Boom

MECHANICA

Stabiliteit van het evenwicht

COENRAAD HARTSUIJKER EN HANS WELLEMAN

Mechanica, Stabiliteit van het evenwicht

Mechanica

Stabiliteit van het evenwicht

Coenraad Hartsuijker

Hans Welleman

Boom

Opmaak binnenwerk: Holland Graphics, Amsterdam
Basisontwerp omslag: Dog & Pony, Amsterdam
Omslagontwerp: Haagsblauw, Den Haag
Beeld omslag: karinclaus/Getty Images
Figuren: Coenraad Hartsuijker, Hans Welleman

ISBN 9789024446032
ISBN e-book 9789024446049
NUR 173

www.boomhogeronderwijs.nl

Inhoud

Stabiliteit van het evenwicht 1

Stabiliteit heeft te maken met de betrouwbaarheid van het evenwicht. In paragraaf 1.1 worden enkele hiermee samenhangende basisbegrippen geïntroduceerd.

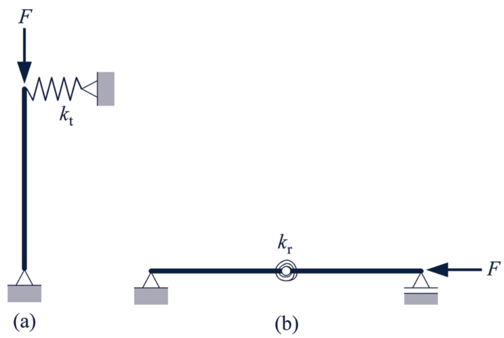
Een evenwicht dat onbetrouwbaar is noemt men instabiel. Gevaar voor instabiliteit bestaat met name bij op druk belaste slanke constructies. Maar instabiliteit kan ook optreden ten gevolge van afschuiving en wringing. In paragraaf 1.2 wordt een beknopt overzicht gegeven van verschillende vormen van instabiliteit.

1.1 Betrouwbaar en onbetrouwbaar evenwicht

Het evenwicht van een mens die met beide benen op de grond staat is meestal een betrouwbaar evenwicht. Hij zal niet zomaar omvallen. De mens kan zelfs op de tenen van één voet staan zonder zijn evenwicht te verliezen. Daarvoor moet de werklijn van de actiekracht (zijn eigen gewicht) samenvallen met de werklijn van de reactiekracht (de kracht die de vloer op zijn tenen uitoefent). Bij elke kleine afwijking treedt een mechanisme in werking dat deze afwijking corrigeert. Zolang het corrigerend mechanisme ervoor zorgt dat hij niet omvalt is het evenwicht van de mens, ook als hij op de tenen van één voet staat, betrouwbaar.

Ook constructies zijn onderworpen aan storende invloeden en kunnen daardoor uit balans worden gebracht. Om toch niet hun evenwicht te verliezen, moeten zij eveneens zijn voorzien van mechanismen die corrigerend werken bij verstoringen van het evenwicht.

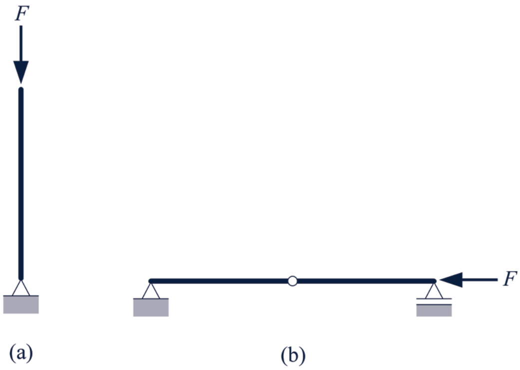
Als voorbeeld dienen de twee gewichtloze starre-staaf-systemen in figuur 1.1. Zij worden belast door een kracht F die constant is in grootte en richting. Beide systemen zijn zodanig opgesteld dat de werklijn van F door de scharnieren gaat.



Figuur 1.1 Er is evenwicht. De veren zijn onbelast. Zij komen in werking als er een verstoring uit de evenwichtsstand optreedt en verzetten zich daartegen.

Met weinig moeite is vast te stellen dat beide systemen in evenwicht verkeren en dat de veerkrachten (de kracht in de translatieveer en het moment in de rotatieveer) nul zijn. Uit dit laatste zou men kunnen concluderen dat de veren voor het evenwicht niet nodig zijn en dus kunnen worden weggelaten.

Ervaring heeft geleerd dat het evenwicht van de systemen zonder veer, zoals getekend in figuur 1.2, van een andere, minder betrouwbare aard is dan het evenwicht van de systemen met veer in figuur 1.1. Een kleine uitwijking uit de rechtstand doet het evenwicht van de systemen in figuur 1.2 definitief verloren gaan. Het evenwicht is *onbetrouwbaar*. Bij de systemen in figuur 1.1 komen daarentegen de veren in werking om een uitwijking uit de rechtstand te corrigeren. Bij voldoende stijfheid kunnen de veren ervoor zorgen dat het evenwicht niet verloren gaat, maar zich herstelt. Een dergelijk evenwicht is *betrouwbaar*.



Figuur 1.2 Er is evenwicht, maar bij een kleine verstoring uit de evenwichtsstand gaat het evenwicht verloren. Het evenwicht is onbetrouwbaar.

De enige betrouwbare evenwichtsvorm is het *stabiele evenwicht*. Dat een stabiel evenwicht betrouwbaar is, blijkt uit de volgende definitie:

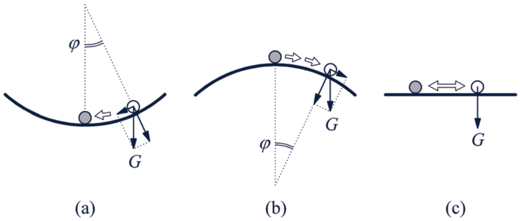
Een evenwicht is stabiel als het systeem in alle naburige kinematisch mogelijke configuraties[1] *van de evenwichtsstand de neiging heeft weer terug te keren naar de oorspronkelijke evenwichtsstand.*

Worden de optredende dynamische verschijnselen mede bezien, dan leidt een kleine verstoring van het stabiele evenwicht tot een trilling om de evenwichtsstand met een amplitude die binnen nauwe grenzen blijft. Door de altijd aanwezige demping zal het systeem na verloop van tijd weer in de oorspronkelijke evenwichtsstand tot rust komen.

Een evenwicht dat niet stabiel is heet *instabiel*, waarbij men onderscheid kan maken tussen *labiel evenwicht* en *neutraal of indifferent evenwicht*.

Bij *labiel evenwicht* bestaan er in de omgeving van de evenwichtsstand kinematisch mogelijke configuraties waarin het systeem de neiging heeft zich steeds verder van de oorspronkelijke evenwichtsstand te verwijderen.
Bij *neutraal of indifferent evenwicht* zijn er in de directe omgeving van de oorspronkelijke evenwichtsstand nieuwe evenwichtsstanden mogelijk.

De drie vormen van evenwicht kunnen worden geïllustreerd aan de hand van een kogeltje in het zwaarteveld, zie figuur 1.3. Het gewicht van het kogeltje is G. Er is geen wrijving.



Figuur 1.3 (a) Stabiel evenwicht. (b) Labiel evenwicht. (c) Neutraal of indifferent evenwicht.

- *stabiel evenwicht*

In figuur 1.3a bevindt het kogeltje zich *in* een bolschaal. De stand $\varphi = 0$ is een evenwichtsstand. In naburige standen $\varphi \neq 0$ is er een *terugdrijvende kracht* $G\sin\varphi$ waardoor het kogeltje wil terugkeren naar de oorspronkelijke evenwichtsstand $\varphi = 0$. In de stand $\varphi = 0$ is het evenwicht dus *stabiel*.

- *labiel evenwicht*

In figuur 1.3b ligt het kogeltje *op* de bolschaal. De stand $\varphi = 0$ is opnieuw een evenwichtsstand. Omdat er in naburige standen $\varphi \neq 0$ nu een *wegdrijvende kracht* $G\sin\varphi$ werkt is het evenwicht in $\varphi = 0$ *labiel*.

- *neutraal evenwicht*

In figuur 1.3c ligt het kogeltje op een horizontaal vlak. Elke stand kan een evenwichtsstand zijn. Er is nergens een terug- of wegdrijvende kracht. Het evenwicht is *indifferent* of *neutraal*.

De gegeven omschrijving van de begrippen stabiel, labiel en neutraal leidt ertoe *dat voor een stabiliteitsonderzoek het evenwicht in naburige standen van*

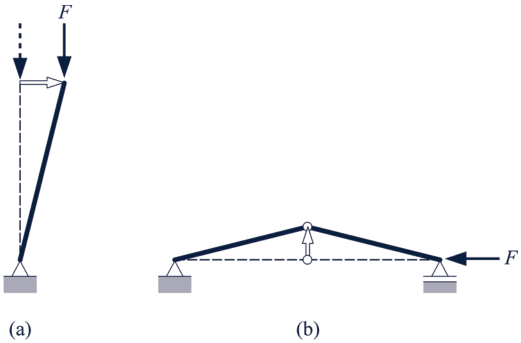
[1] Een kinematisch mogelijke configuratie is een verplaatsings- of vervormingstoestand die voldoet aan alle kinematische betrekkingen en randvoorwaarden.

de oorspronkelijke evenwichtsstand moet worden onderzocht. Dit is een belangrijk verschil met wat in de lineaire mechanica gebruikelijk is.

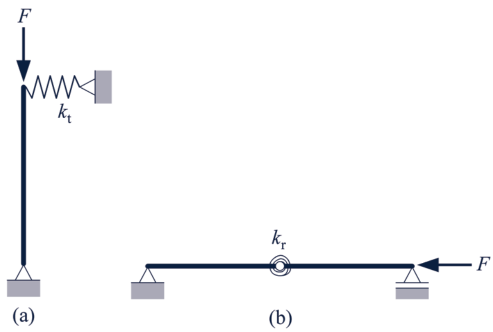
In de *lineaire mechanica* worden de evenwichtsvergelijkingen toegepast op de *geometrie van de onvervormde constructie.* In deze vergelijkingen komen geen verplaatsingsgrootheden voor. Een dergelijke berekening noemt men *geometrisch lineair.* Een andere benaming is *eerste-orde berekening.*

Bij een onderzoek naar de aard van het evenwicht, een *stabiliteitsonderzoek*, moet worden nagegaan hoe het evenwicht verandert als de constructie uit de oorspronkelijke evenwichtsstand overgaat naar een willekeurige naburige stand. Per definitie moet in de evenwichtsbeschouwing dus de invloed van de *veranderde geometrie* worden betrokken. In de evenwichtsvergelijkingen zullen nu wel verplaatsingsgrootheden voorkomen. Een dergelijke berekening noemt men *geometrisch niet-lineair.* Een andere benaming is *tweede-orde berekening.*

Met behulp van het voorgaande kan het verschil in de aard (betrouwbaarheid) van het evenwicht worden verklaard voor de staafsystemen zonder veer in figuur 1.4 en die met veer in figuur 1.5.



Figuur 1.4 De drukkracht F doet een verstoring uit de rechte evenwichtsstand vergroten. Het evenwicht is labiel.



Figuur 1.5 Bij voldoende stijfheid kunnen de veren na een verstoring het systeem doen terugkeren naar de oorspronkelijke evenwichtsstand. Het evenwicht is dan stabiel.

Wanneer, door welke oorzaak dan ook, de staafsystemen zonder veer uit hun evenwichtsstand raken, gaat de werklijn van F niet meer door alle scharnieren en is er geen evenwicht. De belasting F wil de uitwijking uit de oorspronkelijke rechtstand vergroten. Het evenwicht is labiel.
Zijn er wel veren, dan zullen deze zich tegen een uitwijking verzetten. Bij *voldoende stijfheid* kunnen zij de constructie weer doen terugkeren in de oorspronkelijke evenwichtsstand. Het evenwicht is stabiel.
Zijn de veren bij de gegeven belasting onvoldoende stijf, dan heeft de constructie alsnog de neiging zich te verwijderen van de oorspronkelijke evenwichtsstand en is het evenwicht – ondank de aanwezigheid van de veren – labiel.

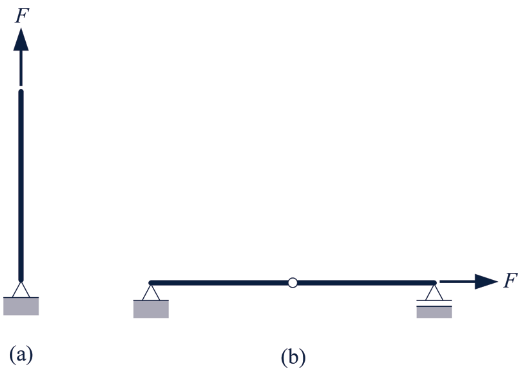
Opmerking:
Het stabiliteitsprobleem is in beginsel een stijfheidsprobleem.

Opmerking:
In het spraakgebruik wordt de term *stabiel* nogal eens verward met het begrip *kinematisch bepaald* (of *plaatsvast*). Zo zegt men wel – ten onrechte – dat de constructies in figuur 1.4 labiel en die in figuur 1.5 stabiel zijn. Men bedoelt echter te zeggen dat de constructies in figuur 1.4 kinematisch onbepaald of niet plaatsvast zijn en dat de constructies in figuur 1.5 kinematisch bepaald en wel plaatsvast zijn.

Kinematisch bepaaldheid of plaatsvastheid is een eigenschap die wordt bepaald door de geometrie

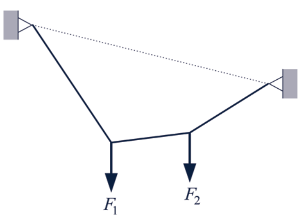
van de constructie[1] *en die onafhankelijk is van de belasting.*
Stabiliteit staat daarentegen voor een karakterisering van de aard van het evenwicht, waarvoor het nodig is ook de belasting te kennen.

Bij eenzelfde constructie kan het evenwicht onder de ene belasting stabiel en onder een andere belasting instabiel zijn. Men dient daarom te spreken over de *stabiliteit van het evenwicht* (en niet over het stabiel zijn van een constructie!).



Figuur 1.6 Het evenwicht is stabiel onder invloed van de trekkrachten.

Als voorbeeld dienen de kinematisch onbepaalde constructies uit figuur 1.6, waarvan het evenwicht onder invloed van de getekende belasting wel degelijk stabiel is.



Figuur 1.7 De kabel heeft geen eigen natuurlijke vorm. De vorm past zich zodanig bij de belasting aan dat het evenwicht stabiel is.

Een ander voorbeeld is de kabel. Het bijzondere van kabels is dat ze geen eigen 'natuurlijke vorm' hebben. De kabel is een niet-vormvast constructie-element waarvan de vorm zich zodanig bij de belasting aanpast dat het *evenwicht stabiel* is, zie figuur 1.7.

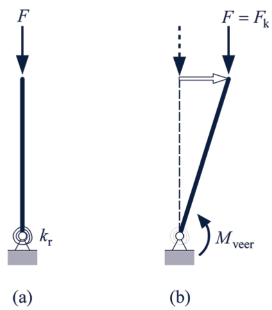
1.2 Vormen van instabiliteit

In deze paragraaf wordt een beknopt overzicht gegeven van verschillende vormen van instabiliteit onder de aanname dat het materiaal zich lineair-elastisch gedraagt (*elastische instabiliteit*).

- *Knik van op druk belaste staven*

Knik is het verschijnsel dat het evenwicht van een op *centrische druk belaste staaf* plotseling instabiel wordt. Dit gaat gepaard met sterk toenemende verplaatsingen loodrecht op de staafas waardoor uiteindelijk bezwijken optreedt. De belasting waarbij knik optreedt noemt men de *knikbelasting*. De knikbelasting is een bovengrens voor het draagvermogen van een op centrische druk belaste staaf.

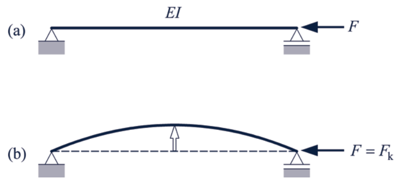
De op centrische druk belaste *starre staaf* in figuur 1.8, die verend is ingeklemd, zal omvallen zodra de kniklast wordt bereikt. De rotatieveer blijkt bij deze belasting niet meer voldoende weerstand te kunnen bieden om de staaf rechtop te houden.



Figuur 1.8 (a) Een op druk belaste verend ingeklemde starre staaf. (b) De knikkracht F_k is de kracht waarbij de veer nog net in staat is de staaf rechtop te houden.

[1] Tot de geometrie van de constructie worden ook gerekend de wijze van opleggen en de manier waarop de verschillende constructiedelen met elkaar zijn verbonden.

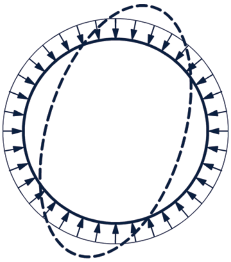
De op centrische druk belaste *buigzame staaf* in figuur 1.9 zal bij het bereiken van de kniklast plotseling uitbuigen. De grootte van de uitbuiging neemt onbepaald toe waardoor uiteindelijk bezwijken optreedt. Omdat men bij buigzame staven te maken heeft met een combinatie van druk en buiging spreekt men hier ook wel van *buigingsknik*.



Figuur 1.9 (a) Een op druk belaste buigzame staaf. (b) De knikkracht F_k is kleinste kracht waarbij de staaf in een uitgebogen stand nog in evenwicht is. De bijbehorende uitbuigingsvorm heet de knikvorm.

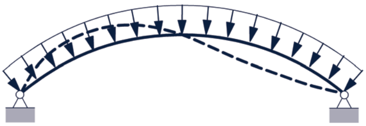
- *Knik van op druk belaste ringen en bogen*

In een *ring onder alzijdige druk* heerst eveneens een centrische drukkracht. Ook hier kan bij een bepaalde drukkracht het evenwicht plotseling instabiel worden, wat gepaard gaat met verlies van de cirkelvorm van de ring, zie figuur 1.10.



Figuur 1.10 Knik van een ring onder alzijdige druk.

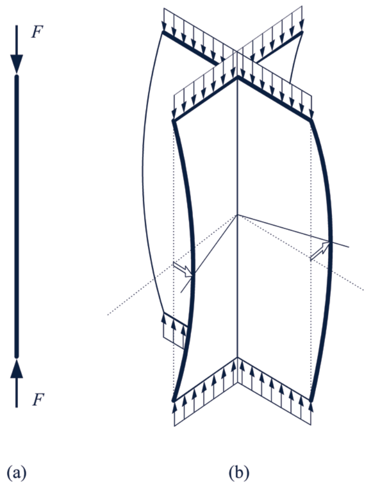
Ook bij centrisch gedrukte *bogen* kan knik optreden, zie figuur 1.11.



Figuur 1.11 Knik van een centrisch gedrukte boog.

Opmerking:
De knikformules voor ringen zijn ook toe te passen op *buizen* met een (constante) onderdruk van binnen of een overdruk van buiten. Bij dat laatste kan men bijvoorbeeld denken aan transportleidingen in diep water. In plaats van knik spreekt men dan van *implosie*.

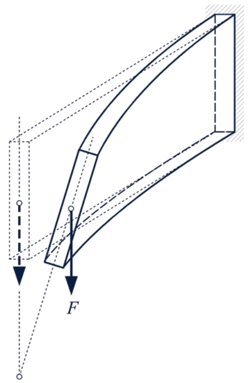
Torsieknik van op druk belaste staven
Torsieknik speelt een rol bij staven waarvan de doorsnede een kleine wringstijfheid en een relatief grote buigstijfheid heeft, zoals bij dunwandige open profielen. Onder invloed van een centrische drukkracht, kleiner dan de kniklast, kan de staaf plotseling gaan torderen, zie figuur 1.12. Men heeft hier te maken met een combinatie van druk en wringing.



Figuur 1.12 Torsieknik van een op druk belaste staaf met een dunwandig open profiel.

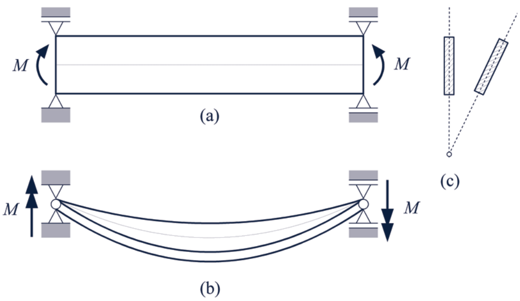
- *Kip van op buiging belaste staven*

Kip komt voor bij op buiging belaste balken met een doorsnede waarvan de hoofdtraagheidsmomenten sterk in grootte verschillen, bijvoorbeeld bij hoge smalle balken. Bij een belasting in het vlak van de grootste stijfheid kunnen dergelijke balken plotseling uit het vlak van de belasting verplaatsen en roteren als gevolg van een vervorming door wringing. Bij kip heeft men te maken met een combinatie van buiging en wringing.



Figuur 1.13 Kip van een op buiging belaste ingeklemde ligger.

Figuur 1.13 toont de kipvervorming van een ingeklemde ligger die in het vrije einde wordt belast door een (dwars)kracht. Figuur 1.14 laat de kipvervorming zien van een vrij opgelegde ligger waarin het buigend moment constant is over de lengte.

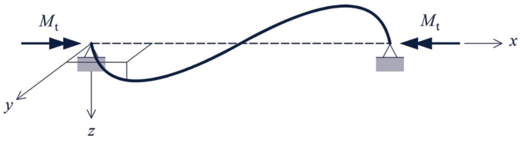


Figuur 1.14 Kip van een vrij opgelegde ligger met een constant buigend moment over de lengte.

De opleggingen in A en B zijn zodanig dat de balk daar wordt verhinderd om zijn lengteas te roteren (gaffeloplegingen).

- *Knik van op wringing belaste staven*

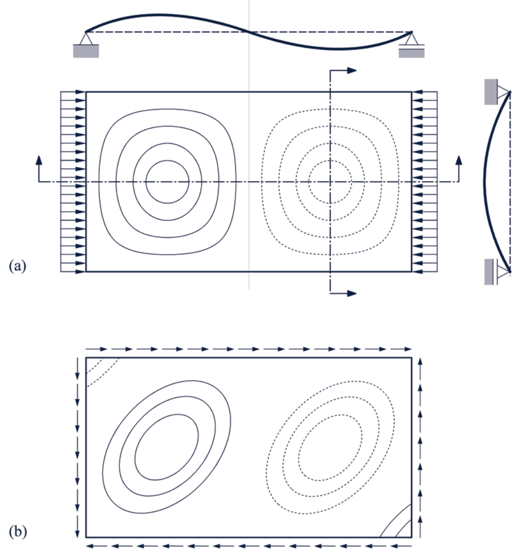
Op wringing belaste staven (assen) kunnen bij een bepaalde waarde van de belasting plotseling zijdelings gaan uitbuigen. De uitbuigingsvorm is een ruimtelijke kromme, zie figuur 1.15. Men heeft hier te doen met een combinatie van wringing en buiging.



Figuur 1.15 Knik van een op wringing belaste staaf.

- *Plooien van op druk en/of afschuiving belaste platen*

Het knikverschijnsel bij platen noemt men plooien. Plooien treedt op onder invloed van druk- en schuifkrachten in het vlak van de plaat. Bij een bepaalde belasting kunnen plotseling verplaatsingen loodrecht op het vlak van de plaat optreden en vertoont het plaatoppervlak golven, zie figuur 1.16.



Figuur 1.16 Het knikverschijnsel bij platen noemt men plooien. (a) Plooien onder invloed van drukkrachten en (b) schuifkrachten in het vlak van de plaat.

Anders dan bij staven kan een plaat na plooien nog belasting opnemen. In het bijzonder bij dunne platen kan deze toename aanzienlijk zijn, tot enige malen de plooispanning. In de vliegtuigbouw, waar men met heel dunne platen werkt, maakt men hiervan gebruik. Men hoeft zich dus geen zorgen te maken als men uit een vliegtuigraampje op de vleugelhuid golven ziet verschijnen en ook weer ziet verdwijnen.

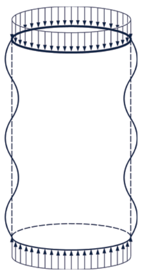
Bij in de civiele techniek toegepaste staalconstructies heeft men meestal te maken met relatief dikke platen. Hier is de toename van het draagvermogen na het bereiken van de plooispanning slechts gering. De oorzaak moet worden gezocht in het optreden van plastische vervormingen waardoor al snel bezwijken optreedt.

Het plooiverschijnsel kan zich ook manifesteren in de flenzen en lijven van dunwandige profielen die uit platen zijn opgebouwd, zoals I-profielen en kokerliggers.

Plooien kan men betrekkelijk eenvoudig verhinderen door op de plaatsen waar de plooigolven worden verwacht verstijvingsribben of -schotjes aan te brengen.

- *Plooien van axiaal belaste cirkelcilindrische schalen*

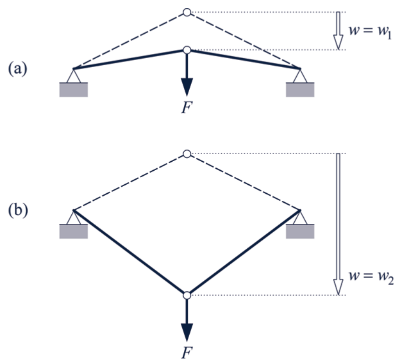
Aanvankelijk verwachtte men bij het plooien van axiaal belaste cirkelcilindrische schalen op theoretische gronden een golfpatroon als in figuur 1.17. In werkelijkheid blijkt een ruitvormig patroon van plooien te ontstaan en ligt de werkelijke plooibelasting ongeveer 30 procent hoger. De proefresultaten tonen daarbij een grote spreiding. De verklaring hiervoor wordt gevonden in het feit dat bij schalen vaak sprake is van een doorslagverschijnsel (zie hierna), waarbij imperfecties (vormafwijkingen) een grote rol spelen.



Figuur 1.17 Plooien van een axiaal op druk belaste cirkelcilindrische schaal.

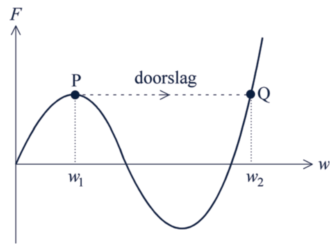
- *Doorslag van zwak gekromde bogen en schalen*

Een geheel ander instabiliteitsprobleem is doorslag. Bij doorslag speelt normaalkrachtvervorming een belangrijke rol. Een bekend model is dat van de twee staven in figuur 1.18a, die onder invloed van de belasting *F* op druk worden belast. Laat men de kracht *F* geleidelijk toenemen, dan zullen de staven steeds meer verkorten en zal het aangrijpingspunt van *F* zakken. Op een zeker ogenblik zal de gezamenlijke lengte van de verkorte staven gelijk zijn aan de lengte van de overspanning. Op dat ogenblik is het evenwicht niet meer stabiel en slaat het staafsysteem door naar een nieuwe stabiele evenwichtsstand, zie figuur 1.18b.



Figuur 1.18 Het doorslagprobleem. Bij doorslag speelt normaalkrachtvervorming een belangrijke rol.

In figuur 1.19 is voor dit doorslagprobleem een zogenaamd last-verplaatsing-diagram getekend. Het last-verplaatsing-diagram geeft alle combinaties (*F*,*w*) waarbij de constructie in evenwicht is. Als de belasting *F* geleidelijk toeneemt wordt in P het ogenblik bereikt dat doorslag optreedt. Omdat de belasting niet kan afnemen, springt het systeem van evenwichtstoestand P direct over naar evenwichtstoestand Q.



Figuur 1.19 Het last-verplaatsing-diagram voor het doorslagprobleem in figuur 1.18.

Instabiliteit kan *lokaal* en *globaal* optreden.

Bij *lokale instabiliteit* kan men onder meer denken aan:

- knik van een kolom in een gebouw;
- knik van een staaf in een vakwerk;
- plooien van het lijf van een I-profiel;
- lokale doorslag van een bolschaal[1].

In het geval van *globale instabiliteit* wordt het evenwicht van de constructie in zijn geheel instabiel. Als voorbeeld worden genoemd:

- kip van een vakwerkligger;
- knik van een hoog en slank torengebouw;
- knik van een raamwerk;
- doorslag van een bolschaal.

Eerder werd aangenomen dat het materiaal zich *lineair-elastisch* gedraagt. Het optreden van instabiliteit noemt men dan wel *elastische instabiliteit*.

Bij een belasting beneden de knikbelasting[2] blijken vaak zogenaamde tweede-orde verplaatsingen[3] op te treden die men kan zien als een inleiding op de knikvorm[4]. Gedraagt een materiaal zich *elasto-plastisch*, dan kunnen deze verplaatsingen aanleiding geven tot bezwijken door instabiliteit lang voordat de elastische kniklast is bereikt. In dergelijke gevallen spreekt men van *elasto-plastische instabiliteit*.

1.3 Vraagstukken

1.1
Wat verstaat men onder ‘stabiel evenwicht’?

1.2
Waarom dient men te spreken over de ‘stabiliteit van het evenwicht’ en is het onjuist te spreken over de ‘stabiliteit van een constructie’?

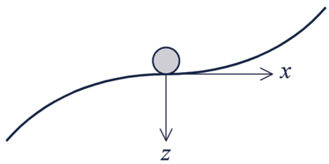
1.3-1/2
Er zijn twee buigzame staven gegeven.

Gevraagd:
Schets voor elke staaf twee ‘kinematisch mogelijke configuraties’ in de omgeving van de evenwichtsstand.

1.4
Wat is het essentiële verschil tussen een geometrisch lineaire berekening en een geometrisch niet-lineaire berekening?

1.5
Iemand vraagt u naar het verschil tussen neutraal en instabiel evenwicht. Hoe zou u deze vraag kunnen beantwoorden?

1.6
Gevraagd wordt de aard van het evenwicht van een kogeltje met gewicht G dat zich in $x = 0$ op het vlak $z = \alpha x^3$ bevindt. De z-richting is evenwijdig aan de richting van de zwaarteveldsterkte.



[1] Lokale doorslag kan optreden als gevolg van geometrische imperfecties (vormafwijkingen) en kan vaak aanleiding geven tot doorslag van de gehele constructie (globale instabiliteit).
[2] Onder knikbelasting wordt in gegeneraliseerde zin verstaan: de belasting waarbij elastische instabiliteit optreedt.
[3] Deze verplaatsingen vindt men met een geometrisch niet-lineaire berekening of tweede-orde berekening. Op de oorzaken en gevolgen wordt nader ingegaan in de hoofdstukken 10 en 11.
[4] Onder knikvorm wordt in gegeneraliseerde zin verstaan de uitbuigingsvorm waarmee het optreden van instabiliteit gepaard gaat.

Dit boek maakt deel uit van een serie mechanicastudieboeken voor de opleidingen Bouwkunde, Civiele Techniek en Built Environment in het hoger onderwijs. De eerste drie delen zijn:

- Mechanica: Evenwicht
- Mechanica: Spanningen, vervormingen, verplaatsingen
- Mechanica: Statisch onbepaalde constructies en bezwijkanalyse
- Mechanica: Stabiliteit van het evenwicht

Bij eenzelfde constructie kan het evenwicht onder de ene belasting betrouwbaar (stabiel) zijn en onder de andere onbetrouwbaar (instabiel). Dit heeft te maken met de invloed van de veranderde geometrie op het krachtenspel in de constructie. In het onderzoek naar de stabiliteit van het evenwicht komen onder meer de volgende onderwerpen aan de orde:

- het knikprobleem bij zowel starre als buigzame staven;
- tweede-orde verplaatsingen ten gevolge van een initiële uitwijking van, of dwarsbelasting op een staaf;
- gekoppelde staafsystemen;
- formule van Rayleigh;
- knik van een elastisch ondersteunde ligger; formule van Engesser;
- instabiliteit bij elasto-plastisch materiaalgedrag; formule van Merchant.

Dit boek biedt, net als de andere delen, een groot aantal uitgewerkte voorbeelden en vraagstukken die de student kennis laten maken met talrijke aspecten van dit vakgebied. *Mechanica: Stabiliteit van het evenwicht* is gebaseerd op een dictaat dat al jaren werd gebruikt op de TU Delft.

Coenraad Hartsuijker en Hans Welleman hebben jarenlange ervaring in het doceren van mechanicaonderwijs aan de opleiding Civiele Techniek van de Technische Universiteit Delft.

ISBN 978-90-2444-603-2

www.boomhogeronderwijs.nl