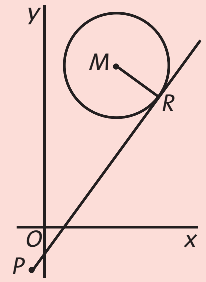
    rc. raaklijn$_2$ $= \frac{5--1}{-5--3} = -\frac{6}{2} = -3$ door $S_1(-3, -1)$ levert rl.: $y = -3x - 10$

7.65 raaklijnstelling

Gegeven is cirkel met $M(5, 12)$ en $r = 4$ en punt $P(-1, -3)$ buiten de cirkel.
Lijn l door P raakt de cirkel in R.

- *Bereken de lengte van lijnstuk PR.*

Driehoek MPR is rechthoekig met rechte hoek in R (want raaklijn en straal staan loodrecht op elkaar),
dus $MP^2 = PR^2 + MR^2$
Omdat $MP^2 = 6^2 + 15^2 = 261$ en $r = 4$ geldt $261 = 16 + MR^2$
Dus $MR^2 = 245$ dus $MR = \sqrt{245}$



7.66 raaklijn met gegeven richting

Gegeven is cirkel $c : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$. Lijn l met rc. is -3 raakt cirkel c.

- *Stel de vergelijking op van de raaklijn l.*

Straal r loodrecht op l door $M(1, 2)$ heeft richting $\frac{1}{3}$
dus vergelijking $r: y = \frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3}$
$r: y = \frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3}$ snijden met $c : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$ levert $S_1(-2, 1)$ en $S_2(4, 3)$
$l: y = -3x + b$ door $S_1(-2, 1)$ levert $l: y = -3x - 5$
$l: y = -3x + b$ door $S_2(4, 3)$ levert $l: y = -3x + 15$

7.67 raaklijn door gegeven punt op de cirkel

Gegeven is cirkel $c : (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$. Lijn l raakt de cirkel in punt $R(1, 3)$.

- *Stel de vergelijking op van de raaklijn l.*

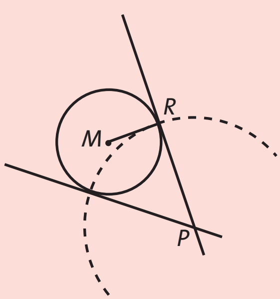
Straal door $R(1, 3)$ en $M(-1, 2)$ heeft richting $\frac{1}{2}$. Raaklijn l heeft richting -2.
$l: y = -2x + b$ door $R(1, 3)$ levert $l: y = -2x + 5$

7.68 raaklijn door gegeven punt buiten de cirkel (met hulpcirkel)

Gegeven is cirkel $c : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$. Lijn l door $P(6, -3)$ raakt c in R.

- *Stel de vergelijking op van de raaklijn l.*

$MP = \sqrt{50}$, $MR = \sqrt{10}$ dus $PR = \sqrt{40}$ (Pythagoras)
hulpcirkel met middelpunt P en straal $\sqrt{40}$
$(x-6)^2 + (y+3)^2 = 40$ snijden met
$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$
$x^2 + y^2 = 12x - 6y - 5$ en $x^2 + y^2 = 2x + 4y + 5$ dus
$12x - 6y - 5 = 2x + 4y + 5$ geeft $y = x - 1$
$c : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$ snijden met $y = x - 1$
levert $R_1(0, -1)$ en $R_2(4, 3)$
rc_l is $-\frac{1}{3}$ door $R_1(0, -1)$ levert raaklijn $l_1: y = -\frac{1}{3}x - 1$
rc_l is -3 door $R_2(4, 3)$ levert raaklijn $l_2: y = -3x + 15$



cirkels vervolg

■ vergelijking van een raaklijn *l* opstellen punt *P* buiten de cirkel is gegeven vervolg

methode 2:

■ **gebruik afstandsformule** $r = \mathrm{d}(M, k) = \left|\dfrac{ax_M + by_M - c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$ (k is raaklijn)

voorbeeld:

$c : x^2 + y^2 = 10$ en $P(-5, 5)$ (en raakpunt S op cirkel c)

cirkel met $M(0, 0)$ en $r = \sqrt{10}$

raaklijn k: $y = px + q$ door $P(-5, 5)$ levert k: $5 = -5p + q$ dus $q = 5p + 5$

raaklijn k: $y = px + (5p + 5)$ dus $px - y + (5p + 5) = 0$

$\mathrm{d}(M,k) = \left|\dfrac{ax_M + by_M - c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\dfrac{px_M - y_M - (5p + 5)}{\sqrt{p^2 + (-1)^2}}\right|$ met $r = \mathrm{d}(M,k) = \sqrt{10}$ en $M(0, 0)$

dus $\left|\dfrac{p \cdot 0 - 0 - (5p + 5)}{\sqrt{p^2 + 1}}\right| = \sqrt{10}$ dus $\left|\dfrac{-5p - 5}{\sqrt{p^2 + 1}}\right| = \sqrt{10}$ kwadrateren geeft

$\dfrac{25p^2 + 50p + 25}{p^2 + 1} = \dfrac{10}{1}$ kruislings vermenigvuldigen $25p^2 + 50p + 25 = 10p^2 + 10$

dus $15p^2 + 50p + 15 = 0$ dus $3p^2 + 10p + 3 = 0$

abc-formule levert $p = -\dfrac{1}{3}$ en $p = -3$

conclusie: raaklijnen zijn $y = -\dfrac{1}{3}x + 3\dfrac{1}{3}$ en $y = -3x - 10$

methode 3:

■ **met de discriminant** gebruik D = 0

voorbeeld:

$x^2 + y^2 = 10$ en $P(0, -8)$ op de y-as

lijn door P met rc. = p en $q = -8$ geeft raaklijn l $y = px - 8$

$y = px - 8$ en $x^2 + y^2 = 10$ levert $x^2 + (px - 8)^2 = 10$

dus $x^2 + p^2x^2 - 16px + 54 = 0$

raken dus één oplossing dus D = 0 met $a = 1 + p^2$, $b = -16p$, $c = 54$

dus $(-16p)^2 - 4 \cdot (1 + p^2) \cdot 54 = 0$ dus $40p^2 = 216$

rc. raaklijn is $p = \pm\sqrt{5\frac{2}{5}}$ dus $l_{1,2}$: $p = \pm\sqrt{5\frac{2}{5}} \cdot x - 8$

methode 4:

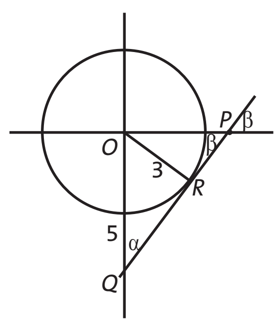
■ **gebruik meetkunde**

voorbeeld:

$x^2 + y^2 = 9$ en $P(0, -6)$ op de y-as

$\tan(\alpha) = \dfrac{OR}{PR} = \dfrac{3}{\sqrt{27}}$ en $\tan(\beta) = \dfrac{PR}{OR} = \dfrac{\sqrt{27}}{3} = \sqrt{3}$

rc. raaklijn is $\sqrt{3}$ dus l.: $y = \sqrt{3} \cdot x - 6$



7.69 raaklijn door gegeven punt buiten de cirkel (met afstandsformule)

Gegeven is cirkel $c:(x-1)^2+(y-2)^2=10$. Lijn k door $P(6,-3)$ raakt c in R.

- *Stel de vergelijking op van de raaklijn k.*

gebruik $d(M,k)=\left|\dfrac{ax_M+by_M-c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=r$

raaklijn k: $y=px+q$ door $P(6,-3)$ geeft $-3=6p+q$ dus $q=-3-6p$

dus $y=px-3-6p$ dus $-px+y+3+6p=0$ en $M(1,2)$

Invullen levert $r=d(M,k)=\left|\dfrac{-p\cdot x+y+3+6p}{\sqrt{(-p)^2+1^2}}\right|=\left|\dfrac{-p\cdot 1+2+3+6p}{\sqrt{(-p)^2+1^2}}\right|=\left|\dfrac{5p+5}{\sqrt{p^2+1}}\right|=\sqrt{10}$ dus

$|5p+5|=\sqrt{p^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{10p^2+10}$ kwadrateren geeft $25p^2+50p+25=10p^2+10$ dus $3p^2+10p+3=0$

abc-formule geeft $p=-\frac{1}{3}$ en $p=-3$

rc_k is $-\frac{1}{3}$ door $P(6,-3)$ levert raaklijn k: $y=-\frac{1}{3}x-1$

rc_k is -3 door $P(6,-3)$ levert raaklijn k: $y=-3x+15$

7.70 raaklijn door gegeven punt buiten de cirkel (met D = 0)

Gegeven is cirkel c: $x^2+y^2=1$. Lijn l door $P(0,2)$ raakt c in R.

- *Stel de vergelijking op van de raaklijn l.*

Lijn l door $P(0,2)$ is l: $y=px+2$, c en l snijden levert $c:x^2+(px+2)^2=1$ dus

$x^2+p^2x^2+4px+4=1$ dus $(1+p^2)x^2+4px+3=0$

Eén snijpunt, dus D = 0 dus $(4p)^2-4\cdot(1+p^2)\cdot 3=0$ dus $p^2=3$ dus $p=\pm\sqrt{3}$

Dus l: $y=\sqrt{3}\cdot x+2$ of l: $y=-\sqrt{3}\cdot x+2$

7.71 raaklijn door gegeven punt buiten de cirkel (met meetkunde)

Gegeven is cirkel $c:(x-1)^2+(y-2)^2=4$. Lijn l door $P(1,-2)$ raakt c in R.

- *Stel de vergelijking op van de raaklijn l.*

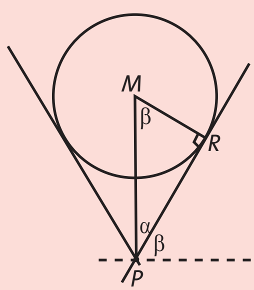
$MP=4$, $MR=2$ dus $PR=\sqrt{12}$ (Pythagoras) dus $\tan(\angle MPR)=\dfrac{2}{\sqrt{12}}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}$

Dus voor de raaklijn geldt r.c. $=\tan(\beta)=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ dus

l: $y=\sqrt{3}\cdot x+p$ of $y=-\sqrt{3}\cdot x+q$

$P(1,-2)$ levert l_1: $y=\sqrt{3}\cdot x-2-\sqrt{3}$

$P(1,-2)$ levert l_2: $y=-\sqrt{3}\cdot x-2+\sqrt{3}$



hoofdzaken

driehoeken

- **stelling van Pythagoras** als ΔABC een rechte hoek C heeft, dan geldt $a^2 + b^2 = c^2$
- **sin(α) =** $\frac{BC}{AC}$ en $\cos(\alpha) = \frac{AB}{AC}$ en $\tan(\alpha) = \frac{BC}{AB}$
- **cosinusregel** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$ en **sinusregel** $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$
- **zijn congruent** als geldt *ZZZ, HZH, ZHZ, ZHH* of *ZZR*
- **zijn gelijkvormig** als geldt *hh, zhz, zzz* of *zzr*
- **hoeken van 45°, 45° en 90°** ⇒ de zijden verhouden zich als $1 : 1 : \sqrt{2}$
- **hoeken van 30°, 60° en 90°** ⇒ de zijden verhouden zich als $1 : 2 : \sqrt{3}$
- **oppervlakte** driehoek is gelijk aan $\frac{1}{2} \times$ basis $\times$ hoogte of $\frac{1}{2} \times$ zijde $b \times$ zijde $c \times \sin\alpha$
- **stelling van Thales** als in ΔABC geldt $\angle C = 90°$ dan ligt C op de cirkel met middellijn AB

vier speciale lijnen in een driehoek

- **hoogtelijn** gaat vanuit een hoekpunt loodrecht naar de tegenoverliggende zijde
- **zwaartelijn** gaat vanuit een hoekpunt naar het midden van de tegenoverliggende zijde
- **middelloodlijn** van AB is de lijn die door midden van AB gaat en loodrecht op AB staat
- **deellijn of bissectrice** van $\angle A$ is de lijn die $\angle A$ in twee even grote hoeken deelt

vier typen vergelijkingen van rechte lijnen

- $y = ax + b$ r.c. = a en snijpunt y-as is $(0, b)$, loodrechte lijn is $y = -\frac{1}{a}x + c$
- $px + qy = c$ door $\left(0, \frac{c}{q}\right)$ en $\left(\frac{c}{p}, 0\right)$, loodrecht op $qx - py = d$, normaalvector is $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$
- $rx + sy = 1$ door $\left(0; \frac{1}{s}\right)$ en $\left(\frac{1}{r}; 0\right)$, loodrecht op lijn $sx - ry = t$
- $(y - v) = a(x - h)$ r.c.= a en gaat door (h, v)

hoeken tussen lijnen

- **hoek α** tussen lijn $l: y = ax + b$ en x-as berekenen met $\alpha = \tan^{-1}(a)$
- **hoek φ** tussen richtingsvectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ berekenen met $\cos(\varphi) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{|x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$
- **loodrecht** product van de richtingscoëfficiënten is -1 of inproduct $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b = 0$

afstanden lengte van kortste verbindingslijnstuk tussen twee meetkundige figuren

- **afstand punt tot lijn of lijn tot lijn** te berekenen met loodlijn en met $d(P,k) = \left|\frac{ax_P + by_P - c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$
- **afstand punt tot cirkel** te berekenen met Pythagoras en straal
- **afstand lijn tot cirkel** te berekenen met loodlijn op lijn l door M
- **afstand cirkel tot cirkel** te berekenen met $d(M,P)$ – stralen cirkels

7.72 denkactiviteit zwaartepunt

Gegeven is een veelhoek *ABCDEFGH*. Deze veelhoek is ontstaan door uit vierkant *ABCD* met zijde 4, het vierkant *HGFE* met zijde 2 weg te laten. Hierbij liggen *E* en *H* beide op *AD* met *AH* = *DE*.

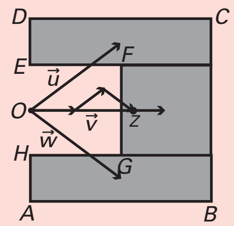
Om het zwaartepunt van deze veelhoek te vinden, kan de veelhoek bijvoorbeeld worden verdeeld in drie rechthoeken die vervolgens worden opgevat als drie puntmassa's. Het zwaartepunt van de drie puntmassa's valt dan samen met het zwaartepunt van de veelhoek.

- *Teken in de figuur met behulp van vectoren de plaats van het zwaartepunt van de veelhoek. Licht je werkwijze toe*

eerste methode:

Analyse (onderstreep, schets, deelvragen, vergelijkingen): gebied verdelen in drie rechthoeken met gelijke oppervlakte. Puntmassa's aangeven. Kies *O* zoals in de tekening. Zijden van vierkant *ABCD* zijn 4.

Tekenen van de vectoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ en $\vec{w}$ van *O* naar het midden van elke rechthoek (de puntmassa).



Wat noteer je / oplossing

Tekening met de drie rechthoeken, de vectoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ en $\vec{w}$ (van *O* naar het midden van elke rechthoek).

Gebruik gewogen vectoren.

Het zwaartepunt *Z* is getekend met $\frac{1}{3}\vec{v}+\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{w}$

tweede methode:

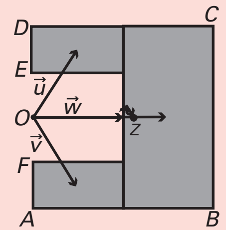
Analyse (onderstreep, schets, deelvragen, vergelijkingen): gebied verdelen in drie rechthoeken met ongelijke oppervlakte. Puntmassa's aangeven. Kies *O* zoals in de tekening. Zijden van vierkant *ABCD* zijn 4.

Tekenen van de vectoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ en $\vec{w}$ van *O* naar het midden van elke rechthoek.

Kentallen bepalen met behulp van de tekening. Gebruik gewogen vectoren.

Wat noteer je / oplossing

$\vec{w}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\1\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ en $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ (zie figuur)



De oppervlakten verhouden zich als 4 : 1 : 1, dus het zwaartepunt is het eindpunt van $\frac{4}{6}\vec{w}+\frac{1}{6}\vec{u}+\frac{1}{6}\vec{v}$

Het zwaartepunt *Z* berekenen met

$$\frac{4}{6}\vec{w}+\frac{1}{6}\vec{u}+\frac{1}{6}\vec{v}=\frac{4}{6}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$$

Het zwaartepunt *Z* tekenen met behulp van de kentallen.

hoofdzaken vervolg

vectoren

- **een vector** heeft een lengte en een richting
- **als** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ dan wordt de vergelijking: $-qx + py = c$
- **inproduct van vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$** is $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$ en $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$
- **hoek tussen vectoren** berekenen met $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

bewegingsvergelijking

- $\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}$ bijv. ellips E $\begin{cases} x(t) = 3\sin(t) \\ y(t) = 5\cos(t) \end{cases}$
  - **snijpunt x-as** $y(t) = g(t) = 0$ en snijpunt y-as $x(t) = f(t) = 0$
  - **horizontale raaklijn** $y'(t) = 0$ én $x'(t) \neq 0$ en **verticale raaklijn** als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$
  - **keerpunt** als $x'(t) = 0$ én tegelijkertijd $y'(t) = 0$
- **zichzelf snijden** meestal verband met een tweede opvallende eigenschap
- **plaatsvector** horend bij een punt P is $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$
- **bewegingsrichting** $\text{r.c.}_{\text{raaklijn aan kromme}} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ of $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$
- **vectoriële snelheid** of snelheidsvector $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ (is een vector)
  - **baansnelheid** $|v(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ (is geen vector, maar getal, snelheid)
- **vectoriële versnelling** of versnellingsvector $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$
- **baanversnelling** is de grootte van de versnelling in de richting van de snelheid, de uitkomst

  is een getal, in formulevorm $a_b(t) = \dfrac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \dfrac{\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} = \ldots$

asymptoten

- **horizontale asymptoot** $y = b$ als $\lim\limits_{t \to q} x(t) = \pm\infty$ en $\lim\limits_{t \to q} y(t) = b$
- **verticale asymptoot** $x = a$ als $\lim\limits_{t \to q} x(t) = a$ en $\lim\limits_{t \to q} y(t) = \pm\infty$
- **perforatie** (a, b) als $x(t)$ of $y(t)$ niet bestaan voor $t = q$ en $\lim\limits_{t \to q} x(t) = a$ en $\lim\limits_{t \to q} y(t) = b$

zwaartepunt *Z* of evenwichtspunt in driehoek snijpunt van de drie zwaartelijnen

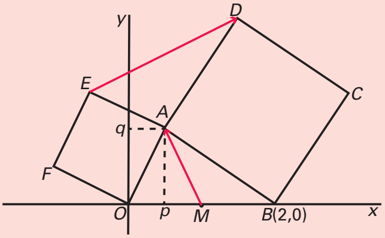
- het zwaartepunt Z verdeelt elke zwaartelijn in de verhouding 1 : 2
- voor Z in ΔABC geldt $x_Z = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C)$ en $y_Z = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)$ of $\vec{Z} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$
- voor een systeem van puntmassa's $m_1, m_2, \ldots, mn$ in de punten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ geldt:

  $\vec{z}_{systeem} = \dfrac{m_1}{m_T} \cdot \vec{p}_1 + \dfrac{m_2}{m_T} \cdot \vec{p}_2 + \ldots + \dfrac{m_n}{m_T} \cdot \vec{p}_n$ waarbij m_T is het totaal van de puntmassa's

7.73 denkactiviteit twee vierkanten tegen een driehoek

Voor $p > 0$ en $q > 0$ is gegeven driehoek OAB met $O(0, 0)$, $A(p, q)$ en $B(2, 0)$. Tegen de zijden OA en AB liggen de vierkanten $OAEF$ en $ABCD$. Deze vierkanten liggen buiten driehoek OAB. Het midden van lijnstuk OB is punt M.

Er geldt: $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} p+q \\ 2-p+q \end{pmatrix}$



- *Toon dit aan.*

<u>Analyse</u> (onderstreep, schets, deelvragen, vergelijkingen): toon een gegeven uitdrukking aan, dus gebruik grafische rekenmachine is niet toegestaan. Kernwoord is vierkant, dus zijden loodrecht op elkaar. Ga na dat $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$ gevraagd wordt. En ga na welke zijden/vectoren uit te drukken zijn in p en q.

<u>Wat noteer je / oplossing</u>

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$ want $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OF}$ staan loodrecht op elkaar

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-p \\ -q \end{pmatrix}$ coördinaten van B zijn gegeven

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} q \\ 2-p \end{pmatrix}$ want $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AD}$ staan loodrecht op elkaar.

conclusie: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \\ 2-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+q \\ 2-p+q \end{pmatrix}$

Verder geldt: $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} p-q \\ p+q \end{pmatrix}$

- *Toon aan dat lijn MA loodrecht staat op lijn ED.*

Analyse (onderstreep, schets, deelvragen, vergelijkingen. MA en ED worden genoemd, druk $\overrightarrow{MA}$ en $\overrightarrow{ED}$ uit in p en q. Maak gebruik van de gegeven vectoren. Loodrecht, dus inproduct = 0

<u>Wat noteer je / oplossing</u>

$B(2, 0)$ dus $M(1, 0)$ (zie ook de figuur) en $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+p \\ q \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -p+q \\ -p-q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p+q \\ 2-p+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q \\ 2-2p \end{pmatrix}$

Inproduct $\overrightarrow{MA}$ en $\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} -1+p \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2q \\ 2-2p \end{pmatrix} = -2q + 2pq + 2q - 2pq = 0$

conclusie: vectoren $\overrightarrow{MA}$ en $\overrightarrow{ED}$ staan loodrecht op elkaar want inproduct = 0.

hoofdzaken vervolg

cirkels

- **middelpuntsvergelijking** van cirkel met $M(a, b)$ en straal r: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
- **vergelijking** cirkel $x^2+ax+y^2+bx+c=0$
- **parametervoorstelling** van een cirkel met vergelijking $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ is

$$\begin{cases} x(t)=a+r\cos(t) \\ y(t)=b+r\sin(t) \end{cases}$$

snijpunten berekenen

- **van lijn *l* en cirkel *c*** herleid l op x of y en substitueer in c (x of y invullen in l, niet in c)
- **van twee cirkels** c_1 en c_2 herleid beide cirkels op x^2+y^2 (levert lijn door de snijpunten)

raaklijnstelling

- **raaklijn aan een cirkel** staat loodrecht op de straal naar het raakpunt

vergelijking van een raaklijn opstellen

- als alleen richting is gegeven met discriminant D = 0
- als raakpunt R op de cirkel is gegeven raaklijn loodrecht op straal
- als punt P buiten de cirkel is gegeven
  - methode 1: stel vergelijking passende hulpcirkel op met middelpunt P en straal PR (met R is raakpunt)
  - methode 2: gebruik afstandsformule $r=d(M,k)=\left|\dfrac{ax_M+by_M-c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$ (k is raaklijn)
  - methode 3: met de discriminant gebruik D = 0
  - methode 4: gebruik meetkunde

ingeschreven cirkel en omgeschreven cirkel

- **ingeschreven cirkel** de zijden van de driehoek raken de cirkel
  - middelpunt van de ingeschreven cirkel ligt op het snijpunt van de deellijnen
- **omgeschreven cirkel** de hoekpunten van de driehoek liggen op de cirkel
  - middelpunt van de omgeschreven cirkel ligt op het snijpunt van de middelloodlijnen
- **van een rechthoekige driehoek** is het midden van de schuine zijde het middelpunt van de omgeschreven cirkel (Thales)

7.74 denkactiviteit raakcirkel en raaklijnen

Gegeven zijn de cirkels c_1: $x^2 + y^2 = 9$ en c_2: $(x - 15)^2 + y^2 = 144$.

Cirkel c_3 met middelpunt op de positieve y-as raakt beide cirkels c_1 en c_2.

- *Stel een vergelijking op van c_3.*

eerste methode:

<u>Analyse</u>: noem het middelpunt van c_3 bijv. M, dan M op y-as dus $x_M = 0$. Raakt beide cirkels, dus d(M, c_1) = d(M, c_2)

<u>Wat noteer je / oplossing</u>

Neem $c_3 = M(0,a)$ dan geldt straal $c_3 = MF = a - 3$, dus geldt ook: $MN = a - 3$

$MP = \sqrt{a^2 + 15^2}$ (Stelling Pythagoras in driehoek OPM)

$MN = MP - 12 = \sqrt{a^2 + 15^2} - 12$ en $MN = a - 3$ dus

$a - 3 = \sqrt{a^2 + 15^2} - 12$ dus $a + 9 = \sqrt{a^2 + 15^2}$ dus $(a + 9)^2 = a^2 + 15^2$ dus

$a^2 + 18a + 81 = a^2 + 225$ dus $a = 8$ en dus straal $c_3 = MF = a - 3 = 8 - 3 = 5$.

conclusie: c_3: $x^2 + (y - 8)^2 = 25$

tweede methode:

<u>Analyse</u>: noem het middelpunt van c_3 bijv. M. Driehoek MOP is rechthoekig: Pythagoras.

Noem d(M, c_1) = d(M, c_2) = r

<u>Wat noteer je / oplossing</u>

$OM = 3 + r$ en $OP = 3 + 12 = 15$ en $MP = 12 + r$

Driehoek MOP is rechthoekig, dus geldt $(r + 3)^2 + 15^2 = (r + 12)^2$

Dus $r^2 + 6r + 9 + 225 = r^2 + 24r + 144$ dus $18r = 90$ dus $r = 5$ en M (0, 8)

conclusie: c_3: $x^2 + (y - 8)^2 = 25$

denkactiviteiten

- bij ingewikkelde opgaven spelen meerdere stappen een rol.
- ga niet meteen rekenen maar analyseer het probleem met een aantal stappen (zie hieronder).

stappenplan bij het oplossen van een complexe opgave

verdeel de oplossing van het probleem in de volgende stappen

- **analyse**
  - **lees** de hele opgave door
  - **noteer of onderstreep** de gegevens die van belang zijn
  - **maak een schets** een analyse figuur
    - zet gegevens uit de opgave in de schets
    - vul de schets aan
    - gebruik getallenvoorbeelden om de situatie duidelijk te krijgen
  - **deelvragen stellen en beantwoorden** welke onderliggende deelvragen kun je stellen bij de eindvraag en in welke volgorde los je dit op
  - **bedenk** welk wiskundige oplossingen passen bij de vraag (zie ook de hoofdzaken)

    denk aan
    - schets
    - vergelijking opstellen en oplossen
    - formule herschrijven naar andere vorm
    - waarde van parameter uitrekenen of waarde van x uitrekenen
    - welke rekenregels passen bij het probleem, welke regels kun je gebruiken?
    - abstraheer van getallenvoorbeeld naar algemene oplossing met variabele
    - rekening houden met een combinatie van vergelijkingen/grafieken

      houd bij de theorie van dit hoofdstuk speciaal rekening met
      - lijnen / vectoren
      - kop-staart methode
      - hoeken en loodrecht
      - inproduct
      - afstandsformule
      - parametervoorstellingen: richting, keerpunten, snelheid, asymptoten ...
      - vergelijking cirkels, snijpunten en raaklijnen
      - zwaartepunt
- **de oplossing** wat noteer je
  - **schets/tekening**
  - **oplossing met alle stappen**
  - **controle en conclusie** als je het antwoord hebt, lees nogmaals de vraag, controleer
    - heb je de tussenberekeningen goed opgeschreven?
    - heb je antwoord gegeven op de vraag?
    - is het antwoord logisch?

7.75 denkactiviteit raakcirkel en raaklijnen

Gegeven zijn de cirkels c_1: $x^2 + y^2 = 9$ en c_2: $(x - 15)^2 + y^2 = 144$.

De cirkels c_1 en c_2 hebben drie gemeenschappelijke raaklijnen.

- *Stel van elk van deze gemeenschappelijke raaklijnen een vergelijking op.*

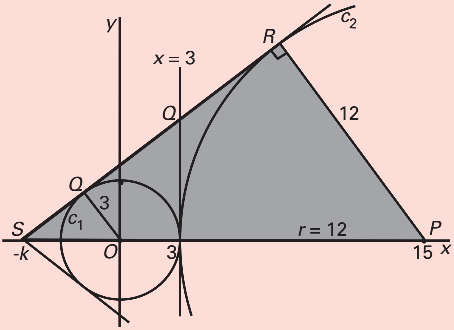
eerste methode met gelijkvormige driehoeken

Analyse: door de verticale raaklijn $x = 3$ ontstaan twee gelijkvormige driehoeken. Noem snijpunt met x-as bijvoorbeeld $S(-k, 0)$. Gebruik gelijkvormigheid.

Wat noteer je / oplossing

Een gemeenschappelijke raaklijn heeft als vergelijking $x = 3$

De andere twee raaklijnen snijden de x-as in het punt $S(-k, 0)$



Er ontstaan twee gelijkvormige driehoeken ΔSOQ en ΔSPR met schuine zijden respectievelijk k en $k + 15$ en overstaande zijden respectievelijk 3 en 12,

dus geldt: $\frac{k}{3} = \frac{k+15}{12}$ dus $12k = 3k + 45$, dus $k = 5$ dus

raaklijn door $S(-k, 0)$ is $y = a(x + 5)$

Richtingscoëfficiënt bepalen met

$\pm\tan(\angle S) = \frac{OQ}{SQ} = \pm\frac{3}{\sqrt{5^2 - 3^2}} = \pm\frac{3}{4}$

Conclusie: vergelijkingen zijn $x = 3$, $y = \frac{3}{4}(x + 5)$ en

$y = -\frac{3}{4}(x + 5)$

tweede methode met behulp van afstand punt raaklijn is gelijk aan de straal

Analyse: gemeenschappelijke verticale raaklijn heeft als vergelijking $x = 3$

De andere raaklijnen hebben vergelijking $y = ax + b$ oftewel $ax - y + b = 0$

Deze lijnen raken c_1 en c_2 dus moet gelden d(M, raaklijn) = straal

Wat noteer je / oplossing

Twee raaklijnen hebben vergelijking $y = ax + b$ oftewel $ax - y + b = 0$

c_1: $O(0,0)$ invullen in $\frac{|ax - y + b|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+1}} = 3$ dus $\sqrt{a^2+1} = \frac{1}{3}|b|$

c_2: $P(15,0)$ invullen in $\frac{|ax - y + b|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|15a + b|}{\sqrt{a^2+1}} = 12$ dus $\sqrt{a^2+1} = \frac{1}{12}|15a + b|$ dus

$\frac{1}{3}|b| = \frac{1}{12}|15a + b|$ dus $4 \cdot |b| = |15a + b|$ dus $4b = \pm(15a + b)$ dus $b = 5a$ of $b = -3a$

$b = -3a$ invullen in $\frac{|b|}{\sqrt{a^2+1}} = 3$ levert $\frac{|-3a|}{\sqrt{a^2+1}} = 3$ dus $9a^2 = 9(a^2 + 1)$, dus geen oplossing

$b = 5a$ invullen in $\frac{|b|}{\sqrt{a^2+1}} = 3$ levert $\frac{|5a|}{\sqrt{a^2+1}} = 3$ en dus $25a^2 = 9(a^2 + 1)$, dus $a = \pm\frac{3}{4}$

Raaklijn $y = ax + b$ en $a = \pm\frac{3}{4}$ en $b = 5a$

conclusie: vergelijkingen zijn $x = 3$ en $y = \frac{3}{4}x + \frac{15}{4}$ en $y = -\frac{3}{4}x - \frac{15}{4}$

8 Grafische rekenmachine Texas Instruments (TI-84 Plus T of TI-84 Plus CE-T)

VAARDIGHEDEN in dit hoofdstuk worden de vaardigheden met de grafische rekenmachines TI-84 behandeld waarnaar verwezen wordt in de hoofdstukken 1 tot en met 7.

schoonmaken scherm

- **CLEAR**

schoonmaken geheugen

- **MEM** (2nd +) om het geheugen leeg te maken en alle instellingen in de standaardvorm te zetten
  - **Reset**
  - **ENTER**
  - **1:All Memory of All Ram** vervolgens ENTER
  - **2:Reset**
  - **ENTER**

schermcontrast herstellen

- **2nd** één keer indrukken
  - **▲ donkerder**
  - **▼ lichter**

getallen opslaan in het lettergeheugen

- **STO** om het laatst berekende getal op te slaan
  - **ALPHA A** (ALPHA MATH) of ALPHA B t/m Z gebruiken als geheugen vervolgens ENTER
  - **oproepen van het opgeslagen getal** door ALPHA A (of B t/m Z)

verbeteren van gemaakte fouten

- **CLEAR** de laatste regel wordt verwijderd (mits ENTER nog niet is ingetypt), anders wordt het scherm schoongemaakt
- **DEL** ga met de pijltjes naar het teken dat verwijderd moet worden, DEL verwijdert het teken onder de cursor
- **INS** (2nd DEL) ga met de pijltjes naar de plaats waarvoor een teken ingevoegd moet worden en vervolgens INS

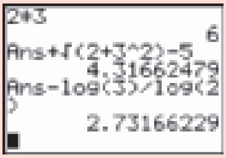
MATH de menu-knop waaronder veel wiskunde bewerkingen te vinden zijn

aantal decimalen instellen

- **MODE**
- **FLOAT 0123456789** standaard staat de instelling op FLOAT, wil je de uitkomst altijd bijv. op 2 decimalen nauwkeurig ga dan met de cursor op 2 staan en vervolgens ENTER

8.1 schermcontrast

- *Het schermvoorbeeld is met contrast op 4 (de nummering van het contrast verschijnt bij het instellen in de rechter bovenhoek van het scherm).*



8.2 uitkomsten opslaan

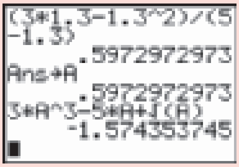
Gegeven is $a = 3b^3 - 5b + \sqrt{b}$ en $b = \dfrac{3c - c^2}{5 - c}$ en $c = 3d^{1,2} - 5d$

Gebruik voor onderstaande berekeningen het lettergeheugen van de rekenmachine.

a *Bereken a in twee decimalen nauwkeurig als c = 1,3*

b *Bepaal a in drie decimalen nauwkeurig als d = –2*

a Bereken eerst b en sla b op met behulp van STO ALPHA A (zie schermafbeelding).



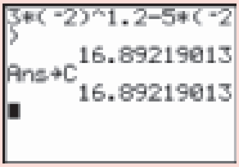
Let op $b = \dfrac{(3c - c^2)}{(5 - c)}$ bij een breuk de teller en noemer altijd tussen haakjes invoeren.

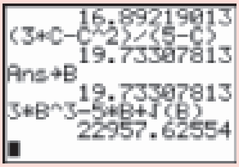
Voer in de formule van a ALPHA A in voor b

Conclusie: $a = –1{,}57$ als $c = 1{,}3$

b Een – getal altijd tussen haakjes invoeren (zie schermafbeelding), – invoeren als (–)

Conclusie: $a = 22957{,}626$ als $d = –2$





8.3 aantal decimalen instellen

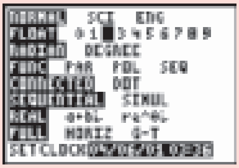
$y = x^{1,3} - 0{,}2x + 5$

a *Bepaal y als x = 0, x = 1 en x = 2 geef de uitkomsten in twee decimalen nauwkeurig.*

b *Bepaal y als x = 4,5 geef de uitkomsten in drie decimalen nauwkeurig.*

a Voer in Y_1=X^1,3–0,2X+5

- MODE
- ga met de cursortoetsen naar FLOAT 0123456789 kies 2
- alle antwoorden worden nu in twee decimalen gegeven



b Conclusie: $y = 11{,}166$ (stel MODE FLOAT 01234.. in op 3) aan het einde van de berekening instelling weer op FLOAT terugzetten

examenstand

- **de grafische rekenmachine is tijdens het examen alleen toegestaan met examenstand**
  - **kijk op** www.examenblad.nl voor de laatste info
  - **inschakelen examenstand** zet de rekenmachine uit [2nd] [off] druk [+], [ENTER] tegelijk in en vervolgens [on]
    - **info over examenstand** kijk op site van Texas Instruments www.education.ti.com

logaritme herschrijven om in te voeren in grafische rekenmachine hoofdstuk 3

- **invoeren logaritmen $^a\log(b)$** voer in als log(b,a) of als $\log_{...}(...) = \log_a(b)$ of

  herschrijf logaritme tot grondtal 10 dus $^a\log(b) = \dfrac{\log(b)}{\log(a)}$

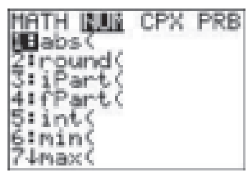
graden of radialen instellen hoofdstuk 4

- **MODE**
- **Radian Degree** met de cursorknoppen ◀ ▶ naar de gewenste plaats
- **ENTER**

breuken hoofdstuk 1

- **intypen van breuken** bijv. $2\frac{3}{5}$ intypen als (2+3:5) ENTER
  - **MATH**
  - **1:** ▶ Frac van decimale breuk naar gewone breuk
  - **2:** ▶ Dec van gewone breuk naar decimale breuk

absolute waarde intypen



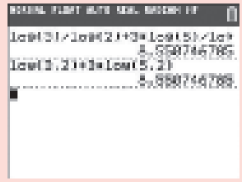
- **MATH**
- **NUM** 1:abs

  bv $3|2x-1|+5$ intypen als 3abs(2x – 1) +5

tabel

- **formule invoeren** enkele belangrijke knoppen
  - **Y=** om de vergelijking van de functie in te voeren of om meerdere functies in te voeren; gebruik X,T,Θ,n om variabele in te voeren
  - **TABLE** (2nd GRAPH) voor het tabel scherm van de ingevoerde functies
  - **TBLSET** (2nd WINDOW) om startwaarde en stapgrootte (ΔTbl) van de tabel in te voeren
  - **gebruik** ▲ ▼ om door tabel te lopen

8.4 logaritmen

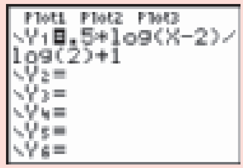


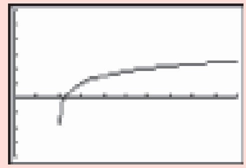
a Bereken de uitkomst van ${}^2\log(3) + 3 \cdot {}^2\log(5)$ *in twee decimalen nauwkeurig.*

b Plot de grafiek van $y = 0{,}5 \cdot {}^2\log(x-2) + 1$

a Type in als log(3)/log(2)+3 · log(5)/log(2)
of log(3,2) + 3 · log(5,2) of $\log_2(3) + 3 \times \log_2(5)$
dus ${}^2\log(3) + 3 \cdot {}^2\log(5) = 8{,}55$

b Type in als *y*=.5 · log(*x*–2)/log(2)+1
of *y* = 0,5 × log(*x*–2,2)+1 of $0{,}5 \times \log_2(x-2{,}2)$





8.5 breuk

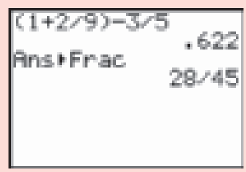
Herschrijf onderstaande opgaven tot één breuk met behulp van de grafische rekenmachine.

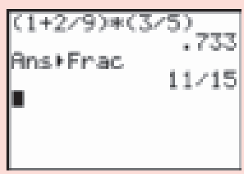
a $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} =$ *c* $1\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{5} =$

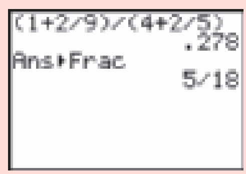
b $1\frac{2}{9} - \frac{3}{5} =$ *d* $\dfrac{1\frac{2}{9}}{4\frac{2}{5}} =$

Zie schermafbeeldingen om te zien hoe de opgave ingetypt wordt.
Om het decimale getal te herschrijven tot breuk kies:

- MATH
- 1:▶Frac;
- ENTER





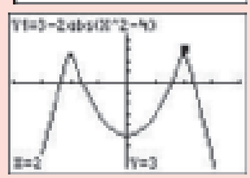


a $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$

b $1\frac{2}{9} - \frac{3}{5} = \frac{28}{45}$

c $1\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{11}{15}$

d $\dfrac{1\frac{2}{9}}{4\frac{2}{5}} = \dfrac{\left(1 + \frac{2}{9}\right)}{\left(4 + \frac{2}{5}\right)} = \dfrac{5}{18}$



8.6 absolute waarde

- *Plot de grafiek van* $y = 3 - 2 \cdot |x^2 - 4|$
Er zijn knikpunten als $x^2 - 4 = 0$, dus als $x = 2$ of als $x = -2$

8.7 tabel

- *Plot een tabel met startwaarde 0,6 en stapgrootte 0,1 voor* $y = x^2 - 2x$ *en onderzoek met behulp van de tabel wat de minimale waarde voor y is.*
zie scherm
het minimum is $y = -1$ voor $x = 1$

FUNCTIES hoofdstukken 2, 3, 4, 5 en 6

grafiek plotten

- **formule invoeren** enkele belangrijke knoppen
  - **Y=** om de vergelijking van de functie in te voeren; gebruik X,T,Θ,n om variabele in te voeren
  - **cursor voor Y=** en op ENTER drukken (zie voorbeeld) geeft steeds een andere mogelijkheid om de grafiek te plotten (kleur, lijndikte, gestippeld, bewegend punt, arcering boven of onder de grafiek)

  - **cursor op de =** bij Y= gaan staan, ENTER, zet de functie op non-actief waardoor functie niet geplot wordt en niet in de tabel komt; handeling herhalen maakt functie weer actief
- **GRAPH** om de grafiek te tekenen
  - **grafiek verschijnt niet** wel ‘dim miss match’ zet dan bij STAT PLOT (2nd Y=) alles op off
  - **WINDOW** om de maten van het scherm in te stellen
  - **TRACE** om over de functie te lopen met de cursorknoppen ◀ ▶ wisselen van functie met de cursorpijl ▲ of ▼
- **verticale lijn plotten**
  - **TRACE** met de cursorknoppen ◀ ▶ naar de gewenste plaats
  - **DRAW** (2nd PRGM)
  - **4:Vertical**
  - **ENTER** de lijn wordt geplot
  - **lijn weer verwijderen** met DRAW (2nd PRGM) 1:ClrDraw
- **ZOOM** om grafiek te vergroten of te verkleinen of
  - **0:ZoomFit** geeft de hele grafiek bij gekozen domein
  - **1:ZBox** maak een rechthoek om het stuk dat op het scherm moet verschijnen. Met de cursor op een hoekpunt gaan staan, ENTER, met de cursor diagonaal naar het volgende hoekpunt, ENTER

grafiek met een parameter plotten zie hoofdstuk 2

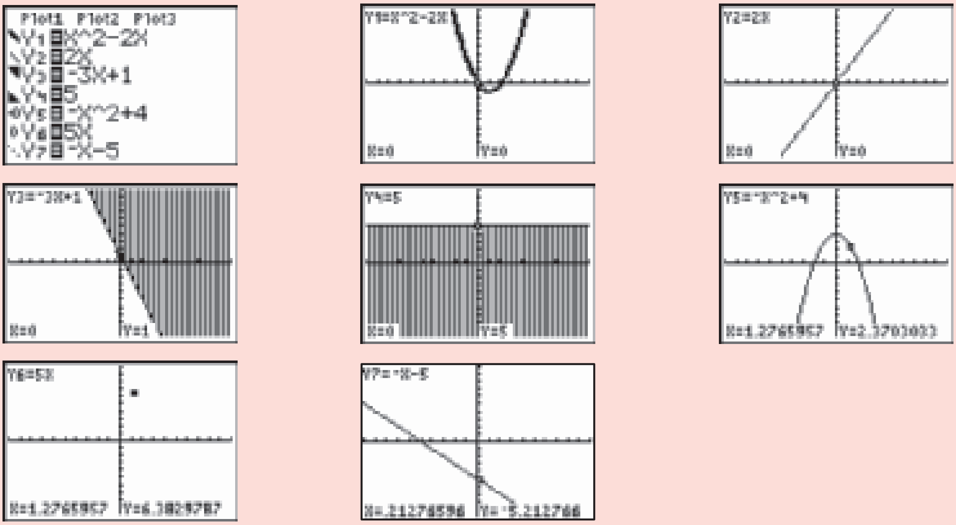
- **formule invoeren** bij Y= met behulp van enkele waarden tussen { }
  - **Y= {1,2,3}*x*** hierdoor worden $y = x$, $y = 2x$ en $y = 3x$ ingevoerd

antwoord van grafiekscherm gebruiken in basisscherm wordt in het geheugen van de grafische rekenmachine opgeslagen

- **QUIT** (2nd MODE) om vanuit grafiekenscherm naar basisscherm terug te keren
- **X** (ALPHA STO) en ENTER geeft de waarde van de *x*-coördinaat
- **Y** (ALPHA 1) en ENTER geeft de waarde van de *y*-coördinaat
- **ANS** (2nd (-)) geeft laatste uitkomst van grafiekscherm

8.8 weergave grafiek in de plot

Hieronder de 7 verschillende mogelijkheden om de grafiek weer te geven.
De weergave gebruikt voor Y_2 is de standaard weergave.
De weergave bij Y_5 en Y_6 wordt puntsgewijs in beeld gebracht (als een film).

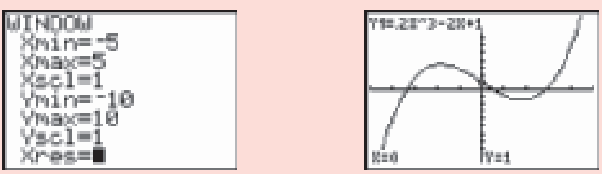


8.9 WINDOW en Zoombox

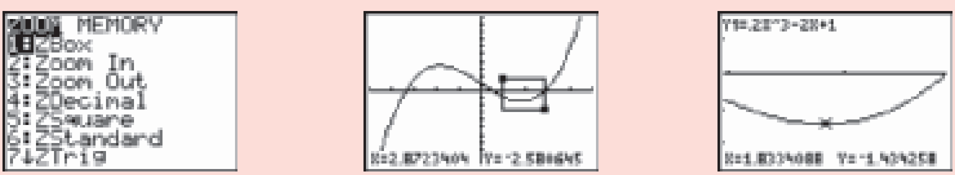
a *Teken de grafiek van* $y = 0{,}2x^3 - 2x + 1$ *in een WINDOW* $[-5,5] \times [-10,10]$

b *Vergroot het stuk grafiek van het rechtermaximum met behulp van een zoombox uit en bepaal het minimum.*

a



b



8.10 grafiek met parameter

$y = ax^2 + 2x + 1$

- *Plot de grafieken voor* $a = -2, -1, 1, 2$ *en* 3

afbeeldingen hoofdstukken 2, 3, 4 en 7

- **voer functie in** bijvoorbeeld bij Y_1
- **met de cursor** naar bijvoorbeeld Y_2
- **kies VARS** en vervolgens
  - **Y-VARS**
  - **1:Function** 1:Y_1 (of ander gewenst nummer)
  - **ENTER** hierdoor wordt Y_1 gekopieerd op de plaats van de cursor
- **afbeeldingen invoeren** in onderstaande voorbeelden is Y_1 ingevoerd met behulp van VARS; Y-VARS; 1:Function zoals boven beschreven
  - **verplaatsing *a* naar rechts** voer in $Y_1(X-a)$
  - **verplaatsing *b* omhoog** voer in Y_1+b
  - **vermenigvuldig met *c* ten opzichte van de *x*-as** voer in cY_1
  - **vermenigvuldig met *d* ten opzichte van de *y*-as** voer in $Y_1\left(\frac{1}{d}x\right)$

somfunctie of verschilfunctie

- **invoeren** in onderstaand voorbeeld zijn Y_1 en Y_2 ingevoerd met behulp van VARS; Y-VARS; 1:Function zoals boven beschreven
  - **voer functies in** bijvoorbeeld bij Y_1 en Y_2
  - **met de cursor** naar bijvoorbeeld Y_3
  - **voer in** $Y_3=Y_1+Y_2$

formules schakelen $f(g(x))$ hoofdstuk 5

- **voer functie *f* in** bijvoorbeeld bij Y_1
- **voer functie *g* in** bijvoorbeeld bij Y_2
- **met de cursor** naar bijvoorbeeld Y_3 voer in Y_1 (Y_2) hierdoor wordt $f(g(x))$ geplot

  met behulp van
  - **Y-VARS**
  - **1:Function** 1:Y_1 (of ander gewenst nummer)
  - **ENTER** hierdoor wordt Y_1 gekopieerd op de plaats van de cursor

8.11 **gebruik van VARS**

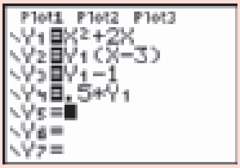
a *Teken de grafiek van $f(x) = x^2 + 2x$*

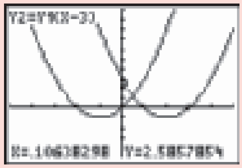
b *De grafiek van f wordt 3 naar rechts verschoven, plot deze grafiek in hetzelfde assenstelsel.*

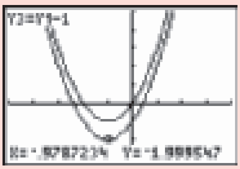
c *De grafiek van f wordt 1 omlaag verschoven, plot deze grafiek in hetzelfde assenstelsel.*

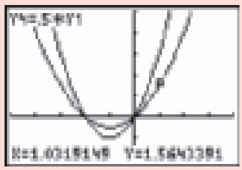
d *De grafiek van f wordt met 0,5 vermenigvuldigd ten opzichte van de x-as, plot deze grafiek in hetzelfde assenstelsel.*

a Zie plot functie Y_1, b zie plot functie Y_2, c zie plot functie Y_3, d zie plot functie Y_4









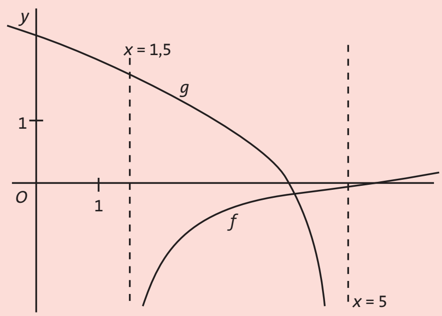
8.12 **verschilfunctie**

$f(x) = -1 + \log(2x - 3)$

$g(x) = {}^2\log(5 - x)$

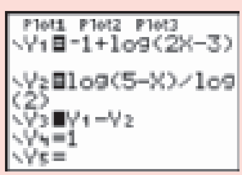
a *Plot de grafiek van $f(x) - g(x)$*

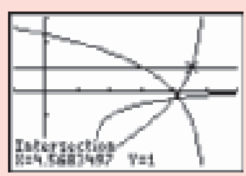
b *Los op $f(x) - g(x) = 1$*



a De grafieken van *f* en *g* zijn in de figuur hiernaast getekend.
Zie plot Y_3 voor de verschilfunctie.

b zie plot van Y_3 en Y_4 voor het snijpunt van de functies
conclusie: $x = 4{,}57$



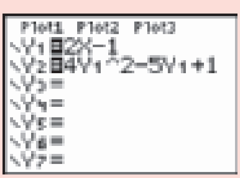


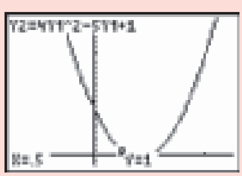
8.13 **functies schakelen**

- *Plot de grafiek van y als functie van x met behulp van VARS Y-VARS*

  $y = 4u^2 - 5u + 1$ *en* $u = 2x - 1$

  Zie schermvoorbeeld voor invoer.





punten, nulpunten, snijpunten en extremen bepalen

- **Y=**
- **WINDOW** verdeling op assen aanpassen
- **CALC** (2nd TRACE) maak een keuze uit
    - **1:value** om coördinaten te bepalen
        - **ENTER**
        - **type gewenste *x*-waarde in**
        - **ENTER** en de y-waarde wordt op scherm zichtbaar
    - **2:zero, 3:minimum of 4:maximum** kies wat berekend moet worden
        - **ENTER**
        - **Left Bound?** kies waarde voor variabele links van vermoedelijk nulpunt of extreem (door getal in te typen of met de cursorknoppen ◀ ▶)
        - **ENTER**
        - **Right Bound?** kies waarde voor variabele rechts van vermoedelijk nulpunt of extreem
        - **ENTER**
        - **Guess?** kies eventueel een startwaarde tussen de left en right bound-grenzen
        - **ENTER**

snijpunten bepalen hiermee los je grafisch de vergelijkingen op

- **Y=** voer de twee formules in waarvan de snijpunten bepaald moeten worden
- **WINDOW** verdeling op assen aanpassen zodat snijpunt zichtbaar is op het scherm
- **GRAPH** snijpunt moet zichtbaar zijn op scherm
- **CALC** (2nd TRACE)
    - 5:intersect
    - **ENTER**
    - **First curve?**
    - **ENTER**
    - **Second curve?**
    - **ENTER**
    - **Guess?** kies waarde in de buurt van snijpunt (door getal in te typen of met de cursorknoppen ◀ ▶)
    - **ENTER**
    - **Intersection** geeft snijpunt

8.14 functiewaarde, nulpunt, extreme waarde, snijpunt

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4x^3 - 2x$ en $g(x) = 5x + 2$

a Plot de grafieken van $y_1 = 4x^3 - 2x$ *en* $y_2 = 5x + 2$

b Bepaal f(1,8) met behulp van VALUE.

c Bepaal het nulpunt van de grafiek van g met behulp van zero.

d Bepaal het maximum van de grafiek van f.

e Bepaal het meest rechter snijpunt van f en g met behulp van de plot en intersect.

a zie plot bij b

b Kies in het grafiekenscherm

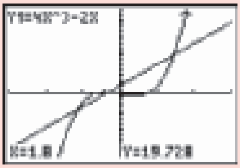
CALC (2nd TRACE)

1:value

ENTER

type 1,8 in

ENTER geeft $f(1,8) = 19{,}728$



c nulpunt $x = -0{,}4$

CALC (2nd TRACE)

2:zero

ENTER

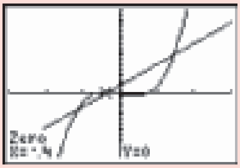
ga met de cursorpijl ▲ of ▼ naar de juiste grafiek

Left Bound? (geef waarde links van nulpunt)

Right Bound? (geef waarde rechts van nulpunt)

Guess

ENTER geeft Zero (–0,4, 0)



d maximum is $y = 0{,}54$ voor $x = -0{,}41$

CALC (2nd TRACE)

4:maximum

ENTER

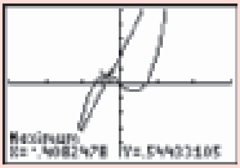
ga met de cursorpijl ▲ of ▼ naar de juiste grafiek

Left Bound? (geef waarde links van max)

Right Bound? (geef waarde rechts van max)

Guess

ENTER geeft maximum (–0,41;0,54))



e snijpunt is (1,44; 9,24)

pas het WINDOW zo aan dat dit snijpunt in de plot te zien is

CALC (2nd TRACE)

5:intersect

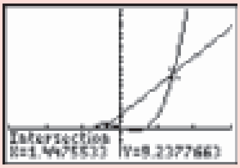
ENTER

First curve? ga met de cursor naar een punt dicht bij dit snijpunt

Second curve? ga met de cursor naar een punt dicht bij dit snijpunt

Guess

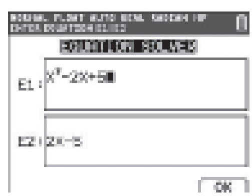
ENTER geeft snijpunt (1,44; 9,24)



vergelijking oplossen

verschillende manieren van vraagstelling

- **bereken het exacte antwoord, los algebraïsch op** de grafische rekenmachine mag alleen ter controle gebruikt worden
    - **geef een exact antwoord** eventueel met een wortel of breuk
      dus bv. $\sqrt{3}$, π of e in het antwoord laten staan, niet benaderen
    - **controleer antwoord**
      door
        - **antwoord in te vullen** in de vergelijking of
        - **grafieken te plotten** of antwoord te controleren met de tabel van de grafische rekenmachine
- **los op, benader het antwoord, bereken, los grafisch op** de grafische rekenmachine mag worden gebruikt om het antwoord te vinden
  verschillende mogelijkheden
- **los grafisch op** gebruik de grafische rekenmachine: voer rechterlid van de vergelijking bijvoorbeeld in als Y_1 en linkerlid als Y_2
        - **plot grafieken**
        - **CALC (2nd TRACE)**
        - **5:intersect etc.** zie snijpunten bepalen
    - **tabel** kijk in de grafiek waar het snijpunt ongeveer ligt,
        - **TBLSET** (2nd WINDOW) kies handige startwaarde en stapgrootte (ΔTbl)
        - **TABLE** (2nd GRAPH) voor het tabel scherm van de ingevoerde functies
        - **gebruik** ▲ ▼ om door tabel te lopen
        - **bepaal tussen welke twee waarden het antwoord ligt**
        - **neem de kleinste waarde als nieuwe startwaarde** en neem ΔTbl kleiner (bv. 0,1), etc.
    - **solver**



        - **MATH**
        - **MATH-menu B:Solver**
        - **ENTER**
        - **vergelijkingen invoeren**
        - **ENTER**
        - **SOLVE** (ALPHA ENTER) kies evt. eerst bij X= een startwaarde in de buurt van oplossing
        - **X=** hier is de oplossing af te lezen die het dichtst bij gegeven startwaarde ligt

8.15 vergelijking oplossen meerdere manieren

a Maak een plot van de grafieken van $f(x) = x^3 - 2x + 5$ en $g(x) = 2x - 5$ kies de assen zo dat het snijpunt en de toppen te zien zijn.

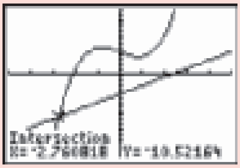
b Bepaal in één decimaal nauwkeurig het snijpunt met behulp van de grafiek.

c Bepaal in één decimaal nauwkeurig het snijpunt met behulp van de tabel.

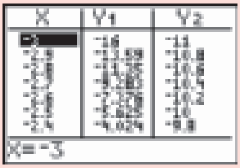
d Bepaal in één decimaal nauwkeurig het snijpunt met behulp van SOLVE.

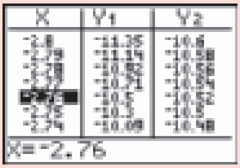
a Voer in Y_1=X^3–2X+5 en Y_2=2X–5
kies WINDOW bijvoorbeeld [–5,5]x[–20,20]

b Snijpunt is (2,8; –10,5)
Kies in grafiekenscherm CALC (2nd TRACE)
2:intersect
ENTER
First curve?
Second curve?
Guess
ENTER geeft snijpunt (–2,8; –10,5)

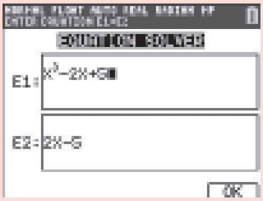


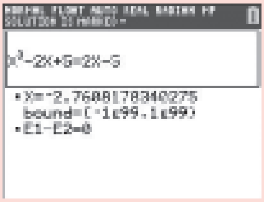
c In de tabel stapgrootte 1 is te zien dat het snijpunt ligt tussen $x = -3$ en $x = -2$
(tot en met –3 ligt de grafiek van Y_1 onder de grafiek van Y_2 en vanaf –2 ligt de grafiek van Y_1 boven de grafiek van Y_2)
Insluiten: maak een nieuwe tabel met startwaarde –3 en stapgrootte 0,1
het snijpunt ligt tussen $x = -2{,}8$ en $x = -2{,}7$
Maak een nieuwe tabel met startwaarde –2,8 en stapgrootte 0,01
Conclusie: snijpunt is afgerond op één decimaal nauwkeurig (–2,8; –10,5)





d Met behulp van SOLVE
$x^3 - 2x + 5 = 2x - 5$
MATH
B:Solver
ENTER (het linkerscherm moet nu verschijnen met als kop EQUATION SOLVER
(is dit niet zo, ga dan met de cursorpijl ▲ naar dit scherm en verwijder de vergelijking die er al staat met CLEAR)
ENTER
SOLVE (ALPHA ENTER) geeft $x = -2{,}8$
Invullen in $y = 2x - 5 = -10{,}5$
Conclusie: snijpunt is (–2,8; –10,5)





asymptoten

- **horizontale asymptoot $y = a$** als de y-waarde naar een vast getal a gaat voor steeds grotere of juist steeds kleinere negatievere x-waarde

  grafiekscherm om asymptoot te vinden

  - **Y=** voer formule in
  - **WINDOW** verdeling op assen aanpassen
  - **GRAPH** om asymptoten na te gaan
  - **TRACE** onderzoek of de grafiek horizontaal gaat lopen aan de rechter- of linkerkant en gebruik TRACE om te kijken naar welke y-waarde a

  tabel om asymptoot te vinden

  - **TBLSET** (2nd WINDOW), tabelgegevens aanpassen (ΔTbl groot nemen, bv. 50)
  - **TABLE** 2nd GRAPH, gebruik ▲ ▼ om door tabel te lopen
  - **onderzoek of de y-waarde naar een vaste waarde gaat** als x heel groot wordt (bv. 1000, 2000) of als x heel klein wordt (bv. – 1000, – 2000)

- **grafieken met een horizontale asymptoot $y = a$**

  bijvoorbeeld

  - **gebroken functies** $y = \dfrac{ax-7}{x+4}$
  - **exponentiële functies** $y = 0{,}5 \cdot e^{2x-1} + a$

- **grafieken met een verticale asymptoot** met vergelijking $x = b$

  bijvoorbeeld

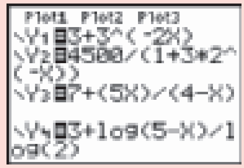
  - **gebroken functies** als de noemer (onderkant breuk) = 0, bv. $y = \dfrac{4x-7}{x-b}$
  - **logaritmische functies** als het argument (deel tussen haakjes achter de log) = 0, bv. $y = 5\ln(x-b) + 4$

  tabel

  - **controleer je vermoeden** bij de asymptoot geeft de tabel ERROR aan bij Y

8.16 asymptoten

Bepaal indien van toepassing de horizontale en verticale asymptoten van de volgende functies.



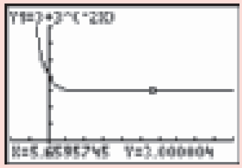
a $h(x) = 3 + 3^{-2x}$

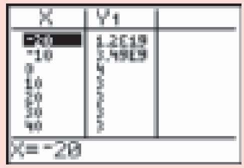
b $k(x) = \dfrac{4500}{1 + 3 \cdot 2^{-x}}$

c $m(x) = 7 + \dfrac{5x}{4 - x}$

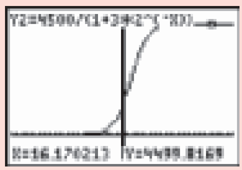
d $n(x) = 3 + {}^{2}\log(5 - x)$

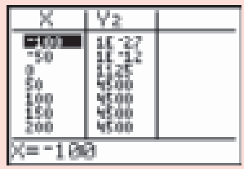
a Zie voor invoer van de formules de plot.
Het domein van h is $\mathbb{R}$, dus er is geen verticale asymptoot;
zie plot en tabel van Y_1
De horizontale asymptoot is $y = 3$



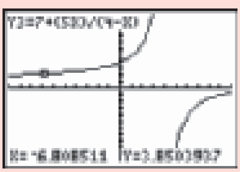


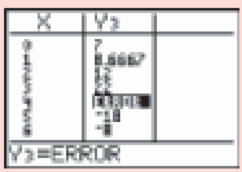
b Het domein van k is $\mathbb{R}$, dus er is geen verticale asymptoot.
Kies WINDOW groot genoeg bijvoorbeeld [–20,20]x[–1000,5000]
zie plot en tabel van Y_2: er zijn twee horizontale asymptoten namelijk $y = 4500$ en $y = 0$ (de y-waarde wordt 1E-27 = 0,00000...)

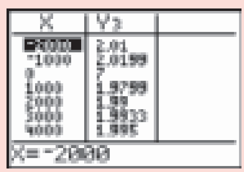




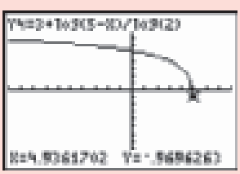
c Het domein van m is $x \neq 4$ (tabel geeft hier ERROR), de verticale asymptoot is $x = 4$
zie plot en tabel van Y_3. In de tabel is te zien dat voor hele grote x de y-waarde naar 2 gaat: de horizontale asymptoot is $y = 2$.

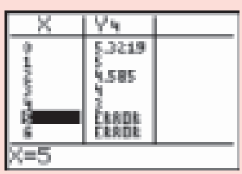


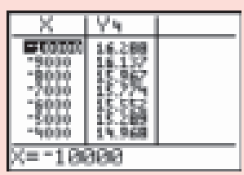




d Het domein van m is $x < 5$ (tabel geeft bij $x = 5$ ERROR), de verticale asymptoot is $x = 5$
zie plot en tabel van Y_4: er is geen horizontale asymptoot







afgeleide functie plotten hoofdstuk 5

- **Y=** voer de formule van de functie in bv. bij Y_1
- **ga met cursor naar bv. Y_2** en voer hier de afgeleide functie in of kies
  - **MATH**
  - **8:nDeriv(** vervolgens ENTER $\frac{d}{d...}[(...)]_{...=...}$ verschijnt
  - **kies VARS** en vervolgens Y-VARS, 1:Function 1:Y_1 (of ander gewenst nummer)

    en op de ontbrekende plaatsen x zodat er $Y_2 = \frac{d}{dx}(Y_1)|_{x=x}$ $(= f'(x))$ ontstaat
  - **GRAPH** de grafiek en de grafiek van de afgeleide functie worden geplot

raaklijn tekenen en de vergelijking bepalen

- **Y=** voer de formule van de functie in bv. bij Y_1
- **GRAPH**
  - **DRAW** (2nd PRGM)
  - **5:Tangent(** en vervolgens ENTER
  - **X= ...** tik in grafiekscherm getal in van de x-coördinaat en vervolgens ENTER
  - **raaklijn** wordt getekend en vergelijking is op scherm zichtbaar

richtingscoëfficiënt van de raaklijn bepalen

- **Y=** voer de formule van de functie in bij bijv Y_1

eerste manier

- **GRAPH**
  - **CALC** (2nd TRACE)
  - **6:dy/dx** en vervolgens ENTER
  - **X= ...** tik in grafiekscherm getal in van de x-coördinaat en ENTER
  - **richtingscoëfficiënt** wordt gegeven als dy/dx =

tweede manier: zie ook raaklijn tekenen en de vergelijking bepalen

- **GRAPH** zie ook raaklijn tekenen en de vergelijking bepalen
  - **DRAW** (2nd PRGM) vervolgens 5:Tangent(
  - **X= ...** tik in grafiekscherm getal in van de x-coördinaat en vervolgens ENTER
  - **raaklijn** wordt getekend en vergelijking is op scherm zichtbaar

derde manier: zie ook afgeleide plotten

- **ga met cursor naar bijv. Y_2** kies
  - **MATH** kies 8:nDeriv(vervolgens ENTER, VARS, Y-VARS
  - $\mathbf{Y_2} = \frac{d}{dx}(Y_1)|_{x=x} = f'(x)$
  - **TABLE** in de tabel zijn nu de richtingscoëfficiënten bij Y_2 af te lezen
- **groeisnelheid** voor $t = a$
  - **richtingscoëfficiënt** = afgeleide waarde $f'(a)$ van de raaklijn in punt met $t = a$

toenamediagram

- **Y=** voer de formule van de functie in bij bv. Y_1
- $\mathbf{Y=Y_1-Y_1(X-}a\mathbf{)}$ bepaalt de tabel voor het toenamediagram met stapgrootte a

  (Y_1 invoeren met behulp van VARS; Y-VARS; 1:Function)

8.17 afgeleide functie

Gegeven is de grafiek van $g(x) = 3x^2 + 5x - \frac{3}{x}$

a *Plot de grafiek van de afgeleide functie.*

b *Benader met behulp van de grafische rekenmachine de helling in x = –2.*

c *Benader met behulp van de grafische rekenmachine de raaklijn aan de grafiek van g in x = –2*

a functie invoeren y_1=3*x*^2+5*x* –3/*x*

afgeleide functie invoeren $y_2 = \frac{d}{dx}(Y_1)|_{x=x}$ kies

MATH

8:nDeriv

ENTER

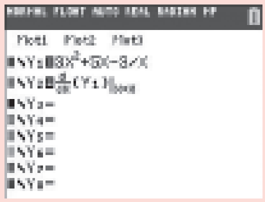
VARS Y-VARS

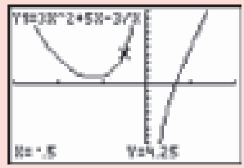
1:Function

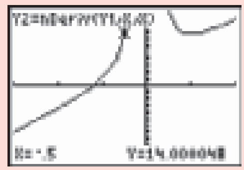
ENTER

1:Y_1

ENTER







b helling is –6,25

in grafiekenscherm van *g*

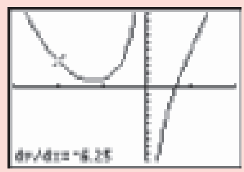
CALC (2nd TRACE)

6:dy/dx

ENTER

type in –2 ENTER

de helling: *dy*/*dx* = –6,25



c raaklijn *y* = –6,25*x* – 9

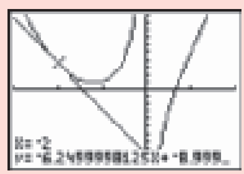
in grafiekenscherm van *g*

DRAW (2nd PRGM)

5:TANGENT gevolgd door ENTER

type in –2 ENTER

de raaklijn en de vergelijking van de raaklijn verschijnen nu in het venster, afgerond: *y* = –6,25*x* – 9



8.18 toenamediagram

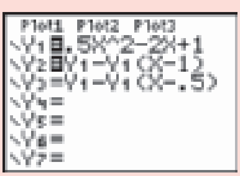
Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 1$ op het interval [0,8]

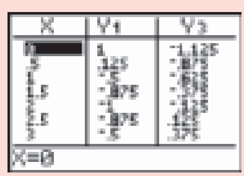
a *Bepaal met de grafische rekenmachine de tabel voor het toenamediagram met stapgrootte* Δx =1

b *Bepaal met de grafische rekenmachine de tabel voor het toenamediagram met stapgrootte* Δx = 0,5

a Voer in Y_1=0,5*x*^2–2*x* +1 en $Y_2=Y_1–Y_1$(*x*–1) met behulp van VARS; Y-VARS

b Voer in $Y_3=Y_1–Y_1$(*x* –.5)





sommatie

- **berekenen van een sommatie** met behulp van

  sum(seq(formule,*x*,eerste waarde van *x*, laatse waarde van *x*, stapgrootte))

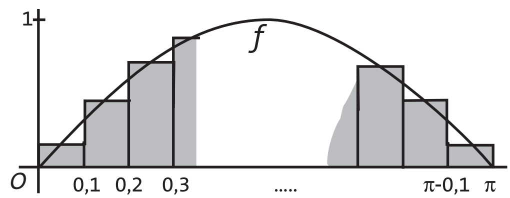
  kies

  - **LIST** 2nd STAT, MATH, nr 5: sum(
  - **kies MATH**
  - **LIST** 2nd STAT
  - **kies OPS** (bij LIST)
  - **kies seq(** OPS, nr 5: seq(en dan ENTER
  - **dan achtereenvolgens:** formule, *x*, eerste waarde van *x*, laatse waarde van *x*, stapgrootte))
    - **variabele** met knop X,T,Θ,*n*

Riemannsom is een toepassing van een sommatie zie H6

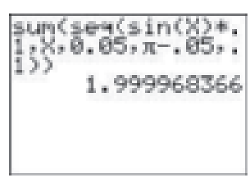
voorbeeld

benader oppervlakte onder grafiek van de functie f(x) = sin(*x*) *op interval [0, π] neem 0,1 als breedte van de deelintervallen*



- **LIST** 2nd STAT;
- **ga naar rechts en kies MATH**
- **LIST** 2nd STAT;
- **kies OPS**
- **ga naar rechts en kies seq(** OPS, nr 5: seq(en dan ENTER
- **dan achtereenvolgens:** functie · deelinterval-breedte, variabele, linkergrens (start), rechtergrens (end), deelinterval-breedte (step)
  - **variabele** met knop X,T,Θ,*n*

    dus sum(seq(sin(*x*) · 0,1, *x*, 0.05, π – 0.05, 0.1) levert ongeveer 2,0



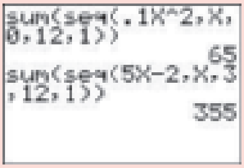
8.19 sommatie

a *Bereken* $\sum\limits_{k=0}^{12} 0{,}1x^2$

b *Bereken* $\sum\limits_{k=3}^{12} (5x-2)$

a $\sum\limits_{k=0}^{12} 0{,}1x^2 = 0{,}1 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot 1^2 + 0{,}1 \cdot 2^2 + \ldots + 0{,}1 \cdot 12^2 =$

sum(seq(0,1x^2,x0,12,1)) = 65



b $\sum\limits_{k=3}^{12} (5x-2) = (5 \cdot 3 - 2) + (5 \cdot 4 - 2) + \ldots + (5 \cdot 3 - 12) =$

sum(seq(5x – 2,x,3,12,1)) = 355

8.20 oppervlakte benaderen met Riemannsom

Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 2x$

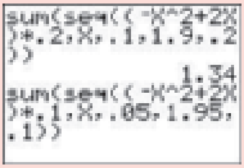
a *Benader de oppervlakte van het gebied onder de grafiek op het interval [0, 2] met behulp van een Riemannsom, gebruik 0,2 als breedte van de deelintervallen.*

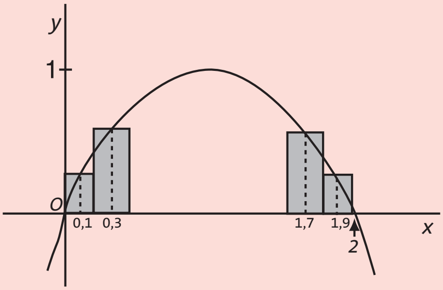
b *Benader de oppervlakte van het gebied onder de grafiek op het interval [0, 2] met behulp van een Riemannsom, gebruik 0 , 1 als breedte van de deelintervallen.*

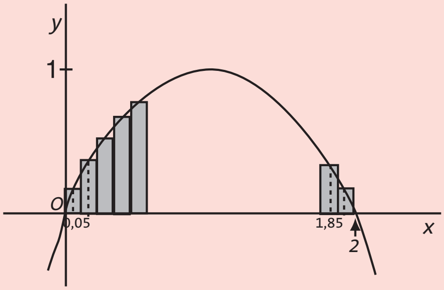
c *Schrijf de oppervlakte als integraal*

a Stapgrootte is 0,2. Dus de rechthoekjes hebben een breedte van 0,2 (zie linker figuur). Als bij het midden van elk rechthoekje de functiewaarde bepaald wordt dan wordt er gevraagd naar de som van $f(0{,}1) \cdot 0{,}2 + f(0{,}3) \cdot 0{,}2 + f(0{,}5) \cdot 0{,}2 + \ldots + f(1{,}9) \times 0{,}2$ = sum(seq($(-x^2 + 2x) \cdot$ 0.2,x,0.1,1.9,0.2)) = 1,34

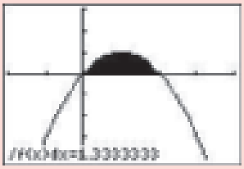
b Stapgrootte is 0,1. Dus de rechthoekjes hebben een breedte van 0,1 (zie rechter figuur). Als bij het midden van elk rechthoekje de functiewaarde bepaald wordt dan wordt er gevraagd naar de som van $f(0{,}05) \cdot 0{,}1 + f(0{,}15) \cdot 0{,}1 + f(0{,}25) \cdot 0{,}1 + \ldots + f(1{,}95) \cdot 0{,}1 =$ sum(seq($(-x^2 + 2x) \cdot$ 0.1,x,0.05,1.95,0.1)) = 1,335







c oppervlakte = $\int_0^2 (-x^2 + 2x)dx = 1{,}3333$

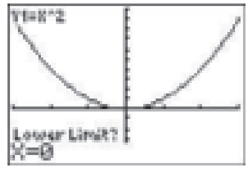


hoe kleiner de stapgrootte hoe beter de benadering van de echte oppervlakte (de integraal)

integreren $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

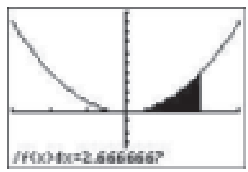
eerste manier via het grafiekenscherm

- **met behulp van CALC**
  - **Y =** voer de functie in bij Y =
  - **GRAPH** plot de grafiek met de juiste vensterinstellingen (WINDOW)
  - **CALC-menu 7:** $\int f(x)\mathrm{d}x$
  - ***x*-waarden** van linkergrens $x = a$ en rechtergrens $x = b$ intikken
  - **betreffende oppervlakte** wordt gearceerd en berekend
    opmerking: oppervlakte onder *x*-as wordt negatief gerekend
  - **oppervlakte verwijderen** met DRAW- menu 1: ClrDraw



tweede manier

- **met behulp van MATH**
  - **MATH** menu 9: fnInt(
  - $\int_{\dots}^{\dots}(\dots)\mathrm{d}\dots$ verschijnt op het scherm
  - $\int_a^b (f(x))\mathrm{d}x$ betekent de integraal van *f(x)* met variabele *x* en grenzen *a* en *b*

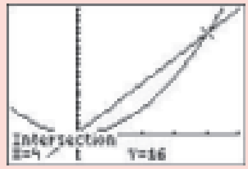


8.21 oppervlakte en inhoud benaderen

$f(x) = x^2$ *en V* is het gebied ingesloten door de grafiek van f en de lijn $y = 4x$

a Bepaal de oppervlakte van gebied V

b V wordt gewenteld om de x-as. Bepaal de inhoud.

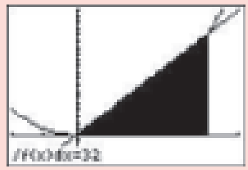


a Bepaal de snijpunten (0,0) en (4, 16)

oppervlakte = $\int_0^4 4x\,dx - \int_0^4 x^2\,dx =$

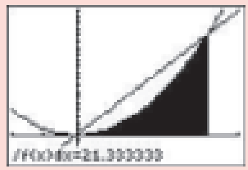
eerste manier

grafiekenscherm met behulp van 2ND CALC 5:$\int f(x)dx$



$\int_0^4 4x\,dx = 32$ (let op dat je op de juiste grafiek staat)

$\int_0^4 x^2\,dx \approx 21{,}333$



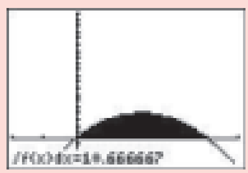
conclusie: gevraagde oppervlakte is $32 - 21{,}3333 \approx 10{,}67$

tweede manier

$\int_0^4 (4x - x^2)\,dx \approx 10{,}67.$

Maak een nieuwe functie $y = 4x - x^2$ (zie plots)

grafiekenscherm met behulp van 2ND CALC 5:$\int f(x)dx$



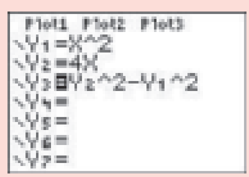
$\int_0^4 (4x - x^2)\,dx \approx 10{,}67$

conclusie: gevraagde oppervlakte is 10,67

derde manier

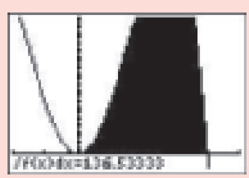
$\int_0^4 (4x - x^2)\,dx \approx 10{,}67$

b inhoud = $\pi\int_0^4 (4x)^2\,dx - \pi\int_0^4 (x^2)^2\,dx =$



bijv. plot $y = (4x)^2 - (x^2)^2$ (zie schermafbeeldingen)

$\pi\int_0^4 (4x)^2\,dx - \pi\int_0^4 (x^2)^2\,dx = \pi\int_0^4 \left((4x)^2 - (x^2)^2\right)dx =$

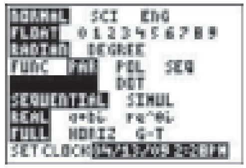


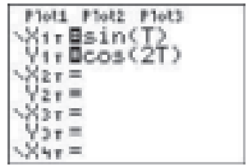
$136{,}5333 \cdot \pi$ (zie plots)

conclusie: gevraagde inhoud is $136{,}5333 \cdot \pi \approx 428{,}93$

parametervoorstelling invoeren zie ook H4 bewegingsformule, Lissajous, cirkelbeweging

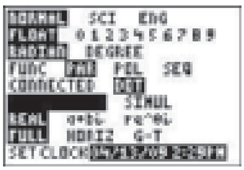
- **MODE**
- **Par**
- **Y =** en $\begin{cases} X_{1T} = \\ Y_{1T} = \end{cases}$





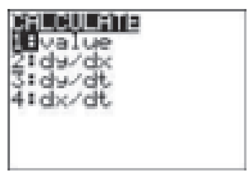
snelheid zie H4

- **snelheid** van $P((x(t), y(t))$ op tijdstip t
  - **berekenen** met $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ en t invullen
- **zichtbaar maken** op grafische rekenmachine
  - **MODE en Dot** levert een stippellijn waarbij een grotere afstand tussen de stippen naar een grotere snelheid verwijst, met Tstep (WINDOW) stapafstand instellen

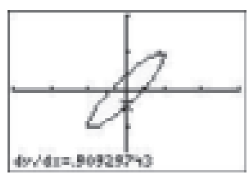


helling of richting van de raaklijn

- **helling berekenen** met $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'}{x'}$
  - **2nd CALC** in grafiekenscherm (zie scherm) t = ... invoeren geeft gevraagde waarde van de helling

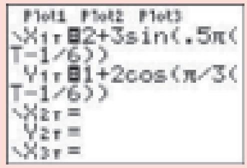


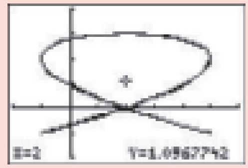
- **verticale raaklijn** als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$ zie bv. 8.22d
  - **MODE** Func
  - **Y_1** voer de functie $x(t)$ in bij Y_1
  - **MATH** kies 8:nDeriv(vervolgens ENTER, VARS, Y-VARS
  - $\mathbf{Y_2} =$ $\dfrac{d}{dx}(Y_1)|_{x=x} = x'(t)$
  - $\mathbf{Y_2 = 0}$ oplossen met bv. ZERO of Solver geeft gevraagde t-waarde
  - ***t*- waarde** invullen in $x(t)$



- **horizontale raaklijn** als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$
  - **voer de functie *y*(*t*) in bij Y_1** verder hetzelfde als verticale raaklijn,

8.22 parametervoorstelling





Gegeven is de kromme $K \begin{cases} x(t) = 2 + 3\sin\left(\frac{1}{2}\pi\left(t - \frac{1}{6}\right)\right) \\ y(t) = 1 + 2\cos\left(\frac{1}{3}\pi\left(t - \frac{1}{6}\right)\right) \end{cases}$ $t \in [-3, 3]$

a *Benader het snijpunt met de x-as in één decimaal nauwkeurig.*

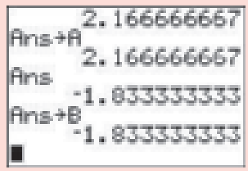
b *Bepaal de hellingen in het snijpunt met de x-as.*

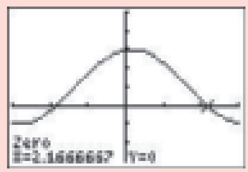
c *Bepaal de vergelijkingen van één van de raaklijnen in het snijpunt met de x-as.*

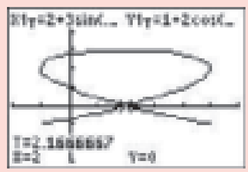
d *Bepaal de punten met een verticale raaklijn.*

e *Bepaal het punt met een horizontale raaklijn.*

f *Maak de snelheid zichtbaar in de plot.*

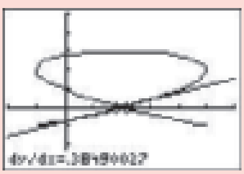


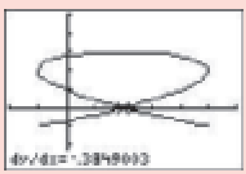




a $y = 0$ dus benader eerst $y(t) = 1 + 2\cos\left(\frac{1}{3}\pi\left(t - \frac{1}{6}\right)\right) = 0$ dus $t = -1{,}833333$ of $t = 2{,}166667$
(Om deze waarden zonder afronding in de berekeningen te kunnen gebruiken, ga na bijv. $t = 2{,}166...$ gevonden te hebben naar basisscherm, kies 2nd ANS en STO ALPHA A (zie ook opg 8.2) om getal op te slaan onder A).
t-waarde invullen met behulp van CALC value ALPHA A geeft (2,0)

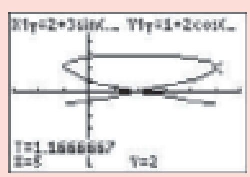
b Kies in grafiekenscherm met de kromme CALC en $\frac{dy}{dx}$. Voor t bv. ALHPA A en ALPHA B intypen.
$t \approx 2{,}17$ geeft helling 0,38 en $t \approx -1{,}83$ geeft helling is $-0{,}38$





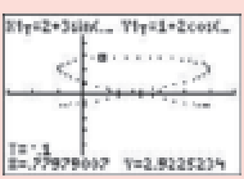
c Vergelijking van de raaklijn door (2,0) met rc is 0,385 is $y = 0{,}385x - 0{,}77$
Kies om de raaklijn te tekenen in de plot 2nd DRAW en vervolgens 5: Tangent(

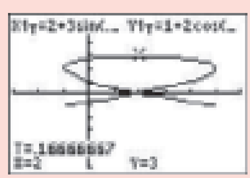
d Verticale raaklijn als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$. $t = -0{,}83333....$of $t = 1{,}166..$
verticale raaklijn in $(-1{,}2)$ en $(5{,}2)$ dus $x = -1$ en $x = 5$



e Horizontale raaklijn als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$. dus
$t = 0{,}166666...$ in punt (2,3) dus $y = 3$. (keerpunt als $t = -2{,}83333..$)

f In onderstaande plot is gekozen voor stapgrootte 0,1.





9 Grafische rekenmachine CASIO

VAARDIGHEDEN in dit hoofdstuk worden de vaardigheden met de grafische rekenmachine fx-9860G behandeld waarnaar verwezen wordt in de hoofdstukken 1 t/m 7. Voor de Casio fx-CG20 en de Casio-CG50 kun je in de meeste gevallen dezelfde stappenplannen volgen.

examenstand

- **dde grafische rekenmachine is tijdens het examen alleen toegestaan met examenstand**
  - **kijk op** www.examenblad.nl voor de laatste info
  - **inschakelen examenstand** de rekenmachine staat uit, druk [cos], [7] en [AC/ON] tegelijk in en houd even vast (de examenstand stopt automatisch na 12 uur)
    - **info over examenstand** kijk op site van CASIO http://www.casio-educatie.nl/examenstand/

schoonmaken scherm

- **MENU RUN**
- **AC/^{on}**

schoonmaken geheugen

CASIO fx-9860

- **MENU MEMORY**
  - **EXE** via scherm is alle informatie over het geheugen te zien

schermcontrast herstellen

CASIO fx-9860

- **MENU SYSTEM**
  - **F1: Contrast** contrast met de cursorknoppen ◀ ▶ instellen

getallen opslaan in het lettergeheugen

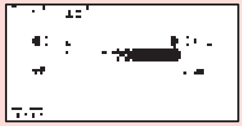
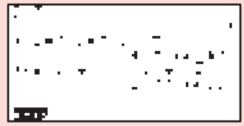
- → om het laatst berekende getal op te slaan
  - **ALPHA A** of ALPHA B t/m Z kunnen gebruikt worden als geheugen
  - **EXE**
  - **oproepen van het opgeslagen getal** door ALPHA A (of B t/m Z)

aantal decimalen instellen

- **SET UP** (SHIFT MENU)
  - **Display** selecteren gebruik ▲ ▼
    - **FIX (F1)** om aantal decimalen in te stellen vanaf 0 tot en met 9
  - **Norm** standaard staat de instelling op Norm

9.1 schermcontrast

contrast instellen (zie scherm)

9.2 uitkomsten opslaan

Gegeven is $a = 3b^3 - 5b + \sqrt{b}$ en $b = \dfrac{3c - c^2}{5 - c}$ en $c = 3d^{1,2} - 5d$

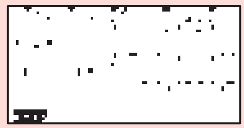
Gebruik voor onderstaande berekeningen het lettergeheugen van de rekenmachine.

a Bereken a in twee decimalen nauwkeurig als c = 1,3.

b Bepaal a in drie decimalen nauwkeurig als d = –2.

a Bereken eerst b en sla b op met behulp van → ALPHA B (zie schermafbeelding).

Let op $b = \dfrac{(3c - c^2)}{(5 - c)}$ bij een breuk de teller en noemer altijd tussen haakjes invoeren.

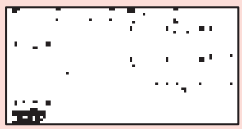


Voer in de formule van a ALPHA B in voor b

Conclusie: $a = -1{,}57$ als $c = 1{,}3$

b Een – getal tussen haakjes invoeren (zie schermafbeelding), de – voor een getal invoeren met de toets (–).

Conclusie: $a = 22957{,}626$ als $d = -2$




9.3 aantal decimalen instellen

$y = x^{1,3} - 0{,}2x + 5$

a Bepaal y als x = 1 en x = 2 geef de uitkomsten in twee decimalen nauwkeurig.

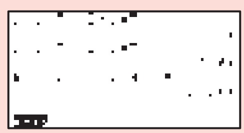
b Bepaal y als x = 4,5 geef de uitkomsten in drie decimalen nauwkeurig.

a SET UP (SHIFT MENU)

- Display selecteren gebruik ▲ ▼
- FIX (F1) neem nu 2
- alle antwoorden worden nu in twee decimalen gegeven
- zie scherm $x = 1$ geeft $y = 5{,}80$ en $x = 2$ geeft $y = 7{,}06$


b Conclusie: $y = 11{,}166$ (SET UP DISPLAY FIX (F1) neem nu 3)

Aan het einde van de berekening instelling van de DISPLAY weer op Norm (F3) terugzetten.



verbeteren van gemaakte fouten

- **DEL** ga met de pijltjes naar teken dat verwijderd moet worden, DEL verwijdert teken
- **INS** (SHIFT DEL) ga met de pijltjes naar de plaats waar teken ingevoegd moet worden en vervolgens INS
- **fout herstellen** ◀ ▶ gebruiken

logaritme herschrijven om in te voeren in grafische rekenmachine hoofdstuk 3

- **invoeren logaritmen** herschrijf logaritme tot grondtal 10 dus ${}^{a}\log(b) = \dfrac{\log(b)}{\log(a)}$

CASIO fx-9860

- **MENU RUN**
  - **OPTN**
  - **CALC** (F4)
  - **logab** (F6 vervolgens F4)
  - **${}^{a}\log(b)$** bv. ${}^{3}\log(6)$ intypen als $\log_3(6)$

graden of radialen instellen hoofdstuk 4

- **SET UP** (SHIFT MENU)
  - **ANGLE** kies uit RAD (radialen) of Deg (graden)

absolute waarde intypen

- **Via SHIFT CATALOG of via OPTN NUMERIC**
- **Abs** bv $3|2x - 1| + 5$ intypen als 3Abs(2x – 1) +5

breuken hoofdstuk 1

- **intypen van breuken**
  - **Ab/c** bv. $2\frac{3}{5}$ intypen als 2 Ab/c 3 Ab/c 5 EXE
  - **F↔D** van gewone breuk naar decimale breuk en omgekeerd

tabel

- **MENU TABLE**
  - **Y =** om de vergelijking van de functie in te voeren of om meerdere functies in te voeren; gebruik X, θ, T om variabele in te voeren
  - **SET of RANG** (F5) om startwaarde en stapgrootte (Step of Pitch) van de tabel in te stellen
  - **TABL** (F6)
  - **gebruik** ▲ ▼ om door tabel te lopen

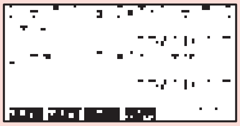
9.4 logaritmen

a *Bereken de uitkomst van* $^{2}\log(3) + 3 \cdot {}^{2}\log(5)$ *in twee decimalen nauwkeurig.*

b *Plot de grafiek van* $y = 0{,}5 \cdot {}^{2}\log(x - 2) + 1$

a Type in als log(3):log(2)+3×log(5):log(2)

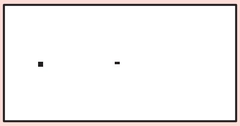
dus $\dfrac{\log(3)}{\log(2)} + 3 \cdot \dfrac{\log(5)}{\log(2)} = 8{,}55$



of bij casio 9860

- OPTN
- CALC (F4)
- logab (F6 vervolgens F4)
- opg intypen als:
  logab(2,3)+3×logab(2,5) EXE

b Type in als Y=.5×log(X–2):log2+1



9.5 breuk

Herschrijf onderstaande opgaven tot één breuk met behulp van de grafische rekenmachine.

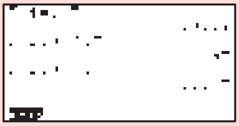
a $\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{5} =$

b $1\dfrac{2}{9} - \dfrac{3}{5} =$

c $1\dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{3}{5} =$

d $\dfrac{1\frac{2}{9}}{4\frac{2}{5}} =$

Zie schermafbeeldingen om te zien hoe de opgave ingetypt wordt.
Om de breuk tot decimaal getal te herschrijven kies F↔D knop
(zie ook schermafbeelding bij opgave d).

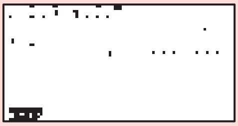


a $\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{19}{20}$

b $1\dfrac{2}{9} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{28}{45}$

c $1\dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{11}{15}$

d $\dfrac{1\frac{2}{9}}{4\frac{2}{5}} = \dfrac{\left(1 + \frac{2}{9}\right)}{\left(4 + \frac{2}{5}\right)} = \dfrac{5}{18}$



9.6 absolute waarde

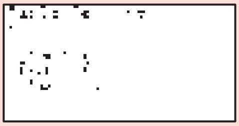
- *Plot de grafiek van* $y = 3 - 2 \cdot |x^2 - 4|$

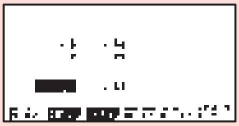
  Er zijn knikpunten als $x^2 - 4 = 0$, dus als $x = 2$ of als $x = -2$

9.7 tabel

- *Plot een tabel met startwaarde 0,6 en stapgrootte 0,1 voor* $y = x^2 - 2x$ *en onderzoek met behulp van de tabel wat de minimale waarde voor* y *is.*

  Zie scherm.
  MENU TABLE voer de formule in
  SET of RANG (F5) om startwaarde en stapgrootte (Step of Pitch) van de tabel in te stellen
  gebruik ▲ ▼ om door tabel te lopen
  het minimum is $y = -1$ voor $x = 1$





FUNCTIES hoofdstukken 2, 3, 4 en 5

grafiek plotten

- **MENU GRAPH**
  - **Y =** om de vergelijking van de functie in te voeren; gebruik X, θ, T om variabele in te voeren
  - **STYLE** (F4) geeft vier verschillende mogelijkheden om de grafiek te plotten; lijndikte, gestippeld (alleen voor casio 9860)
  - **TYPE** (F3) vervolgens F6 geeft mogelijkheid om halfvlak te arceren mogelijkheid Y<,Y>,Y≥,Y≤; EXE; daarna formule invoeren
  - **SEL** (F1) met de cursorpijl ▲ of ▼ naar Y = ; SEL zet de functie op non-actief waardoor functie niet geplot wordt en niet in de tabel komt; handeling herhalen maakt functie weer actief
- **DRAW** (F6) om de grafiek te tekenen;
  - **V-WINDOW** (SHIFT F3) om de maten van het scherm in te stellen; getal invoeren en daarna EXE
  - **twee schermen naast elkaar** SET UP (SHIFT MENU) Dual Screen: maak keuze uit Off (F3), 2 grafieken (F1: G+G of GRPh) of grafiek en tabel naast elkaar (F2: GtoT)
    - **V-Window** (SHIFT F4) hier de twee Windows instellen
  - **TRACE** (SHIFT F1) om over de functie te lopen met de cursorknoppen ◀ ▶ wisselen van functie met de cursorpijl ▲ of ▼
- **verticale lijn plotten**
  - **TYPE** (F3)
  - **X=C** (F4) type gewenste getal in EXE en vervolgens DRAW (F6)
- **ZOOM** (SHIFT F2) om grafiek te vergroten (F2) of te verkleinen (F3) of
  - **BOX** maak een rechthoek om het stuk dat op het scherm moet verschijnen. Met de cursor op een hoekpunt gaan staan, EXE, met de cursor diagonaal naar het volgende hoekpunt, EXE

antwoord van grafiekscherm gebruiken in RUNscherm

- **X** (ALPHA +) en EXE geeft de waarde van de *x*-coördinaat
- **Y** (ALPHA –) en EXE geeft de waarde van de *y*-coördinaat

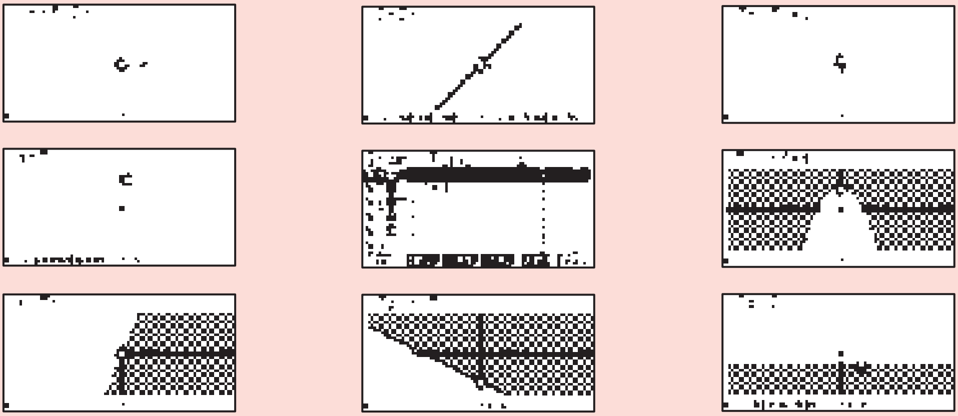
grafiek met parameter, dynamische functie

- **MENU DYNA**
  - **formule invoeren** voer zelf een formule in en gebruik voor de paramater een letter met ALPHA ..., met B-In (F5) kies je een opgeslagen formule, zie scherm

  - **VAR** (F4)
  - **SEL** selecteer de coëfficiënt die variabel is (alleen nodig bij meerdere variabelen)
  - **SET of RANG** geef aan tussen welke waarden de coëfficiënt loopt
  - **SET UP (SHIFT MENU); Locus:On** EXE zorgt er voor dat alle grafieken in één plot worden weergegeven
  - **DYNA** (F6) de grafiek of de grafieken worden geplot

9.8 weergave grafiek in plot

Hieronder de 8 verschillende mogelijkheden om de grafiek weer te geven
de weergave gebruikt voor Y1 is de standaard weergave.
Maak een keuze voor de weergave en type daarna de formule in.
De weergave bij Y1 t/m Y4 wordt een lijn getekend (STYL (F4)).
De weergave bij Y5 t/m Y8 wordt een halfvlak getekend (TYPE (F6))

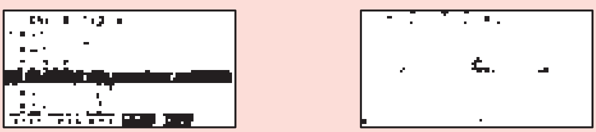


9.9 WINDOW en Zoombox

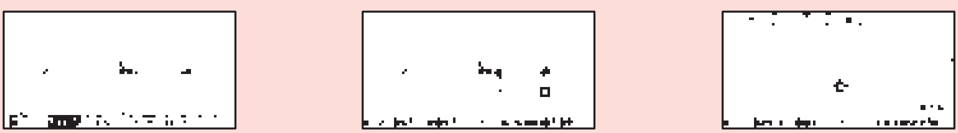
a *Teken de grafiek van* $y = 0{,}2x^3 - 2x + 1$ *in een WINDOW* $[-5,5] \times [-10,10]$

b *Vergroot het stuk grafiek van het rechtermaximum met behulp van een zoombox uit en bepaal het minimum.*

a



b



9.10 grafiek met parameter, dynamische functie

$y = ax^2 + 2x + 1$

- *Plot de grafieken voor* $a = -2, -1, 0, 1, 2$ *en* 3

afbeeldingen hoofdstukken 2, 3 en 4

- **voer functie in** bijvoorbeeld bij Y1 gevolgd door EXE
- **met de cursor** naar bijvoorbeeld Y2

  om Y1 op de plaats van de variabele in te voeren

  - **kies VARS** en vervolgens
  - **GRPH** (F4)
  - **Y** (F1)
  - **type gewenste nummer** bijvoorbeeld 1 voor Y1
- **afbeeldingen invoeren** in onderstaande voorbeelden is Y1 ingevoerd met behulp van VARS GRAPH Y zoals boven beschreven
  - **verplaatsing *a* naar rechts** voer in Y1 ($x - a$)
  - **verplaatsing *b* omhoog** voer in Y1 + b
  - **vermenigvuldig met *c* ten opzichte van de *x*-as** voer in cY1
  - **vermenigvuldig met *d* ten opzichte van de *y*-as** voer in Y1 = $\frac{1}{d}$X

somfunctie of verschilfunctie

- **invoeren** in onderstaand voorbeeld zijn Y1 en Y2 ingevoerd met behulp van VARS GRAPH Y zoals boven beschreven
  - **voer functies in** bijvoorbeeld bij Y1 en Y2
  - **met de cursor** naar bijvoorbeeld Y3
  - **voer in** Y3=Y1+Y2

formules schakelen $f(g(x))$

- **voer functie in** bijvoorbeeld bij Y1
- **met de cursor** naar bijvoorbeeld Y2
- **voer de formule van Y2 in door in plaats van de variabele *x* steeds Y1 te kiezen**

  met behulp van

  - **VARS**
  - **GRPH** (F4)
  - **Y** (F1)
  - **type gewenste nummer** bijvoorbeeld 1 voor Y1 (herhaal dit voor elke x-waarde)

9.11 gebruik van VARS

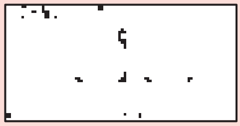
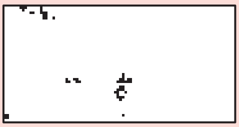
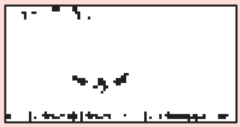
a *Teken de grafiek van* $f(x) = x^2 + 2x$

b *De grafiek van f wordt 3 naar rechts verschoven, plot deze grafiek in hetzelfde assenstelsel.*

c *De grafiek van f wordt 1 omlaag verschoven, plot deze grafiek in hetzelfde assenstelsel.*

d *De grafiek van f wordt met 0,5 vermenigvuldigd ten opzichte van de x-as, plot deze grafiek in hetzelfde assenstelsel.*

a zie plot functie Y1 b zie plot functie Y2 c zie plot functie Y3 d zie plot functie Y4

9.12 verschilfunctie

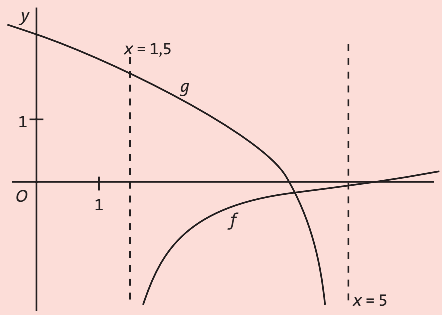
$f(x) = -1 + \log(2x - 3)$

$g(x) = {}^2\log(5 - x)$

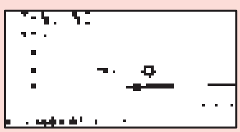
a *Plot de grafiek van* $f(x) - g(x)$.

b *Los op* $f(x) - g(x) = 1$.

c De grafieken van f en g zijn in de figuur hiernaast getekend.
Zie plot Y3 voor de verschilfunctie.



d Zie plot voor het snijpunt van de functies Y3 en Y4
conclusie: $x = 4{,}57$

9.13 functies schakelen

- *Plot de grafiek van y als functie van x met behulp van VARS Y-VARS*
  $y = 4u^2 - 5u + 1$ en $u = 2x - 1$
  zie schermvoorbeeld voor invoer


punten, nulpunten, snijpunten en extremen bepalen

- **MENU GRAPH Y =**
- **WINDOW** verdeling op assen aanpassen zodat de punten in de grafiek te zien zijn
- **G-Solv** (SHIFT F5) maak een keuze uit
  - **Y-CAL** (F6 en daarna F1) om coördinaten te bepalen
    - **naar goede grafiek** met cursorpijl ▲ of ▼
    - **EXE**
    - **type gewenste x-waarde in**
    - **EXE** en de *y*-waarde wordt op scherm zichtbaar
  - **X-CAL** (F6 en daarna F2) om *x*-coördinaat bij een gegeven *y*-waarde te vinden
  - **ROOT** (F1) om nulpunten te berekenen
    - **naar goede grafiek** met cursorpijl ▲ of ▼
    - **EXE** geeft gevraagde nulpunt
    - **meerdere nulpunten** met cursorknoppen ◀ ▶ worden ook de andere maxima of minima in het scherm zichtbaar
  - **MIN (F3), MAX (F2)** kies wat berekend moet worden
    - **naar goede grafiek** met cursorpijl ▲ of ▼
    - **EXE** geeft gevraagde minimum of maximum
    - **meerdere maxima of minima** met de cursorknoppen ◀ ▶ worden ook de andere maxima of minima in het scherm zichtbaar

snijpunten bepalen hiermee los je grafisch vergelijkingen op

- **MENU GRAPH Y =**
- **WINDOW** verdeling op assen aanpassen zodat de punten in de grafiek te zien zijn
- **G-Solv** (SHIFT F5)
  - **ISCT** (F5) om coördinaten te bepalen
  - **meerdere snijpunten bepalen** gebruik de cursorknoppen ◀ ▶

9.14 functiewaarde, nulpunt, extreme waarde, snijpunt

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4x^3 - 2x$ en $g(x) = 5x + 2$.

a Plot de grafieken van $y_1 = 4x^3 - 2x$ en $y_2 = 5x + 2$.

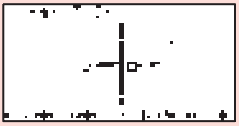
b Bepaal f(1,8) met behulp van VALUE.

c Bepaal het nulpunt van de grafiek van g met behulp van zero.

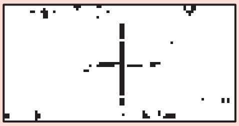
d Bepaal het maximum van de grafiek van f.

e Bepaal het meest rechter snijpunt van f en g met behulp van de plot en intersect.

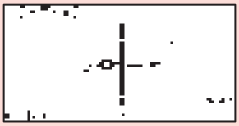
a zie plot



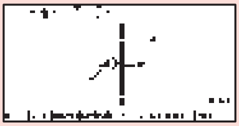
b MENU GRAPH
G-SOLV (SHIFT F5)
F6 gevolgd door Y-CAL (F1)
EXE
type 1,8 in
EXE geeft $f(1,8) = 19{,}728$



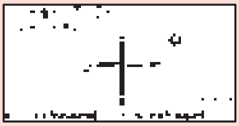
c nulpunt $x = -0{,}4$
G-SOLV (SHIFT F5)
ROOT (F1)
ga met cursorpijl ▲ of ▼ naar de juiste grafiek
EXE geeft (–0,4, 0)



d maximum is $y = 0{,}54$ voor $x = -0{,}41$
G-SOLV (SHIFT F5)
MAX (F2)
ga met cursorpijl ▲ of ▼ naar de juiste grafiek
EXE geeft maximum (–0,41;0,54))



e snijpunt is (1,44; 9,24)
pas het WINDOW zo aan dat dit snijpunt in de plot te zien is
G-SOLV (SHIFT F5)
ISCT (F5)
geeft snijpunt (–1,15; –3,73)
cursorknop ▶ geeft snijpunt (–0,30; 0,49)
cursorknop ▶ geeft gevraagde snijpunt (1,44; 9,24)



vergelijking oplossen

verschillende manieren van vraagstelling

- **bereken exacte antwoord, los algebraïsch op** de grafische rekenmachine mag alleen ter controle gebruikt worden
  - **geef exact antwoord** eventueel met een wortel of breuk
    $\sqrt{3}$ in het antwoord laten staan, dus niet benaderen
  - **controleer antwoord**
    door
    - **antwoord in te vullen** in de vergelijking of
    - **grafieken te plotten** of antwoord te controleren met de tabel van de grafische rekenmachine
- **los op; benader antwoord; bereken; los grafisch op** de grafische rekenmachine mag worden gebruikt om het antwoord te vinden
  verschillende mogelijkheden
  - **los grafisch op** gebruik de grafische rekenmachine: voer rechterlid van de vergelijking bijvoorbeeld in als Y1 en linkerlid als Y2
    - **MENU GRAPH Y =**
    - **WINDOW** verdeling op assen aanpassen zodat de snijpunten in het scherm te zien zijn
    - **G-Solv** (SHIFT F5)
      - **ISCT** (F5) om coördinaten te bepalen
      - **meerdere snijpunten bepalen** gebruik de cursorknoppen ◀ ▶
  - **tabel** kijk in de grafiek waar het snijpunt ongeveer ligt,
    - **MENU TABL**
    - **SET of RANG** (F5) om startwaarde en stapgrootte (Step of Pitch) van de tabel in te stellen
    - **TABLE** (F6)) voor het tabel scherm van de ingevoerde functies
    - **gebruik** ▲ ▼ om door tabel te lopen
    - **bepaal tussen welke twee waarden antwoord ligt**
    - **neem kleinste waarde als nieuwe startwaarde** en neem stapgrootte (Pitch of Step) kleiner (bv. 0,1), etc.
  - **solver**
    - **MENU EQUATION EXE** (of via menu RUN OPTN CALC [F4] SolvN [F5] de vergelijking invoeren)
    - **Select type F3:Solver...**
    - **EXE en vergelijking invoeren**
      - **EXE RCL** hiermee kun je functie uit Graph MENU SELECTEREN
      - **=** (shift ·) en de rest van de vergelijking invoeren (als er geen = wordt ingevoerd dan gaat de rekenmachine ervan uit dat er = 0 staat)
    - **EXE** voer evt. bij Lft een waarde links van oplossing in en bij Rst een oplossing rechts van de oplossing
    - **SOLVE** (F6)
    - **REPT** (F1) gebruiken voor de volgende oplossing, herhaal bovenstaande stappen

9.15 vergelijking oplossen meerdere manieren

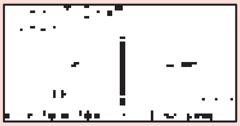
a *Maak een plot van de grafieken van* $f(x) = x^3 - 2x + 5$ *en* $g(x) = 2x - 5$
Kies de assen zo dat het snijpunt en de toppen te zien zijn.

b *Bepaal in één decimaal nauwkeurig het snijpunt met behulp van de grafiek.*

c *Bepaal in één decimaal nauwkeurig het snijpunt met behulp van de tabel.*

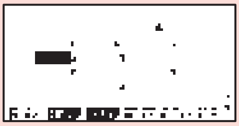
d *Bepaal in één decimaal nauwkeurig het snijpunt met behulp van SOLVE.*

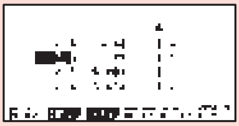
a Voer in Y1= x ^3–2x +5 en Y2=2x–5
Pas het WINDOW zo aan dat dit snijpunt in de plot te zien is.
Kies WINDOW bijvoorbeeld [–5,5]x[–20,20]

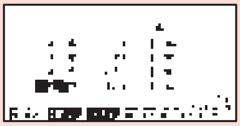


b G-SOLV (SHIFT F5)
ISCT (F5)
snijpunt is (–2,8; –10,5)

c In de tabel stapgrootte 1 is te zien dat het snijpunt ligt tussen $x = -3$ en $x = -2$
(tot en met –3 ligt de grafiek van Y1 onder de grafiek van Y2 en vanaf –2 ligt de grafiek van Y1 boven de grafiek van Y2)
Insluiten: maak een nieuwe tabel met startwaarde –3 en stapgrootte 0,1.
Het snijpunt ligt tussen $x = -2{,}8$ en $x = -2{,}7$.
Maak een nieuwe tabel met startwaarde –2,8 en stapgrootte 0,01.
Conclusie: snijpunt is afgerond op één decimaal nauwkeurig (–2,8; –10,5).







d Met behulp van SOLVE
$x^3 - 2x + 5 = 2x - 5$

- MENU EQUAT EXE
- Select type F3:Solv...
- EXE
- vergelijking invoeren
- EXE RCL hiermee kun je functie uit Graph MENU SELECTEREN
  = (shift ×) en de rest van de vergelijking invoeren (als er geen = wordt ingevoerd dan gaat de rekenmachine ervan uit dat er = 0 staat)
- EXE voer evt. bij Lft een waarde links van oplossing in en bij Rst een oplossing rechts van de oplossing
- SOLVE (F6) geeft $x = -2{,}8$
  invullen in $y = 2x - 5 = -10{,}5$
  conclusie: snijpunt is (–2,8; –10,5)

d Met behulp van SolvN
$x^3 - 3x + 5 = 2x - 5$
MENU RUN, OPTN, CALC [F4] SolvN [F5] vergelijking invoeren geeft:
SolvN($x^3 - 3x + 5 = 2x - 5$) geeft $x = -2{,}8$
conclusie snijpunt is (–2, 8; –10,5)

asymptoten

- **horizontale asymptoot $y = a$** als de y-waarde naar een vast getal a gaat voor steeds grotere of juist steeds kleinere negatievere x-waarde

  grafiekscherm om asymptoot te vinden
  - **Y=** voer formule in
  - **V-WINDOW** verdeling op assen aanpassen
  - **MENU GRAPH** om asymptoten na te gaan
  - **TRACE** (SHIFT F1) onderzoek of de grafiek horizontaal gaat lopen aan de rechter- of linkerkant en gebruik TRACE om te kijken bij welke y-waarde (a) dit gebeurt

  tabel om asymptoot te vinden
  - **MENU TABLE** tabelgegevens aanpassen (stapgrootte groot nemen, bv. 50)
  - **TABLE** gebruik ▲ ▼ om door tabel te lopen
  - **onderzoek of y-waarde naar een vaste waarde gaat** als x heel groot wordt (bv. 1000, 2000) of als x heel klein wordt (bv. – 1000, – 2000)
- **grafieken met een horizontale asymptoot $y = a$**

  voorbeelden
  - **gebroken functies** $y = \dfrac{ax-7}{x+4}$
  - **exponentiële functies** $y = 0{,}5 \cdot e^{2x-1} + a$
- **grafieken met een verticale asymptoot met vergelijking $x = b$**

  voorbeelden
  - **gebroken functies** als de noemer (onderkant breuk) = 0 bv. $y = \dfrac{4x-7}{x-b}$
  - **logaritmische functies** als het argument (deel tussen haakjes achter de log) = 0 bv. $y = 5\ \ln(x-b) + 4$

  tabel
  - **controleer je vermoeden** bij de asymptoot geeft de tabel ERROR aan bij Y

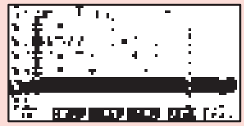
9.16 asymptoten

Bepaal indien van toepassing de horizontale en verticale asymptoten van de volgende functies.

a $h(x) = 3 + 3^{-2x}$

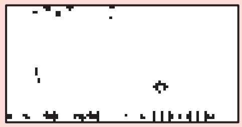
b $k(x) = \dfrac{4500}{1 + 3 \cdot 2^{-x}}$

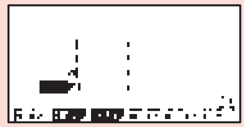
c $m(x) = 7 + \dfrac{5x}{4 - x}$



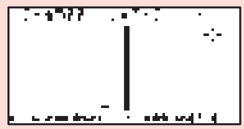
d $n(x) = 3 + {}^{2}\log(5 - x)$

a Zie voor invoer van de formules de plot.
Het domein van h is $\mathbb{R}$, dus er is geen verticale asymptoot.
Zie plot en tabel van Y1
de horizontale asymptoot is $y = 3$

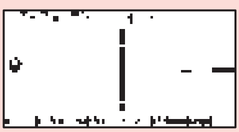




b Het domein van k is $\mathbb{R}$, dus er is geen verticale asymptoot.
Kies WINDOW groot genoeg bijvoorbeeld
[–20,20]x[–1000,5000]
zie plot en tabel van Y2: er zijn twee horizontale asymptoten namelijk $y = 4500$ en $y = 0$
(de y-waarde wordt 1E-27 = 0,00000...)



c Het domein van m is $x \neq 4$ (tabel geeft hier ERROR), de verticale asymptoot is $x = 4$
Zie plot en tabel van Y3, in de tabel is te zien dat voor hele grote x de y-waarde naar 2 gaat:
de horizontale asymptoot is $y = 2$



d Het domein van m is $x < 5$ (tabel geeft bij $x = 5$ ERROR), de verticale asymptoot is $x = 5$
zie plot en tabel van Y4: er is geen horizontale asymptoot.

afgeleide functie plotten hoofdstuk 5

- **SET UP Derivative** op On zetten
  - **uitkomst van dy/dx** wordt nu altijd weergegeven in de tabel en in het grafiekenscherm
- **MENU GRAPH** Y= voer de formule van de functie in bv. bij Y1
- **ga met cursor naar bv. Y2** en voer hier de afgeleide functie in of kies
  - **OPTN**
  - **CALC**
  - **d/dx** (F1)
  - **Y** (F1) kies dan 1 of ander gewenste nummer van de functie
  - **,X)** er staat nu Y2=d/dx(Y1,X)
  - **EXE**
  - **DRAW** (F6) en de grafiek van de afgeleide functie worden geplot

raaklijn tekenen

- **MENU GRAPH** Y= voer de formule van de functie in bv. bij Y1
- **GRAPH**
  - **DRAW** (F6)
  - **Sketch** (SHIFT F4)
  - **Tang** (F2)
  - **X= ...** tik in grafiekscherm getal in van de *x*-coördinaat (ga bij de CASIO 9850 met de cursor naar het gewenste punt en vervolgens EXE)
  - **EXE**
  - **raaklijn** wordt getekend en uitkomst van d*y*/d*x* is zichtbaar op het scherm (mits bij SET UP Derivative op On gezet is)

richtingscoëfficiënt van de raaklijn bepalen

- **SET UP Derivative** op On zetten
  - **uitkomst van d*y*/d*x*** wordt nu altijd weergegeven in de tabel en in het grafiekenscherm

toenamediagram

- **Y=** voer de formule van de functie in bv. bij Y1
- **Y=Y1–Y1(X–a)** bepaalt de tabel voor het toenamediagram met stapgrootte *a* (Y1 invoeren met behulp van VARS; GRAPH (F4); Y (F1); 1)

9.17 afgeleide functie

Gegeven is de grafiek van $g(x) = 3x^2 + 5x - \frac{3}{x}$

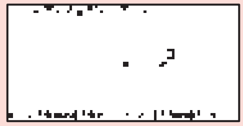
a *Plot de grafiek van de afgeleide functie.*

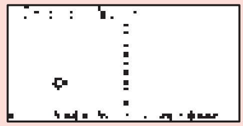
b *Benader met behulp van de grafische rekenmachine de raaklijn aan de grafiek van g in $x = -2$.*

a In MENU GRAPH functie invoeren Y1=3X^2+5X–3:X

afgeleide functie invoeren Y2 = d/dx(Y1,X) kies

- OPTN
- CALC
- d/dx (F1)
- Y (F1) kies dan nummer van de functie
- ,X) er staat nu Y2=d/dx(Y1,X)
- EXE



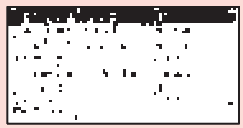


DRAW (F6) en de grafiek van de afgeleide functie worden geplot

b raaklijn $y = -6{,}25x - 9$

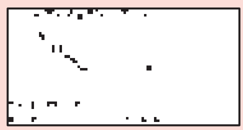
MENU GRAPH

- DRAW (F6)
- Sketch (SHIFT F4)
- Tang (F2)
- X= ... tik in grafiekscherm getal in van de x-coördinaat (ga bij de CASIO 9850 met cursor naar gewenste punt en vervolgens EXE)
- EXE



Raaklijn wordt getekend en de vergelijking van de raaklijn is zichtbaar op het scherm (mits bij SET UP Derivative op On gezet is).

afgerond: $y = -6{,}25x - 9$



9.18 toenamediagram

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 1$ op het interval [0,8]

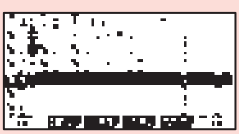
a *Bepaal met de grafische rekenmachine de tabel voor het toenamediagram met stapgrootte $\Delta x = 1$*

b *Bepaal met de grafische rekenmachine de tabel voor het toenamediagram met stapgrootte $\Delta x = 0{,}5$*

a MENU TABLE voer in Y1=.5X^2–2X+1 en

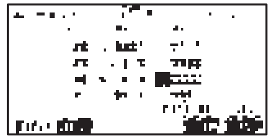
Y2=Y1–Y1(X–1) met behulp van VARS; GRAPH (F4); Y

b Voer in Y3=Y1–Y1(X–5) (stel tabel in op stapgrootte 0,5)



sommatie

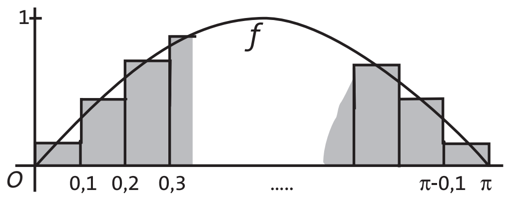
- **berekenen van een sommatie**
  - **kies menu RECUR**
  - **voer bij a_n = de rij in** bedenk dat n altijd hele waarden zijn
  - **TABLE (F6) hier komt somrij** ook op scherm als bij SET UP (boven knop MENU) Σ Display op On is ingesteld.



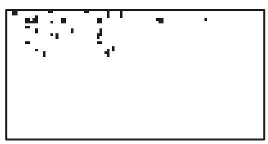
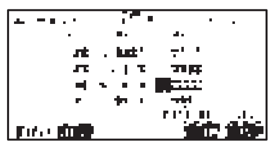
Riemannsom is een toepassing van een sommatie zie H6

voorbeeld

benader oppervlakte onder grafiek van de functie $f(x) = \sin x$ op interval $[0, \pi]$ neem 0,1 als breedte van de deelintervallen

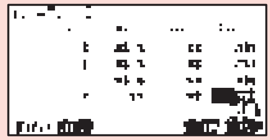


- **kies menu RECUR**
- **voer bij a_n = de rij in** dus $\sin(0{,}05+0{,}1n)\cdot 0{,}1$ of $0{,}1\cdot\sin(0{,}05+0{,}1n)$ bedenk dat n altijd hele waarden zijn
- **SET (F5)** bedenk dat n altijd hele waarden zijn en x-waarde loopt van 0 tot π met $x = 0{,}05+0{,}1n$ dus n = 0 tot en met 30 (n = 30 geeft $x = 0{,}05 + 0{,}1\cdot 30 = 3{,}05$)
- **TABLE (F6) hier komt somrij** ook op scherm als bij SET UP (boven knop MENU) Σ Display op On is ingesteld. De oppervlakte wordt ongeveer 2.

exacte oppervlakte is $\int_0^{\pi} \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = 2$

9.19 sommatie



a *Bereken* $\sum_{k=0}^{12} 0{,}1x^2$

b *Bereken* $\sum_{k=3}^{12} (5x-2)$

a $\sum_{k=0}^{12} 0{,}1x^2 = 0{,}1 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot 1^2 + 0{,}1 \cdot 2^2 + \dots + 0{,}1 \cdot 12^2 = 65$

(zie schermvoorbeelden)

b $\sum_{k=3}^{12} (5x-2) = (5 \cdot 3 - 2) + (5 \cdot 4 - 2) + \dots + (5 \cdot 3 - 12) = \sum_{k=0}^{12} (5x-2) - \sum_{k=0}^{2} (5x-2) = 364 - 9 = 355$

9.20 oppervlakte benaderen met Riemannsom

Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 2x$

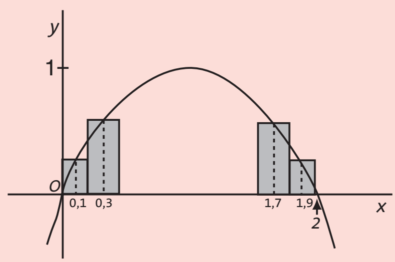
a *Benader de oppervlakte van het gebied onder de grafiek op het interval [0, 2] met behulp van een Riemannsom, gebruik 0,2 als breedte van de deelintervallen.*

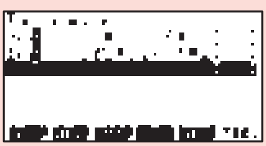
b *Benader de oppervlakte van het gebied onder de grafiek op het interval [0, 2] met behulp van een Riemannsom, gebruik 0 , 1 als breedte van de deelintervallen.*

c *Schrijf de oppervlakte als integraal*

a Stapgrootte is 0,2. Dus de rechthoekjes hebben een breedte van 0,2 (zie figuur). Als bij het midden van elk rechthoekje de functiewaarde bepaald wordt dan wordt er gevraagd naar de som van $f(0{,}1) \times 0{,}2 + f(0{,}3) \cdot 0{,}2 + f(0{,}5) \times 0{,}2 + \dots + f(1{,}9) \cdot 0{,}2$ (ga na dat $x = 0{,}1 + 0{,}2n$ dus) som =

$$\sum_{n=0}^{9} (-(0{,}1 + 0{,}2n)^2 + 2(0{,}1 + 0{,}2n)).0{,}2 = 1{,}34$$

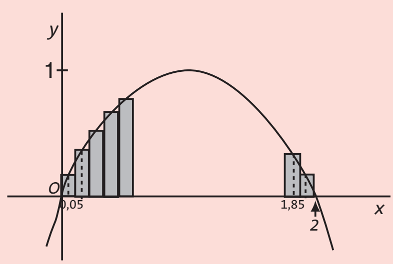




b Stapgrootte is 0,1. Dus de rechthoekjes hebben een breedte van 0,1 (zie rechter figuur). Als bij het midden van elk rechthoekje de functiewaarde bepaald wordt dan wordt er gevraagd naar de som van

$f(0{,}05) \cdot 0{,}1 + f(0{,}15) \cdot 0{,}1 + f(0{,}25) \cdot 0{,}1 + \dots +$
$f(1{,}95) \cdot 0{,}1$ (ga na dat $x = 0{,}05 + 0{,}1n$ dus) som =

$$\sum_{n=0}^{19} (-(0{,}05 + 0{,}1n)^2 + 2(0{,}05 + 0{,}1n)).0{,}1 = 1{,}335$$



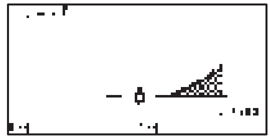
c oppervlakte = $\int_0^2 (-x^2 + 2x)dx = 1{,}3333$

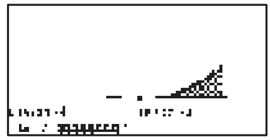
hoe kleiner de stapgrootte hoe beter de benadering van de echte oppervlakte (de integraal)

integreren $\int_a^b f(x)dx$

eerste manier

- **GRAPH menu**
  - **Y =** ga naar hoofdmenu GRAPH en voer de functie in Y =
  - **DRAW** plot de grafiek met de juiste vensterinstellingen (V-Window)
  - **G-Solv menu** F5 (Graphic Solve-menu) kies $\int dx$
  - ***x*-waarden** met Trace naar linkergrens $x = a$ EXE en daarna rechtergrens $x = b$ EXE
  - **betreffende oppervlakte** wordt gearceerd en berekend

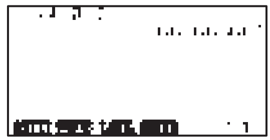




tweede manier

- **RUN menu** basisscherm
  - **OPTN:** kies CALC en daarna de optie $\int dx$
  - $\int$ (verschijnt op het scherm
  - $\int$ $(f(x), a, b)$ betekent de integraal van $f(x)$ met grenzen a en b
  - **EXE** de uitkomst komt op het scherm
  - $\int (f(x), a, b)$ betekent de integraal van $f(x)$ met variabele x en grenzen a en b dus

$$\int_a^b f(x)dx = \int (f(x), a, b)$$



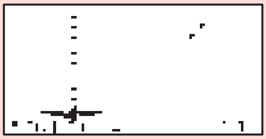
9.21 oppervlakte en inhoud benaderen

$f(x) = x^2$ en V is het gebied ingesloten door de grafiek van f en de lijn $y = 4x$

a *Bepaal de oppervlakte van gebied V*

b *V wordt gewenteld om de x-as. Bepaal de inhoud.*

a Bepaal de snijpunten (0,0) en (4, 16)



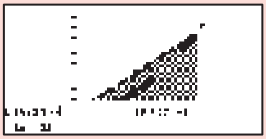
oppervlakte = $\int_0^4 4x\,dx - \int_0^4 x^2\,dx =$

eerste manier

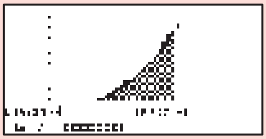
grafiekenscherm met behulp van G-Solv: $\int dx$

$\int_0^4 4x\,dx = 32$ (let op dat je op de juiste grafiek staat)

$\int_0^4 x^2\,dx \approx 21{,}333$



conclusie: gevraagde oppervlakte is $32 - 21{,}3333 \approx 10{,}67$



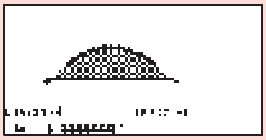
tweede manier

$\int_0^4 (4x - x^2)\,dx \approx 10{,}67$.

Maak een nieuwe functie $y = 4x - x^2$ (zie plots bv. met behulp van VARS)

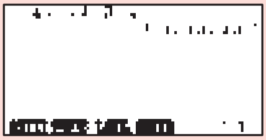
grafiekenscherm met behulp van G-Solv: $\int dx$

$\int_0^4 (4x - x^2)\,dx \approx 10{,}67$



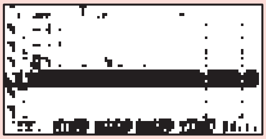
conclusie: gevraagde oppervlakte is 10,67

derde manier



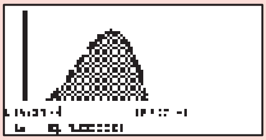
$\int_0^4 (4x - x^2)\,dx = \int (4x - x^2, 0, 4) \approx 10{,}67$ (zie plot)

b inhoud = $\pi\int_0^4 (4x)^2\,dx - \pi\int_0^4 (x^2)^2\,dx =$



bijv. plot $y = (4x)^2 - (x^2)^2$ (zie schermafbeeldingen)

$\pi\int_0^4 (4x)^2\,dx - \pi\int_0^4 (x^2)^2\,dx = \pi\int_0^4 \left((4x)^2 - (x^2)^2\right)dx =$

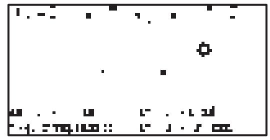


$136{,}5333 \cdot \pi$ (zie plots)

conclusie: gevraagde inhoud is $136{,}5333 \cdot \pi \approx 428{,}93$

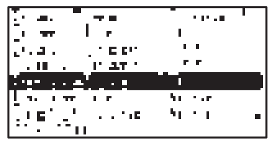
parametervoorstelling invoeren zie ook H4 bewegingsformule, Lissajous, cirkelbeweging

- **MENU GRAPH**
- **TYPE Parm**
  - $\begin{cases} Xt1 = \\ Yt1 = \end{cases}$ verschijnt



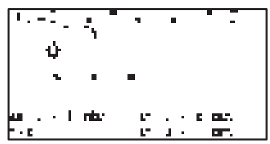
snelheid zie H4

- **snelheid** van $P((x(t), y(t))$ op tijdstip t
  - **berekenen** met $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ en t invullen
- **zichtbaar maken** op grafische rekenmachine
  - **SHIFT SET UP** kies Draw Type : Plot, dit levert een stippellijn waarbij een grotere afstand tussen de stippen naar een grotere snelheid verwijst
  - **met ptch (SHIFT** V-Window) stapafstand instellen

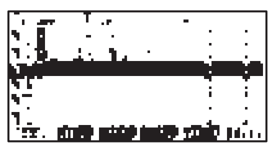


helling of richting van de raaklijn

- **helling berekenen** met $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'}{x'}$
  - **SHIFT SET UP kies Derivative : On** als met SHIFT Trace over de kromme wordt gelopen komt automatisch ook de richtingscoëfficiënt op het scherm
  - ***t*-waarde invoeren** in scherm met Trace (zie schermafbeelding) geeft gevraagde helling



- **verticale raaklijn** als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$ zie bv. 9.22d
  - **MENU GRAPH**
  - **TYPE Y=**
  - **Y1 =** ***x*** **(*t*) hier invoeren**
  - **Y2 = kies OPTN vervolgens CALC en d/dx** Y2 = d/dx(Y1,x) intypen geeft nu de afgeleide functie van x (t)
    - **SEL** intypen als je op Y1 staat maakt Y1 niet actief in grafiekenscherm
  - **Y2 = 0** oplossen met bv. G-Solv, Root of Solver geeft gevraagde t-waarde
  - ***t*- waarde** invullen in $x(t)$



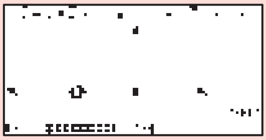
- **horizontale raaklijn** als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$
  - **voer de functie *y*(*t*) in bij Y1** verder hetzelfde als verticale raaklijn

9.22 parametervoorstelling

Gegeven is de kromme $K \begin{cases} x(t) = 2 + 3\sin\left(\frac{1}{2}\pi\left(t - \frac{1}{6}\right)\right) \\ y(t) = 1 + 2\cos\left(\frac{1}{3}\pi\left(t - \frac{1}{6}\right)\right) \end{cases}$ $t \in [-3, 3]$

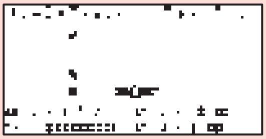
a *Benader het snijpunt met de x-as in één decimaal nauwkeurig.*
b *Bepaal de hellingen in het snijpunt met de x-as.*
c *Bepaal de vergelijkingen van één van de raaklijnen in het snijpunt met de x-as.*
d *Bepaal de punten met een verticale raaklijn.*
e *Bepaal het punt met een horizontale raaklijn.*
f *Maak de snelheid zichtbaar in de plot.*

a $y = 0$ dus benader eerst $y(t) = 1 + 2\cos\left(\frac{1}{3}\pi\left(t - \frac{1}{6}\right)\right) = 0$ dus
$t = -1{,}833333$ of $t = 2{,}166667$
(Om deze waarden zonder afronding in de berekeningen te kunnen gebruiken, ga na bijv. $t = 2{,}166...$ gevonden te hebben naar basisscherm, kies ALPHA x, sla daarna gevonden waarde op bv. met $\rightarrow$ ALPHA A (zie ook opg 9.2) om getal op te slaan onder A).



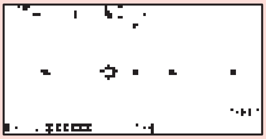
t-waarde invullen bij $x(t)$ geeft $x = 2$ dus snijpunt is (2,0)

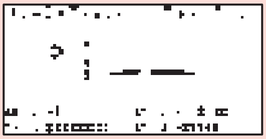
b Kies in grafiekenscherm met de kromme Trace type t-waarde in (bv. met ALPHA A).
$t \approx 2{,}17$ geeft helling 0,38 en $t \approx -1{,}83$ geeft helling is $-0{,}38$ (zie plot)



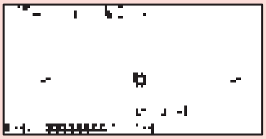
c Vergelijking van de raaklijn door (2,0) met rc is 0,38 is
$y = 0{,}38x - 0{,}76$

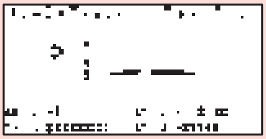
d Verticale raaklijn als $x'(t) = 0$ en $y'(t) \neq 0$. $t = -0{,}83333....$ of $t = 1{,}166..$
verticale raaklijn in $(-1,2)$ en $(5,2)$ dus $x = -1$ en $x = 5$



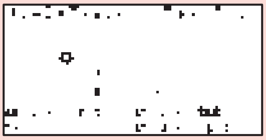


e Horizontale raaklijn als $y'(t) = 0$ en $x'(t) \neq 0$. dus $t = 0{,}166666...$ in punt (2,3) dus $y = 3$. (keerpunt als $t = -2{,}83333..$)





f In de plot is gekozen voor stapgrootte 0,1.



Bijlage 1

afrondregels bij het examen wiskunde B

Afronden van tussenantwoorden

a. *Als bij een vraag doorgerekend wordt met tussenantwoorden die afgerond zijn, en dit leidt tot een ander eindantwoord dan wanneer doorgerekend is met niet-afgeronde tussenantwoorden, wordt bij de betreffende vraag één scorepunt in mindering gebracht. Tussenantwoorden mogen wel afgerond genoteerd worden.*

b. *Uitzondering zijn die gevallen waarin door de context wordt bepaald dat tussenantwoorden moeten worden afgerond.*

Afronden van groeifactoren

c. *Als een groeifactor wordt gevraagd, geldt voor het eindantwoord: groeifactoren moeten worden genoteerd in ten minste twee decimalen.*

Bijlage 2

examenwerkwoorden

Algemeen: tenzij anders aangegeven, is de wijze waarop het antwoord gevonden wordt vrij.

	De toevoeging 'algebraïsch' of 'exact' legt beperkingen op aan de wijze van beantwoorden.
Algebraïsch / op algebraïsche wijze	Zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine; tussenantwoorden en het eindantwoord mogen benaderd opgeschreven worden.
Exact / op exacte wijze	Zonder gebruik te maken van specifieke opties* van de grafische rekenmachine; tussenantwoorden en het eindantwoord mogen niet benaderd opgeschreven worden. **Als bijvoorbeeld gevraagd wordt de ongelijkheid 5/x<x exact op te lossen, wordt verwacht dat de gelijkheid 5/x=x exact wordt opgelost. De tekens in de oplossing van de ongelijkheid hoeven niet verantwoord te worden.*
Aantonen dat, laten zien dat	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet
Onderzoeken of	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de (on)juistheid van het gestelde blijkt. Het antwoord moet worden afgesloten met een conclusie. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.
Afleiden van bijvoorbeeld een formule	Het geven van een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van de formule of eenheid volgt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Tenzij anders aangegeven, geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
Bepalen	Het gevraagde vaststellen en/of uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Beredeneren, uitleggen	Het geven van een uitwerking waarin de denkstappen staan, waaruit het gestelde/gevraagde blijkt.
Berekenen	Het gevraagde uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Bewijzen (dat)	Het geven van een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden voldoet niet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt
Herleiden (van een formule)	Een formule stap voor stap herschrijven tot deze in de gevraagde vorm staat, zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine.

Noemen, (aan)geven wat, welke, wanneer, hoeveel	Een eindantwoord geven. Een toelichting is niet vereist tenzij anders is aangegeven.
Oplossen	Het bepalen van de waarden van een of meer onbekenden die voldoen aan de gegeven vergelijking of ongelijkheid. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Schetsen	Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat.
Tekenen	Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat en voldoende nauwkeurig is. In het geval van een grafiek moet een assenstelsel met schaalverdeling zijn weergegeven.

Bijlage 3

formulekaart voor bij het centraal examen

Goniometrie

$\sin(t + u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$
$\sin(t - u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$
$\cos(t + u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$
$\cos(t - u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$

$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$
$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$

trefwoordenregister

Aantekeningen

Aantekeningen