DEEL 1

Toegepaste wiskunde

VOOR HET HOGER ONDERWIJS

6e druk

Jan Blankespoor
Kees de Joode
Aad Sluijter

ThiemeMeulenhoff

Toegepaste wiskunde Deel 1

Toegepaste wiskunde

voor het hoger onderwijs

Deel 1

drs. J.H. Blankespoor
drs. C. de Joode
ir. A. Sluijter

Zesde, herziene druk

ThiemeMeulenhoff

COLOFON

Auteurs
drs. J.H. Blankespoor
drs. C. de Joode
ir. A. Sluijter

Opmaak binnenwerk
Crius Group

Opmaak omslag
Crius Group

Over ThiemeMeulenhoff
ThiemeMeulenhoff ontwikkelt zich van educatieve uitgeverij tot een learning design company. We brengen content, leerontwerp en technologie samen. Met onze groeiende expertise, ervaring en leeroplossingen zijn we een partner voor scholen bij het vernieuwen en verbeteren van onderwijs. Zo kunnen we samen beter recht doen aan de verschillen tussen lerenden en scholen en ervoor zorgen dat leren steeds persoonlijker, effectiever en efficiënter wordt.

Samen leren vernieuwen.

www.thiememeulenhoff.nl

ISBN 978 90 06 48730 5
Zesde druk, eerste oplage, 2016

Deze uitgave is volledig CO_2-neutraal geproduceerd.
Het voor deze uitgave gebruikte papier is voorzien van het FSC®-keurmerk.
Dit betekent dat de bosbouw op een verantwoorde wijze heeft plaatsgevonden.

Inhoud

Voorwoord

Deel 1 van de serie Toegepaste wiskunde voor het hoger onderwijs (voorheen Toegepaste wiskunde voor hoger beroepsonderwijs) is hèt wiskundeboek voor de propedeuse van veel techniekopleidingen in het hoger onderwijs, met name in het hoger beroepsonderwijs. Het ingangsniveau is havo (vooral met de profielen Natuur en Gezondheid of Natuur en Techniek) en mbo-techniek (niveau 4). Wat de laatste categorie betreft, wordt er wel van uitgegaan dat zij nog tijdens hun mbo-opleiding of als voorbereiding op een hbo-studie een wiskundecursus hebben gevolgd. Maar ook voor techniekstudenten met een vwo-opleiding is dit boek naar onze mening geschikt als propedeuseboek, zelfs aan een technische universiteit, maar dan in combinatie met deel 2 van deze serie.
In de meeste gevallen zal de behandelde stof de gehele propedeusewiskunde in het hoger beroepsonderwijs betreffen. In de eerste twee hoofdstukken wordt uitgebreid aandacht gegeven aan de elementaire zaken die voorafgaan aan het differentiëren en integreren. Ook op het rekenen met symbolen wordt uitvoerig ingegaan. Aan alle elementaire functies en hun grafieken wordt aandacht besteed. Verder is er een hoofdstuk Goniometrie toegevoegd. Hierin wordt niet alleen aandacht besteed aan goniometrische functies, maar ook aan driehoeksmeetkunde. In het hoofdstuk Limieten wordt de differentiaalrekening voorbereid. Uiteindelijk worden de concepten differentiëren en integreren diepgaand behandeld en toegepast.
De oefenstof is zeer uitgebreid. Met veel voorbeelden wordt de student door de stof geleid. Al met al is er veel gedaan om het inzicht en de routine in wiskundige concepten te vergroten. Maar ook de wiskundige contexten krijgen voldoende aandacht.
Elk hoofdstuk bevat een aantal Maple-voorbeelden en -vraagstukken, die uiteraard ook met een ander computeralgebrasysteem te maken zijn. De auteurs zijn van mening dat computeralgebra weliswaar onmisbaar is, maar dat de student zich eerst de achterliggende wiskundige concepten eigen zal moeten maken. Om dit doel te bereiken is dit boek zodanig opgebouwd dat eerst de theoretische concepten bestudeerd moeten worden. Vooral bij de wat moeilijkere vraagstukken kan vervolgens de computer wor-

den ingezet. Dit soort vraagstukken is voorzien van een computerpictogram. Opgaven die met een grafische rekenmachine gemaakt moeten worden zijn van een bijbehorend pictogram voorzien.
Op de website techniekvoorhbo.nl is aanvullend studiemateriaal (extra vraagstukken, een groot aantal uitwerkingen) te downloaden. Ook is hier een korte cursus Maple (klassieke versie) te vinden.

Voor studenten en docenten die reeds de vijfde druk van dit boek gebruikten geldt dat er, naast een aantal tekstuele verbeteringen, enkele extra vraagstukken bij zijn gekomen, waardoor de nummers van de reeds bestaande opgaven soms veranderd zijn. De hoofdstukindeling is niet gewijzigd, en de paragraafindeling nauwelijks.

Delft, juli 2016
Jan Blankespoor
Kees de Joode
Aad Sluijter

Leerdoelen hoofdstuk 1

Om wiskunde toe te kunnen passen bij het oplossen van problemen op allerlei terreinen worden grootheden of variabelen weergegeven met symbolen. Met behulp van *algebraïsche* vaardigheden kan met deze symbolen gemanipuleerd worden. In dit hoofdstuk wordt geleerd hoe dat gaat. Om inzicht te verkrijgen in wiskundige toepassingen is het absoluut noodzakelijk dat deze vaardigheden beheerst worden. Daarom noemen we de algebraïsche vaardigheden die in dit hoofdstuk aan bod komen *basisvaardigheden*. We leggen uit met welke (reken)regels deze basisvaardigheden kunnen worden toegepast en geven inzicht in de achtergrond van deze regels.

Vergelijkingen en formules bestaan uit wiskundige uitdrukkingen waarin één of meer onbekende of nader te bepalen grootheden zitten. Vaak zullen we basisvaardigheden toepassen bij het oplossen van vergelijkingen en het manipuleren in formules. Daarvoor is een aantal *basistechnieken* nodig. In dit hoofdstuk worden deze basistechnieken beschreven en uitgelegd. We passen deze technieken toe op verschillende soorten vergelijkingen en ongelijkheden die in de praktijk voorkomen.

De volgende onderwerpen komen aan de orde:
- getallen, notaties, verzamelingen en intervallen
- rekenvaardigheden voor het rekenen met getallen
- breuken
- wortels
- rekenen met symbolen
- wegwerken van haakjes
- ontbinden in factoren
- manipuleren met formules
- oplossen van vergelijkingen
- oplossen van ongelijkheden
- oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen
- machten
- logaritmen
- het begrip absolute waarde

1 Basisvaardigheden en basistechnieken

1.1 Inleiding

Onder basisvaardigheden verstaan we al die wiskundige vaardigheden en rekenvaardigheden die een student tijdens een opleiding in de sector techniek van het hoger onderwijs moet beheersen. Op deze vaardigheden kan elk moment tijdens de opleiding, en beslist niet alleen tijdens wiskundelessen, een beroep worden gedaan. Techniekdocenten zullen er vrijwel altijd van uitgaan dat studenten deze vaardigheden beheersen. En ook veel teksten en formules in studieboeken zijn pas te begrijpen als de lezer over voldoende wiskundige basisvaardigheden beschikt. De kennis die nodig is om basisvaardigheden te kunnen toepassen moet dus paraat aanwezig zijn.

De rekenmachine en computeralgebrasoftware

We gaan ervan uit dat elke student beschikt over een wetenschappelijk rekenmachine (met of zonder grafische mogelijkheden). In veel gevallen zal tijdens de opleiding gebruik worden gemaakt van computeralgebrasoftware (Maple, Mathematica, TI Interactive!, het gratis Wolfram Alpha, enzovoort). Zulke hulpmiddelen zijn vaak onmisbaar, vooral bij het oplossen van ingewikkelde problemen en het analyseren van grafieken. Maar bij de toepassing van basisvaardigheden zijn dit soort technische hulpmiddelen meer een controlemiddel. Als voor het toepassen van basisvaardigheden altijd zo'n technisch hulpmiddel nodig zou zijn, zou dat onnodig veel tijd kosten. Erger is dat velen het apparaat beschouwen als een 'black box': je stopt er wat in en zonder na te denken over het resultaat komt er wat uit. Maar 2 keer 3 wordt toch ook niet met een rekenapparaat uitgerekend? Uitdrukkelijk willen we stellen dat een rekenmachine of computer wel een onmisbaar hulpmiddel is, maar geen alternatief voor het beheersen van de basisvaardigheden. Soms zullen we tips geven hoe basisvaardigheden beter begrepen kunnen worden met behulp van computeralgebrasoftware. We hebben daarvoor (vanaf hoofdstuk 2) de klassieke versie van Maple gekozen. En… het is natuurlijk niet verboden om dit soort hulpmiddelen te gebruiken ter controle van de antwoorden.

Getallen en getalverzamelingen

Natuurlijke getallen zijn gehele, niet-negatieve getallen (0 hoort er dus ook bij). Voor de verzameling van natuurlijke getallen schrijven we $\mathbb{N}$. Met $x \in \mathbb{N}$ bedoelen we dat x een getal uit de verzameling van natuurlijke getallen is. Het symbool $\in$ betekent ‘zit in, ligt in, maakt deel uit van, is element van’.

De natuurlijke getallen vormen een deelverzameling van de verzameling van *gehele getallen* (notatie: $\mathbb{Z}$). Deze kunnen ook negatief zijn (voorbeelden: -1000, -64, 0, 6, 10^4). Wanneer we willen dat een getal geheel is noteren we dat als: $x \in \mathbb{Z}$ (uitspraak: x is een element uit de verzameling van de gehele getallen).

De gehele getallen vormen een deelverzameling van de verzameling *reële getallen* (notatie: $\mathbb{R}$). In dit boek wordt uitsluitend gewerkt met reële getallen. Voorbeelden van reële getallen zijn 4, $\frac{1}{3}$, -56, 1000, 0 en $\sqrt{2}$, maar ook decimale getallen zoals 6,4256784 of bijzondere getallen zoals π (= 3,141582653589…). De verzameling van reële getallen omvat de verzameling van *rationale getallen* (getallen die als een breuk geschreven kunnen worden) en de verzameling van *irrationale getallen* (getallen met oneindig veel decimalen die niet als breuk geschreven kunnen worden, zoals π of $\sqrt{2}$).

Decimale getallen schrijven we hier met een komma als scheidingsteken. De (grafische) rekenmachine en de meeste computerprogramma’s gebruiken een punt als scheidingsteken.

Een enkele keer zullen we uitdrukkelijk vermelden dat sprake is van een reëel getal (x is reëel, $x \in \mathbb{R}$).

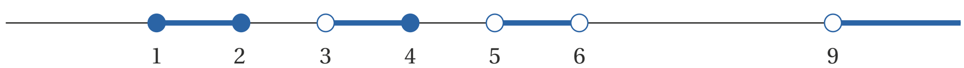
Een *interval* is een deelverzameling van de verzameling van de reële getallen. Er zijn *open* en *gesloten* intervallen. Het interval $[a,b]$ omvat alle reële getallen tussen a en b, inclusief de getallen a en b zelf. De notatie $x \in [a,b]$ staat dus voor: $a \leq x \leq b$. Dit betekent dat $x \geq a$, maar $x \leq b$. Omdat de grenzen tot het interval behoren is dit een *gesloten* interval.

Het interval $\langle a,b \rangle$ omvat alle reële getallen tussen a en b, waarbij a en b zelf niet meegerekend worden. De notatie $x \in \langle a,b \rangle$ staat dus voor: $a < x < b$. Omdat de grenzen niet tot het interval behoren is dit een *open* interval.

Er zijn ook *half-open* of *half-gesloten* intervallen. Het interval $\langle a,b]$ bijvoorbeeld omvat alle getallen x waarvoor geldt: $a < x \leq b$.

Wanneer we een bepaald getal willen uitsluiten van een verzameling of van een interval gebruiken we het *uitsluitingsteken*: \ . Zo betekent $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ de verzameling van alle reële getallen behalve 3. De notatie $[0,8]\backslash[4,5]$ betekent: alle reële getallen tussen 0 en 4 en tussen 5 en 8. De getallen 0 en 8 behoren wel tot het interval, 4 en 5 niet.

Op een getallenlijn worden intervallen met of zonder randpunten van elkaar onderscheiden door gesloten of open rondjes. Zo’n getallenlijn strekt zich onbeperkt naar links en naar rechts uit. We zeggen dat de lijn loopt van – oneindig tot + oneindig. Het symbool voor oneindig is ∞. In figuur 1.1 zijn de intervallen $[1,2]$, $\langle 3,4]$, $\langle 5,6 \rangle$ en $\langle 9, \infty \rangle$ weergegeven.



Figuur 1.1 Verschillende soorten intervallen

Het is zeer ongebruikelijk om een interval te schrijven als $b > x > a$. Het kleinste getal hoort namelijk links te staan. Maar wanneer b kleiner zou zijn dan a, zou het interval $b > x > a$ een tegenstrijdigheid betekenen (ga zelf na waarom). En een notatie als $a < x > b$ is niet toegestaan. Deze zou betekenen dat zowel $a < x$ (dus $x > a$) als $x > b$, maar komt er in de praktijk op neer dat x groter is dan het maximum van a en b.

Het symbool ∞ is geen getal! Daarom sluiten we een interval dat zich uitstrekt tot ∞ rechts af met een open haakje: $\rangle$.

Symbolen voor 'en' en 'of'

We zullen regelmatig de symbolen $\wedge$ voor het woordje 'en' en $\vee$ voor het woordje 'of' gebruiken. Bijvoorbeeld: onder $x = 5 \vee x = 7$ verstaan we: $x = 5$ of $x = 7$; onder $x \geq 1 \wedge x \leq 5$verstaan we alle reële getallen x die zowel groter dan of gelijk zijn aan 1 als kleiner dan of gelijk aan 5, kortom het interval $[1, 5]$ oftewel $1 \leq x \leq 5$. Merk op dat $2 < x < 4 \vee 3 < x < 5$ ook geschreven kan worden als $2 < x < 5$.

Het gebruik van pijltjes

Een veel gebruikt symbool is het implicatiepijltje $\Rightarrow$ (niet te verwarren met het pijltje $\rightarrow$, dat ergens anders voor gebruikt wordt). Onder $A \Rightarrow B$ verstaan we: uit bewering A volgt bewering B. Het implicatiepijltje wordt nogal eens verkeerd gebruikt. Zo is het implicatiepijltje beslist niet hetzelfde als het =-teken. De notatie $3 \times (4 + 1) \Rightarrow 15$ is onjuist, correct is $3 \times (4 + 1) = 15$.
Een dubbele pijl $\Leftrightarrow$ staat voor: uit links volgt rechts maar ook andersom. $A \Leftrightarrow B$ betekent: als bewering A waar is dan is bewering B waar ($A \Rightarrow B$) én als bewering B waar is, is bewering A waar ($B \Rightarrow A$).Voorbeeld: $2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.
Het symbool $\approx$ wordt gebruikt bij benaderingen. Bijvoorbeeld geldt $\pi \approx 3,14$.

Opgaven bij 1.1

1 Geef op een getallenlijn alle reële getallen weer die tot de gegeven verzameling behoren en noteer de verzameling indien mogelijk als interval(len).

a $3 \leq x < 5$
b $3 \leq x < 5 \wedge 4 < x < 7$
c $3 \leq x < 5 \vee 4 < x < 7$
d $3 \leq x < 5 \wedge 7 \leq x < 8$

2 Geef op een getallenlijn alle reële getallen aan die tot de gegeven verzameling behoren en noteer de verzameling indien mogelijk als interval(len).

a $3 \leq x < \infty$
b $x < 5 \vee x > 7$
c $x < 5 \vee 4 < x < 7$
d $x < 5 \wedge x > 0$

3 Noteer met behulp van de symbolen <, >, ≤ of ≥ welke reële getallen bedoeld worden.

a $[4, 10]\backslash[5, 6]$
b $\langle 3, \infty\rangle\backslash\langle 4, 6\rangle$
c $\mathbb{R}\backslash\{4, 5, 6\}$
d $[2, 10]\backslash\langle 3, 4\rangle$

1.2 Rekenvaardigheden

We herhalen een aantal rekenregels voor het omgaan met reële getallen. Het komt helaas vaak voor dat een gevolgde oplossingsmethode correct is, maar dat door rekenfouten het resultaat fout is.

1.2.1 Rekenkundige bewerkingen

Voor de belangrijkste rekenkundige bewerkingen gebruiken we de volgende symbolen:

Optellen: + (het ‘somteken’). Een optelling wordt meestal *som* genoemd.

Aftrekken: – (het ‘verschilteken’ of ‘minteken’). Het resultaat van het aftrekken van twee getallen wordt meestal *verschil* genoemd.

Vermenigvuldigen: × of · (het ‘vermenigvuldigingsteken’ of ‘productteken’). Het ×-teken gebruiken we overigens erg weinig, de punt verdient de voorkeur. Een enkele keer wordt het *-symbool (asterisk) gebruikt. Vaak laten we het vermenigvuldigingssymbool gewoon weg. Zo is normaal gesproken $a \times b$ hetzelfde als $a \cdot b$ of ab. Een vermenigvuldiging wordt meestal een *product* genoemd.

> Bij het werken met computerprogramma’s is gebruik van een vermenigvuldigingssymbool verplicht en betekent ab iets heel anders dan $a \times b$ of $a * b$.

Delen: ÷ of / (het ‘quotiëntteken’ of ‘deelteken’) of een horizontaal deelstreepje. Zo kan voor het quotiënt van a en b zowel $a \div b$, a/b als (bij voorkeur) $\frac{a}{b}$ worden geschreven. Een deling wordt meestal een *quotiënt* genoemd.

Machtsverheffen: x^y (spreek uit: x tot de macht y). Bij vermenigvuldigingen van een getal met zichzelf gebruiken we gehele machten. Zo betekent $2 \times 2 \times 2 \times 2$ hetzelfde als 2^4.

Worteltrekken: $\sqrt[n]{}$, waarbij het positieve, gehele getal n nog ingevuld moet worden. Worteltrekken is de omgekeerde bewerking van machtsverheffen. Zo is $\sqrt[4]{16}$ (spreek uit: de vierdemachtswortel van 16) gelijk aan 2, want $2^4 = 16$. Wanneer $n = 2$ (tweedemachtswortel) schrijven we $\sqrt{}$ (we laten dus de 2 boven in het wortelteken weg). We noemen de tweedemachtswortel vrijwel altijd gewoon ‘wortel’.

Bij het rekenen met getallen worden de zes verschillende soorten bewerkingen optellen (som), aftrekken (verschil), vermenigvuldigen (product), delen (quotiënt), machtsverheffen en worteltrekken vaak gecombineerd. Bij het combineren van deze bewerkingen gelden afspraken ten aanzien van de volgorde waarin deze worden toegepast. Sommige bewerkingen hebben voorrang boven andere.

Voorrangsregels

1. Machtsverheffen en worteltrekken (hoogste prioriteit, onderling geen prioriteit ten opzichte van elkaar).
2. Vermenigvuldigen en delen (onderling geen prioriteit ten opzichte van elkaar).
3. Optellen en aftrekken (laagste prioriteit, onderling geen prioriteit ten opzichte van elkaar).

Als er geen onderlinge prioriteit bestaat tussen de bewerkingen wordt van *links naar rechts* gewerkt. Met het plaatsen van *haakjes* kan de voorrang tussen de bewerkingen verder geregeld worden: haakjes gaan altijd voor.
De prioriteitsregels kunnen onthouden worden met de notatie ‘$H(MW)(VD)(OA)$’. Hier staat de H voor haakjes (met de hoogste prioriteit), de M voor machtsverheffen,

de W voor worteltrekken, de V voor vermenigvuldigen, de D voor delen, de O voor optellen en de A voor aftrekken.
Ten slotte merken we nog op dat het niet is toegestaan om twee rekenoperatoren zonder getal of haakje na elkaar te schrijven. Zo is $--4$ niet toegestaan, $-(-4)$ wel. En 2×-3 of $2 \cdot -3$ is niet toegestaan, $2 \times (-3)$ respectievelijk $2 \cdot (-3)$ wel.
We lichten de hierboven genoemde regels toe met een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 1

- $12 + 8 - 4 = 16$
  Feitelijk staat hier $12 + 8 + (-4) = 16$; het maakt dan niet uit in welke volgorde de opteloperaties worden toegepast.
- $12 - 8 - 4 = 0$
  Werk van links naar rechts en denk eraan dat dit niet hetzelfde is als $12 - (8 - 4) = 8$; in feite staat er $12 + (-8) + (-4) = 0$.
- $12 + 4 \cdot 5 = 12 + 20 = 32$ (vermenigvuldigen gaat voor optellen)
- $(12 + 4) \cdot 5 = 16 \cdot 5 = 80$ (haakjes gaan voor)
- $5^2 - 4 \cdot 2 = 25 - 4 \cdot 2 = 25 - 8 = 17$ (eerst machtsverheffen, dan vermenigvuldigen, ten slotte aftrekken)
- $30/5/2 \cdot 4 = 6/2 \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12$
  Er is geen onderlinge prioriteit tussen vermenigvuldigen en delen, dus wordt er van links naar rechts gewerkt.
- $(3 + 4) \cdot 5 - 14 \cdot 2 = 7 \cdot 5 - 28 = 35 - 28 = 7$
  De haakjes gaan voor, dus eerst wordt er opgeteld, daarna vermenigvuldigd en ten slotte afgetrokken.
- $64/(4 \cdot 2) + 2^{3+2} = 64/8 + 2^5 = 8 + 32 = 40$
  Om $3 + 2$ staan in feite haakjes. De macht (3+2) wordt in dit voorbeeld als ‘binnenste bewerking’ gezien en moet dus eerst berekend worden.
- $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$
  Ook hier gaat de ‘binnenste’ bewerking, optellen, vooraf aan de ‘buitenste’, worteltrekken.
- $\sqrt{3^2 \cdot 4^2} = \sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = 12$
  Merk op dat hier, in tegenstelling tot het vorige voorbeeld, wel ‘gesplitst’ had mogen worden: $\sqrt{3^2 \cdot 4^2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{4^2} = 3 \cdot 4 = 12$. Blijkbaar hebben wortels de splitsingseigenschap wel bij vermenigvuldigen, maar niet bij optellen (we komen hier later op terug).
- $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$
  Tussen machtsverheffen en worteltrekken bestaat geen onderlinge prioriteit, maar hier moet eerst de ‘binnenste’ bewerking (machtsverheffen) worden uitgevoerd en vervolgens de ‘buitenste’ (worteltrekken). ■

Let goed op: $\sqrt{3^2+4^2} \neq \sqrt{3^2}+\sqrt{4^2}$ want de wortel slaat op 3^2+4^2 in zijn geheel, feitelijk staat er $\sqrt{(3^2+4^2)}$.

$\sqrt{16} \neq -4$, maar $\sqrt{16} = 4$ want een tweedemachtswortel is per definitie positief (zie paragraaf 1.2.3).

1.2.2 Breuken

Een echte breuk is een rationaal getal. Dit is een deling van twee gehele getallen: de *teller* (boven de breukstreep) en de *noemer* (onder de breukstreep).
Wanneer in een breuk de teller door de noemer gedeeld kan worden zonder rest kan de breuk geschreven worden als een geheel getal (voorbeeld: $\frac{6}{2} = 3$). Wanneer de teller niet deelbaar is door de noemer kan de breuk altijd als decimaal getal geschreven worden, door de deling zo lang voort te zetten als mogelijk is. Meestal laten we dit aan een rekenmachine over. Het resultaat is een repeterende breuk (onbeperkt aantal cijfers achter de komma) of een niet-repeterende breuk.

Voorbeeld 2

- $\frac{1}{3} = 0,\cancel{3} = 0,33333\ldots$ (repeterende breuk: de 3 herhaalt zich onbeperkt)
- $\frac{13}{5} = 2,6$ (niet-repeterend)
- $\frac{4}{11} = 0,\cancel{3}\cancel{6} = 0,363636\ldots$ (repeterende breuk: 36 herhaalt zich onbeperkt)
- $\frac{25}{8} = 3,125$ (niet-repeterend) ■

Voor het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van echte breuken gebruiken we rekenregels.

Rekenregels voor breuken

1. Wanneer de teller groter is dan de noemer is de breuk anders te schrijven door eenmaal te delen (‘uitdelen’) en de rest als nieuwe teller te gebruiken.
2. Wanneer de teller en de noemer deelbaar zijn door hetzelfde getal wordt de breuk anders geschreven door teller en noemer tegelijk door dat getal te delen. Dit heet ‘vereenvoudigen’ van de breuk.
3. Bij het vermenigvuldigen van twee breuken worden zowel de tellers als de noemers met elkaar vermenigvuldigd.
4. Bij het delen van twee breuken wordt de breuk in de teller vermenigvuldigd met het omgekeerde van de breuk in de noemer.
5. Bij het optellen of aftrekken van twee breuken met verschillende noemers worden beide breuken eerst ‘gelijknamig’ gemaakt: teller en noemer worden zodanig met hetzelfde getal vermenigvuldigd, dat beide breuken dezelfde noemer krijgen. Voor het bepalen van de gemeenschappelijke noemer wordt het zogenaamde *kleinste gemeenschappelijke veelvoud (kgv)* van de noemers genomen. Dit is het kleinste gehele getal dat een veelvoud is van alle noemers. Twee breuken met dezelfde noemer mogen worden opgeteld door de tellers op te tellen.

We illustreren deze regels met een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 3

$\frac{13}{8} = 1\frac{5}{8}$, want $\frac{13}{8} = 1 + \frac{5}{8} = 1\frac{5}{8}$, of anders geschreven

$\frac{13}{8} = \frac{8+5}{8} = \frac{8}{8} + \frac{5}{8} = 1 + \frac{5}{8} = 1\frac{5}{8}$.

Hier is rekenregel 1 toegepast.

Let wel: bij het werken met verschillende breuken (bijvoorbeeld bij het vermenigvuldigen of optellen van twee verschillende breuken) is het vaak handiger om met 'echte breuken' te werken, dus met $\frac{13}{8}$ in plaats van $1\frac{5}{8}$.

Een getal als $1\frac{5}{8}$ moet in een rekenmachine of een computeralgebrapakket ingevoerd worden als $1 + \frac{5}{8}$ (of natuurlijk direct als $\frac{13}{8}$). ■

Voorbeeld 4

$\frac{8}{6} = \frac{\frac{8}{2}}{\frac{6}{2}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ of $\frac{8}{6} = \frac{2 \times 4}{2 \times 3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ (de factor 2 wordt 'weggedeeld')

We zien hier een toepassing van rekenregel 2. ■

Voorbeeld 5

$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$

De tellers en de noemers zijn met elkaar vermenigvuldigd (rekenregel 3). ■

Voorbeeld 6

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{11}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{11}{7} = \frac{33}{28} = 1\frac{5}{28}$$

De bovenste breuk is vermenigvuldigd met het omgekeerde van de onderste breuk (rekenregel 4). Feitelijk worden de breuken in teller en noemer beide vermenigvuldigd met het omgekeerde van de noemer:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{11}} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{11}{7}}{\frac{7}{11} \cdot \frac{11}{7}} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{11}{7}}{1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{11}{7} = \frac{33}{28} = 1\frac{5}{28}$$ ■

Voorbeeld 7

De breuken in de volgende voorbeelden worden steeds op gelijke noemers gebracht (rekenregel 5).

- $\frac{3}{4} + \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{7} + \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{4} = \frac{21}{28} + \frac{20}{28} = \frac{41}{28} = 1\frac{13}{28}$
- $\frac{3}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{4} + \frac{1}{12}$ (het kgv van 2, 3 en 12 is 12)

  $= \frac{18+4+1}{12} = \frac{23}{12} = 1\frac{11}{12}$

➤ $\frac{3}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{12}{12}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{12}{12}+\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{3}$

$$=\frac{108+24+6}{72}=\frac{138}{72}$$

$$=\frac{23}{12}=1\frac{11}{12}$$

Het onder één noemer brengen gebeurde in het laatste voorbeeld op een minder subtiele manier: de noemers werden gewoon met elkaar vermenigvuldigd. Om tot hetzelfde eindresultaat te komen moest daarna wel verder vereenvoudigd worden. ■

Voorbeeld 8

Ook in het volgende voorbeeld wordt rekenregel 5 gebruikt. Soms is enige voorbereiding daartoe vereist.

$$\begin{aligned}2\tfrac{1}{2}+3\tfrac{5}{7}&=2+\tfrac{1}{2}+3+\tfrac{5}{7}\\&=\left(\tfrac{4}{2}+\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{21}{7}+\tfrac{5}{7}\right)\\&=\tfrac{5}{2}+\tfrac{26}{7}\\&=\tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{7}{7}+\tfrac{26}{7}\cdot\tfrac{2}{2}\\&=\tfrac{35+52}{14}=\tfrac{87}{14}=6\tfrac{3}{14}\end{aligned}$$

$2\frac{1}{2}$ en $3\frac{5}{7}$ werden eerst als een echte breuk geschreven en pas daarna gelijknamig gemaakt. We hadden ook als volgt kunnen werken:

$$\begin{aligned}2\tfrac{1}{2}+3\tfrac{5}{7}&=2+\tfrac{1}{2}+3+\tfrac{5}{7}\\&=2+3+\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{5}{7}\right)\\&=5+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{7}{7}+\tfrac{5}{7}\cdot\tfrac{2}{2}\\&=5+\tfrac{17}{14}=6\tfrac{3}{14}\end{aligned}$$

■

1.2.3 De definitie van een wortel

De wortel van een gegeven niet negatief reëel getal is het *niet-negatieve* getal waarvan het kwadraat gelijk is aan het gegeven getal. Zo is bijvoorbeeld $\sqrt{9}=3$ want $3^2=9$. Bedenk dat er in werkelijkheid altijd twee getallen zijn waarvan het kwadraat gelijk is aan een gegeven positief getal (ook $(-3)^2=9$), maar de wortel uit 9 is uitsluitend gedefinieerd als +3. De wortel uit een negatief getal bestaat niet als reëel getal, want een kwadraat is nooit negatief.
Daarentegen bestaat de wortel uit een n-de machtswortel van een negatief getal wel, mits n oneven is. Zo is $\sqrt[3]{-27}=-3$, want $(-3)^3=-27$. $\sqrt[4]{-64}$ bestaat echter niet, want wanneer een getal tot een even macht verheven wordt is het resultaat altijd positief.

Wanneer een wortel wordt uitgerekend met een rekenmachine zal altijd de numerieke waarde verschijnen. In het display van de rekenmachine staat een afgerond antwoord. In het geheugen van de rekenmachine staan echter meer decimalen. Dus: het getal in het display is vaak niet het exacte antwoord!
Daarom wordt een wortel in de praktijk vaak niet als decimaal getal geschreven, maar blijft het wortelsymbool gewoon staan. Wel kan een wortel vaak anders geschreven worden. Daarbij wordt gebruik gemaakt van de volgende eigenschappen:

- $\sqrt{\text{getal 1} \cdot \text{getal 2}} = \sqrt{\text{getal 1}} \cdot \sqrt{\text{getal 2}}$
- $\sqrt{\dfrac{\text{getal 1}}{\text{getal 2}}} = \dfrac{\sqrt{\text{getal 1}}}{\sqrt{\text{getal 2}}}$

Voorbeeld 9

➤ $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

In dit voorbeeld wordt gebruik gemaakt van de eigenschap
$\sqrt{\text{getal 1} \cdot \text{getal 2}} = \sqrt{\text{getal 1}} \cdot \sqrt{\text{getal 2}}$.

➤ $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

Teller en noemer worden met hetzelfde getal ($\sqrt{2}$) vermenigvuldigd om de wortel uit de noemer weg te krijgen.

➤ $\sqrt{\dfrac{3}{8}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{6} = \dfrac{1}{4}\sqrt{6}$

Ga na dat hier de eigenschap is gebruikt dat $\sqrt{\dfrac{\text{getal 1}}{\text{getal 2}}} = \dfrac{\sqrt{\text{getal 1}}}{\sqrt{\text{getal 2}}}$ én de eigenschap dat $\sqrt{\text{getal 1} \cdot \text{getal 2}} = \sqrt{\text{getal 1}} \cdot \sqrt{\text{getal 2}}$.

Een andere manier om $\sqrt{\dfrac{3}{8}}$ te herleiden is de volgende:

➤ $\sqrt{\dfrac{3}{8}} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3 \cdot 2}}{\sqrt{8 \cdot 2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{16}} = \dfrac{1}{4}\sqrt{6}$

Door teller en noemer met $\sqrt{2}$ te vermenigvuldigen wordt in de noemer een kwadraat gecreëerd. ■

De hiervoor genoemde eigenschappen gelden ook voor *n*-de machtswortels. We geven twee voorbeelden van het herleiden van een *n*-de machtswortel.

Voorbeeld 10

➤ $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{2} = 2 \cdot \sqrt[3]{2}$

➤ $\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{6}$ ■

Opgaven bij 1.2

1 Bereken zonder rekenhulpmiddelen.

a $30 - 2^3 + 4 \cdot 3 - 5$

b $500/10/2 \cdot 3$

c $43 - 4 \cdot 2 - (5 - 3)$

d $4^{3+1} - (2 \cdot 5 + 9/3)$

e $24/4 \cdot 3 - 3 \cdot 4/6$

f $3^2 + 2^{3 \cdot 2}/8$

g $2 + 3 \cdot 4 - 24/2^2$

h $16 - (4 - 5^2)$

i $\sqrt{5^2 + 12^2}$

2 Vul de tabel in.

x	x^2	$-x^2$	$(-x)^2$	x^3	$2x^2$	$(2x)^2$
2						
-2						
$\frac{1}{2}$						
$2\frac{1}{2}$						

3 Herleid tot één breuk zonder rekenhulpmiddelen te gebruiken.

a $3\frac{4}{13} - 2\frac{1}{5}$

b $\dfrac{\frac{5}{6}}{2} + \dfrac{2\frac{1}{2}}{4}$

c $\dfrac{\frac{4}{7}}{\frac{1}{5}} - \dfrac{3}{\frac{3}{2}} + 3\frac{1}{2}$

d $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{5}{12} - 3\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4}$

e $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(3\frac{1}{2}\right)^2$

f $\dfrac{\frac{4}{5}}{2\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{5}{8}$

g $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$

h $2\frac{1}{2}\left(3 + \frac{2}{3} \cdot 2\right)$

4 Werk de wortels in de linkerleden uit tot de wortels in de rechterleden.

a $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

b $\sqrt[3]{32} = 2 \cdot \sqrt[3]{4}$

c $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

d $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

e $\sqrt[4]{80} = 2 \cdot \sqrt[4]{5}$

f $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$

5 Werk de uitdrukkingen om zoals in voorbeeld 9.

a $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

b $\dfrac{6}{\sqrt{2}}$

c $\sqrt{\frac{1}{8}}$

d $7\sqrt{\frac{1}{7}}$

e $\sqrt{\frac{4}{5}}$

f $\dfrac{2}{\sqrt{8}}$

1.3 Symbolisch rekenen

Bij het opstellen, herleiden en combineren van formules of vormen moet met symbolen gerekend worden. Met een aantal regels wordt symbolisch rekenen gemakkelijker. Formules zijn uitdrukkingen met symbolen (bijvoorbeeld letters) voor de variabelen die erin voorkomen, bijvoorbeeld $U = R \cdot I$ (de wet van Ohm). Een formule bevat in principe altijd een linkerlid, een rechterlid en een scheidingssymbool, meestal een =-teken. In het linkerlid staat meestal de variabele, die moet worden berekend met behulp van de variabelen in het rechterlid. In het rechterlid staat een *vorm* met één of meer variabelen, die aan elkaar gekoppeld zijn door rekenkundige bewerkingen en/of functies (zie hoofdstuk 2). Als de variabele(n) in het rechterlid bekend zijn kan de variabele in het linkerlid worden berekend. Bijvoorbeeld in de formule $U = R \cdot I$ kan U worden berekend als R en I bekend zijn. Als echter U en I bekend zijn, dan kan R worden berekend door de formule eerst om te werken naar $R = \frac{U}{I}$ (in de oorspronkelijke uitdrukking van de wet van Ohm is aan beide kanten van het =-teken gedeeld door de variabele I). Ga dit zelf na. Dit is een voorbeeld van rekenen met symbolen.
In formules of vormen gelden de volgende afspraken over de naamgeving.

Definities

1. Wanneer in een formule of vorm een product voorkomt spreken we van een product van *factoren*. In het product $a \cdot b$ heten a en b dus de factoren.
2. Wanneer in een formule of vorm gedeeld wordt spreken we (net als bij getallen) van een quotiënt. Een quotiënt heeft een *teller* (boven de breukstreep) en een *noemer* (onder de breukstreep). In het quotiënt $\frac{a}{b}$ heet a de teller en b de noemer.
3. Wanneer in een uitdrukking een som (of verschil) voorkomt spreken we van de som of het verschil van *termen*. In $a + b$ heten a en b dus de termen.

De punten als vermenigvuldigingssymbolen laten we bij symbolisch rekenen meestal weg. In plaats van $a \cdot b$ schrijven we dan ab.

Voorbeeld 11

➤ Het rechterlid van de formule $R = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$ is een quotiënt. De teller is de som van de termen R_1 en R_2 en de noemer is het product van de factoren R_1 en R_2.

➤ Het rechterlid van de formule $p = \frac{a(c + d)}{br + kt}$ is ook een quotiënt. In de teller staat het product van de factor a en de omhaakte factor $(c + d)$. In de noemer worden de termen br en kt opgeteld. In br zijn b en r factoren, in kt zijn k en t factoren en in factor $(c + d)$ zijn c en d termen. ■

1.3.1 Wegwerken van haakjes

Vaak worden in formules haakjes gebruikt. Wanneer het nodig is om die haakjes weg te werken geldt de *distributieve eigenschap* (verdeeleigenschap) voor vermenigvuldigen.

Van een product naar een som of verschil (distributieve eigenschap)

$$a(b+c) = ab + ac \tag{1.1}$$

$$a(b-c) = ab - ac \tag{1.2}$$

$$(a+b)\,c = ac + bc \tag{1.3}$$

$$(a-b)\,c = ac - bc \tag{1.4}$$

Voorbeeld 12

- $x(5-y) = 5x - xy$
- $x(x^2 + 5x - 6) = x^3 + 5x^2 - 6x$
- $(5x - 7y)\,z = 5xz - 7yz$
- $-(3x-2) + 5(x-5) = -1(3x-2) + 5x - 25 = -3x + 2 + 5x - 25 = 2x - 23$

Voor het wegwerken van de haakjes om de eerste term is ter verduidelijking eerst de factor -1 toegevoegd. ■

Met deze regels kunnen nieuwe regels worden afgeleid.

Zo geldt: $(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd.$

Ook geldt: $(a+b)(a+c) = a(a+c) + b(a+c) = a^2 + ac + ba + bc$

$$= a^2 + (b+c)\,a + bc.$$

Ga deze twee herleidingen zorgvuldig na.

De volgende drie formules worden ook wel *merkwaardige producten* genoemd. Deze merkwaardige producten komen zo vaak voor dat het sterk aan te bevelen is om ze uit het hoofd te leren.

Van een product naar een som of verschil (merkwaardige producten)

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \tag{1.5}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1.6}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{1.7}$$

> **Opdracht**
> Leid de merkwaardige producten zelf af met behulp van de distributieve eigenschappen.

Bij $ab = ba$ zien we de *commutatieve eigenschap* (ook wel: wisseleigenschap van vermenigvuldigen). Bij de afleiding van de merkwaardige producten wordt deze eigenschap toegepast. Vanwege de duidelijkheid schrijven we liever *ab* dan *ba*. Dit geldt zeker voor een product van een variabele en een getal, zoals $a \cdot 2$; dit wordt vrijwel altijd geschreven als $2a$ (getallen dus vóór symbolen). Maar het product $\sqrt{3}\,a$ schrijven we liever als $a\sqrt{3}$ om verwarring te voorkomen. De factor a staat immers niet onder de wortel!

$a(bc) = (ab)c = abc$, dit is de *associatieve eigenschap* van vermenigvuldigen. Een veel gemaakte fout is: $a(bc) = (ab)(ac)$. Hierbij wordt de associatieve eigenschap verward met de distributieve eigenschap.

Voorbeeld 13

- $4(4x+2) - 3(2x-4) = 4 \cdot 4x + 4 \cdot 2 - (3 \cdot 2x - 3 \cdot 4)$
  $= 16x + 8 - 6x + 12 = 10x + 20$
- $2b\left(\frac{1}{2}a + b\right) = 2b \cdot \frac{1}{2}a + 2b \cdot b = ab + 2b^2$
- $(3x-4)(x+2) = 3x \cdot x + 3x \cdot 2 - 4 \cdot x - 4 \cdot 2 = 3x^2 + 6x - 4x - 8$
  $= 3x^2 + 2x - 8$
- $(x-4)(x+4) = x^2 - 16$ (toepassen van (1.5))
- $(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$ (toepassen van (1.7))
- $(x^2-2)^2 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 2 + 2^2 = x^4 - 4x^2 + 4$ (toepassen van (1.7)) ■

1.3.2 Ontbinden in factoren

Hiervoor hebben we laten zien hoe haakjes kunnen worden weggewerkt. Vaak is ook het omgekeerde nodig: haakjes aanbrengen. In dat geval zetten we meestal een som van een aantal *termen* om in een product van *factoren*. Daarom heet deze bewerking *ontbinden in factoren*.
Voor het ontbinden in factoren worden dezelfde regels gebruikt als voor het wegwerken van haakjes, maar dan omgekeerd.

Van een som naar een product

$$ab + ac = a(b+c) \qquad (1.8)$$

$$a^2 + (b+c)a + bc = (a+b)(a+c) \qquad (1.9)$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \qquad (1.10)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \qquad (1.11)$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \qquad (1.12)$$

Regel (1.8) heet: buiten haakjes halen (immers: de gemeenschappelijke factor a in de termen ab en ac is buiten de haakjes geplaatst).
De regels (1.10), (1.11) en (1.12) zijn de reeds genoemde merkwaardige producten, maar dan anders opgeschreven. In feite zijn het bijzondere gevallen van regel (1.9).

Een vorm van het type $a^2 + b^2$ is niet te ontbinden!
$a^2 + b^2 \neq (a+b)^2$ (vergelijk met regel (1.11))

WISKUNDE & STATISTIEK

WISKUNDE

TOEGEPASTE WISKUNDE VOOR HET HOGER ONDERWIJS | DEEL 1

De serie Toegepaste Wiskunde voor het hoger onderwijs is geschikt voor alle opleidingen in het hoger onderwijs waar wiskundige vaardigheden een belangrijke plaats innemen en met name voor de sector Techniek. De nadruk ligt op het trainen van (elementaire) vaardigheden van de wiskunde.
De student past de wiskundige vaardigheden zoveel mogelijk toe in praktische situaties.

De serie kent de volgende indeling:

- Inleiding: behandelt het basisniveau wiskunde; ook geschikt voor het wegwerken van een wiskundedeficiëntie.
- Deel 1: behandelt (vrijwel) de gehele propedeusewiskunde van het technisch hbo.
- Deel 2: is vooral bedoeld voor het wiskundeonderwijs ná de hbo-propedeuse. Bij technische universiteiten zal deze stof nog wel tot de propedeuse behoren.

In dit deel 1 krijgt de student veel oefeningen aangereikt. Met voorbeelden wordt de student door de stof geleid. Er is veel gedaan om het inzicht en de routine in wiskundige concepten te vergroten, maar ook wiskundige contexten krijgen voldoende aandacht. Uitvoerige, formele bewijzen komen nauwelijks voor.
Elk hoofdstuk bevat naast een groot aantal opgaven ook een aantal Maplevoorbeelden en -vraagstukken, die ook met een ander computeralgebrasysteem (of een grafische rekenmachine) te maken zijn.

Op de website vindt de student aanvullend studiemateriaal, zoals de uitwerkingen van de vraagstukken uit de herhalingsopgaven.

Dit deel 1 is een onmisbaar hulpmiddel voor iedere student die zich wiskundige vaardigheden en concepten op een praktische manier eigen wil maken.

HOGER ONDERWIJS

9 789006 487305