Foto: Ilya Akinshin / Shutterstock

De bouten die voor de verbindingen van deze staalconstructie zijn gebruikt, zijn op spanning belast. In dit hoofdstuk bespreken we hoe ingenieurs deze verbindingen en het benodigde bevestigingsmateriaal ontwerpen.

HOOFDSTUK

1

Spanning

Ga naar MyLab voor studiemateriaal en toetsen om je begrip en kennis van dit hoofdstuk uit te breiden en te oefenen. Ook vind je daar videouitwerkingen bij verschillende opgaven uit het boek.

Doelstellingen van dit hoofdstuk

- In dit hoofdstuk worden enkele belangrijke principes van de statica behandeld en wordt getoond hoe deze worden gebruikt om de inwendige belastingen in een lichaam te bepalen. Daarna introduceren we de principes normaalspanning en schuifspanning en bespreken we toepassingen van het analyseren en ontwerpen van onderdelen die belasting in axiale richting of directe afschuiving ondervinden.

1.1 Inleiding

De ***sterkteleer*** is de tak van de mechanica die de effecten bestudeert van spanning en vervorming in een vervormbaar lichaam dat wordt blootgesteld aan een uitwendige belasting. Spanning is het resultaat van inwendige belasting en is dus gerelateerd aan de sterkte van het materiaal, terwijl rek een maat is voor de vervorming die wordt veroorzaakt door de inwendige belastingen. Het is heel belangrijk de principes van dit onderwerp voor het ontwerpen van om het even welke machine of structuur goed te begrijpen, omdat veel formules en ontwerpregels in constructievoorschriften zijn gebaseerd op de principes van de sterkteleer.

Historische ontwikkeling De sterkteleer dateert uit het begin van de zeventiende eeuw, toen Galileo Galilei experimenten uitvoerde waarbij hij de effecten van het belasten van staven en balken van uiteenlopend materiaal bestudeerde. Pas aan het begin van de negentiende eeuw verbeterden de experimentele methoden voor het beproeven van materialen echter sterk en in die tijd werden op grote schaal zowel experimentele als theoretische onderzoeken uitgevoerd. Dit gebeurde voornamelijk in Frankrijk, door vooraanstaande figuren als Saint-Venant, Poisson, Lamé en Navier.

In de loop van de tijd, nadat veel fundamentele problemen waren opgelost, kwam men voor ingewikkelder vraagstukken te staan, die alleen konden worden opgelost met behulp van geavanceerde wiskundige en computertechnieken. Het gevolg was dat de sterkteleer werd uitgebreid naar andere onderwerpen van de mechanica, zoals de *elasticiteitstheorie* en de *plasticiteitstheorie*.

1.2 Evenwicht van een vervormbaar lichaam

Omdat bij het ontwikkelen en toepassen van de sterkteleer de statica een belangrijke rol speelt, is een goed begrip van de principes erg belangrijk. Daarom wordt nu stilgestaan bij een paar van de belangrijkste principes van de statica die door het hele boek heen worden gebruikt.

Belastingen Een lichaam kan worden onderworpen aan zowel oppervlaktebelastingen als lichaamskrachten. Oppervlaktebelastingen die op een klein contactgebied werken, worden weergegeven door geconcentreerde krachten, terwijl verdeelde belastingen over een groter oppervlak van het lichaam werken. Wanneer de belasting in één vlak ligt, zoals in fig. 1.1*a*, dan is een resulterende kracht FR van een verdeelde belasting gelijk aan de oppervlakte onder het verdeeldebelastingdiagram, en deze resulterende kracht werkt in het geometrische middelpunt of zwaartepunt van dit gebied.

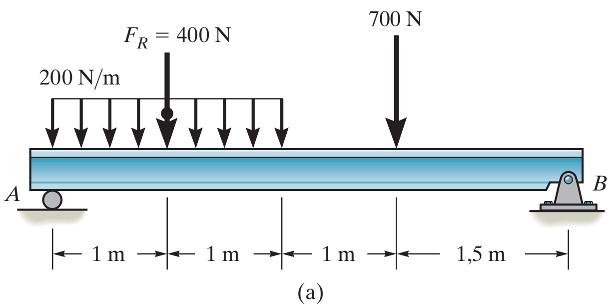
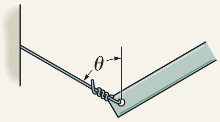
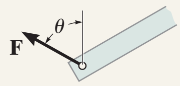
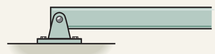
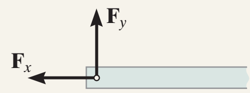
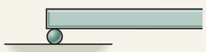
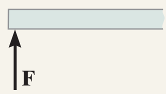
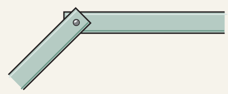
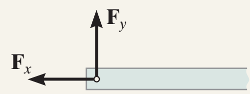
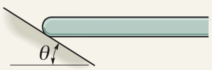
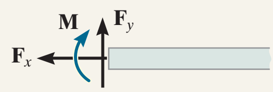
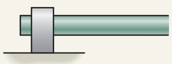
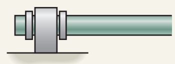
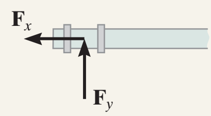


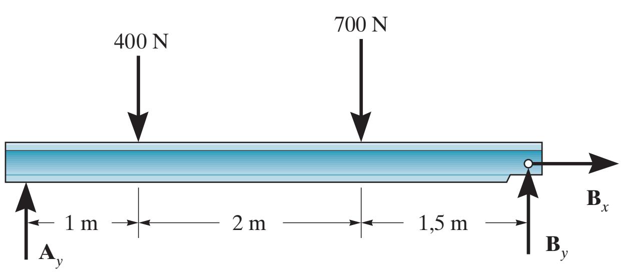
Fig. 1.1

Veel machine-elementen worden met pennen met elkaar verbonden, zodat ze in de verbindingen vrij kunnen draaien. Deze ondersteuningen oefenen wel een kracht uit op de machine-elementen, maar geen moment.

Een ***volumekracht*** ontstaat wanneer een lichaam een kracht uitoefent op een ander lichaam zonder dat er sprake is van direct fysiek contact tussen de lichamen. Voorbeelden hiervan zijn de effecten die worden veroorzaakt door de zwaartekracht van de aarde of door een elektromagnetisch krachtveld. Hoewel deze krachten invloed hebben op alle deeltjes waaruit het lichaam bestaat, worden ze gewoonlijk voorgesteld door één enkele geconcentreerde kracht die op het lichaam werkt. In het geval van de zwaartekracht wordt deze kracht het ***gewicht*** **W** van het lichaam genoemd; deze kracht grijpt aan in het zwaartepunt van het lichaam.

Ondersteuningsreacties Voor lichamen met krachtsystemen in één vlak, toont tabel 1.1 de meest voorkomende ondersteuningen. Als vuistregel geldt voor elke ondersteuning dat ***als de ondersteuning translatie in een bepaalde richting verhindert, er in die richting een kracht op het onderdeel moet worden uitgeoefend. Op dezelfde manier geldt dat wanneer rotatie wordt verhinderd, er een koppel op het onderdeel moet worden uitgeoefend.*** Zo verhindert bijvoorbeeld de roloplegging alleen translatie in de contactrichting, loodrecht op het oppervlak. De rol oefent daardoor ter plaatse van zijn contactpunt een normaalkracht **F** op het onderdeel uit. Omdat het onderdeel vrij om de rol kan roteren, kan de rol in het contactpunt geen koppel op het onderdeel uitoefenen.

Type verbinding	Reactie	Type verbinding	Reactie
 Kabel	 Eén onbekende: F	 Uitwendig scharnier	 Twee onbekenden: F_x, F_y
 Roloplegging	 Eén onbekende: F	 Inwendig scharnier	 Twee onbekenden: F_x, F_y
 Gladde ondersteuning	 Eén onbekende: F	 Inklemming	 Twee onbekenden: F_x, F_y, M
 Radiaal lager	 Eén onbekende: F	 Axiaal lager	 Twee onbekenden: F_x, F_y



(b)

Fig. 1.1 (vervolg)

Om de horizontale elementen van de draagstructuur van dit gebouw te ontwerpen moeten eerst de inwendige belastingen in verschillende punten op de lengte ervan bekend zijn.

Evenwichtsvergelijkingen Evenwicht van een lichaam vereist zowel een ***krachtenevenwicht***, om te voorkomen dat het lichaam over een recht of gebogen pad wordt verplaatst, als een ***momentenevenwicht***, om roteren van het lichaam te verhinderen. Deze voorwaarden worden wiskundig uitgedrukt met de evenwichtsvergelijkingen:

$$\boxed{\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F} &= \mathbf{0} \\ \Sigma \mathbf{M}_O &= \mathbf{0} \end{aligned}} \qquad (1.1)$$

Hier vertegenwoordigt $\Sigma\mathbf{F}$ de som van alle krachten die op het lichaam werken en is $\Sigma\mathbf{M}_O$ de som van de momenten van alle krachten rond een willekeurig punt O, al dan niet op het lichaam. Als er een x–y–z-assenstelsel wordt gekozen met de oorsprong in punt O, kunnen de kracht- en momentvectoren worden ontbonden in componenten langs de coördinaatassen en kunnen de twee bovenstaande vergelijkingen in scalaire vorm worden geschreven als zes evenwichtsvergelijkingen:

$$\begin{array}{lll} \Sigma F_x = 0 & \Sigma F_y = 0 & \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x = 0 & \Sigma M_y = 0 & \Sigma M_z = 0 \end{array} \tag{1.2}$$

In de praktijk kan de belasting van een lichaam vaak worden voorgesteld als een stelsel van *krachten die in hetzelfde x-y-vlak werken.* In dit geval kan het evenwicht van het lichaam worden weergegeven met slechts drie scalaire evenwichtsvergelijkingen, namelijk

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \\ \Sigma M_O &= 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Om de evenwichtsvergelijkingen met succes te kunnen toepassen moeten alle bekende en onbekende belastingen die *op* het lichaam werken in kaart gebracht worden. ***De beste manier om dat te doen is eerst het vrijlichaamsschema van het lichaam te tekenen.*** Het vrijlichaamsschema van de balk in fig. 1.1*a* wordt als voorbeeld getoond in fig. 1.1*b*.
Hier wordt elke kracht door zijn grootte en richting geïdentificeerd. Inbegrepen zijn de afmetingen van het lichaam om de momenten van de krachten op te tellen.

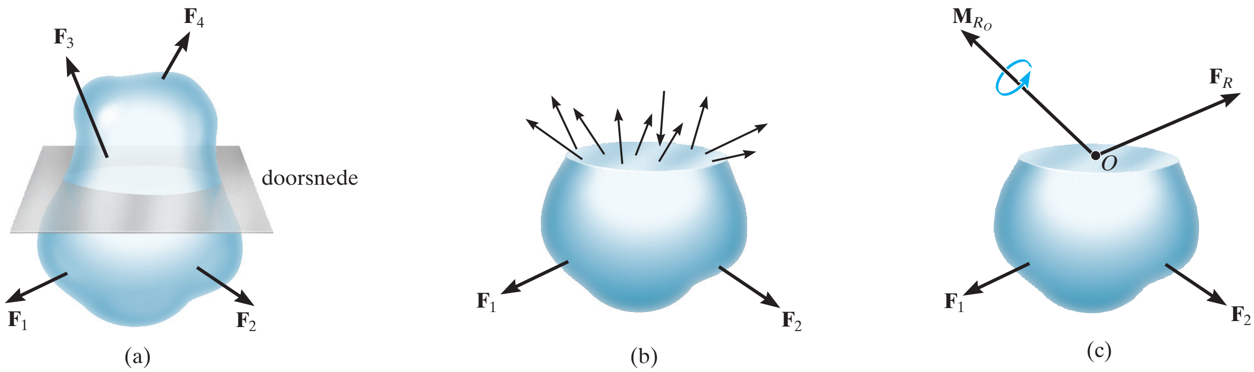
Het gewicht van dit verkeersbord en de windbelastingen die erop werken veroorzaken normaal- en afschuifkrachten en buig- en wringmomenten in de dragende kolom.

Inwendige belastingen In de sterkteleer wordt statica met name gebruikt om de inwendige belastingen binnen een lichaam te bepalen. Dit wordt gedaan met behulp van de ***doorsnedemethode***. Bekijk als voorbeeld het lichaam in fig. 1.2*a*, dat door de vier uitwendige krachten in evenwicht wordt gehouden.* Om de inwendige belastingen die in een bepaald oppervlak in het lichaam werken te bepalen, is het nodig om een denkbeeldige doorsnede te maken door het gebied waar deze belastingen moeten worden bepaald. De twee delen van het lichaam worden vervolgens gescheiden en van een van de delen wordt een vrijlichaamsschema getekend. Bekijken we het onderste deel, dan is er sprake van een verdeling van inwendige krachten die op het 'zichtbare' gedeelte van de doorsnede werken, fig 1.2b. Deze krachten vertegenwoordigen in feite de werking van het materiaal van het bovenste deel op het aangrenzende materiaal van het onderste deel van het lichaam.

Hoewel de exacte verdeling van deze inwendige belasting *onbekend* kan zijn, kunnen de resultaten $\mathbf{F}_R$ en $\mathbf{M}_{R_O}$ worden bepaald door de evenwichtsvergelijkingen toe te passen op het deel dat in fig. 1.2*c* is weergegeven. Hier werken deze belastingen in punt O. Dit punt wordt echter vaak gekozen op het zwaartepunt van het doorsneden gebied.

Drie richtingen Voor latere toepassing van de formules voor mechanica van materialen, bekijken we de componenten van $\mathbf{F}_R$ en $\mathbf{M}_{R_O}$ die rakend aan

* Het gewicht van het lichaam is niet aangegeven, omdat wordt aangenomen dat dit heel klein is; hierdoor kan het, vergeleken met de andere krachten, worden verwaarloosd.



en tangentieel op het vlak van de doorsnede werken, fig. 1.2*d*. We kunnen op de volgende manier vier verschillende soorten resulterende belastingen definiëren:

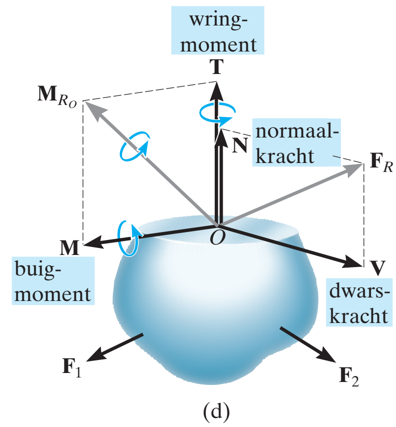


Fig. 1.2

Normaalkracht, N Deze kracht werkt loodrecht op het oppervlak. Deze kracht wordt ontwikkeld als de uitwendige belastingen drukken op of trekken aan de twee segmenten van het lichaam.

Dwarskracht, V De dwarskracht werkt in het vlak van de doorsnede en wordt ontwikkeld als de uitwendige belastingen de twee segmenten van het lichaam over elkaar heen willen schuiven.

Wringmoment, T Een wringmoment wordt ontwikkeld als uitwendige belastingen het ene segment van het lichaam ten opzichte van het andere segment om een as loodrecht op het oppervlak willen verdraaien.

Buigmoment, M Een buigmoment wordt veroorzaakt als uitwendige belastingen het lichaam willen verbuigen om een as binnen het vlak van de doorsnede.

Belastingen in één vlak Als het lichaam wordt blootgesteld aan een *stelsel van krachten in één vlak*, fig. 1.3*a*, zal de doorsnede uitsluitend belast kunnen worden door drie van de vier componenten, te weten de normaalkracht, de dwarskracht en het buigmoment, fig. 1.3*b*.

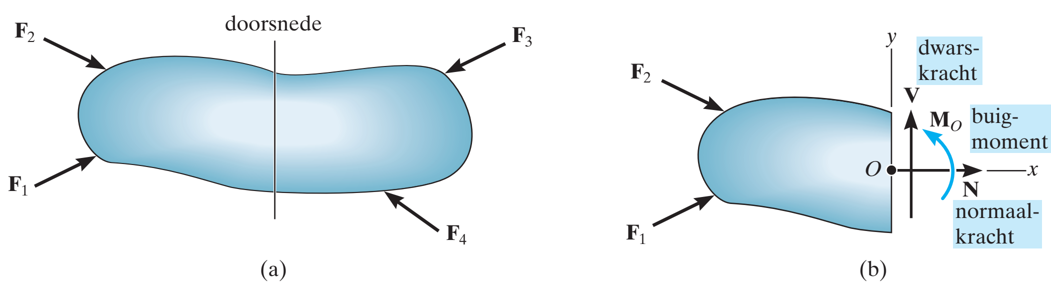


Fig. 1.3

Om te onthouden!

- Uitwendige krachten kunnen op een lichaam werken als *verdeelde* of *geconcentreerde oppervlaktebelastingen*, of als *volumekrachten* die binnen het volume van het lichaam werken.
- Verdeelde belastingen leveren een *resulterende kracht* met een *grootte* die gelijk is aan de *oppervlakte onder het verdeeldebelastingdiagram* die aangrijpt in het *zwaartepunt* van dit gebied.
- Een ondersteuning levert een *kracht* in een bepaalde richting aan het lichaam dat eraan bevestigd is als het *translatie van dat lichaam in die richting voorkomt*, en levert een *moment* op het lichaam als het een *rotatie ervan voorkomt*.
- Om te voorkomen dat een lichaam versneld gaat transleren of roteren, moet voldaan worden aan de evenwichtsvergelijkingen $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ en $\sum \mathbf{M} = \mathbf{0}$.
- De snedemethode wordt gebruikt om de inwendige resulterende belastingen te berekenen die werken op het oppervlak van een doorgesneden lichaam. Over het algemeen bestaan deze resultanten uit een normaalkracht, een dwarskracht, een wringmoment en een buigmoment.

Analyseprocedure

De resulterende *inwendige* belastingen op een punt in een dwarsdoorsnede van een lichaam kunnen worden bepaald met behulp van de snedemethode. Hiervoor moeten de volgende stappen worden uitgevoerd:

Ondersteuningsreacties

- Beslis voordat de doorsnede van het lichaam wordt gemaakt eerst welk segment van het lichaam moet worden bekeken. Als het segment wordt ondersteund door een ander lichaam of een verbinding daarmee heeft, moeten de ondersteuningsreacties op het segment van het lichaam bepaald worden. Teken daarvoor het vrijlichaamsschema van het *gehele lichaam* en stel vervolgens de benodigde evenwichtsvergelijkingen op om deze reacties te bepalen.

Vrijlichaamsschema

- Houd alle uitwendige verdeelde belastingen, koppels, wringmomenten en krachten die op het lichaam werken *precies op hun plaats* alvorens de doorsnede in het lichaam te maken op het punt waar de inwendige resulterende krachten bepaald moeten worden.
- Teken een vrijlichaamsschema van een van de segmenten en geef de onbekende resultanten $\mathbf{N}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{M}$ en $\mathbf{T}$ van de doorsnede aan. In de meeste gevallen worden deze resultanten geplaatst op het punt dat het geometrische middelpunt of *zwaartepunt* van het doorsnedeoppervlak vertegenwoordigt.

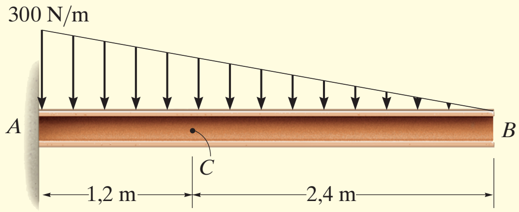
Evenwichtsvergelijkingen

- Momenten moeten ter plaatse van het zwaartepunt van de doorsnede worden opgeteld, om de vastgestelde assen. Door dit te doen worden de onbekende krachten $\mathbf{N}$ en $\mathbf{V}$ geëlimineerd en wordt een directe oplossing voor $\mathbf{M}$ (en $\mathbf{T}$) mogelijk.
- Als de evenwichtsvergelijkingen een negatieve waarde voor een resultante opleveren, is de *werkrichting* van de resultante *tegengesteld* aan de richting die in het vrijlichaamsschema is weergegeven.

Op MyLab vind je video's bij de stof in deze en de meeste andere paragrafen.

Voorbeeld 1.1

Bepaal de resulterende inwendige belastingen die in de dwarsdoorsnede in punt C van de balk in fig. 1.4a werken.



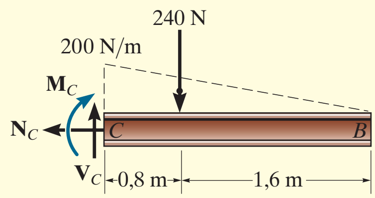
(a)

Fig. 1.4

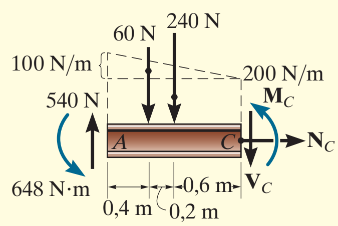
OPLOSSING

Ondersteuningsreacties We hoeven de ondersteuningsreacties bij A niet te bepalen als we alleen segment CB beschouwen.

Vrijlichaamsschema Het vrijlichaamsschema van segment CB is weergegeven in fig. 1.4b. Het is belangrijk om de verdeelde belasting op het segment te houden tot *na* de doorsnede is gemaakt. Alleen dan mag deze belasting worden vervangen door één resulterende kracht. We zien dat de grootte van de verdeelde belasting in C wordt bepaald door evenredigheid: uit fig. 1.4a blijkt dat $w/2{,}4\text{ m} = (300\text{ N/m})/3{,}6\text{ m}$, zodat $w = 200$ N/m. De grootte van de resultante van de verdeelde belasting is gelijk aan de oppervlakte onder de belastingskromme (de driehoek) en werkt door het zwaartepunt van dit oppervlak. Zodoende is $F = \frac{1}{2}(200\text{ N/m})(2{,}4\text{ m}) = 240\text{ N}$ en werkt op een afstand $\frac{1}{3}(2{,}4\text{ m}) = 0{,}8\text{ m}$ van C, zoals is weergegeven in fig. 1.4b.



(b)



(c)

Fig. 1.4

Evenwichtsvergelijkingen Als we de evenwichtsvergelijkingen toepassen, levert dat

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad -N_C = 0$$

$$N_C = 0 \qquad \textit{Antw.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad V_C - 240\text{ N} = 0$$

$$V_C = 240\text{ N} \qquad \textit{Antw.}$$

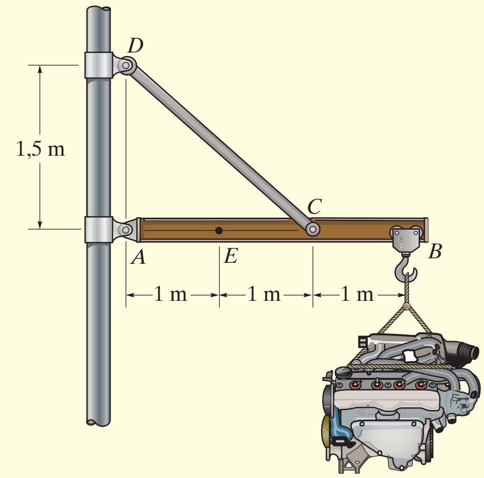
$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \qquad -M_C - 240\text{ N}(0{,}8\text{ m}) = 0$$

$$M_C = -192\text{ N}\cdot\text{m} \qquad \textit{Antw.}$$

Het minteken geeft aan dat $\mathbf{M}_C$ in tegengestelde richting van het koppel in het vrijlichaamsschema werkt. Probeer dit probleem voor segment AC op te lossen door eerst de ondersteuningsreacties in A te na te gaan; deze zijn weergegeven in fig. 1.4c.

Voorbeeld 1.2

De motor met een massa van 500 kg is opgehangen aan de giek in fig. 1.5*a*. Bepaal de resulterende inwendige belastingen in de dwarsdoorsnede van de giek in *E*.



(a)

Fig. 1.5

OPLOSSING

Ondersteuningsreacties We beschouwen segment *AE* van de giek, zodat we eerst de scharnierreacties bij *A* moeten bepalen. Omdat op segment *CD* twee krachten werken, fungeert het als een kabel, en oefent daardoor een kracht $\mathbf{F}_{CD}$ uit waarvan de richting bekend is.. In fig. 1.5*b* is het vrijlichaamsschema weergegeven van de giek. Als we de evenwichtsvergelijkingen toepassen, levert dat

$$\circlearrowright + \Sigma M_A = 0; \qquad F_{CD}\left(\tfrac{3}{5}\right)(2\text{ m}) - [500(9{,}81)\text{ N}](3\text{ m}) = 0$$

$$F_{CD} = 12\,262{,}5\text{ N}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad A_x - (12\,262{,}5\text{ N})\left(\tfrac{4}{5}\right) = 0$$

$$A_x = 9810\text{ N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -A_y + (12\,262{,}5\text{ N})\left(\tfrac{3}{5}\right) - 500(9{,}81)\text{ N} = 0$$

$$A_y = 2452{,}5\text{ N}$$

Vrijlichaamsschema Het vrijlichaamsschema van segment *AE* is weergegeven in fig. 1.5*c*.

Evenwichtsvergelijkingen

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad N_E + 9810 \text{ N} = 0$$

$$N_E = -9810 \text{ N} = -9{,}81 \text{ kN} \qquad \textit{Antw.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -V_E - 2452{,}5 \text{ N} = 0$$

$$V_E = -2452{,}5 \text{ N} = -2{,}45 \text{ kN} \qquad \textit{Antw.}$$

$$\circlearrowright + \Sigma M_E = 0; \qquad M_E + (2452{,}5 \text{ N})(1 \text{ m}) = 0$$

$$M_E = -2452{,}5 \text{ N}\cdot\text{m} = -2{,}45 \text{ kN}\cdot\text{m} \qquad \textit{Antw.}$$

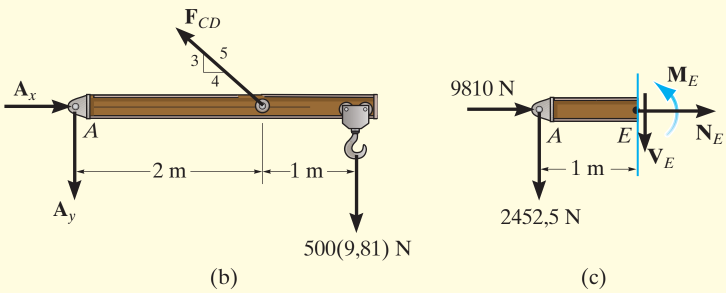


Fig. 1.5 (vervolg)

Voorbeeld 1.3

Bepaal de resulterende inwendige belastingen die in C in de dwarsdoorsnede van de balk werken (fig. 1.6*a*).

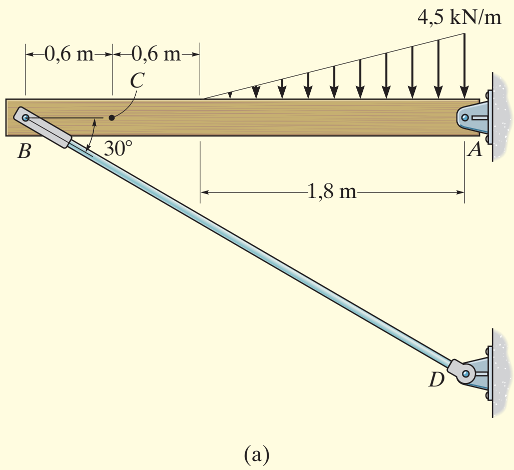


Fig. 1.6