



Foto: Sollina Images / Getty Images

Hoewel deze straaljagers tamelijk groot zijn, kan elk ervan, gezien van een afstand, worden geanalyseerd als een punt.

Kinematica van een puntmassa



Ga naar MyLab voor studiemateriaal en toetsen om je begrip en kennis van dit hoofdstuk uit te breiden en te oefenen. Ook vind je daar videoutwerkingen bij verschillende opgaven uit het boek.

Doelstellingen van dit hoofdstuk

- Kennismaken met de concepten plaats, verplaatsing, snelheid en versnelling.
- De beweging van een puntmassa langs een rechte lijn bestuderen en deze grafisch weergeven.
- De beweging van een puntmassa langs een gebogen lijn bestuderen met behulp van verschillende coördinatenstelsels.
- Een analyse maken van de onderling afhankelijke beweging van twee puntmassa's.
- De principes bestuderen van de relatieve beweging van twee puntmassa's met behulp van translerende assen.

1.1 Inleiding

Technische mechanica is de studie van de toestand van lichamen in rust of beweging die onderworpen zijn aan de werking van krachten. Ze is verdeeld in twee gebieden: *statica* en *dynamica*. De *statica* houdt zich bezig met het evenwicht van een voorwerp dat in rust is of met een constante snelheid beweegt. Dit boek gaat over de *dynamica*, waarbij lichamen niet in rust zijn of met constante snelheid bewegen, maar versneld bewegen. We splitsen het onderwerp *dynamica* op in twee delen: de *kinematica*, waarbij alleen de geometrische aspecten van de beweging een rol spelen en de *kinetica*, waarbij de krachten die de beweging veroorzaken bestudeerd worden. Om deze principes uit te werken, zullen we beginnen met de *dynamica* van een puntmassa. Daarna gaan we verder met de *dynamica* van starre lichamen, eerst in twee dimensies en daarna in drie dimensies.

Historisch gezien werd het pas mogelijk om de principes van de *dynamica* te ontwikkelen toen het mogelijk werd om tijd nauwkeurig te meten. Galileo Galileï (1564-1642) was één van de pioniers op dit gebied die ook daadwerkelijk resultaten boekten. Hij experimenteerde met slingers en vallende lichamen. De belangrijkste inzichten van de *dynamica* werden echter geformuleerd door Isaac Newton (1642-1727), die de drie elementaire bewegingswetten en de wet van de universele aantrekkingskracht formuleerde. Kort nadat hij deze wetten had geponeerd, ontwikkelden Euler,

D' Alembert, Lagrange en anderen technieken waarmee ze konden worden toegepast.

Er zijn talloze problemen in de ingenieurwetenschappen die alleen kunnen worden opgelost door de principes van de dynamica toe te passen. Denk bijvoorbeeld aan bruggen en constructies die worden blootgesteld aan bewegende belastingen en natuurlijke krachten die door wind en aardbevingen worden veroorzaakt. Bij het ontwerp van voertuigen, zoals auto's of vliegtuigen, is het van enorm belang om de bewegingen waaraan deze blootgesteld zullen worden te bestuderen. Hetzelfde geldt voor mechanische apparaten, zoals motoren, pompen, verplaatsbare gereedschappen, kranen en machines. Ook de bewegingen van kunstmatige satellieten, projectielen en raketten kunnen worden voorspeld op basis van de theorie van de dynamica. Naarmate de technologie zich verder ontwikkelt, zal de behoefte aan kennis over het toepassen van deze wetenschap alleen nog maar verder toenemen.

1.1.1 Vraagstukken oplossen

Dynamica is over het algemeen lastiger dan statica, omdat niet alleen de krachten die op een lichaam werken een rol spelen, maar ook de beweging van het lichaam zelf. Daarnaast is voor veel toepassingen integraalrekening belangrijker dan algebra en driehoeksmeetkunde. De ervaring leert dat de meest effectieve manier om de principes van de dynamica te doorgronden uit *het oplossen van vraagstukken* bestaat. Om dat met succes te doen, is het nodig om logisch en gestructureerd te werk te gaan. Je kunt de volgende stappen daarbij als leidraad gebruiken:

1. Lees het vraagstuk aandachtig door en probeer een verband te vinden tussen de geschetste situatie en de theorie die je eerder hebt bestudeerd.
2. Teken alle benodigde grafieken en orden de in het vraagstuk gegeven informatie.
3. Kies een coördinatenstelsel en pas de principes die daarop van toepassing zijn toe (meestal in de vorm van wiskundige formules).
4. Los de noodzakelijke vergelijkingen op met behulp van een consistente eenhedenset en geef het antwoord met niet meer dan drie significante cijfers, wat over het algemeen overeenkomt met de nauwkeurigheid van de gegevens in het vraagstuk.
5. Beoordeel het antwoord in technische zin en vergeet niet je gezond verstand te gebruiken om te bepalen of het antwoord in alle redelijkheid mogelijk zou kunnen zijn.

Werk, terwijl je deze stappen volgt, zo net mogelijk. Als je netjes werkt, kun je helderder en logischer denken en ook het omgekeerde is waar. Als je er moeite mee hebt om je probleemoplossende vaardigheden te ontwikkelen, overweeg dan om de video's te bekijken die beschikbaar zijn op MyLab.

1.2 Kinematica van de rechtlijnige beweging: continue beweging

We beginnen dit boek met het bestuderen van de kinematica van een puntmassa die een rechte baan volgt. Herinner je dat een *puntmassa* een bepaalde massa heeft, maar verwaarloosbare afmetingen en vorm. Daarom kunnen we deze schematisering alleen toepassen op voorwerpen met afmetingen die geen rol spelen in de analyse van de beweging. Een raket, projectiel of voer-

tuig kan bijvoorbeeld als puntmassa worden beschouwd, ervan uitgaande dat de beweging van het voorwerp te karakteriseren is als een beweging van het massamiddelpunt en rotaties van het voorwerp buiten beschouwing kunnen blijven.

1.2.1 Kinematica van de rechtlijnige beweging

De kinematica van een puntmassa is te karakteriseren door het vastleggen van de plaats, snelheid en versnelling van de puntmassa op elk gegeven tijdstip.

1.2.2 Plaats

De rechte baan van de puntmassa zullen we omschrijven met behulp van een enkele coördinaatas s , zie fig. 1.1a. De oorsprong O van de baan is een vast punt. Vanaf dit punt wordt de *plaatscoördinaat* s gebruikt om de plaats van de puntmassa op elk gegeven ogenblik vast te leggen. De grootte van s is de afstand van O tot de puntmassa, meestal uitgedrukt in meter (m), en de zin (of pijlrichting) wordt aangeduid met het algebraïsche teken van s . Hoewel de keuze willekeurig is, zal s hier positief zijn wanneer het deeltje zich rechts van de oorsprong bevindt, en negatief zijn als het deeltje zich links van O bevindt. De plaats is een vectorgrootheid, omdat deze zowel een grootte als een richting heeft. Hier wordt deze echter voorgesteld met de algebraïsche scalar s , omdat de richting altijd gericht blijft langs de coördinaatas.

1.2.3 Verplaatsing

De *verplaatsing* van een puntmassa wordt gedefinieerd als de *verandering* van zijn *plaats*. Wanneer de puntmassa bijvoorbeeld van een punt naar een ander punt beweegt, zie fig. 1.1b, is de verplaatsing:

$$\Delta s = s' - s$$

In dit geval is Δs *positief*, omdat de eindpositie van de puntmassa zich *rechts* van zijn uitgangspositie bevindt, wat wil zeggen dat $s' > s$ is. Verplaatsing is ook een *vectoriële grootheid* en moet dus onderscheiden worden van de afstand die de puntmassa aflegt. Om precies te zijn, is de *afgelegde afstand* een *positieve scalar* die de totale lengte weergeeft van de baan waarover de puntmassa zich verplaatst.

1.2.4 Snelheid

Als de puntmassa zich over een afstand Δs verplaatst gedurende het tijdsinterval Δt , is de *gemiddelde snelheid* van de puntmassa tijdens dit tijdsinterval:

$$v_{\text{gem}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Naarmate we de waarde van Δt kleiner nemen, wordt ook de grootte van Δs kleiner en kleiner. Als gevolg daarvan is de *ogenblikkelijke snelheid* een vector die gedefinieerd wordt als $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta s / \Delta t)$ of:

$$(\rightleftarrows) \quad \boxed{v = \frac{ds}{dt}} \quad (1.1)$$

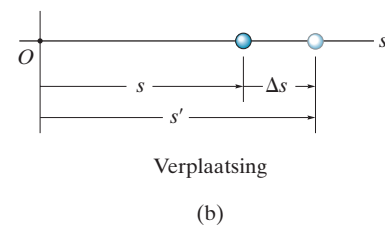
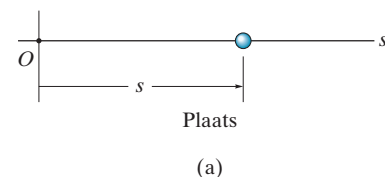


Fig. 1.1

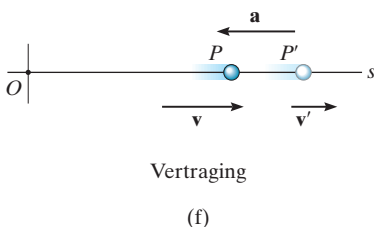
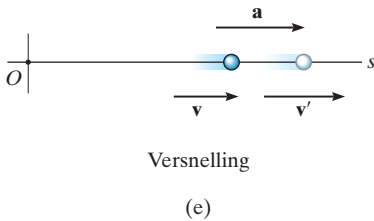
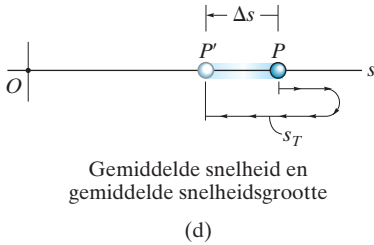
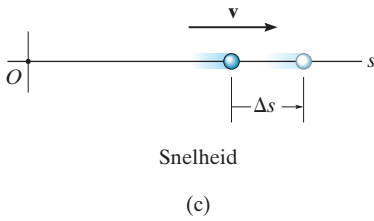


Fig. 1.1 (vervolg)

Omdat Δt of dt altijd positief is, is het teken dat we hier gebruiken om de *zin* van de snelheid aan te geven gelijk aan dat van Δs of ds . Wanneer de puntmassa bijvoorbeeld naar *rechts* beweegt, zie fig. 1.1c, is de snelheid *positief*; als de puntmassa naar *links* beweegt, is de snelheid *negatief*. (Dit wordt hier benadrukt door de pijl links van vgl. 1.1.) De *grootte* van de snelheidsvector wordt *snelheids grootte* genoemd en wordt meestal uitgedrukt in m/s.

Soms wordt ook de term ‘gemiddelde snelheids grootte’ gebruikt. De *gemiddelde snelheids grootte* is altijd een positieve scalair en wordt gedefinieerd als de totale door een puntmassa afgelegde afstand, s_T , gedeeld door de verstreken tijd Δt ; dat wil zeggen:

$$(v_{sg})_{\text{gem}} = \frac{s_T}{\Delta t}$$

De puntmassa in fig. 1.1d beweegt langs de baan met lengte s_T gedurende een tijd Δt . De gemiddelde snelheids grootte is dus $(v_{sg})_{\text{gem}} = s_T/\Delta t$, maar de gemiddelde snelheid is $v_{\text{gem}} = -\Delta s/\Delta t$.

1.2.5 Versnelling

Als de snelheid van een puntmassa op twee plaatsen bekend is, wordt de *gemiddelde versnelling* van de puntmassa gedurende het tijdsinterval Δt gedefinieerd als:

$$a_{\text{gem}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Hierbij geeft Δv de verandering van de snelheid aan gedurende het tijdsinterval Δt , dat wil zeggen $\Delta v = v' - v$, zie fig. 1.1e.

De *ogenblikkelijke versnelling* op tijdstip t wordt bepaald door steeds kleinere waarden van Δt te nemen en de bijbehorende, dus ook steeds kleinere, waarden van Δv , zodat $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta v/\Delta t)$, of:

$$(\ddagger) \quad a = \frac{dv}{dt} \quad (1.2)$$

Wanneer we vergelijking 1.1 in dit resultaat substitueren, kunnen we ook schrijven dat:

$$(\ddagger) \quad a = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Zowel de gemiddelde als de ogenblikkelijke versnelling kan ofwel positief ofwel negatief zijn. Wanneer de puntmassa *vaart mindert*, dus de snelheids grootte ervan afneemt, zegt men dat de puntmassa aan het *vertragen* is. In dit geval is v' in fig. 1.1f *kleiner* dan v en dus zal $\Delta v = v' - v$ negatief zijn. Als gevolg zal a ook negatief zijn en daarom naar *links* werken, in de *tegengestelde zin* ten opzichte van v . De grootte van de versnelling wordt meestal uitgedrukt in m/s^2 .

Een belangrijke differentiële betrekking tussen verplaatsing, snelheid en versnelling langs een rechte weg kan ten slotte worden bepaald door het tijdsinterval dt in vgl. 1.1 en 1.2 te elimineren.

$$(\pm) \quad \boxed{a \, ds = v \, dv} \quad (1.3)$$

Hoewel we nu drie belangrijke kinematische vergelijkingen bepaald hebben, is het belangrijk om te beseffen dat bovenstaande vergelijking niet onafhankelijk is van vgl. 1.1 en 1.2.

1.2.6 Constante versnelling, $a = a_c$

Wanneer de versnelling constant is, kunnen de drie kinematische vergelijkingen $a_c = dv/dt$, $v = ds/dt$ en $a_c \, ds = v \, dv$ worden geïntegreerd om de formules te verkrijgen waarmee het verband tussen a_c , v , s en t wordt uitgedrukt.

1.2.7 Snelheid als functie van de tijd

We integreren $a_c = dv/dt$, waarbij we aannemen dat $v = v_0$ op tijdstip $t = 0$ en verkrijgen:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a_c \, dt \quad (1.4)$$

(\pm)

$$\boxed{v = v_0 + a_c t}$$

Constante versnelling

1.2.8 Plaats als functie van de tijd

We integreren $v = ds/dt = v_0 + a_c t$, waarbij we aannemen dat $s = s_0$ op het tijdstip $t = 0$ en verkrijgen:

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t (v_0 + a_c t) \, dt \quad (1.5)$$

(\pm)

$$\boxed{s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2}$$

Constante versnelling

1.2.9 Snelheid als functie van de plaats

Los t op uit vgl. 1.4 en substitueer de uitkomst in vgl. 1.5 of integreer $v \, dv = a_c \, ds$, waarbij we aannemen dat $v = v_0$ op de aanvangspositie $s = s_0$. We krijgen:

$$\int_{v_0}^v v \, dv = \int_{s_0}^s a_c \, ds \quad (1.6)$$

(\pm)

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)}$$

Constante versnelling

Het teken van s_0 , v_0 en a_c in de bovenstaande drie vergelijkingen wordt bepaald door de keuze van de positieve richting van de s -as, zoals wordt aangegeven door de pijl links van de vergelijkingen. Het is belangrijk om te onthouden dat deze vergelijkingen *alleen wanneer de versnelling constant is* gebruikt mogen worden en wanneer $t = 0$, $s = s_0$, $v = v_0$. Een typisch voorbeeld van een constant versnelde beweging is de vrije val van een voorwerp naar de aarde. Wanneer de luchtweerstand wordt verwaarloosd en de afstand van de

val kort is, is de *neerwaartse versnelling* van het voorwerp dicht bij de aarde constant en bij benadering gelijk aan $9,81 \text{ m/s}^2$.

Om te onthouden!

- Dynamica gaat over lichamen die versneld worden.
- Kinematica gaat over de geometrie van de beweging.
- Kinetica bestudeert de krachten die de beweging veroorzaken.
- Kinematica van de rechte beweging heeft betrekking op bewegingen in een rechte lijn.
- Snelheidsgrootte verwijst naar de grootte van snelheid.
- Gemiddelde snelheidsgrootte is de totaal afgelegde afstand gedeeld door de totale tijd. Deze is anders dan de gemiddelde snelheid; deze is de verplaatsing gedeeld door de tijd.
- Een puntmassa die vaart mindert, vertraagt.
- Een puntmassa kan versnellen en toch een snelheid nul hebben.
- De relatie $a ds = v dv$ is afgeleid van $a = dv/dt$ en $v = ds/dt$, door daaruit dt te elimineren.

Analyseprocedure

Coördinatenstelsel

- Stel een plaatscoördinaat s langs de baan vast en bepaal zijn *vaste oorsprong* en de positieve richting.
- Omdat de baan rechte is, kunnen de vectorgrootheden plaats, snelheid en versnelling worden voorgesteld als scalaire grootheden. Voor analyse kan de zin van s , v en a gedefinieerd worden met hun *algebraïsche teken*.
- De positieve zin van deze scalaire grootheden kan worden aangegeven door een pijl naast iedere toegepaste kinematische vergelijking.

Kinematische vergelijkingen

- Als een wiskundige relatie tussen combinaties van twee van de vier variabelen a , v , s en t kan worden vastgesteld, kan een derde variabele worden bepaald met behulp van een van de kinematische vergelijkingen $a = dv/dt$, $v = ds/dt$ of $a ds = v dv$, omdat in al deze vergelijkingen de drie variabelen voorkomen.*
- Bij integratie is het belangrijk dat de plaats en snelheid op een gegeven ogenblik bekend zijn om ofwel de integratieconstante te bepalen wanneer een onbepaalde integraal wordt gebruikt, ofwel om de onder- en bovengrenzen te bepalen wanneer een bepaalde integraal wordt gebruikt.
- Onthoud ten slotte dat vgl. 1.4 tot en met 1.6 slechts beperkt kunnen worden toegepast. Deze vergelijkingen kunnen *alleen toegepast worden wanneer de versnelling constant is* en de startcondities $s = s_0$ en $v = v_0$ zijn op tijdstip $t = 0$.



Tijdens de periode dat de raket eenparig beweegt, kan de hoogte als functie van de tijd gemeten en uitgedrukt worden als $s = s(t)$. De snelheid kan dan berekend worden met $v = ds/dt$ en de versnelling met $a = dv/dt$.

* Bepaalde standaard differentiatie- en integratieformules worden in bijlage A gegeven.

Voorbeeld 1.1

De auto in fig. 1.2 beweegt in een rechte lijn, waarbij zijn snelheid gedurende een korte tijd uitgedrukt kan worden als $v = (0,9t^2 + 0,6t)$ m/s, waarbij t wordt uitgedrukt in seconden. Bepaal zijn plaats en versnelling als $t = 3$ s. Op $t = 0$ is $s = 0$.

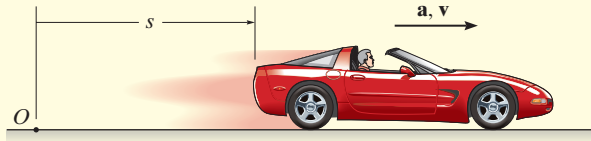


Fig. 1.2



OPLOSSING

Coördinatenstelsel De plaatscoördinaat loopt van het vaste beginpunt O tot de auto, in de positieve richting naar rechts.

Plaats Omdat $v = f(t)$ kan de plaats van de auto worden bepaald uit $v = ds/dt$, omdat deze vergelijking het verband weergeeft tussen v , s en t . Ervan uitgaande dat $s = 0$ wanneer $t = 0$, geldt*:

$$\begin{aligned}(\pm) \quad v &= \frac{ds}{dt} = (0,9t^2 + 0,6t) \\ \int_0^s ds &= \int_0^t (0,9t^2 + 0,6t) dt \\ s \Big|_0^s &= \left(0,3t^3 + 0,3t^2 \right) \Big|_0^t \\ s &= 0,3t^3 + 0,3t^2\end{aligned}$$

Als $t = 3$ s,

$$s = 0,3 (3)^3 + 0,3 (3)^2 = 10,8 \text{ m} \quad \text{Antw.}$$

Versnelling Omdat we weten dat $v = f(t)$, wordt de versnelling bepaald uit $a = dv/dt$, omdat deze vergelijking het verband weergeeft tussen a , v en t .

$$\begin{aligned}(\pm) \quad a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(0,9t^2 + 0,6t) \\ &= 1,8t + 0,6\end{aligned}$$

Als $t = 3$ s,

$$a = 1,8(3) + 0,6 = 6 \text{ m/s}^2 \rightarrow \quad \text{Antw.}$$

OPMERKING: de formules voor constante versnelling kunnen *niet* worden gebruikt om dit vraagstuk op te lossen, omdat de versnelling een functie is van de tijd.

* Dezelfde uitkomst kan worden verkregen door de waarde te bepalen van de integratieconstante C in plaats van te integreren tussen de onder- en bovengrens. Als we bijvoorbeeld de integraal berekenen van $ds = (0,9t^2 + 0,6t)dt$ krijgen we $s = 0,3t^3 + 0,3t^2 + C$. Als we de beginvoorwaarde nemen dat op $t = 0$, $s = 0$, dan volgt hieruit dat $C = 0$.

Voorbeeld 1.2

Een klein projectiel wordt met een beginsnelheid van 60 m/s *verticaal naar beneden* afgevuurd in een vloeibaar medium. Door de weerstand van de vloeistof ondergaat het projectiel een vertraging $a = (-0,4v^3)$ m/s², waarbij v gemeten wordt in m/s. Bereken de snelheid en plaats van het projectiel 4 s nadat het is afgevuurd.

OPLOSSING

Coördinatenstelsel Aangezien het een neerwaartse beweging betreft, is de plaatscoördinaat positief neerwaarts gericht en heeft deze zijn oorsprong in O , zie fig. 1.3.

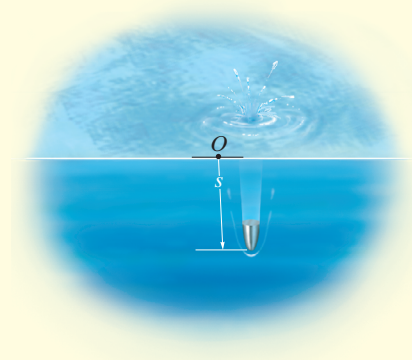


Fig. 1.3

Snelheid Hier is $a = f(v)$ en moeten we de snelheid berekenen als functie van de tijd met $a = dv/dt$, aangezien deze vergelijking het verband weergeeft tussen v , a en t . (Waarom niet $v = v_0 + a_c t$ gebruiken?) Wanneer de variabelen worden gescheiden en geïntegreerd, met $v_0 = 60$ m/s als $t = 0$, levert dit:*

$$\begin{aligned} (+\downarrow) \quad a &= \frac{dv}{dt} = -0,4v^3 \\ \int_{60 \text{ m/s}}^v \frac{dv}{-0,4v^3} &= \int_0^t dt \\ \frac{1}{-0,4} \left(\frac{1}{-2} \right) \frac{1}{v^2} \Big|_{60}^v &= t - 0 \\ \frac{1}{0,8} \left[\frac{1}{v^2} - \frac{1}{(60)^2} \right] &= t \\ v &= \left\{ \left[\frac{1}{(60)^2} + 0,8t \right]^{-1/2} \right\} \text{ m/s} \end{aligned}$$

Hierbij is de positieve wortel genomen, omdat het projectiel een neergaande beweging maakt. Als $t = 4$ s, is:

$$v = 0,559 \text{ m/s } \downarrow \quad \text{Antw.}$$

* Hetzelfde resultaat kan worden verkregen met behulp van een integratieconstante C in plaats van bepaalde grenzen bij de integraal te gebruiken.

Plaats Wetend dat $v = f(t)$, kunnen we de plaats van het projectiel afleiden van $v = ds/dt$, aangezien deze vergelijking het verband weer-geeft tussen s , v en t . Door gebruik te maken van de begincondities $s = 0$, als $t = 0$, krijgen we:

$$\begin{aligned}
 (+\downarrow) \quad v &= \frac{ds}{dt} = \left[\frac{1}{(60)^2} + 0,8t \right]^{-1/2} \\
 \int_0^s ds &= \int_0^t \left[\frac{1}{(60)^2} + 0,8t \right]^{-1/2} dt \\
 s &= \frac{2}{0,8} \left[\frac{1}{(60)^2} + 0,8t \right]^{1/2} \Big|_0^t \\
 s &= \frac{1}{0,4} \left\{ \left[\frac{1}{(60)^2} + 0,8t \right]^{1/2} - \frac{1}{60} \right\} \text{ m}
 \end{aligned}$$

Als $t = 4$ s,

$$s = 4,43 \text{ m}$$

Antw.

Voorbeeld 1.3

Tijdens een test gaat een raket met een snelheid van 75 m/s naar boven en wanneer deze zich op 40 m van de grond bevindt, gaat de raketmotor kapot. Bepaal de maximale hoogte s_B die de raket bereikt en zijn snelheids grootte, net voordat hij op de grond valt. De raket is vanwege de zwaartekracht gedurende de gehele tijd onderworpen aan een constante neerwaartse versnelling van $9,81 \text{ m/s}^2$. Verwaarloos de gevolgen van de luchtweerstand.

OPLOSSING

Coördinatenstelsel De oorsprong O voor de plaatscoördinaat s is genomen op grondniveau en is naar boven positief, zie fig. 1.4.

Maximale hoogte Omdat de raket *omhoog* gaat, is $v_A = +75 \text{ m/s}$ op $t = 0$. Op de maximale hoogte $s = s_B$, is de snelheid $v_B = 0$. Tijdens de hele beweging is de versnelling $a_c = -9,81 \text{ m/s}^2$ (negatief omdat deze in de *tegengestelde* richting werkt ten opzichte van de snelheid en de verplaatsing). Omdat a_c constant is, kan door middel van vgl. 1.6 de plaats van de raket worden gerelateerd aan zijn snelheid op de twee punten A en B op de afgelegde weg. Hieruit volgt dat:

$$\begin{aligned}
 (+\uparrow) \quad v_B^2 &= v_A^2 + 2a_c(s_B - s_A) \\
 0 &= (75 \text{ m/s})^2 + 2(-9,81 \text{ m/s}^2)(s_B - 40 \text{ m}) \\
 s_B &= 327 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Antw.

Snelheid Om de snelheid van de raket te verkrijgen, net voordat deze de grond raakt, kunnen we vgl. 1.6 toepassen tussen de punten B en C, fig. 1.4.

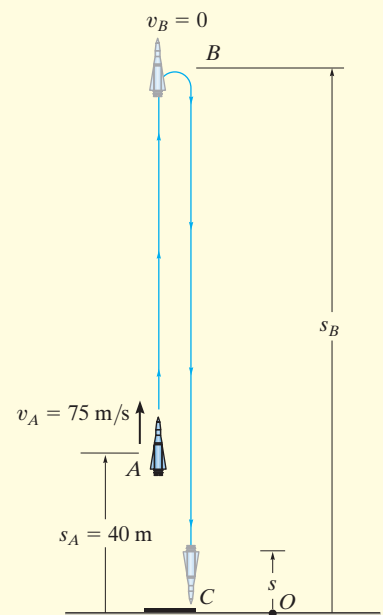


Fig. 1.4