DEEL 2

Toegepaste Wiskunde

VOOR HET HOGER ONDERWIJS

5e druk

Jan Blankespoor
Kees de Joode
Aad Sluijter

ThiemeMeulenhoff

Toegepaste wiskunde Deel 2

Toegepaste Wiskunde

voor het hoger onderwijs

Deel 2

drs. J.H. Blankespoor
drs. C. de Joode
ir. A. Sluijter

Vijfde, herziene druk

ThiemeMeulenhoff

COLOFON

Auteurs
drs. J.H. Blankespoor
drs. C. de Joode
ir. A. Sluijter

Opmaak binnenwerk
Crius Group

Opmaak omslag
Crius Group

Over ThiemeMeulenhoff
ThiemeMeulenhoff ontwikkelt zich van educatieve uitgeverij tot een learning design company. We brengen content, leerontwerp en technologie samen. Met onze groeiende expertise, ervaring en leeroplossingen zijn we een partner voor scholen bij het vernieuwen en verbeteren van onderwijs. Zo kunnen we samen beter recht doen aan de verschillen tussen lerenden en scholen en ervoor zorgen dat leren steeds persoonlijker, effectiever en efficiënter wordt.

Samen leren vernieuwen.

www.thiememeulenhoff.nl

ISBN 978 90 06 310856
Vijfde druk, eerste oplage 2018

Deze uitgave is volledig CO_2-neutraal geproduceerd.
Het voor deze uitgave gebruikte papier is voorzien van het FSC®-keurmerk.
Dit betekent dat de bosbouw op een verantwoorde wijze heeft plaatsgevonden.

Inhoud

Voorwoord

Deel 2 van de serie *Toegepaste wiskunde voor het hoger onderwijs* is de voortzetting van deel 2 van de serie *Toegepaste wiskunde voor het hoger beroepsonderwijs*. Dit boek bevat onderwerpen die in de meeste hbo-opleidingen in de sector techniek na de propedeuse behandeld worden, terwijl ze bij de opleidingen aan technische universiteiten meestal nog wel in de propedeuse thuishoren.
Ten opzichte van de genoemde vorige (vierde) druk van deel 2 is er een nieuw hoofdstuk over Laplacetransformaties toegevoegd. Verder zijn de hoofdstukken enigszins herschikt in de meest logische volgorde. De hoofdstukken over vectoren, complexe getallen, matrices en determinanten, functies van meer dan één variabele, integratie van functies van twee variabelen, differentiaalvergelijkingen en rijen en reeksen zijn opnieuw herzien en waar nodig bewerkt.
Net als deel 1 bevat elk hoofdstuk een aantal voorbeelden en vraagstukken in Maple, maar deze zijn uiteraard ook te maken ook met een ander computeralgebrasysteem. De auteurs zijn van mening dat computeralgebra vrijwel onmisbaar is, maar dat de student zich sowieso eerst de achterliggende wiskundige concepten eigen zal moeten maken. Om dit doel te bereiken is dit boek zo opgebouwd dat eerst de theoretische concepten bestudeerd zullen moeten worden; vooral bij de wat moeilijkere vraagstukken kan vervolgens de computer worden ingezet. Van Maple is in dit boek de zogenaamde classic versie gebruikt. Deze versie kan ook op de jongste versies van Maple (17) gevonden worden door deze via Tools/Options/Display/Input Display: Maple Notation te activeren.
Op de website www.thiememeulenhoff.nl/wiskunde is aanvullend studiemateriaal te vinden, onder andere een Maple-cursus.

Delft, september 2017
Jan Blankespoor
Kees de Joode
Aad Sluijter

Bij hoofdstuk 1

Dit hoofdstuk gaat over vectoren. Een vector is een wiskundige grootheid, met een of meer kentallen (ook wel componenten genoemd), meestal reële getallen.
Een vector kan in een plat vlak (de tweedimensionale ruimte) of de ruimte (ook wel: driedimensionale ruimte) worden voorgesteld als een lijnstuk met een richting. De lengte van het lijnstuk stelt de grootte van de vector voor. De richting kan worden uitgedrukt in de hoek(en) die de vector met de coördinaatassen maakt.
Met een aantal speciaal gedefinieerde regels kan met vectoren worden gerekend. Deze regels vormen met elkaar een aantal gereedschappen dat in veel toepassingen van nut kan zijn. In de twee- of driedimensionale ruimte kunnen deze regels ook meetkundig worden geïllustreerd. Vectoren zijn in de mechanica onmisbaar voor het analyseren van constructies en bewegingen. In de elektrotechniek kunnen netwerken met behulp van vectorrekening worden doorgerekend. Bovendien vormen vectoren een belangrijke opstap naar de matrixrekening, zie hiervoor hoofdstuk 3 van dit boek. Ook in hoofdstuk 2 (Complexe getallen) zien we overeenkomsten met de vectorrekening.

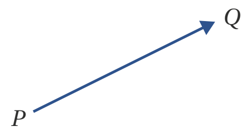
Hoofdstuk 1 bevat de volgende onderwerpen.
- plaatsvectoren in platte vlak en ruimte
- plaatsvectoren in de *n*-dimensionale ruimte
- optellen en aftrekken van vectoren
- scalairen en vectoren
- eenheidsvectoren en nulvectoren
- inwendig product van twee vectoren
- toepassingen van het inwendig product
- projecties
- uitwendig product
- toepassingen van het uitwendig product

1 Vectoren

1.1 Inleiding

Veel natuurkundige grootheden zijn al volledig bepaald als de grootte ervan met de eenheid gegeven is. Dergelijke grootheden worden *scalaire grootheden* of kortweg *scalairen* genoemd. Voorbeelden van zulke grootheden zijn lengte, oppervlakte, temperatuur, tijd en druk.
Andere grootheden, zoals kracht, snelheid, impuls, moment van een kracht en magnetische fluxdichtheid hebben zowel een grootte als een richting. Deze grootheden kunnen worden voorgesteld door *vectoren*.
Onder een vector wordt verstaan een gericht lijnstuk met een bepaalde lengte, getekend als een pijl. Een vector wordt bepaald door het beginpunt en het eindpunt van het gerichte lijnstuk. In figuur 1.1 is P het beginpunt en Q het eindpunt van de vector. Deze vector wordt aangegeven met $\overrightarrow{PQ}$.

Figuur 1.1

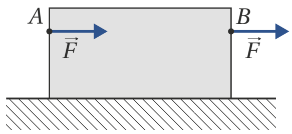


Vectoren kunnen worden onderscheiden in drie categorieën:
1 Vectoren met een vast beginpunt; dit zijn de *plaatsvectoren*.
2 Vectoren die verplaatst mogen worden langs de lijn waarop de vector ligt (deze lijn heet de *drager* van de vector).
3 Vectoren zonder een vast beginpunt en een vaste drager; dit zijn de *vrije vectoren*.

Voorbeelden van vectoren die langs de drager verplaatst mogen worden, zijn de krachten die op een voorwerp werken, zoals in staticaberekeningen. Zo maakt het voor het externe effect van de kracht op het voorwerp in figuur 1.2 niet uit of de kracht $\vec{F}$ in punt B of in punt A aangrijpt. Voor de interne effecten van de kracht op het voorwerp,

zoals de door de kracht veroorzaakte spanningen in het materiaal, maakt het echter wel uit waar de kracht aangrijpt.
We zullen in dit hoofdstuk ook nog voorbeelden geven van vrije vectoren.
De vectortheorie wordt in dit hoofdstuk behandeld voor plaatsvectoren. Deze theorie geldt echter ook voor vectoren in de andere twee categorieën.

Figuur 1.2



1.2 Plaatsvectoren

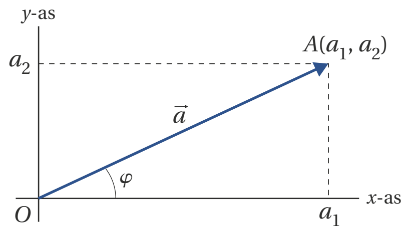
1.2.1 Plaatsvectoren in het platte vlak

In het platte vlak gaan we uit van het bekende *xy*-assenstelsel. In figuur 1.3 wordt de vector $\overrightarrow{OA}$ bepaald door beginpunt O en zijn eindpunt $A = (a_1, a_2)$. In het vervolg wordt $\overrightarrow{OA}$ aangeduid met $\vec{a}$ (dezelfde letter als het eindpunt A). De lijn door O en A heet de *drager* van $\vec{a}$. De vector kan op twee manieren worden genoteerd:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$: $\vec{a}$ als *kolomvector*

$\vec{a} = (a_1, a_2)$: $\vec{a}$ als *rijvector*

Figuur 1.3



De getallen a_1 en a_2 heten de *coördinaten, componenten* of *kentallen* van de vector.
In dit boek wordt de voorkeur gegeven aan de notatie van vectoren als kolomvectoren; de berekeningen nemen dan wel meer ruimte in beslag maar zijn overzichtelijker.
De verzameling van alle vectoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, met $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ noemen we de tweedimensionale vectorruimte $\mathbb{R}^2$.
Er geldt dus:

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \text{ met } a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\} \tag{1.1}$$

De lengte van $\vec{a}$, notatie $|\vec{a}|$, is de lengte van het lijnstuk OA.
Deze lengte is als volgt te berekenen (met de stelling van Pythagoras):

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \tag{1.2}$$

De hoek φ die de vector maakt met de positieve x-as geeft de richting van de vector aan. Er geldt $\tan\varphi = \frac{a_2}{a_1}$. Voor een vector in het eerste en vierde kwadrant geldt dan $\varphi = \arctan\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$. Voor een vector in het tweede of derde kwadrant kunnen we de hoek niet direct via de 'arctan' berekenen, omdat de arctangens altijd een hoek tussen $-\frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi$ radialen levert.

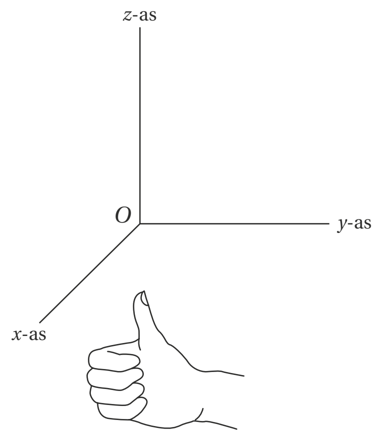
Opdracht
Bereken de lengte van de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en de hoek die $\vec{a}$ maakt met de positieve x-as.

1.2.2 Plaatsvectoren in de ruimte

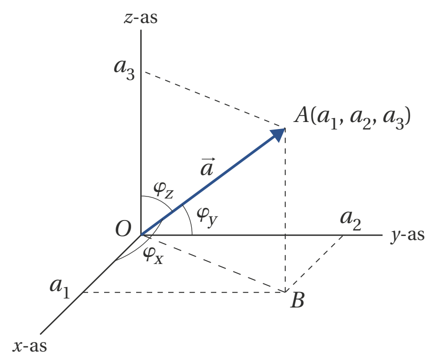
Een vector in de ruimte kan worden vastgelegd met behulp van drie onderling loodrechte assen. Dit zijn de x-as, de y-as en de z-as, die elkaar in de oorsprong O snijden (zie figuur 1.4a). Dit is een voorbeeld van een *rechtsdraaiend* assenstelsel. Dit houdt in dat als we de vingers van de rechterhand draaien van de positieve x-as naar de positieve y-as, de duim in de richting van de positieve z-as wijst.
We hebben nu, zie figuur 1.4b:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, waarbij a_1, a_2 en a_3 de kentallen zijn van de vector $\vec{a}$.

Figuur 1.4a



Figuur 1.4b



De drie-dimensionale vectorruimte $\mathbb{R}^3$ wordt gedefinieerd door

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \text{ met } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\} \tag{1.3}$$

De lengte van $\vec{a}$ wordt berekend door tweemaal de stelling van Pythagoras toe te passen. Eerst wordt OB berekend: $OB = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, vervolgens OA volgens $OA^2 = OB^2 + a_3^2$, zodat voor de lengte van $\vec{a}$ geldt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{1.4}$$

De richting van de vector in figuur 1.4b wordt bepaald door de hoeken φ_x, φ_y en φ_z, die de vector maakt met respectievelijk de positieve x-as, de positieve y-as en de positieve z-as. Er geldt:

$$\cos\varphi_x = \frac{a_1}{|\vec{a}|},\ \cos\varphi_y = \frac{a_2}{|\vec{a}|} \text{ en } \cos\varphi_z = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

Hieruit zijn de hoeken φ_x, φ_y en φ_z te berekenen.

Opdracht

Gegeven de vector $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Bereken de lengte van $\vec{b}$ en de hoeken die $\vec{b}$ maakt met de positieve x-as, de positieve y-as en de positieve z-as.

1.2.3 Plaatsvectoren in $\mathbb{R}^n$

De *n-dimensionale vectorruimte* $\mathbb{R}^n$ wordt als volgt gedefinieerd:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \text{ met } a_i \in \mathbb{R}, \text{ voor } i = 1,2,\ldots,n \right\} \tag{1.5}$$

Deze $\mathbb{R}^n$ kunnen we voor $n \geq 4$ niet meer meetkundig voorstellen. Een vector in $\mathbb{R}^n$ kan worden gebruikt om een aantal variabelen tegelijk aan te duiden.
Zo wordt met de vector

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{10} \end{pmatrix}$$

de verzameling variabelen $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ aangegeven. Hier komen we uitgebreid op terug bij het oplossen van stelsels vergelijkingen (paragraaf 3.2).
Voor de lengte van de n-dimensionale vector $\vec{a}$ geldt

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \tag{1.6}$$

Twee vectoren zijn gelijk, notatie $\vec{a} = \vec{b}$, als ze hetzelfde aantal kentallen hebben en alle overeenkomstige kentallen gelijk zijn.

1.2.4 Optellen en scalair vermenigvuldigen

De optelling van twee vectoren in $\mathbb{R}^2$ wordt gedefinieerd door

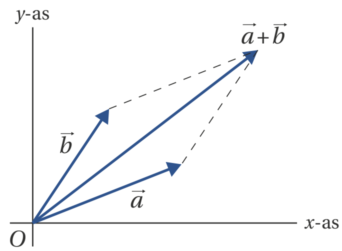
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

De optelling wordt dus coördinaatsgewijs uitgevoerd.
In $\mathbb{R}^3$ wordt de optelling op overeenkomstige wijze gedefinieerd door

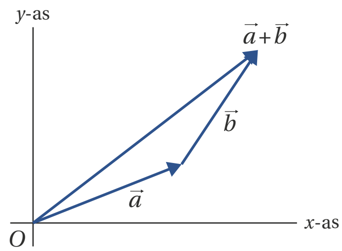
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

De optelling kan grafisch in het platte vlak en in de ruimte worden bepaald met behulp van de zogenoemde parallellogramconstructie. In figuur 1.5a is dit uitgevoerd in het platte vlak. De optelling kan ook bepaald worden met de '*kop-aan-staart-methode*' (figuur 1.5b). Hierbij wordt het beginpunt (de staart) van de evenwijdig verschoven vector $\vec{b}$ verbonden met het eindpunt (de kop) van $\vec{a}$. Het resultaat is in beide gevallen dezelfde somvector.

Figuur 1.5a Parallellogram-constructie



Figuur 1.5b Kop-aan-staart-methode



In $\mathbb{R}^2$ wordt *scalaire vermenigvuldiging* gedefinieerd door

$$\lambda\vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}, \text{ met } \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.9}$$

Het getal λ heet een scalar of scalair.
Voor $\lambda \neq 0$ hebben de vectoren $\vec{a}$ en $\lambda\vec{a}$ dezelfde drager.
In $\mathbb{R}^3$ is de scalaire vermenigvuldiging op dezelfde manier gedefinieerd als in $\mathbb{R}^2$:

$$\lambda\vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}, \text{ met } \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.10}$$

In $\mathbb{R}^n$ is de optelling van twee vectoren op overeenkomstige wijze gedefinieerd als in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix} \tag{1.11}$$

De scalaire vermenigvuldiging in $\mathbb{R}^n$ is ook op overeenkomstige wijze gedefinieerd als in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$.

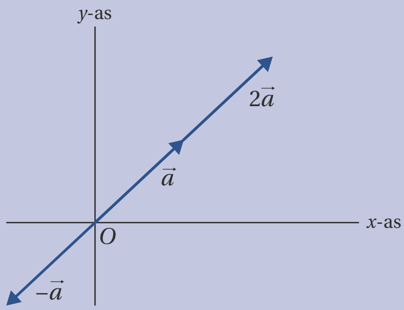
$$\lambda\vec{a}=\lambda\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_1\\\lambda a_2\\\vdots\\\lambda a_n\end{pmatrix}, \text{ met } \lambda\in\mathbb{R} \tag{1.12}$$

Voorbeeld 1

Als $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, dan is $2\vec{a}=\begin{pmatrix}2a_1\\2a_2\end{pmatrix}$ en $-\vec{a}=\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\end{pmatrix}$, zie figuur 1.6.

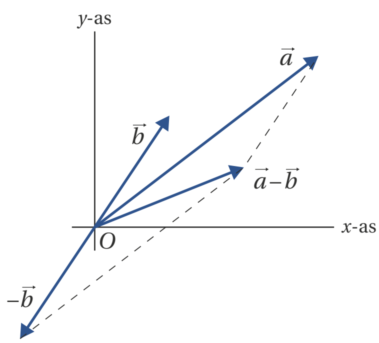
Deze drie vectoren liggen op dezelfde drager.

Figuur 1.6



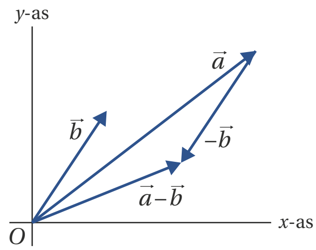
Voor het verschil van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, notatie $\vec{a}-\vec{b}$, geldt $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$. Ook het verschil kan in het platte vlak en in de ruimte grafisch bepaald worden met behulp van de parallellogramconstructie. In figuur 1.7a is deze constructie uitgevoerd in het platte vlak.

Figuur 1.7a Parallellogramconstructie van het verschil



In figuur 1.7b is de verschilvector met de ‘kop-aan-staart-methode’ bepaald.

Figuur 1.7b Kop-aan-staart-methode van het verschil



Opdracht
Bereken en construeer $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ en $\vec{b}-\vec{a}$ als $\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$.

1.2.5 Eenheidsvectoren en nulvectoren

Onder een *eenheidsvector* verstaan we een vector met lengte 1.
In $\mathbb{R}^2$ zijn $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ en $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ de eenheidsvectoren, die respectievelijk langs de x-as en y-as liggen. Dit zijn niet de enige eenheidsvectoren in $\mathbb{R}^2$. Ook bijvoorbeeld $\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}$ heeft lengte 1.

We kunnen elke vector $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ uitdrukken in één eenheidsvector. Deze eenheidsvector berekenen we door de lengte van $\vec{a}$ te berekenen $\left(|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right)$ en vervolgens de factor $\frac{1}{|\vec{a}|}$ ervoor te zetten. We noemen dit proces *normeren*. De *genormeerde* $\vec{a}_e$ van $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ is dus $\vec{a}_e = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$. Dit is een eenheidsvector, want de lengte is 1. We kunnen ook schrijven: $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}_e$. Hiermee is $\vec{a}$ uitgedrukt in de eenheidsvector die dezelfde richting heeft als $\vec{a}$.

Iedere vector $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ is ook te schrijven als een zogeheten *lineaire combinatie* van de eenheidsvectoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ en $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\a_2\end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$$

Zo kunnen we bijvoorbeeld voor $\vec{a} = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ ook schrijven:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 5\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$$

Analoog zijn in R^3 de vectoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ en $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ de eenheidsvectoren, die respectievelijk langs de x-as, de y-as en de z-as liggen.

Iedere vector $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ kan geschreven worden als $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$.

Ook hier geldt: de genormeerde $\vec{a}_e$ van $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ is de eenheidsvector $\vec{a}_e = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ en geldt $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}_e$.

In R^n zijn de vectoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \ldots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ eenheidsvectoren.

Als $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$, dan is $\vec{a}$ te schrijven als $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n$ (1.13)

De vector $\vec{0} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ heet de *nulvector* in $\mathbb{R}^2$. In $\mathbb{R}^n$ is de nulvector $\vec{0} = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$.

Opgaven bij 1.2

1 Gegeven de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\-5\\0\end{pmatrix}$.

Bereken:

a $\vec{a}+\vec{b}$ en $\vec{b}+\vec{a}$

b $|\vec{a}+\vec{b}|$ en $|\vec{a}| + |\vec{b}|$

c $3\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$

d $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ en $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

e $|\vec{a}-\vec{b}|$ en $|\vec{a}| - |\vec{b}|$

f $\vec{a}+2\vec{b}-4\vec{c}$

2 Gegeven de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.

a Construeer (grafisch) de vectoren $\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$ en $-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$.

b Controleer via berekeningen het resultaat van vraag 2a.

3 Gegeven zijn de vectoren $\begin{pmatrix}a\\6\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}2\\a\end{pmatrix}$. Voor welke waarde(n) van a hebben deze vectoren dezelfde drager?

4 Gegeven de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-5\end{pmatrix}$.

a Bereken de hoeken die $\vec{a}$ maakt met de positieve x-, y- en z-as.

b Bereken de hoeken die $\vec{b}$ maakt met de positieve x-, y- en z-as.

c Bepaal de genormeerde van $\vec{a}$ en van $\vec{b}$.

1.3 Het inwendig product van twee vectoren

1.3.1 Definitie van het inwendig product

Het *inwendig product* van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^n$, notatie $\vec{a} \bullet \vec{b}$ (een dikke punt, niet te verwarren met het vermenigvuldigingsteken voor reële getallen, de gewone punt), wordt als volgt gedefinieerd:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \qquad (1.14)$$

Het inwendig product van twee vectoren is dus een getal (scalar)! Het inwendig product wordt daarom ook wel *scalair product* genoemd.

Kiezen we $\vec{b} = \vec{a}$, dan gaat formule (1.14) over in $\vec{a} \bullet \vec{a} = a_1a_1 + a_2a_2 + \ldots + a_na_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, zodat de lengte van $\vec{a}$ ook met behulp van een inwendig product kan worden bepaald: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}}$

Voorbeeld 2

Bepaal het inwendig product van $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Oplossing
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + (-1) \cdot (-6) = 8$ ■

Opdracht
Bepaal het inwendig product van $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ en $\vec{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

1.3.2 Eigenschappen van het inwendig product

Het inwendig product bezit een aantal eigenschappen dat overeenkomt met de eigenschappen van het product van getallen.

Voor de vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ in $\mathbb{R}^n$ en scalar $k \in \mathbb{R}$ geldt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \qquad \text{(commutatieve eigenschap)} \tag{1.15}$$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \qquad \text{(distributieve eigenschap)} \tag{1.16}$$

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(k\vec{b}\right) = k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \tag{1.17}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0 \text{ en } \vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \tag{1.18}$$

Opdracht
Toon formule (1.16) en formule (1.17) aan voor vectoren in $\mathbb{R}^2$.

Voorbeeld 3

Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Bereken $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$.

Oplossing
We kunnen deze berekening op twee manieren uitvoeren:

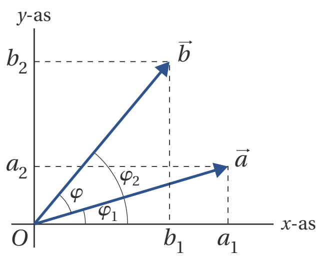
1 Eerst $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ en vervolgens $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 29$.

2 $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 4) + (2 \cdot 3 + 3 \cdot 4) = 29$. ■

1.3.3 Meetkundige betekenis van het inwendig product

In figuur 1.8 is φ, waarbij $\varphi \in [0,\pi]$, de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$. We zullen zien dat we met behulp van een inwendig product de hoek φ kunnen bepalen.

Figuur 1.8



Er geldt: $\cos\varphi = \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$

$$= \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$$

$$= \frac{a_1}{|\vec{a}|}\cdot\frac{b_1}{|\vec{b}|} + \frac{a_2}{|\vec{a}|}\cdot\frac{b_2}{|\vec{b}|}$$

$$= \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Hieruit volgt:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

zodat we voor de hoek φ vinden:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right) \tag{1.19}$$

Uit $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ volgt ook

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \tag{1.20}$$

Dit is een tweede manier om een inwendig product te berekenen. De ingesloten hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ moet dan wel bekend zijn.
In $\mathbb{R}^n$, waarbij $n \geq 4$, is de hoek tussen twee vectoren niet meer voor te stellen. We kunnen het begrip hoek wel uitbreiden voor $\mathbb{R}^n$, waarbij $n \geq 4$, door formule (1.19) als definitie te nemen. We gaan hier niet verder op in.

Voorbeeld 4

Bepaal de hoek tussen $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$.

Oplossing

$\vec{a}\cdot\vec{b} = -1$, $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = \sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}} = \sqrt{14}$

Er volgt voor de hoek φ:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right) = \arccos(-0{,}11952) = 1{,}691 \text{ rad} \approx 96{,}86°.$$

Opdracht
Bepaal de hoek tussen de vectoren $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ en $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

In het platte vlak en in de ruimte staan twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, beide niet de nulvector, loodrecht op elkaar, notatie $\vec{a} \perp \vec{b}$, als voor de hoek φ tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ geldt dat $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ofwel $\varphi = 90°$. Dan is $\cos\varphi = 0$, zodat $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = 0$.
Is omgekeerd $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, terwijl $\vec{a} \neq \vec{0}$ en $\vec{b} \neq \vec{0}$, dan volgt uit $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$ dat $\cos\varphi = 0$, dus $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ofwel $\varphi = 90°$; dit betekent dat $\vec{a} \perp \vec{b}$.

In $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ geldt dus voor $\vec{a}$ en $\vec{b}$, waarbij $\vec{a} \neq \vec{0}$ en $\vec{b} \neq \vec{0}$:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \tag{1.21}$$

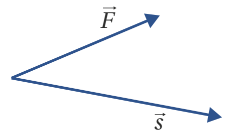
Als twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ loodrecht op elkaar staan, dan heten $\vec{a}$ en $\vec{b}$ *orthogonaal*.

> **Opdracht**
> Onderzoek of de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ loodrecht op elkaar staan.

Toepassingen van het inwendig product vinden we vooral in de natuurkunde. Zo is in figuur 1.9 de arbeid W, die een constante kracht $\vec{F}$ verricht op een deeltje, waarvan de verplaatsing gegeven wordt door de vector $\vec{s}$ gelijk aan:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

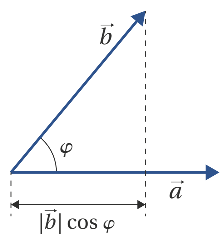
Figuur 1.9



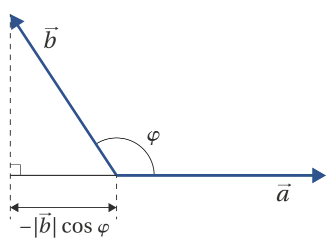
1.3.4 Projectie

Onder de projectie van $\vec{b}$ op $\vec{a}$, beide niet de nulvector, verstaan we de vector die ontstaat door het eindpunt van $\vec{b}$ op de drager van $\vec{a}$ te projecteren. De projectie is alleen in het platte vlak en in de ruimte voor te stellen, zodat we dit niet definiëren voor vectoren in $\mathbb{R}^n$, waarbij $n \geq 4$.
We leiden de formule voor de projectie af voor twee vectoren in het platte vlak.
Het verkregen resultaat geldt ook voor twee vectoren in de ruimte.
Voor φ, een scherpe hoek tussen twee vectoren in het platte vlak, zoals in figuur 1.10, is $|\vec{b}|\cos\varphi$ de lengte van de projectie van $\vec{b}$ op $\vec{a}$. Is φ een stompe hoek tussen twee vectoren in het platte vlak, zoals in figuur 1.11, dan is de lengte van de projectie gelijk aan $|\vec{b}|\cos(\pi - \varphi) = -|\vec{b}|\cos(\varphi)$.

Figuur 1.10



Figuur 1.11



Voor het bepalen van de projectie $\vec{p}$ van $\vec{b}$ op $\vec{a}$, hebben we de eenheidsvector in de richting van $\vec{a}$ nodig.

Zoals aangetoond in paragraaf 1.2 is deze eenheidsvector de vector $\vec{a}_e = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ (de *genormeerde* van de vector $\vec{a}$).
Als de hoek φ tussen beide vectoren scherp is, dan vinden we voor de projectie $\vec{p}$ van $\vec{b}$ op $\vec{a}$ (zie figuur 1.10):

$$\vec{p} = \left(|\vec{b}|\cos\varphi\right)\vec{a}_e = |\vec{b}|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\vec{a}_e = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\vec{a}_e = \left(\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{a}_e$$
$$= \left(\vec{a}_e\cdot\vec{b}\right)\vec{a}_e$$

Als de hoek φ stomp is, dan vinden we (zie figuur 1.11):
$$\vec{p} = \left(|\vec{b}|\cos(\pi-\varphi)\right)\left(-\vec{a}_e\right) = -|\vec{b}|\cos(\varphi)\left(-\vec{a}_e\right) = \left(|\vec{b}|\cos(\varphi)\right)\vec{a}_e.$$

Er volgt, zie hiervoor bij de afleiding als de hoek φ scherp is:

$$\vec{p} = \left(|\vec{b}|\cos\varphi\right)\vec{a}_e = \left(\vec{a}_e\cdot\vec{b}\right)\vec{a}_e.$$

We concluderen dat voor de projectie $\vec{p}$ van $\vec{b}$ op $\vec{a}$ zowel voor scherpe als stompe hoek φ geldt:

$$\vec{p} = \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{a}_e \tag{1.22}$$

Op overeenkomstige wijze kan worden afgeleid dat voor de projectie $\vec{p}$ van $\vec{a}$ op $\vec{b}$ geldt:

$$\vec{p} = \left(\vec{a}\cdot\vec{b}_e\right)\vec{b}_e, \text{ waarbij } \vec{b}_e = \frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b} \tag{1.23}$$

Opmerking

Uit $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$ (formule (1.20)) volgt dat voor een scherpe hoek φ, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ gelijk is aan de lengte van $\vec{a}$ vermenigvuldigd met de lengte van de projectie van $\vec{b}$ op $\vec{a}$. Eveneens geldt natuurlijk dat, voor een scherpe hoek φ, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ gelijk is aan de lengte van $\vec{b}$ vermenigvuldigd met de lengte van de projectie van $\vec{a}$ op $\vec{b}$.

Voorbeeld 5

Gegeven $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-6\\2\end{pmatrix}$. Bepaal de projectie van $\vec{b}$ op $\vec{a}$.

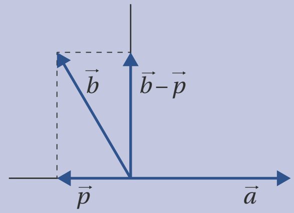
Oplossing
Er geldt: $\vec{a}_e = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$
zodat $\vec{a}_e\cdot\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2-12+0) = -\frac{10}{\sqrt{5}}$. Voor de projectie $\vec{p}$ van $\vec{a}$ op $\vec{b}$ geldt nu

$$\vec{p} = \left(\vec{a}_e\cdot\vec{b}\right)\vec{a}_e = -\frac{10}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\0\end{pmatrix}.$$

Een tekening van de situatie is te zien in figuur 1.12. We zien dat moet gelden $\left(\vec{b}-\vec{p}\right)\perp\vec{a}$. Dit is inderdaad het geval:

$$\left(\vec{b}-\vec{p}\right)\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = 4-4+0 = 0.$$

Figuur 1.12



Opgaven bij 1.3

1 Bereken $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ en $\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$ met $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$ en $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

2 Gegeven de vectoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}$ en $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}$. Bepaal de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

3 Geef twee vectoren in $\mathbb{R}^4$, waarvan geen enkel kental nul is en waarvoor geldt $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

4 Voor welke waarde(n) van t staan de vectoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}t\\2\\1\end{pmatrix}$ en $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\t\\4\end{pmatrix}$ loodrecht op elkaar?

5 Gegeven de vectoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}$ en $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

a Bepaal de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

b Bepaal de projectie van $\vec{a}$ op $\vec{b}$ en van $\vec{b}$ op $\vec{a}$.

6 Een constante kracht van 10 N maakt een hoek van $\frac{1}{6}\pi$ rad met de positieve x-as. Onder invloed van deze kracht beweegt een voorwerp in een rechte lijn van het punt $(1,-2)$ naar het punt $(4,7)$ in het xy-vlak.
De eenheid van lengte is meter. Bereken de door de kracht verrichte arbeid.

1.4 Het uitwendig product van twee vectoren

1.4.1 Definitie van het uitwendig product

Uitsluitend in $\mathbb{R}^3$ is naast het inwendig product nog een ander product van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gedefinieerd: het *uitwendig product*, ook wel *uitproduct* of *vectorproduct* genoemd. Het uitwendig product wordt genoteerd als $\vec{a}\times\vec{b}$. In tegenstelling tot het inwendig product is het uitwendig product een vector. Het uitwendig product $\vec{a}\times\vec{b}$ is als volgt gedefinieerd:

1 De lengte van $\vec{a}\times\vec{b}$ is gelijk aan

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi \tag{1.24}$$

waarbij φ de hoek is tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

2 De vector $\vec{a}\times\vec{b}$ staat loodrecht op $\vec{a}$ en $\vec{b}$. De richting van $\vec{a}\times\vec{b}$ is volgens de rechterhandregel: wanneer de vingers van de rechterhand over de kleinste hoek draaien van $\vec{a}$ naar $\vec{b}$, dan geeft de duim de richting aan van $\vec{a}\times\vec{b}$, zie figuur 1.13.

WISKUNDE & STATISTIEK

WISKUNDE

TOEGEPASTE WISKUNDE VOOR HET HOGER ONDERWIJS | DEEL 2

De herziene serie toegepaste wiskunde voor het hoger onderwijs is geschikt voor alle opleidingen waar wiskundige vaardigheden een belangrijke plaats innemen, met name in de sector Techniek, zowel in het hbo als in de technische universiteiten. De nadruk ligt op het trainen van wiskundige vaardigheden. De student past de wiskundige vaardigheden ook toe in praktische situaties.
De serie is tot stand gekomen op basis van de volgende indeling:

- Deel Inleiding: behandelt het basisniveau wiskunde; tevens geschikt voor het wegwerken van een wiskundedeficiëntie.
- Deel 1: behandelt (vrijwel) de gehele propedeusewiskunde van het technisch hbo.
- Deel 2: is vooral bedoeld voor het wiskundeonderwijs ná de hbo-propedeuse. Bij technische universiteiten zal deze stof nog wel tot de propedeuse behoren.

Dit deel 2 bevat de hoofdstukken Vectoren, Complexe getallen, Matrices en determinanten, Functies van twee of meer variabelen, Meervoudige integralen, bol- en cilindercoördinaten, Differentiaalvergelijkingen, De Laplacetransformatie en Rijen en reeksen. Ook dit deel bevat veel voorbeelden, waarmee de student de theorie leert toe te passen vanuit beschreven contexten (meestal afkomstig uit de techniek), met veel opgaven en leeropdrachten.
Elk hoofdstuk bevat een aantal Maple-voorbeelden en vraagstukken, die overigens ook met een ander computeralgebrasysteem te maken zijn. De toepassing van Maple is zoveel mogelijk geïntegreerd met de theorie en de voorbeelden.
De auteurs gaan ervan uit dat de student voor de onderwerpen in dit boek vaker de computer zal gebruiken dan in deel 1 van de serie. Er is voldoende aandacht besteed aan de theoretische concepten, opdat de student de computer (of de grafische rekenmachine) niet als black-box hoeft te gebruiken, maar weet wat hij/zij doet.

Op de website *www.thiememeulenhoff.nl/wiskunde* zijn de uitwerkingen van de vraagstukken uit de herhalingsopgaven te vinden.
Deel 2 is een onmisbaar hulpmiddel voor iedere student in de sector Techniek, die de technische wiskunde wil leren begrijpen en toepassen.

HOGER ONDERWIJS

9 789006 310856