

Inhoud

Voorwoord door Gordon Hamilton, Canadees wiskundige, bordspel- en puzzelontwerper	X
Voorwoord door James Tanton, onderzoekswiskundige Mathematical Association of America, Washington DC	XIII
Ten geleide	XIV
Inleiding	XIX
Hoofdstuk 1 Een blij brein	1
1.0 Alles is wiskunde	2
1.1 Natuurlijk gevoel voor getallen	5
1.1.1 Ons wiskundig brein	5
1.1.2 Gevoelig voor wiskundige verrassingen	6
1.1.3 Statistiek door baby's	7
1.1.4 Aantallen begrijpen dankzij subitizing	9
1.1.5 Woorden begrijpen door te voorspellen	9
1.1.6 Liefhebber voor de klas	9
1.2 Onnatuurlijk onderwijs	10
1.2.1 Rekenen = wiskunde	10
1.2.2 Reken-/wiskundeangst	12
1.2.3 Angst voor onvoldoendes	13
1.2.4 Huiswerk voor de leraar	15
1.2.5 Inzicht in het leerproces	17
1.2.6 Aantekeningen maken om het leren te verbeteren ...	19
1.3 Spelenderwijs leren	20
1.3.1 Het waarom	20
1.3.2 Creatief denken	22
1.3.3 Onderpresteren voorkomen	24
1.3.4 Het belang van autonomie	27
1.3.5 Spelen = leren	27
1.4 Betekenisvol reken-wiskundeonderwijs	29
1.4.1 Vroeger was het beter?	29
1.4.2 Realistisch rekenen	29
1.4.3 Breken en delen	32
1.4.4 Problemen oplossen vanuit het onderbewustzijn ..	34

Hoofdstuk 2	De psychologie die het leren bevordert	37
2.0	Waarom we doen wat we doen	38
2.1	Supercomputer met blinde vlekken	40
2.1.1	Hoe werkt ons brein?	40
2.1.2	Hersenen voorspellen wat je ziet	43
2.1.3	Snel beslissen dankzij filtersysteem	43
2.1.4	Jouw wiskundig brein (ver)oordeelt	45
2.1.5	Jouw wiskundig brein ontwikkelt zich	46
2.1.6	Jouw wiskundig brein denkt niet altijd logisch	47
2.2	Ons lerende brein	48
2.2.1	Dynamische landkaart	48
2.2.2	Onderbewustzijn	49
2.2.3	De ontwikkeling van je brein	49
2.2.4	Emotieconcepten	50
2.2.5	Emotiewoorden	52
2.2.6	Emotiewoorden hercategoriseren	53
2.2.7	Reset je brein met meditatie voor meer weerstand	54
2.2.8	Slaap als oplader en creatieve leeromgeving	56
2.3	Geloven in groei	58
2.3.1	Krachtige gedachten	58
2.3.2	Groeimindset	58
2.3.3	Zelfvertrouwen	60
2.3.4	Motivatie	61
2.3.5	Goede voornemens	63
2.3.6	Wilskracht	64
2.4	Krachtig zelfbeeld	66
2.4.1	Kernkwaliteiten	66
2.4.2	Kernkwadrant	67
2.4.3	Logische niveaus	68
2.4.4	Human dynamics	70
2.5	Van stress naar flow	74
2.5.1	Stressvolle situaties	74
2.5.2	Hoe de natuur het heeft bedoeld	74
2.5.3	De positieve intentie van belemmerende gedachten	75
2.5.4	Probleem- of emotiegericht	76
2.5.5	Emoties relativeren	79
2.5.6	In de flow	80
Hoofdstuk 3	De Mathplay-methode	83
3.0	Bereidheid om te denken stimuleren	84
3.1	Durven	86
3.1.1	Geloven in jezelf	86
3.1.2	De comfortzone	89

3.1.3	Belemmerende patronen en overtuigingen	90
3.1.4	Als-dan-planning	93
3.1.5	Doelen stellen	93
3.1.6	Het SMART-model	95
3.1.7	Verantwoordelijkheid nemen over je eigen gevoelens	96
3.2	Doen	98
3.2.1	Visualiseren	98
3.2.2	Focus op het proces	100
3.2.3	Constructieve feedback	100
3.2.4	Concentratie	102
3.2.5	Prioriteiten stellen	103
3.2.6	De psychologie van verandering	105
3.2.7	Strategie: het TOTE-model	106
3.3	Begrijpen	108
3.3.1	Zonder begrip geen leermoment	108
3.3.2	De cirkel van invloed	111
3.3.3	De impact van jouw stemming op de klas	112
3.3.4	Kracht van kwetsbaarheid en empathie	113
3.3.5	De kracht van vragen stellen	114
3.3.6	Strategisch uitstelgedrag	114
3.3.7	Varieer je aanbod	115
3.4	De kracht van de Mathplay-methode	116
3.4.1	De Mathplay-formule	116
3.4.2	Herkennen wat er 'mist'	116
3.4.3	Durven-Doen-Begrijpen in het vierstaps leermodel	119
3.4.4	Drie tips	122
3.4.5	Coachen met de Mathplay-methodiek	123
3.4.6	Spelenderwijs leren	127
Hoofdstuk 4	Durven-Doen-Begrijpen in de praktijk	129
4.0	De perfecte leraar versus de ideale leraar	130
4.1	Durven: heb het lef om te vertrouwen	131
4.1.1	Falen om te leren	131
4.1.2	Uitleg geven?	132
4.1.3	Productief falen	133
4.1.4	Voorkennis activeren	134
4.1.5	Een psychologisch onderzoek	134
4.1.6	Durf verwachtingen uit te spreken	135
4.1.7	Creëer heldere verwachtingen én de juiste sfeer dankzij preframes	136
4.1.8	Autonomie ondersteunen	138

4.2	Doen: proactief de verbinding aangaan	140
4.2.1	Samen leren	140
4.2.2	Gedrag lokt gedrag uit: roos van Leary	141
4.2.3	Een conflict? OK-kwadrant	142
4.2.4	Verbindende communicatie	145
4.2.5	Provocatieve coaching	146
4.2.6	Waarom humor zo belangrijk is	149
4.2.7	Let op een congruente lichaamshouding	151
4.2.8	Gedragsverandering ondersteunen	152
4.3	Begrijpen: ontdek blinde vlekken en verborgen vermogens	153
4.3.1	De kunst van het vragen stellen	153
4.3.2	Onthullen van een verborgen gedachtegang	155
4.3.3	Constructieve gesprekken voeren	157
4.3.4	Het belang van 'common sense'	159
4.3.5	Durf om hulp te vragen	160
4.4	De wiskundige formule van je brein	161
4.4.1	Je weet niet wat je niet weet	161
4.4.2	De stelling van Bayes	163
4.4.3	Soldaten- versus verkennermentaliteit	164
4.4.4	De waarschijnlijkheid van je gedachten	165
4.4.5	Een verkennermindset ontwikkelen	168
4.4.6	Leer de wiskunde	169
4.4.7	Bayesiaanse hersentheorie	171
4.4.8	De kunst van het zeker weten	172

Hoofdstuk 5	Wiskundeplezier	175
5.0	Spelend leren 2.0	176
5.1	Wiskundeplezier als avontuur	178
5.1.1	Productief vastzitten	178
5.1.2	De illusie van eerste ontdekking	179
5.1.3	Maak het beeldend	180
5.1.4	Waarderen en aanmoedigen	181
5.1.5	Onnodig moeilijk werk vermijden	182
5.2	Wiskundeplezier activeren met werkvormen	182
5.2.1	Effectieve lessen	182
5.2.2	Activerende werkvormen	183
5.2.3	Afsluiting	187
5.3	Wiskundeplezier verspreiden	188
5.3.1	Exploderende stippen (Global Math Project)	188
5.3.2	Prime Climb (Mathforlove)	189

5.3.3	De draad van Ariadne (Mathpickle)	189
5.3.4	Sangaku-domino (Mathplay)	189
5.3.5	Splijten en Splitsen (Mathpickle)	190
5.3.6	Wedstrijden en evenementen	191
5.4	Eriks tips voor wiskundeplezier	192
5.4.1	Vijf tips waarmee je beter in rekenen-wiskunde kunt worden	192
5.4.2	Drie tips voor een blij brein	193
5.4.3	Handvatten voor ouders	194
Nawoord		196
Dankwoord		198
Links bij paragrafen		200
Bronnenlijst		201
Over de auteur		205
Antwoorden		206
Bijlagen		210
Bijlage 1	Take 10	210
Bijlage 2	Mindfulness met origami	211
Bijlage 3	Ontdek je kwaliteiten	211
Bijlage 4	Van negatief naar een positief	213
Bijlage 5	De invloed van je omgeving	214
Bijlage 6	Negen bijzondere manieren om iemand in zijn kracht te zetten	215
Bijlage 7	Vier stappen om je boosheid te uiten zonder ruzie te maken	216
Spel:	Bayesiaans beredeneren	216

1.0 Alles is wiskunde

“Alles is wiskunde!” Met deze slogan begin ik mijn wekelijkse vlog op YouTube. In maart 2020, aan het begin van de corona-uitbraak, maakte ik een aflevering over de groei van een virus. Deze link vind je bij ‘Links bij paragrafen’. Het leek me een interessante mogelijkheid om aan de hand van de reeds gepubliceerde cijfers een berekende voorspelling te doen. Daarvoor keek ik naar de cijfers van de dagen ervoor. Deze zette ik in een tabel, om te kijken of ik er een patroon in kon ontdekken, want dat is wat wiskundigen doen. Ik ontdekte dat het aantal geregistreerde zieke mensen al wekenlang constant aan het verdubbelen was, elke 4 dagen. Met dit model kon ik bij onveranderde groei een voorspelling doen over het aantal zieken per dag voor de zondag erna. En de getallen bleken overeen te komen, wat voor mij niet erg verrassend was, maar bijzonder genoeg voor heel veel mensen wel. Begrip van deze theorie van exponentiële groei kan helpen de waarde van dagelijkse oefening te zien (zie ook paragraaf 3.2, ‘Doen’).

Door wiskundige problemen te koppelen aan de dagelijkse praktijk is het mogelijk om bewustwording te creëren. Het kan je helpen diepgaand begrip te vormen en kan leiden tot een blijvende gedragsverandering. Wanneer je een dergelijke ‘ontdekking’ doet en écht iets begrijpt, geeft dat een euforisch gevoel. Alsof je superkrachten hebt. Dat is wiskundeplezier!

Ik weet nog goed hoe ik dat plezier ervoer in de wiskundelessen van Herman Alink. “Het zijn kicks voor niks!” riep hij altijd wanneer hij ergens enthousiast over raakte, en dat was vrijwel iedere les het geval. Hij wist me te prikkelen om problemen op te lossen waar mijn klasgenootjes geen zin in leken te hebben.

Achilles en de schildpad



Een schildpad daagde de snelvoetige Achilles uit voor een hardloophwedstrijd. Hij beweerde dat hij zou winnen als Achilles hem een kleine voorsprong gaf. Achilles moest lachen, want hij was natuurlijk een machtige strijder, snel van voet, terwijl de schildpad zwaar en langzaam was.

“Hoeveel voorsprong?” vroeg hij de schildpad met een glimlach.

“Tien meter,” antwoordde deze. Achilles lachte harder dan ooit. “Dan ga jij zeker verliezen, vriend,” vertelde hij de schildpad, “maar laten we vooral rennen, als je dat graag wilt.”

“Integendeel,” zei de schildpad, “ik zal winnen, en ik kan het u met een eenvoudige redenering bewijzen.” “Kom op dan,” antwoordde Achilles, die al iets minder vertrouwen voelde dan eerst. Hij wist dat hij de superieure atleet was, hij wist ook dat de schildpad een scherper verstand had, en dat hij al vaak een discussie met het dier had verloren. “Veronderstel,” begon de schildpad, “dat u me een voorsprong van 10 meter geeft. Zou u zeggen dat u die 10 meters tussen ons snel kunt afleggen?” “Zeer snel,” bevestigde Achilles.



“En hoeveel meter heb ik in die tijd afgelegd, denkt u?” “Misschien een meter – niet meer,” zei Achilles na even nagedacht te hebben. “Zeer goed,” antwoordde de schildpad, “dus nu is er een meter afstand tussen ons. En zou u die achterstand snel inlopen?” “Zeer snel inderdaad!”

“En toch zal ik in die tijd verdergegaan zijn, zodat u díe afstand moet inhalen, ja?” “Eh, ja,” zei Achilles langzaam. “En terwijl u dat doet, zal ik een stukje verder gegaan zijn, zodat u steeds een nieuwe achterstand moet inlopen,” ging de schildpad stug door. Achilles zei niets. “En zo ziet u, elke periode dat u bezig bent uw achterstand in te halen zal ik gebruiken om een nieuwe afstand, hoe klein ook, aan die achterstand toe te voegen.” “Inderdaad, daar valt geen speld tussen te krijgen,”

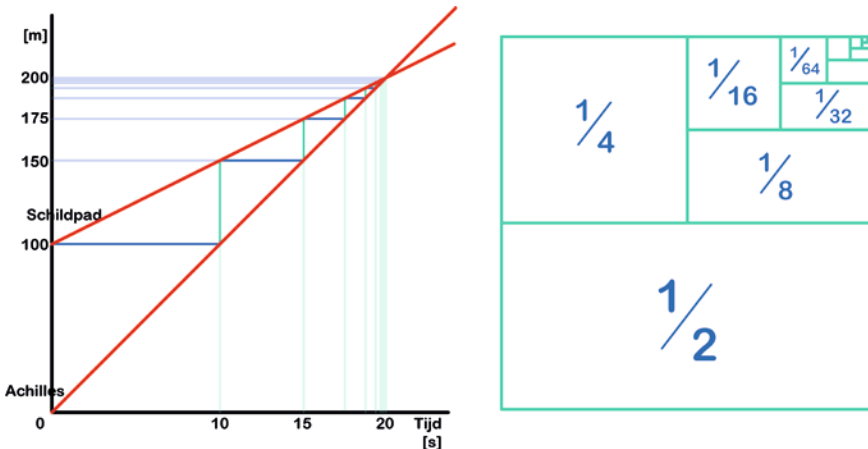
antwoordde Achilles, nu al vermoeid. “En zo kunt u nooit de achterstand inlopen,” besloot de schildpad met een sympathieke glimlach. “U heeft gelijk, zoals altijd,” besloot Achilles droevig – en gaf de race gewonnen.

Met een strak gezicht, net als de schildpad, wist mijn wiskundedocent Herman Alink de klas te overtuigen van deze waarheid. Een enkeling probeerde tevergeefs tegengas te geven. Ook ik had de gereedschappen nog niet om te overzien wat er precies niet klopte. Maar alles in mijn lichaam was in opstand; dit raakte me. Vooral ook dat de hele klas bereid was dit als waarheid te accepteren. Dit kán niet waar zijn!

Gelukkig gooide Herman er een schepje bovenop en trok het probleem in het absurde. Hij vervolgde: “Weet je jongelui, het is allemaal nog meer bijzonder als je er goed over nadenkt. Als ik nu uit het raam zou springen, zou ik nooit op de grond terechtkomen. Heel logisch met wiskunde te verklaren. Want ik leg eerst de helft van de afstand af. Vervolgens leg ik weer de helft af van de afstand die over is. Daarna weer de helft van wat er over is. Dit kan ik oneindig lang blijven doen toch? Er is geen kleinste afstand, ik kan steeds de helft nemen, hoe klein ook ...”

Dit kon ik niet meer accepteren. Ik reageerde: “Dit klopt gewoon niet! Je doet nu net alsof je kunt inzoomen in de tijd! De tijd gaat door en de val ook.”

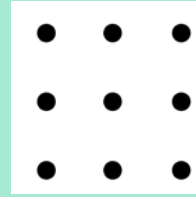
Herman lachte, hij had zijn doel bereikt. Met een brede glimlach tekende hij een grafiek op het bord en een vierkant. Beide situaties legde hij grafisch uit. Hij koppelde in één klap een grafische voorstelling van afstand-tijd, rijen, breuken, limieten, hellingsgetallen en meer aan elkaar.



Achter in het boek staat uitleg over dit probleem bij Antwoorden 1.

Hij was een held in storytelling, een strategisch wapen met onvoorstelbare kracht. Hij wist de meest ongeïnteresseerde en ongeïnspireerde leerlingen te raken, door ze plezier te laten beleven aan de hand van inzichten in hoe alles met elkaar is verbonden. Dat is exact hoe ik nu anderen wil inspireren: door wiskundeplezier te verspreiden.

Een mooi voorbeeld van de kicks die wiskundeplezier kan bewerkstelligen, is deze puzzel. De opdracht is om alle 9 stippen in één beweging met 4 lijnen te verbinden, zonder je potlood van het papier te tillen. Bij deze opdracht vind je de oplossing door buiten het (onzichtbare) kader te tekenen. Dit is misschien wel de belangrijkste eigenschap van wiskundig denken: out of the box denken door te proberen en steeds bij te stellen. (Uitwerking achter in het boek, zie Antwoorden, nummer 2).



Door ervaringen op te doen met creatieve wiskunde, amusante problemen op te lossen en te spelen met vormen en getallen kun je bijzondere inzichten krijgen. Dat doe je met wiskundeplezier; een avontuur dat je met vertrouwen aangaat, zonder dat je weet waar je eindigt. Het veroorzaakt een gevoel van amusement en blijdschap, opwindend, aangrijpend, aantrekkelijk en pakkend. Het zorgt voor een meeslepende belevenis vol verbazing, verwondering en vreugde.

In de volgende paragrafen beschrijf ik hoe wiskundeplezier resoneert met een natuurlijk getalgevoel, dat we allemaal hebben en waar de kunst veelvuldig gebruik van maakt. In het onderwijs zijn die gevoelens van verwondering vaak ver te zoeken en is er eerder sprake van wiskundeangst. Hoe dit kan ontstaan, beschrijf ik in paragraaf 1.2, om vervolgens de focus te leggen op spelenderwijs leren. Om wiskunde weer leuk te maken is het ook belangrijk om leerlingen te motiveren. Iedereen die weleens heeft geprobeerd een kind iets te laten doen wat het niet leuk vond, weet hoe lastig dat kan zijn. Daarom gaat het in paragraaf 1.3 vooral om motivatie en autonomie. Hoe je deze kunt inzetten om een effectief leerklimaat te creëren, beschrijf ik in paragraaf 1.4.

1.1 Natuurlijk gevoel voor getallen

1.1.1 Ons wiskundig brein

Toen ik op de middelbare school mijn wiskundetoetsen foutloos maakte, kreeg ik vaak te horen dat ik bijzonder getalenteerd was. Ik leek hierin een buitenbeentje, alsof ik een bepaald gen bezat dat anderen niet bezaten. Niemand legde destijds een verband tussen mijn buitenschoolse activiteiten en mijn schoolresultaten. Talloze uren heb ik als enig kind met Lego gespeeld, ik hield van puzzelen, raadsels oplossen en patronen inkleuren. Ook speelde ik graag spellen; bestaande competitieve spellen, maar ook verzon ik mijn eigen spellen en bedacht ik daarbij de spelregels. Via de cognitieve neurowetenschap weten we inmiddels dat dit activiteiten

zijn waarmee we ons wiskundig brein kunnen ontwikkelen en dat elk mens zo'n wiskundig brein bezit.

Recent onderzoek heeft aangetoond dat kleuters en volwassenen uit de Amazone die geen formeel onderwijs hebben genoten toch in het bezit zijn van geavanceerde intuïties voor geometrie met een intuïtieve wiskundige 'taal van het denken' (Dehaene, 2011). Het is niet voor niets dat Galileo al opmerkte: "De wetten van de natuur zijn geschreven in de taal van de wiskunde." Binnen de structuur van ons brein is er een aantoonbaar gebied gereserveerd voor getalbegrip, dat ook bij sommige dieren aanwezig is.

De allereerste mensen hadden al wiskundig inzicht. Dat weten we omdat er grottekeningen van geometrische vormen zijn ontdekt, die worden geschat op 73.000 jaar oud. Zelfs de homo erectus tekende al abstracte patronen, zo'n 540.000 jaar geleden. Dergelijke tekeningen hebben volgens paleoantropologen een menselijke oorsprong, aangezien andere niet-menselijke primaten nooit gestructureerde figuren tekenen.

Wiskunde en kunst gaan hand in hand. De mens maakt al eeuwenlang decoratieve 'wiskunst' vol verbazingwekkende patronen en onmogelijke figuren, met regelmaat en symmetrie, vreemde vlakvullingen en kleurenproblemen – vaak even verbazingwekkend als ingewikkeld. Het zijn allemaal visuele en esthetische voorbeelden van betoverende wiskunde.

In het wiskundelokaal van meneer Alink hing een poster waar ik uren naar kon kijken: de *Belvedere*. Het was een tekening van Escher waarin optische illusies zitten verwerkt. Optische illusies hebben me altijd gefascineerd, ze zijn betoverend en visueel aantrekkelijk. Het zijn voorbeelden van gezichtsbedrog waarbij de kunstenaar speelt met het brein van de toeschouwer. Het zijn 'verrassingen' die je iets laten beleven wat je brein niet had verwacht, terwijl je je er niet eens bewust van bent dat je überhaupt iets verwacht.

1.1.2 Gevoelig voor wiskundige verrassingen

Mensen zijn gevoelig voor wiskundige verrassingen. Een pasgeboren kind herkent al wiskundige onregelmatigheden. Wanneer je bijvoorbeeld een pop achter een scherm zet en er een tweede bij zet, verwacht het kind na het weghalen van het scherm twee poppen te zien (zie afbeelding hieronder reactie 1). Is dat een ander aantal, dan zal het kind uit verbazing langer kijken (reactie 2) (Dehaene, 2011).

Wist je dat onze hersenen ingesteld zijn op patronen en ritme, en dat die allebei een grote rol spelen in wiskunde en kunst? Met een beetje creativiteit kan kunst getallen en vormen tot leven brengen. Een serie getallen kan spiralen vormen. Wiskunde helpt met het perspectief in een tekening. Puzzels kunnen je hersens laten kraken en tegelijkertijd prachtige kunst opleveren.