

Statistische Signaalverwerking

Statistische Signaalverwerking

R.L. Lagendijk
J. Biemond

*Technische Universiteit Delft
Faculteit Informatietechnologie en Systemen*

© VSSD

Eerste druk 1994, verbeterd 1999

Uitgegeven door:

VSSD

Leeghwatersraat 42, 2628 CA Delft, The Netherlands

tel. +31 15 2782124, fax +31 15 2787585, e-mail: hlf@vssd.nl

internet: <http://www.vssd.nl/hlf>

URL over dit boek: <http://www.vssd.nl/hlf/informatie.html>

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photo-copying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

Gedrukte editie

ISBN-10 90-407-1258-1

ISBN-13 978-90-407-1258-6

NUR 965

Elektronische versie:

ISBN-10 90-6562-142-3

ISBN-13 978-90-6562-142-9

Trefw.: statistische signaalverwerking / detectietheorie / schattingstheorie

Voorwoord

In de laatste decennia heeft de signaalverwerking sterke veranderingen doorgemaakt. Door de opkomst van geïntegreerde digitale signaalverwerkingsprocessoren en door de ontwikkeling van gespecialiseerde geïntegreerde circuits voor complexe signaalverwerkingsalgoritmen heeft de bewerking van elektrische signalen in real-time zich ontwikkeld van abstract idee tot dagelijkse praktijk. Algoritmen die lange tijd slechts conceptuele oplossingen van theoretische problemen waren, worden momenteel routinematig gebruikt in een groot aantal toepassingen binnen de Elektrotechniek (telecommunicatie: detectie en schatting van signalen, netwerktheorie: realisatie van algoritmen, regeltechniek: regelen en meten van systemen, en informatietheorie: transport en extractie van informatie), maar ook daar buiten. De statistische signaalverwerking concentreert zich op dat deel van de signaalverwerking waarin het gebruik van stochastische signaalmodellen en statistische kenmerken essentieel is. Bij alle te bespreken onderwerpen draait het telkens om het scheiden van informatie en verstoring, waarbij de verstoring meestal gemodelleerd wordt als een (additieve) ruiscomponent.

Dit boek is gebaseerd op het college *Statistische Signaalverwerking* zoals dat sinds 1983 gegeven wordt aan de faculteit der Elektrotechniek van de Technische Universiteit in Delft. Door de jaren heen is het studiemateriaal geëvolueerd van collegeaantekeningen, via collegediktaten tot het voor u liggende boek.

Aanpak en inhoud

Dit boek behandelt de elementaire onderwerpen uit de statistische signaalverwerking, zodat na bestudering de (vrij uitgebreide) literatuur op dit gebied goed toegankelijk is. Er wordt ingegaan op detectie- en schattingstheorie, lineaire kleinste-kwadraten schatters (Wiener, Kalman schatters en adaptieve filters) en methoden voor het schatten van spectra.

In dit boek staan de methodologieën voorop en niet zozeer de toepassingen, alhoewel de behandelde stof wel zoveel mogelijk geïllustreerd wordt aan de hand van voorbeelden uit de praktijk van de signaalverwerking. De methoden die besproken worden, vormen de basis voor veel gerealiseerde systemen. Voordat een gekozen methode in de praktijk gebruikt kan worden, zal eerst een geschikte implementatie gevonden moeten worden. Dit niet onbelangrijke architectuur- en hardware-aspect wordt slechts op enkele plaatsen in het boek genoemd. De nadruk van dit boek ligt dus meer op het

ontwikkelen van methoden en algoritmen dan op de realisatie hiervan.

In hoofdstuk 1 wordt een nadere toelichting gegeven op de doelstellingen van de statistische signaalverwerking aan de hand van enkele voorbeelden. Vervolgens wordt een resumé gegeven van de belangrijkste begrippen uit de kansrekening en de theorie van de stochastische processen. Op basis hiervan wordt daarna een aantal stochastische signaalmodellen geïntroduceerd (AR, MA, ARMA), omdat deze essentieel zijn voor de ontwikkeling van Kalman filters en spectrum schatters.

In hoofdstuk 2 wordt het meest elementaire probleem uit de statistische signaalverwerking besproken, namelijk het beslissen of een signaal wel of niet aanwezig is. Bij dit detectieprobleem zijn de beslissingscriteria van groot belang. Een toepassing van de detectietheorie is te vinden in het matched filter.

Nadat een signaal gedetecteerd is, kunnen hieraan bepaalde eigenschappen gemeten worden. Bij stochastische signalen spreekt men dan over het schatten van signaalparameters, wat het onderwerp is van hoofdstuk 3. Omdat bij deze schatting altijd afwijkingen optreden ten opzichte van de werkelijke parameterwaarde, is ook bij de schattingstheorie de keuze van een foutcriterium belangrijk. Vanwege implementatie-overwegingen beperkt men zich vaak tot lineaire schatters voor parameters, dat wil zeggen, schatters die een gewogen gemiddelde van waargenomen signaalwaarden zijn. Dit onderwerp vormt de overgang naar de lineaire filtertheorie (hoofdstuk 4, 5 en 6).

In de lineaire filtertheorie probeert men vanuit een waargenomen verstoord tijdsignaal een zo goed mogelijke schatting te maken van het onverstoorde (dat wil zeggen, het originele) informatiedragende tijdsignaal. We beperken ons daarbij tot lineaire schatters die een kwadratisch foutcriterium minimaliseren. Vervolgens wordt een algemeen geldig stelsel van vergelijkingen afgeleid, waaruit de weegcoëfficiënten van de lineaire schatter bepaald dienen te worden. Onder zekere voorwaarden kan dit redelijk eenvoudig gebeuren. We spreken dan van Wiener schatters, waarvan een aantal mogelijke vormen in hoofdstuk 4 aan de orde komt.

Veelal zijn Wiener schatters rekentechnisch onaantrekkelijk. In hoofdstuk 5 komt een klasse van rekentechnisch meer aantrekkelijke schatters aan de orde, namelijk de Kalman schatters. De twee belangrijkste representanten van deze categorie schatters worden afgeleid, namelijk de Kalman 1-staps predictor en het Kalman filter. Uitbreidingen naar meer complexe situaties worden kort genoemd.

Kalman en Wiener schatters zijn gebaseerd op stochastische modellen voor de signalen en de ruiscomponenten. In sommige situaties is echter meer voorkennis over verstoring of signaal beschikbaar. We kunnen dan een lineaire schatter gebruiken in de zogenaamde ‘noise cancelling’ configuratie. Tevens blijkt dan een hoge mate van adaptiviteit aan signaal en ruis mogelijk te zijn, wat schatters met betere prestaties levert dan de Kalman of Wiener schatters. Hoofdstuk 6 beschrijft de basisvorm van het ‘noise cancelling’ concept, behandelt een efficiënte implementatie hiervan en geeft tevens een aantal toepassingen.

Zoals gezegd hebben vele lineaire schatters voorkennis nodig over de te schatten signalen, namelijk het vermogensdichtheidspectrum of de autocorrelatiefunctie. Helaas zijn beide niet zomaar beschikbaar en zullen dus uit een gemeten signaal geschat moeten worden. In hoofdstuk 7 wordt eerst een aantal klassieke spectrum-schattingmethoden besproken. Vervolgens wordt uitgebreid ingegaan op de belangrijke klasse van (AR/MA/ARMA) model-gebaseerde spectrum schatters.

Vereiste voorkennis

Om aansluiting te kunnen vinden bij het materiaal dat in dit boek besproken wordt, is voorkennis vereist over de basisbegrippen rond kansrekening en stochastische processen: (vectoriële) stochastische variabele, kansdichtheidsfunctie, Gaussische stochastische variabele, verwachting, correlatie en covariantie, onafhankelijkheid, ongecorreleerdheid, orthogonaliteit, stationariteit en ergodiciteit. Hoofdstuk 1 van dit boek geeft een resumé van de vereiste voorkennis, en introduceert tevens diverse notaties. Concepten uit de lineaire algebra worden bekend verondersteld, zoals matrix-vector rekenen en het begrip orthogonaliteit. Er wordt tevens van uitgegaan dat de begrippen Fourier transformatie (voornamelijk op tijd-discrete signalen) en z-transformatie en de eigenschappen hiervan bekend en operationeel zijn.

Dankbetuigingen

Het samenstellen van collegeaantekeningen, diktaten of boeken vergt interactie tussen docent en studenten. Ook aan dit boek hebben op een groot aantal plaatsen studenten hun bijdrage geleverd door het stellen van gerichte vragen, het opmerken van fouten, en soms ook door het suggereren van een wijziging in aanpak of formulering. De auteurs bedanken iedereen die op een dergelijke wijze aan verbetering van het studiemateriaal heeft meegewerkt.

Alhoewel het materiaal met uiterste zorg is samengesteld, zijn onvolkomenheden nooit uitgesloten. De auteurs stellen daarom opmerkingen en suggesties met betrekking tot de inhoud zeer op prijs.

Delft, januari 1994
Inald Lagendijk
Jan Biemond

nhoud

VOORWOORD	5
1. INTRODUCTIE IN DE STATISTISCHE SIGNAALVERWERKING	13
1.1. Toepassingen	13
1.2. Resumé stochastische variabelen	17
1.2.1. Het kansbegrip	17
1.2.2. Gezamenlijke en conditionele kans, onafhankelijkheid	19
1.2.3. Stochastische variabelen	19
1.2.4. Vectoriële stochastische variabelen	22
1.2.5. Stochastische processen en signalen	26
1.2.6. Gemiddelde, correlatie en covariantie van stochastische signalen	28
1.2.7. Stationariteit en ergodiciteit	30
1.2.8. Autocorrelatiefunctie en vermogensdichtheidsspectrum	31
1.2.9. Witte ruis	34
1.3. AR, MA en ARMA signaalmodellen	36
1.3.1. Klassen van signaalmodellen	36
1.3.2. Autoregressief signaalmodel	38
1.3.3. Moving-average signaalmodel	39
1.3.4. Autoregressief moving-average signaalmodel	40
1.3.5. Toestandsbeschrijving van ARMA modellen	41
1.4. Samenvatting en belangrijke termen	45
Lijst van belangrijke termen	45
2. DETECTIETHEORIE	46
2.1. Inleiding	46
2.2. Het toetsen van hypothesen	47
2.3. Beslissingscriteria	50
2.3.1. Bayes criterium	51
2.3.2. MAP-criterium	55
2.3.3. Minimale foutkans criterium	55
2.3.4. Minimax criterium	57
2.3.5. Neyman-Pearson toets	59
2.3.6. Maximum likelihood	63

2.4. Meervoudige waarnemingen	63
2.5. Sequentiële detectie	66
2.6. Detectie van bekende signalen in witte ruis	68
2.6.1. Tijd-discrete geval	68
2.6.2. Tijd-continue geval	69
2.6.3. Matched filter implementatie van de ontvanger	71
2.7. Samenvatting en belangrijke termen	73
Lijst van belangrijke termen	75
Vraagstukken	75
3. SCHATTINGSTHEORIE	80
3.1. Inleiding	80
3.2. Stochastische parameters: Bayes schatters	81
3.2.1. Minimum-variantie schatter	83
3.2.2. Mediaan schatter	84
3.2.3. Maximum a posteriori schatter	84
3.3. Deterministische parameters: maximum likelihood schatters	90
3.4. Eigenschappen van schatters	92
3.5. Lineaire kleinste kwadraten schatters voor stochastische parameters	98
3.6. Samenvatting en belangrijke termen	102
Lijst van belangrijke termen	102
Vraagstukken	103
4. LINEAIRE KLEINSTE KWADRATEN SCHATTERS VOOR SIGNALEN:	
WIENER FILTERS	105
4.1. Inleiding	105
4.2. Wiener-Hopf vergelijking	109
4.2.1. Orthogonaliteitsprincipe	109
4.2.2. Tijd-variante Wiener-Hopf vergelijking	112
4.2.3. Tijd-invariante Wiener-Hopf vergelijking	113
4.3. Niet-causale Wiener filter	115
4.4. Causale Wiener schatter met oneindig geheugen	119
4.4.1. Whitening benadering	119
4.4.2. Spectrale factorisatie	120
4.4.3. Oplossing voor de causale schatter	122
4.5. Causale Wiener schatter met eindig geheugen	125
4.6. Gegeneraliseerde Wiener filter	127
4.6.1. Matrix-vector formulering	128
4.6.2. Efficiënte implementatie met unitaire transformaties	130
4.6.3. Fourier domein filter	132
4.7. Tijd-continue Wiener schatters	134

4.8. Samenvatting en belangrijke termen	134
Lijst van belangrijke termen	136
Vraagstukken	136
5. KALMAN FILTERS	141
5.1. Inleiding	141
5.2. Wold-decompositie	145
5.3. Kalman 1-staps predictor	149
5.3.1. Afleiding	149
5.3.2. Eigenschappen van het innovatieproces	152
5.3.3. Kalmanversterking	154
5.3.4. Ricatti differentievergelijking	155
5.3.5. Begincondities en stabiliteit	156
5.3.6. Steady-state gedrag	157
5.4. Kalman filter	160
5.4.1. Afleiding	160
5.4.2. Kalmanversterking en Ricatti differentievergelijking	162
5.4.3. Steady-state gedrag	162
5.5. Uitbreidingen op de standaard Kalman schatters	164
5.6. Beperkingen en voorbeelden	165
5.6.1. Beperkingen	165
5.6.2. Filteren van beelden	166
5.6.3. Filteren van niet-stationaire ruis	167
5.7. Samenvatting en belangrijke termen	168
Lijst van belangrijke termen	169
Vraagstukken	169
6. ADAPTIEF FILTEREN IN DE ‘NOISE CANCELING’ CONFIGURATIE	172
6.1. Inleiding	172
6.2. Het ‘adaptive noise canceling’ principe	172
6.3. Het adaptieve filter	175
6.3.1. ‘Single-input’ adaptief filter	176
6.3.2. ‘Multiple-input’ adaptief filter	177
6.3.3. De optimale weegvector	178
6.4. Het LMS-algoritme	180
6.5. Toepassingen	182
6.6. Samenvatting en belangrijke termen	190
Lijst van belangrijke termen	192
Vraagstukken	192

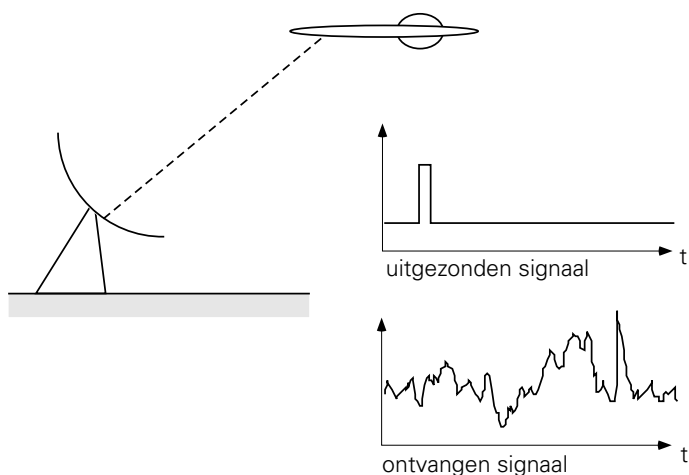
7. SPECTRUM SCHATTEN	194
7.1. Inleiding	194
7.2. De ‘taper-and-transform’ methoden	198
7.2.1. Periodogram spectrum schatter	199
7.2.2. Oplossend vermogen en leakage	199
7.2.3. Variantie van de periodogram schatter	203
7.2.4. Middeling van het periodogram	207
7.2.5. Blackman-Tukey schatter	208
7.3. Autoregressieve spectrum schatter	210
7.3.1. AR modellering	210
7.3.2. Yule-Walker vergelijkingen	211
7.3.3. Schatting van de autocorrelatiecoëfficiënten	214
7.3.4. Extrapolatie van de autocorrelatiefunctie	216
7.3.5. Orde van het model	219
7.4. Moving-average en autoregressieve moving-average spectrum schatter	221
7.4.1. MA modellering	221
7.4.2. AR-oneindig benadering	223
7.4.3. Autoregressieve moving-average spectrum schatter	224
7.5. Samenvatting en belangrijke termen	226
Lijst van belangrijke termen	226
Vraagstukken	227
APPENDIX: TWEEZIJDIGE Z-TRANSFORMATIE	229
ANTWOORDEN	232
LITERATUUR	240
TREFWOORDENLIJST	242

1 Introductie in de statistische signaalverwerking

1.1. Toepassingen

Statistische signaalverwerking is dát gebied van de signaalverwerking dat zich bezighoudt met het scheiden van informatie en verstoring in een waargenomen (gemeten) signaal. Het scheiden van informatie en verstoring is relatief eenvoudig als de informatie deterministisch is of als de verstoringen bekende fenomenen zijn die nauwkeurig beschreven kunnen worden. Het wordt echter anders wanneer de signalen stochastische grootheden zijn, zoals in de praktijk meestal het geval is. De precieze beschrijving van informatie en verstoring is dan niet langer mogelijk, en zullen er statistische kenmerken zoals verwachting, variantie en correlatie gebruikt moeten worden. Tevens is het bij stochastische signalen meestal niet mogelijk de gezochte informatie exact te bepalen en moeten schattingsmethoden ingezet worden om een (gemiddeld gezien) zo goed mogelijke scheiding tussen informatie en verstoring te verkrijgen.

Een aantal voorbeelden uit de praktijk kan het nut van statistische signaalverwerking illustreren. Stel we willen met radar bepalen of zich een vliegtuig in een bepaald deel van het luchtruim bevindt (figuur 1.1). Hiertoe wordt een radarbundel op het betreffende deel van het luchtruim gericht en wordt er vervolgens bepaald of zich reflecties voordoen. Er doen zich nu twee vragen voor. In de eerste plaats moet



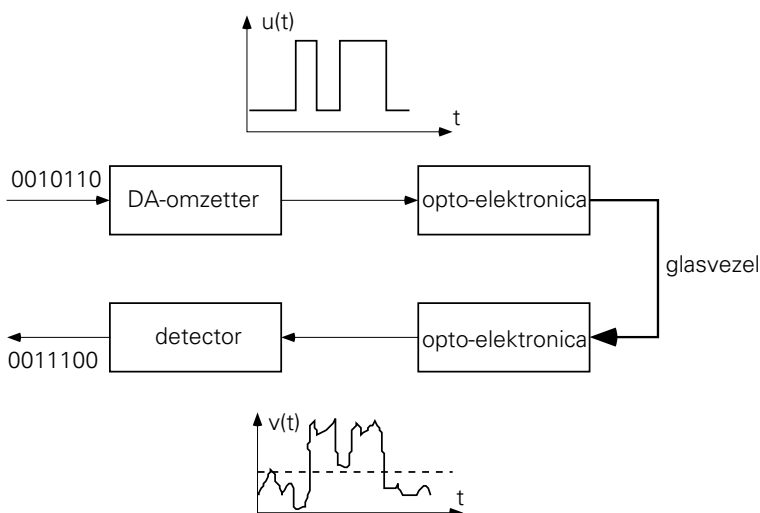
Figuur 1.1. Volgen van een bewegend object met radar.

beslist worden of er wel of geen reflectie optreedt. En als zich dan een reflectie voordoet, is vervolgens de vraag wat de eigenschappen van het betreffende object (vliegtuig?) zijn, zoals positie en snelheid. Als er niets is waartegen de radarpuls kan reflecteren, zal er in ideale omstandigheden ook inderdaad niets waargenomen worden. Indien er wel een object aanwezig is, dan ontvangen we een reflectie τ seconden na het uitzenden van een radarpuls. De afstand tot het object is dan $\ell = 0,5c\tau$, waarbij c de voortplantingssnelheid van elektromagnetische golven is.

Helaas gaan bovenstaande ideale omstandigheden in de praktijk nooit op. We hebben altijd te maken met stochastische verstoringen (ruis) van het waargenomen signaal, bijvoorbeeld ten gevolge van verstoringen in het transmissiemedium (multipad-effecten, irrelevante reflecties) en ruis in de detectieapparatuur. Hierdoor is het mogelijk dat een reflectie wordt gedetecteerd terwijl er geen object aanwezig is, of dat de reflectie op een verkeerd tijdstip wordt gedetecteerd, wat tot een verkeerde bepaling van ℓ leidt. Aan de andere kant is het ook mogelijk dat een reflectie gemist wordt, waardoor een vliegtuig niet gedetecteerd wordt. In beide gevallen leidt de aanwezigheid van ruis tot een verkeerde beslissing of verkeerde afstandsbeoordeling.

De statistische signaalverwerking probeert nu de kans op een foute beslissing dan wel de grootte van de fout in de afstandsbeoordeling te minimaliseren, zodat uit de verstoorde waarnemingen toch de gezochte informatie (wel/geen vliegtuig, welke afstand) zo goed mogelijk geschat kan worden.

Een vergelijkbare situatie doet zich voor in de digitale transmissie van signalen over glasvezels (figuur 1.2). Aan de zenzijde wordt elke T seconden ofwel een rechthoekige puls (een digitale '1') ofwel geen puls (een digitale '0') verzonden. In ideale omstandigheden kan aan het eind van de glasvezel een sensor bepalen of er wel of



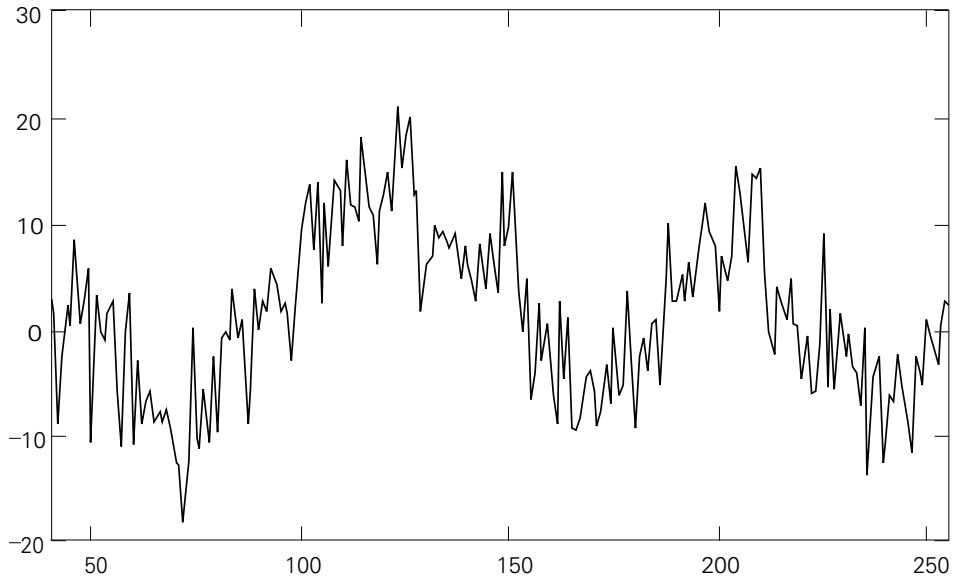
Figuur 1.2. *Optisch communicatiesysteem.*

geen puls was uitgezonden. Helaas zal de puls tijdens de transmissie verstoord worden door bijvoorbeeld looptijdverschillen, dempingen en imperfecties in de glasvezel. Bovendien is de sensor zelf niet ruisvrij. Hierdoor is het mogelijk dat de sensor geen puls detecteert terwijl die wel aanwezig was en vice versa. Met behulp van statistische signaalverwerkingsmethoden kan een detectiesysteem ontworpen worden dat gemiddeld gezien zo min mogelijk fouten maakt, wat de betrouwbaarheid van de communicatieverbinding vergroot.

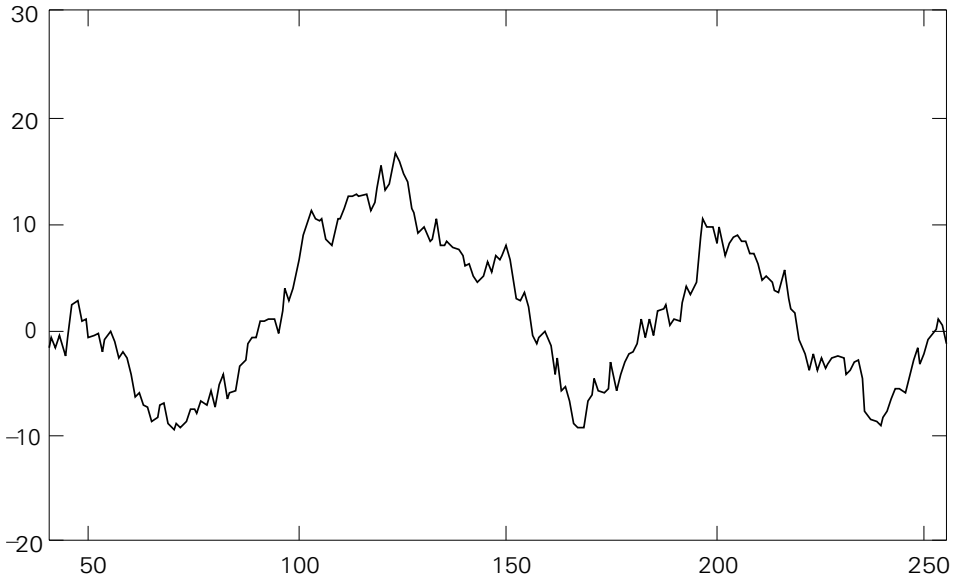
Een heel ander toepassingsgebied is het filteren van signalen. In veel situaties is een signaal dat afkomstig is van een fysisch proces imperfect door verstoringen die ontstaan tijdens het verrichten van de metingen of ten gevolge van de wijze waarop het signaal gemeten wordt. Denk hierbij bijvoorbeeld aan het meten van een EEG (elektro-encefalogram). Deze vorm van afbeelden van hersenactiviteiten vindt toepassing in een groot aantal klinische situaties. De EEG signalen zijn het resultaat van zeer kleine potentiaalverschillen in de hersenen en zijn daarom moeilijk te registreren. Allerlei versturende effecten zoals spieractiviteiten, omgevingsinvloeden en meetruis in de sensoren zorgen ervoor dat het gemeten EEG een verruiste versie is van de feitelijke hersenactiviteiten. Door middel van statistische signaalverwerkingsmethoden zoals Wiener, Kalman en adaptieve schatters is het mogelijk de versturende componenten te reduceren (zie figuur 1.3). Dit maakt vervolgens de interpretatie (bijvoorbeeld een medische diagnose) van de gemeten signalen eenvoudiger en betrouwbaarder.

Andere voorbeelden uit deze categorie van statistische signaalverwerking zijn de regeltechniek (meten/regelen/modelleren van industriële processen), de beeldverwerking (analyse en codering van beelden of beeldsequenties), de robotica (positie/oriëntatie/snelheidsmetingen), de navigatie (global position systems) en de biomedische techniek.

In elk van de genoemde toepassingen is er sprake van *waarnemingen*, *informatie-dragende signalen* en *verstoringen*. In figuur 1.4 worden deze termen in relatie tot elkaar geplaatst. Een fysisch of andersoortig proces genereert een zeker informatie-dragend signaal, dat echter niet rechtstreeks kan worden waargenomen (aangegeven met ???). De waarneming (meting) die verkregen wordt, is een verstoord versie van het informatiedragende signaal. Door modellering van het oorspronkelijke proces en de verstoringen kunnen schattingsalgoritmen worden afgeleid die optimaal zijn volgens een bepaald criterium. Toepassen van deze algoritmen op de waarneming leidt dan tot een schatting van het gezochte signaal of informatie. In de statistische signaalverwerking wordt dus altijd uit de (verstoord) waarnemingen informatie onttrokken via schattingsalgoritmen. Stochastische modellen voor de diverse signalen spelen hierbij een cruciale rol.

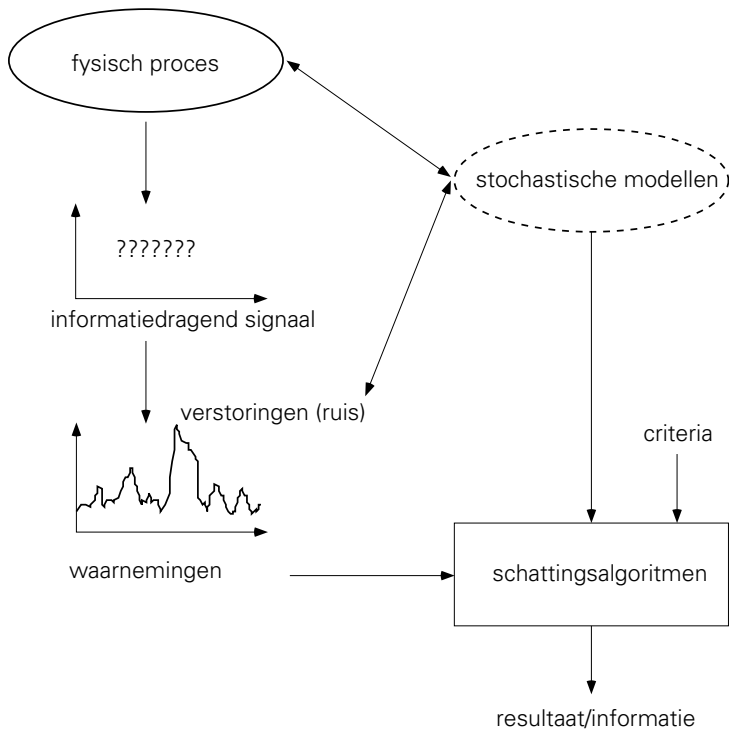


(a)



(b)

Figuur 1.3. Filteren van signaal met ruis.



Figuur 1.4. Ingrediënten van de statistische signaalverwerking.

1.2. Resumé stochastische variabelen

Deze paragraaf geeft een resumé van enkele van de belangrijkste begrippen uit de kansrekening en stochastische processen, waarbij de nadruk wordt gelegd op de aspecten die voor de modellering van signalen belangrijk zijn. Een meer diepgaande presentatie van het materiaal in deze paragraaf is te vinden in elk goed tekstboek over waarschijnlijkheidsrekening, bijvoorbeeld [1] en [2]. Paragraaf 1.3 bouwt verder op de hier besproken begrippen en introduceert de belangrijke klasse van autoregressieve (AR), moving-average (MA) en autoregressieve moving-average (ARMA) signaalmodellen.

Opgemerkt wordt dat deze paragraaf zich beperkt tot de behandeling van *reëel-waardige* stochastische variabelen en signalen.

1.2.1. Het kansbegrip

Het deel van de wiskunde dat zich bezighoudt met het bestuderen van verschijnselen die niet in detail voorspelbaar zijn, is de waarschijnlijkheids- of kansrekening. In de kansrekening wordt verondersteld dat er sprake is van een *experiment*, dat goed omschreven moet worden om dubbelzinnigheden en onduidelijkheden te vermijden.

Bovendien wordt verondersteld dat het experiment willekeurig vaak herhaald kan worden onder identieke omstandigheden. De laatste veronderstelling waarvan uitgegaan wordt, is dat men aan kan geven welke *uitkomsten* mogelijk zijn bij het uitvoeren van een experiment. De set van mogelijke uitkomsten noemt men de *uitkomstenruimte*.

Als voorafgaande veronderstellingen waar zijn, dan is het mogelijk om te spreken over de *kans* dat een experiment een bepaalde uitkomst aanneemt. Aan elke uitkomst wordt dan een getal verbonden tussen 0 en 1 dat aangeeft hoe groot de kans is dat deze uitkomst zich voordoet.

Men kan slechts over de kans van een uitkomst spreken als een experiment willekeurig vaak herhaald kan worden. Definieren we de *relatieve frequentie* of *frequentiecoëfficiënt* van een uitkomst A_i als

$$f(A_i) = \frac{N(A_i)}{N} \quad 0 \leq f(A_i) \leq 1 \quad (1.1)$$

waarbij N het aantal malen herhaling van het experiment is, en $N(A_i)$ het aantal malen dat uitkomst A_i voorkomt, dan kan de kans op A_i gedefinieerd worden als:

$$P(A_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} f(A_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(A_i)}{N} \quad (1.2)$$

Een op deze manier gedefinieerde kans is een hypothetische grootheid, omdat oneindig veel waarnemingen gedaan zouden moeten worden. In feite levert een eindig aantal waarnemingen slechts een schatting op van de kans. Om deze reden wordt overgegaan op een axiomatische definitie.

Eerst wordt een *gebeurtenis* gedefinieerd als een verzameling van één of meer uitkomsten. De uitkomstenruimte S komt overeen met de zogenaamde zekere gebeurtenis (Ω) waarin alle uitkomsten opgenomen zijn. Aan elke gebeurtenis wordt nu een getal, de kans of waarschijnlijkheid, toegekend dat voldoet aan een drietal axioma's:

axioma 1: Voor elke gebeurtenis A_i geldt: $P(A_i) \geq 0$,

axioma 2: Voor de zekere gebeurtenis geldt: $P(\Omega) = 1$,

axioma 3: Zijn er N disjuncte gebeurtenissen A_1, A_2, \dots, A_N , dan moet gelden:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_N) \quad (1.3)$$

Uitgaande van deze axioma's kunnen verdere eigenschappen van kansen worden afgeleid, zoals

$$\begin{aligned} P(A_i^c) &= 1 - P(A_i) \\ P(\emptyset) &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$0 \leq P(A_i) \leq 1$$

$$P(A_i \cup A_j) = P(A_i) + P(A_j) - P(A_i \cap A_j)$$

1.2.2. Gezamenlijke en conditionele kans, onafhankelijkheid

Soms kan men bij een enkel experiment twee soorten uitkomsten onderscheiden, zodat er in feite sprake is van een combinatie van twee subexperimenten. We kunnen nu de kans op de gebeurtenis $(A_i \cap B_j)$ opvatten als de kans op het gezamenlijk (tegelijktijd) optreden van A_i en B_j , en wordt $P(A_i \cap B_j) = P(A_i, B_j)$ een *gezamenlijke kans* genoemd. Uit de gezamenlijke kansen zijn de *marginale kansen* $P(A_i)$ en $P(B_j)$ direct te bepalen. Het omgekeerde is niet noodzakelijkerwijs waar.

Naast de marginale en gezamenlijke kans bestaat er nog een derde vorm, namelijk de *conditionele kans*. Die doet zich voor wanneer we de kans op een bepaalde gebeurtenis A_i willen weten indien een andere gebeurtenis B_j reeds is opgetreden (en dus bekend is). De conditionele kans van A_i onder de voorwaarde (of gegeven) B_j wordt gedefinieerd als:

$$P(A_i / B_j) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(B_j)} \quad \text{mits } P(B_j) > 0 \quad (1.5)$$

Een belangrijke relatie die vaak bij manipuleren van conditionele kansen gebruikt wordt, is de regel van Bayes:

$$P(A_i / B_j) = \frac{P(B_j / A_i)P(A_i)}{P(B_j)} = \frac{P(B_j / A_i)P(A_i)}{\sum_i P(A_i)P(B_j / A_i)} \quad (1.6)$$

In het algemeen is de conditionele kans $P(A_i / B_j)$ groter of kleiner dan de marginale kans $P(A_i)$. Echter in het geval dat $P(A_i / B_j) = P(A_i)$ heeft kennis over de gebeurtenis B_j blijkbaar geen invloed op de conditionele kans van A_i . We noemen de gebeurtenissen dan *stochastisch onafhankelijk*. Meestal wordt onafhankelijkheid als volgt geverifieerd:

$$P(A_i, B_j) = P(A_i)P(B_j) \Leftrightarrow \text{stochastisch onafhankelijk} \quad (1.7)$$

1.2.3. Stochastische variabelen

Een stochastische variabele is formeel gesproken een numerieke functie die aan elke uitkomst van een experiment een *reëel-waardig getal* koppelt. Gebeurtenissen zijn nu eenvoudig te definiëren als een deelverzameling van de reële as. Wanneer de stochastische variabele slechts waarden x_i aanneemt die individueel aanwijsbaar zijn, spreken we van een discrete stochastische variabele. Bij continue stochastische variabelen zijn de uitkomsten van het experiment niet individueel aanwijsbaar.

Het gedrag van een stochastische variabele X wordt volledig beschreven door de *cumulatieve distributiefunctie* (cdf) $F(x)$, gedefinieerd als:

$$F(x) = P(X \leq x) \quad -\infty < x < \infty \quad (1.8)$$

Uit de definitie van een stochastische variabele en de eigenschappen van kansen volgen ondermeer de volgende eigenschappen van de cumulatieve distributiefunctie:

$$\begin{aligned} F(-\infty) &= 0 \\ F(\infty) &= 1 \\ 0 &\leq F(x) \leq 1 \\ F(a) &\leq F(b) \quad \text{voor } a < b \\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} F(x + \varepsilon) &= F(x) \\ P(X > x) &= 1 - F(x) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Vanuit de cumulatieve distributieverdeling wordt de *kansdichtheidsfunctie* (pdf) $p(x)$ van de stochastische variabele X gedefinieerd als

$$p(x) = \frac{d}{dx} F(x) \quad (1.10)$$

waarbij discontinuïteiten in $F(x)$ delta-impulsen in $p(x)$ opleveren. Voor discrete stochastische variabelen X wordt soms ook van de zogenaamde *kansfunctie* p_i gebruik gemaakt, gedefinieerd als:

$$p_i = P(X = x_i) \quad (1.11)$$

In praktische situaties is vaak van een stochastische variabele niet de volledige kansdichtheidsfunctie bekend, maar is slechts kennis over gemiddelden beschikbaar. Dit leidt tot een meer globale en daardoor minder precieze omschrijving van het gedrag van een stochastische variabele. Veelal worden de *verwachting*, *verwachte waarde* of *eerste moment*

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx \quad (1.12)$$

en de *variantie* of *tweede centrale moment*

$$\sigma^2 = \text{var}[X] = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx \quad (1.13)$$

gebruikt.

Wanneer een stochastische variabele X niet direct waargenomen wordt, maar via een functie daarvan, bijvoorbeeld:

$$Y = aX + b \quad (1.14)$$

dan kan uit de kansdichtheidsfunctie $p_X(x)$ van X die van Y bepaald worden via de transformatietechniek. Voor het geval van de lineaire functie (1.14) levert dit:

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \frac{1}{|a|} p_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \\ E[Y] &= aE[X] + b \\ \text{var}[Y] &= a^2 \text{var}[X] \end{aligned} \quad (1.15)$$

Enkele kansdichtheidsfuncties die in dit boek gebruikt zullen worden, zijn:

- de uniforme kansdichtheidsfunctie:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b \\ E[X] &= \frac{a+b}{2} \quad \text{var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned} \quad (1.16)$$

- de Gaussische kansdichtheidsfunctie:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \\ E[X] &= m, \quad \text{var}[X] = \sigma^2 \end{aligned} \quad (1.17)$$

- de negatief-exponentiële kansdichtheidsfunctie:

$$\begin{aligned} p(x) &= \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \\ E[X] &= \lambda \quad \text{var}[X] = \lambda^2 \end{aligned} \quad (1.18)$$

- de Laplace kansdichtheidsfunctie:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\frac{|x|}{\lambda}\right) \\ E[X] &= 0 \quad \text{var}[X] = 2\lambda^2 \end{aligned} \quad (1.19)$$

- de Chi-kwadraat kansdichtheidsfunctie (m vrijheidsgraden):

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{(m/2)} \Gamma(\frac{m}{2})} x^{(m/2)-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

$$E[X] = m \quad \text{var}[X] = 2m$$

- de binomiale kansfunctie (N Bernoulli variabelen):

$$p_k = P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, N \quad (1.21)$$

$$E[X] = Np \quad \text{var}[X] = Np(1-p)$$

1.2.4. Vectoriële stochastische variabelen

Net zoals een enkel experiment aanleiding kan geven tot twee of meer (afhankelijke of onafhankelijke) soorten gebeurtenissen, kunnen ook twee of meer verschillende stochastische variabelen iets met elkaar te maken hebben. We spreken dan van *vectoriële stochastische variabelen*. Formeel gesproken is een vectoriële stochastische variabele een numerieke functie die aan de uitkomst van een experiment een reëelwaardige *vector* koppelt. We beschouwen hier kort de beschrijvingswijze van de vectoriële stochastische variabele (X, Y) .

Het gedrag van een twee-dimensionale stochastische variabele wordt volledig vastgelegd door de *gezamenlijke cumulatieve distributiefunctie*, gedefinieerd als:

$$F(x, y) = P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (1.22)$$

Deze gezamenlijke cdf heeft dezelfde soort eigenschappen als de cdf van een enkelvoudige stochastische variabele:

$$\begin{aligned} F(\infty, \infty) &= 1 \\ F(x, -\infty) &= 0 \\ F(-\infty, y) &= 0 \\ F(x, \infty) &= F(x) \\ F(\infty, y) &= F(y) \\ 0 &\leq F(x, y) \leq 1 \\ F(x, y) &\leq F(a, b) \quad \text{voor } x < a \text{ én } y < b \\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0, \delta \downarrow 0} F(x + \varepsilon, y + \delta) &= F(x, y) \end{aligned} \quad (1.23)$$

De gezamenlijke twee-dimensionale kansdichtheidsfunctie $p(x,y)$ is gedefinieerd als:

$$p(x,y) = \frac{d}{d.x d.y} F(x,y) \quad (1.24)$$

Vanuit de gezamenlijke kansdichtheidsfunctie $p(x,y)$ zijn de marginale kansdichtheidsfuncties $p(x)$ en $p(y)$ te bepalen, bijvoorbeeld

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) dy \quad (1.25)$$

Als er bij de stochastische variabelen X en Y sprake is van onderlinge afhankelijkheid wil dat zeggen dat kennis over Y de kansdichtheidsfunctie van X beïnvloedt, en omgekeerd. In dit verband komt naast de marginale en gezamenlijke kansdichtheid weer de derde vorm van een kansdichtheid naar voren, namelijk de conditionele kansdichtheid $p(x/y)$, gedefinieerd voor de stochastische variabele X , gegeven de continue stochastische variabele Y als

$$p(x/y) = \frac{p(x,y)}{p(y)} \quad (1.26)$$

en gegeven de discrete stochastische variabele Y als

$$p(x/Y = y_i) = \frac{p(x, Y = y_i)}{P(Y = y_i)} \quad (1.27)$$

Wanneer kennis over Y de kansdichtheid van X niet beïnvloedt, dat wil zeggen, $p(x/y) = p(x)$, dan zijn de stochastische variabelen X en Y stochastisch onafhankelijk. Uit (1.26) volgt dan de volgende regel:

$$p(x,y) = p(x)p(y) \quad \text{voor alle } x,y \Leftrightarrow \text{stochastisch onafhankelijk} \quad (1.28)$$

Slechts in dit geval kan uit de marginale kansdichtheden de gezamenlijke kansdichtheid bepaald worden.

Voor stochastische variabelen die geconditioneerd zijn op een andere stochastische variabele zijn de verwachting en variantie gedefinieerd als:

$$\begin{aligned} \mu &= E[X/Y] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x/y) dx \\ \sigma^2 &= E[(X - \mu)^2 / Y] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x/y) dx \end{aligned} \quad (1.29)$$

Ook bij stochastische variabelen speelt de regel van Bayes een belangrijke rol, die in dit geval de volgende algemene vorm aanneemt:

$$p(x / y) = \frac{p(y / x)p(x)}{p(y)} \quad (1.30)$$

Om een globale beschrijving te verkrijgen van het gezamenlijke gedrag van twee stochastische variabelen wordt de *correlatie* R_{xy} , *covariantie* C_{xy} , of *correlatiecoëfficiënt* ρ_{xy} gebruikt:

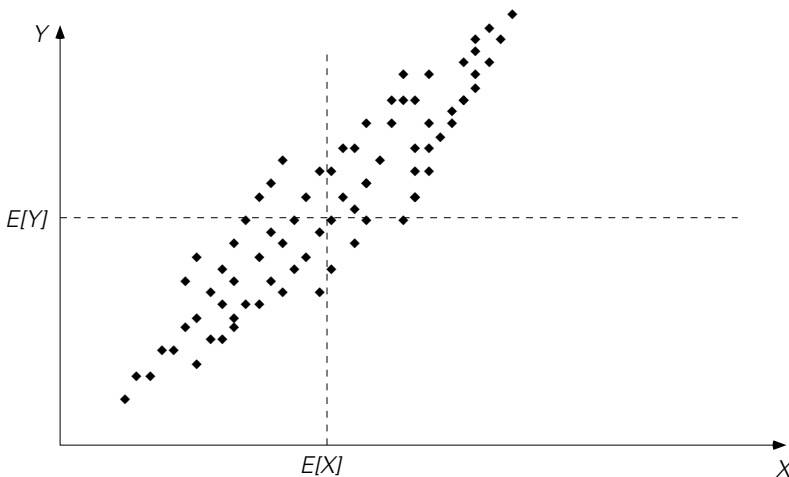
$$R_{xy} = E[XY]$$

$$C_{xy} = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = R_{xy} - E[X]E[Y] \quad (1.31)$$

$$\rho_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad |\rho_{xy}| \leq 1$$

Correlatie en covariantie zeggen iets over de onderlinge *lineaire afhankelijkheid* of *lineaire voorspelbaarheid* van de componenten van een vectoriële stochastische variabele. In figuur 1.5 is een voorbeeld gegeven van twee stochastische variabelen met een positieve covariantie. Dit is af te leiden uit de oriëntatie van de ‘wolk’ van uitkomsten: een toename in de waarde van X leidt gemiddeld gezien tot een grotere waarde van Y , en omgekeerd. Met name de lineaire afhankelijkheid (covariantie, correlatie) tussen stochastische variabelen is van cruciaal belang in de statistische signaalverwerking, zoals in latere hoofdstukken duidelijk zal worden.

Als de covariantie van X en Y gelijk is aan nul, dat wil zeggen $C_{xy} = 0$, dan heten X en Y *ongecorreleerd*. De stochastische variabelen vertonen dan geen *lineaire afhankelijkheid*, maar kunnen nog wel *stochastisch afhankelijk* zijn. Stochastische onafhankelijkheid impliceert echter wel ongecorreleerdheid. Als de correlatie tussen X en Y gelijk aan nul is, dat wil zeggen, $R_{xy} = 0$, dan zijn de stochastische variabelen



Figuur 1.5. Lineaire afhankelijkheid (covariantie) tussen de stochastische variabelen X en Y .

orthogonaal. Slechts indien tenminste óf $E[X] = 0$ óf $E[Y] = 0$ (of beide), dan zijn correlatie en covariantie identiek (zie vergelijking (1.31)), en zijn orthogonale stochastische variabelen ook ongecorrleerd.

Het werken met meer-dimensionale kansdichtheden is niet veel anders dan het één-dimensionale geval, behalve dat de complexiteit sterk toeneemt. Echter, meer-dimensionale kansdichtheden zijn vrijwel nooit volledig bekend in praktische problemen. Om deze reden zijn begrippen als verwachting, variantie en correlatie voor de beschrijving van vectoriële stochastische variabelen van groot belang. Een uitzondering op deze regel is de twee- of meer-dimensionale Gaussische kansdichtheidsfunctie, die een eenvoudige en doorzichtige structuur heeft. Voor het N -dimensionale geval is de Gaussische kansdichtheid gegeven door:

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{|\mathbf{C}_{xx}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^t \mathbf{C}_{xx}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)\right) \\
 \mathbf{x} &= [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_N]^t \\
 \mathbf{m}_x &= [m_{x_1} \quad m_{x_2} \quad \dots \quad m_{x_N}]^t \\
 \mathbf{C}_{xx} &= \begin{bmatrix} C_{x_1x_1} & \dots & C_{x_1x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{x_Nx_1} & \dots & C_{x_Nx_N} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

Een matrix zoals \mathbf{C}_{xx} staat bekend als een *covariantiematrix*. Indien $\mathbf{C}_{xx} = \mathbf{I}$, zijn de stochastische variabelen x_i onderling ongecorrleerd. Echter in het geval van Gaussisch verdeelde stochastische variabelen zijn de variabelen nu ook stochastisch onafhankelijk, dat wil zeggen, ongecorrleerdheid impliceert onafhankelijkheid. Merk op dat deze bijzonderheid *alleen* geldt voor Gaussisch verdeelde stochastische variabelen.

Wederom kunnen via de transformatietechniek de gezamenlijke (meer-dimensionale) kansdichtheidsfunctie van een vectoriële stochastische variabele bepaald worden als deze als een functie van een andere vectoriële stochastische variabele wordt waargenomen. Een belangrijk speciaal geval is de lineaire transformatie van vectoriële stochastische variabele \mathbf{X} . Als

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b} \tag{1.33}$$

dan wordt de verwachting en covariantiematrix van \mathbf{Y} gegeven door

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_y &= \mathbf{A}\mathbf{m}_x + \mathbf{b} \\ \mathbf{C}_{yy} &= \mathbf{A}\mathbf{C}_{xx}\mathbf{A}^t\end{aligned}\tag{1.34}$$

Als \mathbf{X} een Gaussisch verdeelde vectoriële stochastische variabele is, dan is ook \mathbf{Y} Gaussisch verdeeld. Merk op dat alleen *Gaussische* kansdichtheidsfuncties via *lineaire* transformaties weer in *Gaussische* kansdichtheidsfuncties over gaan. Dit is niet langer waar voor willekeurige kansdichtheidsfuncties en/of niet-lineaire transformaties.

Bovengenoemde eigenschappen zijn onder meer de reden dat in veel praktische toepassingen de te beschouwen signalen Gaussisch verdeeld worden verondersteld. Een andere reden hiervoor is dat de centrale limietstelling aantoont dat de cumulatieve kansverdeling van een stochastische variabele die de som is van een groot aantal andere stochastische variabelen (met onbekende cumulatieve distributiefuncties), naar de cumulatieve verdeling van een Gaussische stochastische variabele tendeert. Aangezien bij het waarnemen van bijvoorbeeld elektrische signalen meestal grote hoeveelheden elektronen betrokken zijn die op additieve wijze leiden tot gemeten signalen, is het niet verwonderlijk dat de Gaussische verdeling een belangrijke plaats in neemt.

1.2.5. *Stochastische processen en signalen*

In de signaalverwerking worden symbolen, signalen, of meer algemeen *processen* gegenereerd, getransporteerd en verwerkt, die op een of andere wijze een ordening kennen van de individuele componenten (bijvoorbeeld ordening naar belangrijkheid of naar tijdsvolgorde). Indien deze processen of signalen niet precies voorspelbaar zijn spreken we van *stochastische processen* en *stochastische signalen*. Formeel gesproken koppelt een stochastisch proces (signaal) een reëelwaardige numerieke functie van geordende elementen (discreet of continu) aan de uitkomst van een experiment.

We spreken van stochastische *signalen* als de ordening tot stand wordt gebracht door een *tijdsaspect*. Alhoewel de klasse van de stochastische signalen een speciaal geval is van de meer algemene klasse van stochastische processen, beperken we ons in dit hoofdstuk tot de beschrijving en modellering van stochastische signalen. De reden hiervoor is dat veel concepten in de statistische signaalverwerking juist uitgaan van tijdsignalen en de hieraan gekoppelde beschrijvings- en bewerkingswijzen zoals frequentie-inhoud, spectrum, signaaltransformaties, causaliteit en filters.

Stochastische signalen worden in dit boek kortweg aangegeven met de *tijd-discrete* notatie $x(k) = x_k$ of de *tijd-continue* notatie $x(t)$ ¹. Merk op dat in deze notatie niet meer te zien is dat het hier om stochastische en niet om deterministische signalen gaat. In principe komen er vier type stochastische signalen voor, zoals aangegeven in tabel 1.1. We beperken ons tot de *amplitude-continue* stochastische signalen daar de beschrijving en bewerking van amplitude-discrete stochastische signalen te complex is om in de context van dit boek besproken te kunnen worden. Indien een amplitude-discreet signaal een voldoende groot aantal representatieniveaus heeft, is de amplitude-continue beschrijvingswijze een goede benadering.

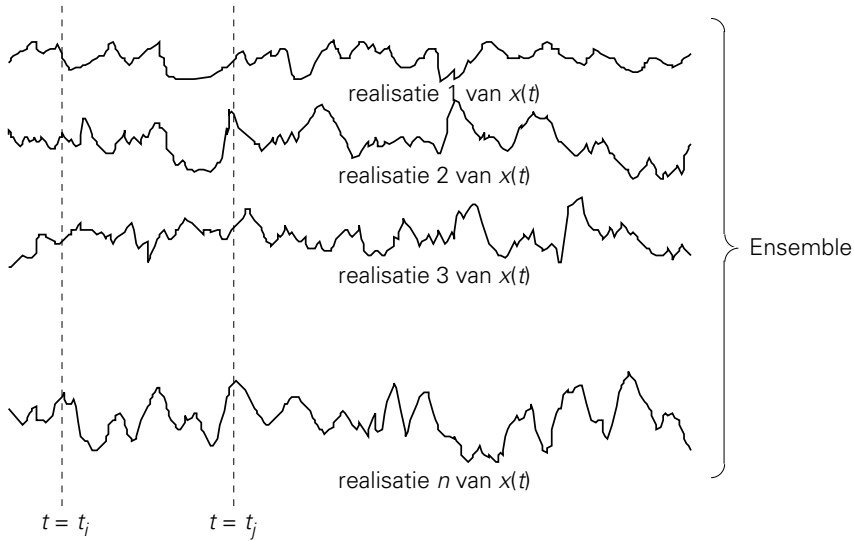
Tabel 1.1. Type stochastische signalen.

	Amplitude gedrag	
Gedrag in de tijd	tijd-discreet, amplitude-continu	tijd-discreet, amplitude-discreet
	tijd-continu, amplitude-continu	tijd-continu, amplitude-discreet

Bij stochastische signalen levert een herhaling van het onderliggende experiment (bijvoorbeeld het verrichten van een signaalmeting) uitkomsten op die tijdfuncties zijn. Deze tijdfuncties noemt men *realisaties* van het stochastische signaal. Een realisatie is dus een volledig bekende (deterministische) tijdfunctie. De verzameling van alle mogelijke realisaties heet een *ensemble van tijdfuncties*. Figuur 1.6 illustreert het principe van een dergelijk ensemble.

De waarschijnlijkheid van optreden van een realisatie (uitkomst van het experiment) wordt bepaald door de gezamenlijke kansdichtheidsfunctie die het stochastische signaal beschrijft. Met andere woorden we moeten de kansdichtheidsfunctie vinden die het gezamenlijke gedrag van alle stochastische variabelen x_i voor $t_i \in \mathbb{R}$ of $x(k) = x_k$ voor $k \in \mathbb{N}$ beschrijft. Wat complexiteit hiervan betreft, lijkt dit op het vinden van de kansdichtheidsfunctie van een hoog-dimensionale vectoriële stochastische variabele, waarvoor we reeds geconstateerd hadden dat meer globale beschrijvingswijze zoals verwachting, correlatie en covariantie geschikter zijn. In de volgende paragraaf bekijken we daarom enkele karakteriseringen van stochastische signalen die weliswaar minder precies maar wel veel meer bruikbaar zijn dan gezamenlijke kansdichtheidsfuncties.

¹ Merk op dat het notationeel consistent zou zijn om $X(k)$ en $X(t)$ te schrijven. Dit zou echter in volgende hoofdstukken verwarring opleveren omdat in de signaalverwerking hoofdletters veelal voor matrices en (Fourier en z-) transformaties gereserveerd zijn.



Figuur 1.6. Ensemble van realisaties van een stochastisch proces.

1.2.6. *Gemiddelde, correlatie en covariantie van stochastische signalen*
 De (ensemble-) verwachting van een (stochastisch) signaal op tijdstip t_i (tijd-continu) of tijdstip k (tijd-discreet) wordt gedefinieerd door direct gebruik te maken van (1.12):

$$m(t_i) = E[x(t_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_i) p(x(t_i)) dx(t_i) \quad (1.35)$$

$$m(k) = E[x(k)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(k) p(x(k)) dx(k)$$

Hierbij zijn $p(x(t_i))$ en $p(x(k))$ de marginale kansdichtheidsfuncties van de respectievelijk tijd-continue en tijd-discrete stochastische variabelen $x(t_i)$ en $x(k)$. Merk op dat de verwachting een functie van de tijd is. Evenzo is de (ensemble-) variantie gedefinieerd als:

$$\text{var}[x(t_i)] = E[(x(t_i) - m(t_i))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t_i) - m(t_i))^2 p(x(t_i)) dx(t_i) \quad (1.36)$$

$$\text{var}[x(k)] = E[(x(k) - m(k))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x(k) - m(k))^2 p(x(k)) dx(k)$$

Om inzicht te verkrijgen in de *lineaire afhankelijkheid* tussen de signaalwaarden (stochastische variabelen) op verschillende tijdstippen, wordt gebruikt gemaakt van de (ensemble-) *autocorrelatiefunctie* $R_{xx}()$ en (ensemble-) *autocovariantiefunctie* $C_{xx}()$, gedefinieerd voor tijd-continue signalen als

$$R_{xx}(t_i, t_j) = E[x(t_i)x(t_j)] \quad (1.37)$$

$$C_{xx}(t_i, t_j) = E[(x(t_i) - m(t_i))(x(t_j) - m(t_j))] = R_{xx}(t_i, t_j) - m(t_i)m(t_j)$$

en voor tijd-discrete stochastische signalen als

$$R_{xx}(k, \ell) = E[x(k)x(\ell)] \quad (1.38)$$

$$C_{xx}(k, \ell) = E[(x(k) - m(k))(x(\ell) - m(\ell))] = R_{xx}(k, \ell) - m(k)m(\ell)$$

Bekijken we niet het onderlinge gedrag van het stochastische signaal op twee tijdstippen maar op meer tijdstippen, bijvoorbeeld N bemonsteringen $x(1)$ tot en met $x(N)$, dan spreken we van de *autocorrelatiematrix*, gegeven door

$$\mathbf{R}_{xx} = \begin{bmatrix} R_{xx}(1,1) & \dots & R_{xx}(1,N) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{xx}(N,1) & \dots & R_{xx}(N,N) \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

Op vergelijkbare wijze is de *autocovariantiematrix* te definiëren. In het algemeen is er een grote overeenkomst tussen de beschrijvingswijze van tijd-discrete stochastische signalen en vectoriële variabelen. Bijvoorbeeld vergelijking (1.32) kan ook worden gebruikt om een tijd-discreet Gaussisch stochastisch signaal te beschrijven.

Als er geen verband tussen de signaalwaarden op de tijdstippen k en ℓ (of t_i en t_j voor tijd-continue signalen) voor alle k en ℓ (of t_i en t_j), dan spreken we van een stochastisch onafhankelijk signaal:

$$p(x(1), x(2), \dots, x(N), \dots) = p(x(1))p(x(2))\dots p(x(N))\dots \quad (1.40)$$

⇕
stochastisch onafhankelijk signaal

Analoog aan vectoriële stochastische variabelen heet een stochastisch signaal ongecorreleerd als

$$C_{xx}(k, \ell) = 0 \quad \forall k, \ell \quad (1.41)$$

en orthogonaal als

$$R_{xx}(k, \ell) = 0 \quad \forall k, \ell \quad (1.42)$$

De bovenstaande begrippen kunnen ook worden toegepast op twee *verschillende* stochastische signalen. Twee tijd-discrete stochastische signalen $x(k)$ en $y(k)$ zijn orthogonaal als hun *kruiscorrelatiefunctie* gelijk is aan nul:

$$R_{xy}(k, \ell) = E[x(k)y(\ell)] = 0 \quad \forall k, \ell \quad (1.43)$$

en zijn ongecorreleerd als hun *kruiscovariantiefunctie* gelijk is aan nul:

$$\begin{aligned} C_{xy}(k, \ell) &= E[(x(k) - E[x(k)])(y(\ell) - E[y(\ell)])] \\ &= R_{xy}(k, \ell) - E[x(k)]E[y(\ell)] \\ &= R_{xy}(k, \ell) - m_x(k)m_y(\ell) = 0 \quad \forall k, \ell \end{aligned} \quad (1.44)$$

Twee stochastische signalen $x(k)$ en $y(k)$ zijn onafhankelijk als de gezamenlijke kansdichtheidsfunctie van $x(k)$ en $y(k)$ geschreven kan worden als het produkt van de marginale kansdichtheidsfuncties van $x(k)$ en die van $y(k)$. Voor tijd-continue stochastische signalen kunnen kruiscorrelatie, kruiscovariantie en orthogonaliteit, ongecorreleerdheid en onafhankelijkheid op een zelfde manier gedefinieerd worden.

1.2.7. *Stationariteit en ergodiciteit*

De globale beschrijvingen van stochastische signalen aan de hand van vergelijkingen (1.35) tot (1.44) zijn alle een functie de tijd, en worden daarom *tijd-variant* genoemd. Dit betekent dat het signaal voor elk tijdstip k een andere verwachting, variantie, autocorrelatie-, covariantiefunctie en gezamenlijke kansdichtheid kan hebben. Soms blijkt echter dat deze eigenschappen van stochastische signalen niet veranderen, dat wil zeggen, het gedrag op tijdstip k (of t_i) is niet anders dan op tijdstip ℓ (of t_j). We spreken dan van *stationariteit*.

Er zijn verschillende vormen van stationariteit. De meest uitgebreide vorm is die waarbij de eigenschappen van alle eindig-dimensionale gezamenlijke kansdichtheidsfuncties niet veranderen in de tijd. Deze vorm wordt vaak ‘strict-stationair’ of gewoon ‘stationair’ genoemd. Voor veel signaalverwerkingstoepassingen gaat deze vorm van stationariteit echter niet in voldoende mate op.

Een zwakkere vorm van stationariteit is die waarbij slechts geëist wordt dat de verwachting en de autocorrelatiefunctie niet van de tijd afhangen. We spreken dan over een *zwak-stationair* (Engels: wide-sense stationary) stochastisch signaal:

$$\begin{aligned} m(k) &= E[x(k)] = m \quad \forall k \\ R_{xx}(k, \ell) &= E[x(k)x(\ell)] = R_{xx}(k - \ell) \quad \forall k, \ell \end{aligned} \quad (1.45)$$

Veelal wordt voor zwak-stationaire signalen de autocorrelatiefunctie eenvoudigweg gedefinieerd als

$$R_{xx}(\ell) = E[x(k)x(k - \ell)] \quad (1.46)$$

waaruit nog beter blijkt dat de autocorrelatiefunctie tijd-onafhankelijk is. Uit (1.45) volgt verder dat ook de autocovariantiefunctie tijd-onafhankelijk is. Uiteraard

bestaan voor bovenstaande uitdrukkingen ook weer de tijd-continue equivalenten.

Om de uitdrukkingen in vergelijkingen (1.45) en (1.46) te evalueren, zijn een groot aantal (of eigenlijk alle) realisaties van het stochastische signaal vereist, want de verwachting $E[\cdot]$ is een operatie over het ensemble van realisaties voor een *vast tijdstip* k . Om die reden worden de tot zover besproken karakteriseringen ook wel ensemble-gemiddelden (ensemble-verwachting, ensemble-correlatie-, ensemble-covariantiefunctie) genoemd. Als de verwachting en autocorrelatiefunctie van een stochastisch signaal gemeten moeten worden, kan men echter vaak maar uitgaan van slechts één realisatie. Er wordt dan in plaats van ensemble-gemiddelden gewerkt met het zogenaamde *tijd-gemiddelde* $\langle x(t) \rangle_T$ en de *autotijdcorrelatiefunctie* $\langle x(t)x(t-\tau) \rangle_T$. We krijgen dan de volgende definities:

$$\begin{aligned}\langle x(t) \rangle_T &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \\ \langle x(t)x(t-\tau) \rangle_T &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t-\tau) dt\end{aligned}\tag{1.47}$$

Als nu een *zwak-stationair* stochastisch signaal *ergodisch in het gemiddelde* is, dan is in de limiet voor $T \rightarrow \infty$ het tijd-gemiddelde gelijk aan de ensemble-verwachting. We noemen een zwak-stationair stochastisch signaal *zwak-ergodisch* als tevens geldt dat in de limiet voor $T \rightarrow \infty$ de autotijdcorrelatiefunctie gelijk is aan de ensemble-autocorrelatiefunctie.

In veel toepassingen van de signaalverwerking zal aangenomen moeten worden dat het signaal zwak-stationair en zwak-ergodisch is, daar er anders geen mogelijkheid bestaat voldoende informatie over de statistische kenmerken van het signaal te verzamelen. Soms laat men de aanname van zwak-stationariteit en zwak-ergodiciteit gelden voor (aansluitende of overlappende) segmenten van het signaal om zo toch aan het veranderend karakter van het signaal (bijvoorbeeld gemiddelde) te kunnen adapteren.

1.2.8 Autocorrelatiefunctie en vermogensdichtheidspectrum

Omdat de klasse van zwak-stationaire en zwak-ergodische stochastische signalen zo'n belangrijke is, en de eigenschappen van deze klasse van signalen voornamelijk (naast de verwachting) door de autocorrelatiefunctie gekarakteriseerd worden, gaan we in deze paragraaf verder in op het begrip autocorrelatiefunctie, en wel speciaal die van tijd-discrete signalen (zie vergelijking (1.46)). Een aantal belangrijke eigenschappen zijn:

$$R_{xx}(0) = E[x(k)^2]$$

$$\begin{aligned}
R_{xx}(\ell) &= R_{xx}(-\ell) \\
P(|x(k) - x(k - \ell)| > \varepsilon) &\leq \frac{2(R_{xx}(0) - R_{xx}(\ell))}{\varepsilon^2} \\
|R_{xx}(\ell)| &\leq R_{xx}(0) \\
\lim_{\ell \rightarrow \infty} R_{xx}(\ell) &= E[x(k)]^2
\end{aligned} \tag{1.48}$$

De kruiscorrelatiefunctie voor gezamenlijk-zwak-stationaire signalen wordt gedefinieerd als

$$R_{xy}(\ell) = E[x(k)y(k - \ell)] \tag{1.49}$$

Deze kruiscorrelatiefunctie heeft de volgende twee belangrijke eigenschappen:

$$\begin{aligned}
R_{xy}(\ell) &= R_{yx}(-\ell) \\
R_{xy}^2(\ell) &\leq R_{xx}(0)R_{yy}(0) \quad \forall \ell
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Zoals de derde eigenschappen in (1.48) aangeeft, is de autocorrelatiefunctie een maat voor de veranderlijkheid van een stochastisch signaal. Uit de deterministische signaaltheorie is bekend dat veranderlijkheid goed tot uitdrukking komt in de Fourier getransformeerde van een signaal. In de stochastische signaalverwerking wordt de tegenhanger hiervan gebruikt, namelijk de Fourier getransformeerde van de autocorrelatiefunctie $R_{xx}(\cdot)$, die bekend staat als het *vermogensdichtheidsspectrum* $S_{xx}(e^{j\omega})$. Zoals de naam reeds aangeeft, is dit een maat voor de hoeveelheid vermogen per bandbreedte van het stochastische signaal. De definitie van het vermogensdichtheidsspectrum staat bekend als het Einstein-Wiener-Khinchin theorema:

$$\begin{aligned}
S_{xx}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \\
R_{xx}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(e^{j\omega}) \exp(j\omega\tau) d\omega
\end{aligned} \tag{1.51}$$

Voor tijd-discrete signalen wordt meestal de z-transformatie of tijd-discrete Fourier transformatie gebruikt om het vermogensdichtheidsspectrum in het z-domein ($\Phi_{xx}(z)$) of in het frequentiedomein ($S_{xx}(e^{j\omega})$) te definiëren:

$$\Phi_{xx}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xx}(k)z^{-k} \quad (1.52)$$

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xx}(k)\exp(-j\omega k) \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

Enkele eigenschappen van het vermogensdichtheidsspectrum van tijd-discrete stochastische signalen zijn:

$$\begin{aligned} \Phi_{xx}(z) &= E[X(z)X(z^{-1})] \\ S_{xx}(e^{j\omega}) &= E[X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega})] \\ S_{xx}(e^{j\omega}) &= S_{xx}^*(e^{j\omega}) \\ S_{xx}(e^{j\omega}) &\geq 0 \end{aligned} \quad (1.53)$$

$$R_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(e^{j\omega}) d\omega$$

Uitgaande van de kruiscorrelatiefunctie kan de tevens het kruisvermogensdichtheidsspectrum gedefinieerd worden:

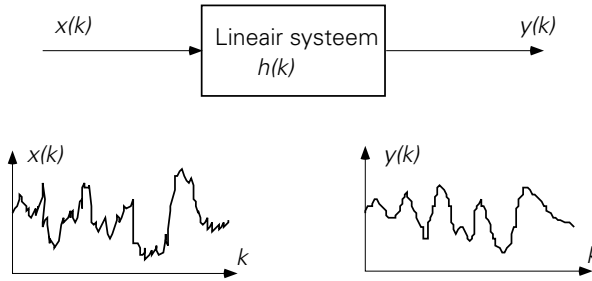
$$\Phi_{xy}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xy}(k)z^{-k} \quad (1.54)$$

$$S_{xy}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xy}(k)\exp(-j\omega k) \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

met de volgende eigenschappen:

$$\begin{aligned} \Phi_{xy}(z) &= E[X(z)Y(z^{-1})] \\ S_{xy}(e^{j\omega}) &= E[X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})] \\ S_{xy}(e^{j\omega}) &= S_{yx}^*(e^{j\omega}) \end{aligned} \quad (1.55)$$

Als een stochastisch signaal door een lineair systeem gaat, veranderen de eigenschappen van dit signaal (figuur 1.7). In de statistische signaalverwerking is het van belang om de veranderende eigenschappen van zwak-stationaire stochastische signalen te kunnen beschrijven. Als met $h(k)$ de impulsresponsie van het lineaire systeem wordt aangegeven, en als $H(e^{j\omega})$ en $H(z)$ de Fourier getransformeerde, respectievelijk de z-getransformeerde van deze impulsresponsie zijn, dan kunnen de



Figuur 1.7. Stochastisch signaal dat door een lineair systeem gaat.

volgende relaties tussen de correlatiefuncties van hetingangssignaal $x(k)$ en uitgangssignaal $y(k)$ worden afgeleid:

$$R_{yy}(k) = h(-k) * h(k) * R_{xx}(k) \quad (1.56)$$

$$R_{xy}(k) = h(-k) * R_{xx}(k)$$

en voor de vermogensdichtheidsspectra:

$$\Phi_{yy}(z) = |H(z)|^2 \Phi_{xx}(z)$$

$$\Phi_{xy}(z) = H(z^{-1}) \Phi_{xx}(z)$$

$$S_{yy}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 S_{xx}(e^{j\omega})$$

$$S_{xy}(e^{j\omega}) = H^*(e^{j\omega}) S_{xx}(e^{j\omega})$$

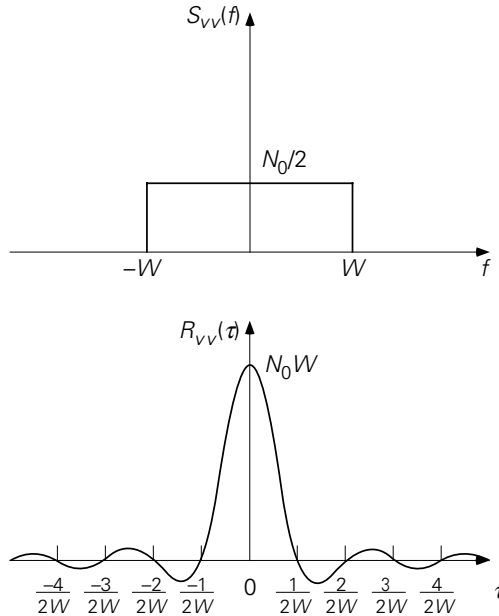
(1.57)

1.2.9. Witte ruis

Met het verschijnsel ruis worden over het algemeen signaalfuncties bedoeld die geen verband hebben met het informatiedragend signaal. Er zijn een aantal typen ruis, waarvan de belangrijkste klassen zijn:

- thermische ruis ten gevolge van willekeurige fluctuaties van elektronen in weerstanden, transistoren, etc.,
- partikel ruis, die wordt veroorzaakt door emissie van deeltjes zoals elektronen en fotonen,
- $1/f$ ruis die zich over het algemeen voordoet bij lage frequenties.

Door een stochastische modellering van de verschillende typen ruis kan rekening gehouden worden met de aanwezigheid van deze ruis in signaalverwerkingstoepassingen. We beperken ons hier tot de modellering van willekeurige signaalfuncties door zogenaamde witte ruis.



Figuur 1.8. Vermogensdichtheidspectrum en autocorrelatiefunctie van bandbegrensd ruis.

Voor zowel partikel als thermische ruis $v(t)$ blijkt dat voor een groot frequentiegebied het ruisvermogensdichtheidspectrum geschreven kan worden als (zie figuur 1.8) :

$$S_{vv}(f) = \frac{N_0}{2} \quad -W \leq f \leq W \quad (1.58)$$

De autocorrelatiefunctie van dit tijd-continue bandbegrensd ruisproces wordt gevonden door de inverse Fourier transformatie van (1.58):

$$R_{vv}(\tau) = N_0W \frac{\sin(2\pi W\tau)}{2\pi W\tau} \quad (1.59)$$

Deze autocorrelatiefunctie is geschetst in figuur 1.8. Merk op dat als het ruisproces bemonsterd wordt op de tijdstippen $\tau = k/2W$, de bemonsteringen onderling orthogonaal zijn. Als bovendien $E[v(t)] = 0$ (wat vaak gemakshalve impliciet wordt aangenomen), dan is het resulterende tijd-discrete ruisproces ongecorrleerd.

Wanneer we in (1.58) $W \rightarrow \infty$ laten gaan, dat wil zeggen *alle* frequenties komen even sterk voor in het ruisproces, dan spreken we van *witte ruis*, naar analogie van wit licht waar alle frequenties in voorkomen (dacht men vroeger). De autocorrelatiefunctie van deze (tijd-continue) witte ruis wordt gevonden door in (1.58) $W \rightarrow \infty$ te nemen, waaruit volgt:

$$R_{vv}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \quad (1.60)$$

Tijd-continue witte ruis heeft een oneindig vermogen, en is dus niet fysisch realiseerbaar.

Vaak wordt ook het *tijd-discrete* witte proces $v(k)$ gebruikt. De autocorrelatiefunctie en het vermogensdichtheidsspectrum van een tijd-discreet wit proces worden gegeven door:

$$R_{vv}(k) = \begin{cases} \sigma_v^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{vv}(z) = \sigma_v^2 \quad (1.61)$$

Merk echter op dat het ‘wit zijn’ van het tijd-discrete proces het gevolg kan zijn van het op juiste wijze bemonsteren van een bandbegrensd (en daarom niet-wit) tijd-continu ruisproces.

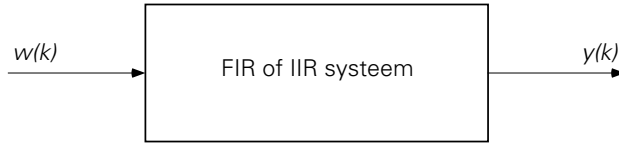
1.3. AR, MA en ARMA signaalmodellen

1.3.1. *Klassen van signaalmodellen*

Zoals we in Paragraaf 1.2.5 tot en met 1.2.9 hebben gezien, worden de eigenschappen van (zwak-stationaire) stochastische signalen bijna altijd beschreven door de autocorrelatiefunctie en het vermogensdichtheidsspectrum. Als de autocorrelatiefunctie of het vermogensdichtheidsspectrum van een fysisch signaal gegeven is, dan kunnen we ons afvragen hoe een systeem eruit zou zien dat een dergelijk signaal kan genereren. Met andere woorden, we willen uit de metingen van een signaal een *model* afleiden voor de bron, en wel op zo’n manier dat het model signalen kan synthetiseren die dezelfde eigenschappen hebben als het gemeten fysische signaal (dit is bijvoorbeeld het geval bij het modelleren van beeldinformatie). Soms ook is direct uit de fysische eigenschappen van een signaalbron een model te construeren (bijvoorbeeld bij het spraak-mechanisme). Met dit model kunnen dan eigenschappen voorspeld worden van signalen die door de bron gegenereerd worden en kunnen signaalverwerkingsalgoritmen ontworpen worden.

Modellen voor signaalbronnen worden over het algemeen *signaalmodellen* genoemd. Deze modellen zijn vereenvoudigingen van de werkelijkheid: een signaalmodel zal nooit een fysisch of andersoortig signaal precies kunnen voorspellen of nabootsen, maar slechts een benadering daarvan geven.

In de moderne signaalverwerking wordt meestal uitgegaan van digitale verwerking door causale lineaire systemen (lineaire filters). Daarom worden ook voor het modelleren van signalen causale lineaire tijd-discrete modellen gebruikt, dat wil zeggen, lineaire tijd-discrete systemen die realiseerbaar zijn. Het zal blijken dat de



Figuur 1.9. Algemeen schema voor een AR, MA of ARMA signaalmodel.

autocorrelatiefunctie voldoende informatie biedt om de parameters van zo'n lineair systeem te bepalen.

Omdat niet alleen het lineaire systeem zelf maar ook hetingangssignaal van dit systeem onbekend en dus vrij te kiezen is, wordt als tijd-discreetingangssignaal altijd tijd-discrete witte ruis $w(k)$ verondersteld (zie figuur 1.9). Afhankelijk van de eigenschappen van het lineaire systeem spreken we van:

- een autoregressief (AR) proces (signaal, signaalmodel). In dit geval wordt het verband tussen het witteingangssignaal $w(k)$ en uitgangssignaal $y(k)$ van het lineaire (IIR) systeem gegeven door een p -de orde differentievergelijking van de vorm:

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_p y(k-p) + b w(k) = \sum_{m=1}^p a_m y(k-m) + b w(k) \quad (1.62)$$

- een moving-average (MA) proces. In dit geval wordt de ingangs-uitgangsrelatie van het lineaire (FIR) systeem gegeven door een q -de orde differentievergelijking van de vorm:

$$y(k) = b_0 w(k) + b_1 w(k-1) + \dots + b_q w(k-q) = \sum_{m=0}^q b_m w(k-m) \quad (1.63)$$

- een autoregressief moving-average (ARMA) proces. In dit geval wordt de ingangs-uitgangsrelatie van het lineaire systeem gegeven door een combinatie van bovenstaande differentievergelijkingen:

$$\begin{aligned} y(k) &= a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_p y(k-p) + b_0 w(k) + \dots + b_q w(k-q) = \\ &= \sum_{m=1}^p a_m y(k-m) + \sum_{m=0}^q b_m w(k-m) \end{aligned} \quad (1.64)$$

Merk op dat alle modellen causaal zijn, dat wil zeggen de uitgangssignalen hangen slechts van signaalwaarden in het verleden of heden af, maar niet van die in de toekomst. Tevens wordt er nogmaals op gewezen dat in het AR, MA en ARMA model hetingangssignaal $w(k)$ altijd een wit ruissignaal is.

Deze paragraaf bespreekt enkele eigenschappen (met name de autocorrelatiefunctie) van bovengenoemde drie signaalmodellen. In Hoofdstuk 7 wordt hierop teruggeko- men bij de behandeling van moderne technieken voor het schatten van vermogens- dichtheidsspectra.

1.3.2. Autoregressief signaalmodel

Het autoregressieve (AR) signaalmodel van de p -de orde wordt gegeven door vergelijking (1.62). Het systeem dat een dergelijk model kan realiseren, is een IIR (infinite impulse response) filter. Afhankelijk van de keuze van de gewichtscoeffi- cienten a_m , b en de orde p veranderen de eigenschappen van het uitgangssignaal $y(k)$. Eerst wordt de overdracht van het lineaire systeem bepaald met z -transforma- ties:

$$Y(z) = H(z)W(z) = \frac{b}{A(z)} W(z) = \frac{b}{1 - \sum_{m=1}^p a_m z^{-m}} W(z) \quad (1.65)$$

Het vermogensdichtheidsspectrum van $y(k)$ volgt nu door gebruik te maken van (1.57) en (1.61):

$$\Phi_{yy}(z) = \frac{b^2}{|A(z)|^2} \Phi_{ww}(z) = \frac{b^2 \sigma_w^2}{\left| 1 - \sum_{m=1}^p a_m z^{-m} \right|^2} \quad (1.66)$$

Merk op dat in $H(z)$ slechts $A(z)$ gelijk aan nul kan worden, dat wil zeggen, het lineaire systeem heeft slechts polen. Daarom wordt een AR model ook wel een *all-pole model* genoemd. Deze polen moeten in het z -vlak binnen de eenheidscirkel $|z| = 1$ liggen zodat $H(z)$ een BIBO-stabiel systeem is.

Vanuit de definitie (1.46) kan de autocorrelatiefunctie bepaald worden van een AR proces. Door substitutie van de recursieve uitdrukking voor $y(k)$ volgt:

$$\begin{aligned} R_{yy}(\ell) &= E[y(k)y(k-\ell)] \\ &= E[a_1 y(k-1)y(k-\ell) + a_2 y(k-2)y(k-\ell) + \dots + a_p y(k-p)y(k-\ell) + bw(k)y(k-\ell)] \\ &= a_1 R_{yy}(\ell-1) + a_2 R_{yy}(\ell-2) + \dots + a_p R_{yy}(\ell-p) + bR_{wy}(\ell) \\ &= a_1 R_{yy}(\ell-1) + a_2 R_{yy}(\ell-2) + \dots + a_p R_{yy}(\ell-p) \quad \ell > 0 \end{aligned} \quad (1.67)$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de causaliteit van het model: de kruiscorrelatie $R_{wy}(\ell) = E[w(k)y(k-\ell)] = 0$ voor $\ell > 0$ omdat het uitgangssignaal op tijdstip $k-\ell$ niet van het ingangssignaal op tijdstip k kan afhangen.

De autocorrelatie voor $\ell = 0$ wordt gevonden door $\ell = 0$ in (1.67) in te vullen:

$$R_{yy}(0) = E[y(k)y(k)] = a_1 R_{yy}(-1) + a_2 R_{yy}(-2) + \dots + a_p R_{yy}(-p) + bR_{wy}(0) \quad (1.68)$$

en vervolgens de laatste term uit te werken:

$$\begin{aligned} R_{wy}(0) &= E[w(k)y(k)] \\ &= E[a_1 w(k)y(k-1) + a_2 w(k)y(k-2) + \dots + a_p w(k)y(k-p) + bw(k)w(k)] \\ &= bE[w(k)w(k)] = b\sigma_w^2 \end{aligned} \quad (1.69)$$

waarbij de voorlaatste vereenvoudiging volgt uit de causaliteit van het systeem. Samenvattend leidt dit tot de volgende recursieve uitdrukkingen voor de autocorrelatiefunctie van een AR-model:

$$R_{yy}(\ell) = \begin{cases} \sum_{m=1}^p a_m R_{yy}(\ell - m) & \ell > 0 \\ \sum_{m=1}^p a_m R_{yy}(m) + b^2 \sigma_w^2 & \ell = 0 \end{cases} \quad (1.70)$$

Het is nu duidelijk te zien dat er een rechtstreeks verband bestaat tussen de autocorrelatiefunctie, het vermogensdichtheidsspectrum en de gewichtscoëfficiënten van een AR model. Hierop wordt in hoofdstuk 7 teruggekomen.

1.3.3. Moving-average signaalmodel

Het model voor een moving-average (MA) of glijdend-gemiddelde proces van de q -de orde is gegeven in (1.63). Het systeem dat een dergelijk model realiseert is een FIR (finite impulse response) filter met witte ruis als ingangssignaal. De gewichtscoëfficiënten b_m en de orde q bepalen de eigenschappen van het uitgangssignaal $y(k)$. De overdracht van het lineaire systeem wordt gegeven door:

$$Y(z) = B(z)W(z) = \sum_{m=0}^q b_m z^{-m} W(z) \quad (1.71)$$

Omdat $B(z)$ nu alleen maar nulpunten heeft, wordt een MA-model ook wel een *all-zero model* genoemd. Voor het vermogensdichtheidsspectrum krijgen we:

$$\Phi_{yy}(z) = |B(z)|^2 \Phi_{ww}(z) = \left| \sum_{m=0}^q b_m z^{-m} \right|^2 \sigma_w^2 \quad (1.72)$$

De autocorrelatiefunctie van $y(k)$ wordt berekend door in de definitie (1.46) zowel $y(k)$ als $y(k - \ell)$ te vervangen aan de hand van (1.63):

$$\begin{aligned} R_{yy}(\ell) &= E[y(k)y(k - \ell)] \\ &= E\left[\left(b_0w(k) + b_1w(k-1) + \dots + b_qw(k-q)\right)\left(b_0w(k-\ell) + b_1w(k-\ell-1) + \dots + b_qw(k-\ell-q)\right)\right] \end{aligned}$$

Voor $0 \leq \ell \leq q$ is $R_{yy}(\ell)$ ongelijk aan nul, terwijl voor $\ell > q$ de autocorrelatiefunctie nul wordt:

$$R_{yy}(\ell) = \begin{cases} \sigma_w^2 \sum_{m=0}^{q-\ell} b_m b_{m+\ell} & 0 \leq \ell \leq q \\ 0 & \ell > q \end{cases} \quad (1.74)$$

Merk op dat een groot verschil tussen een AR en MA-model is, dat de eerste een oneindig groot aantal correlatiewaarden ongelijk aan nul heeft, terwijl bij een MA-model alle autocorrelatiewaarden vanaf $\ell = q + 1$ gelijk aan nul zijn.

1.3.4. Autoregressief moving-average signaalmodel

In het algemeen kan de overdrachtsfunctie van een signaalbron zowel polen als nulpunten hebben. In dit meest complexe geval wordt de differentievergelijking (1.64) gebruikt om een signaal te modelleren. Omdat de differentievergelijking een combinatie is van het AR en MA-model, spreken we nu van een ARMA model.

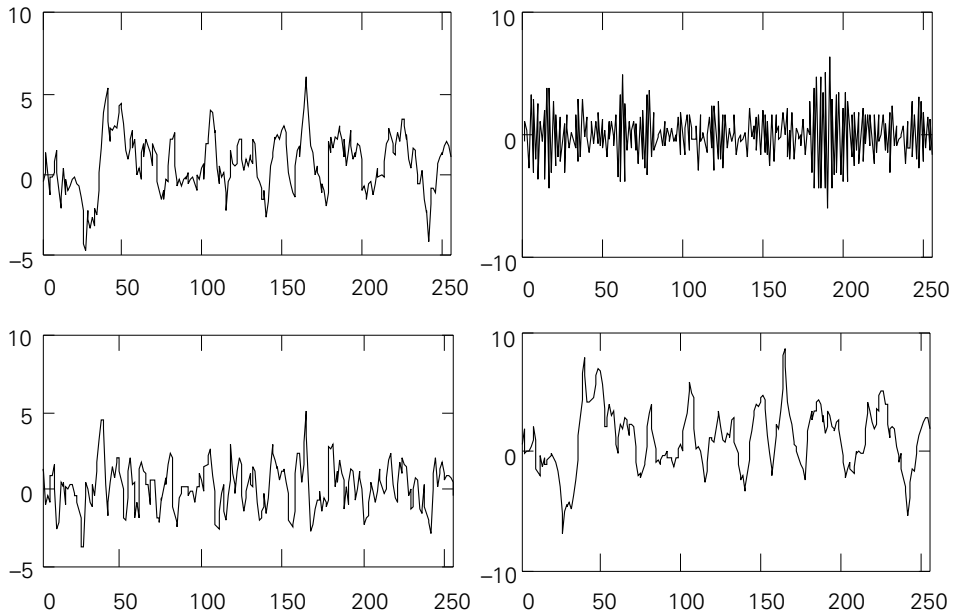
Analoog aan het AR en MA-model kunnen uitdrukkingen voor de overdracht van het lineaire systeem, het vermogensdichtheidsspectrum en de autocorrelatiefunctie worden afgeleid. Voor de volledigheid worden hier de resultaten van deze afleidingen gegeven:

$$\begin{aligned} Y(z) = H(z)W(z) &= \frac{B(z)}{A(z)} W(z) = \frac{\sum_{m=0}^q b_m z^{-m}}{1 - \sum_{m=1}^p a_m z^{-m}} W(z) \\ \Phi_{yy}(z) &= \frac{|B(z)|^2}{|A(z)|^2} \Phi_{ww}(z) = \frac{\sigma_w^2 \left| \sum_{m=0}^q b_m z^{-m} \right|^2}{\left| 1 - \sum_{m=1}^p a_m z^{-m} \right|^2} \end{aligned} \quad (1.75)$$

$$R_{yy}(\ell) = \begin{cases} \sum_{m=1}^p a_m R_{yy}(\ell - m) + \sum_{m=0}^q b_m R_{wy}(\ell - m) & 0 \leq \ell \leq q \\ \sum_{m=1}^p a_m R_{yy}(\ell - m) & \ell > q \end{cases} \quad (1.76)$$

$$R_{wy}(\ell) = \text{inverse } z\text{-transformatie} \left\{ \frac{b_0 \sigma_w^2}{1 - \sum_{m=1}^p a_m z^{-m}} \right\}$$

In figuur 1.10 wordt een aantal voorbeelden gegeven van signalen gegenereerd door AR, MA en ARMA modellen.



Figuur 1.10. Voorbeelden van AR, MA, en ARMA signalen.

1.3.5. Toestandsbeschrijving van ARMA modellen

In voorafgaande paragrafen is gebruik gemaakt van de klassieke *uitwendige* beschrijving van lineaire tijd-discrete systemen. Hierbij wordt een relatie gegeven tussen hetingangssignaal $w(k)$ en uitgangssignaal $y(k)$ met behulp van z -transformaties of Fourier transformaties. Een beperking hiervan is, dat deze beschrijvingswijze alleen voor tijd-invariante systemen en (zwak) stationaire (ARMA) processen gebruikt kan worden.

Een alternatieve systeembeschrijving is de *inwendige* of *toestandsbeschrijving*. Hiermee is het mogelijk om tijd-variante systemen en niet (zwak-) stationaire signalen te

beschrijven. De toestandsbeschrijving van een tijd-discreet systeem is een *tijd-domeinbeschrijving* door de volgende eerste-orde vectordifferentievergelijkingen:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}(k)w(k) \\ y(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + D(k)w(k) \end{cases} \quad (1.77)$$

Hierbij is $\mathbf{x}(k)$ de toestandsvector die de huidige toestand van het systeem ‘onthoudt’, $\mathbf{A}(k)$ is de toestandsovergangsmatrix, $\mathbf{B}(k)$ de ingangsmatrix, $\mathbf{C}(k)$ de uitgangsmatrix en $D(k)$ de directe overdracht van ingang naar uitgang. De dynamiek van het systeem komt tot uiting door de mogelijke tijd-variantie van deze matrices. Zijn alle matrices tijd-invariant, dan is het totale systeem tijd-invariant en kan een equivalente uitwendige beschrijvingen gegeven worden door bijvoorbeeld de overdrachtsfunctie $H(z)$.

De Kalman schattingstheorie gaat uit van toestandsbeschrijvingen van ARMA modellen om optimale recursieve signaalschatters af te leiden. In deze paragraaf wordt kort beschreven hoe vanuit een uitwendige beschrijving van een ARMA model een toestandsbeschrijving in de vorm van een eerste-orde vectordifferentievergelijking gevonden kan worden. De AR en MA modellen worden niet apart behandeld omdat die als een speciale gevallen van het ARMA model beschouwd kunnen worden.

De uitwendige beschrijving van een ARMA model wordt meestal gegeven door een (p,q) -de orde differentievergelijking of door de z -getransformeerde of Fourier getransformeerde van deze differentievergelijking. Deze drie vormen zijn direct in elkaar om te zetten via z -transformaties of Fourier transformaties. We gaan daarom hier uit van een uitwendige beschrijving in het tijddomein, dat wil zeggen, de volgende (p,q) -de orde differentievergelijking:

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_p y(k-p) + b_0 w(k) + b_1 w(k-1) + \dots + b_q w(k-q) \quad (1.78)$$

Zonder verlies van algemeenheid stellen we nu als additionele voorwaarde dat $p > q$. We moeten nu *toestandsgrootheden* $x_i(k)$ zo kiezen dat het gedrag van $y(k)$ daarmee volledig voorspeld kan worden in de toekomst, gegeven alle voorgaande ingangs- en uitgangssignalen. Omdat de differentievergelijking (1.78) van de p -de orde is, is een geheugenwerking van p elementen nodig, dat wil zeggen, de toestandsvector van het systeem bevat p elementen.

De meest gebruikelijke wijze om de toestandsvector te definiëren, is om eerst het MA deel buiten beschouwing te laten. We verkrijgen dan de volgende hulpuitdrukking:

$$r(k) = a_1 r(k-1) + a_2 r(k-2) + \dots + a_p r(k-p) + w(k) \quad (1.79)$$

Nu definiëren we de toestandsgrootheden $x_i(k)$ als volgt:

$$\begin{aligned}
 x_1(k) &= r(k) \\
 x_2(k) &= r(k-1) = x_1(k-1) \\
 x_3(k) &= r(k-2) = x_2(k-1) \\
 &\vdots \\
 x_p(k) &= r(k-p+1) = x_{p-1}(k-1)
 \end{aligned} \tag{1.80}$$

Gebruikmakend van (1.79) wordt de volgende differentievergelijking verkregen:

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_p(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \\ \vdots \\ x_p(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} w(k)$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}w(k) \tag{1.81}$$

Vervolgens wordt het MA-deel van het ARMA model opgenomen door de coëfficiënten van de uitgangsmatrix \mathbf{C} op de juiste wijze te kiezen:

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_p(k) \end{bmatrix} \tag{1.82}$$

Uitschrijven van $y(k-\ell)$ voor $\ell = 0, 1, \dots, p$, vermenigvuldigen met $-a_\ell$ ($\ell = 1, 2, \dots, p$) en optellen van de resultaten levert:

$$\begin{aligned}
 y(k) &= c_1 x_1(k) + c_2 x_2(k) + \dots + c_p x_p(k) \\
 -a_1 y(k-1) &= -c_1 a_1 x_1(k-1) - c_2 a_1 x_2(k-1) - \dots - c_p a_1 x_p(k-1) \\
 &\vdots \\
 -a_p y(k-p) &= -c_1 a_p x_1(k-p) - c_2 a_p x_2(k-p) - \dots - c_p a_p x_p(k-p) + \\
 y(k) - a_1 y(k-1) - \dots - a_p y(k-p) &= \\
 c_1 [x_1(k) - a_1 x_1(k-1) - \dots - a_p x_1(k-p)] &+ c_2 [x_2(k) - a_1 x_2(k-1) - \dots - a_p x_2(k-p)] + \dots \\
 \dots + c_p [x_p(k) - a_1 x_p(k-1) - \dots - a_p x_p(k-p)] &
 \end{aligned} \tag{1.83}$$

Bekijken we de uitdrukkingen tussen haakjes aan de rechterzijde van deze vergelijking, dan blijkt de volgende herschrijving mogelijk aan de hand van (1.80) en (1.81):

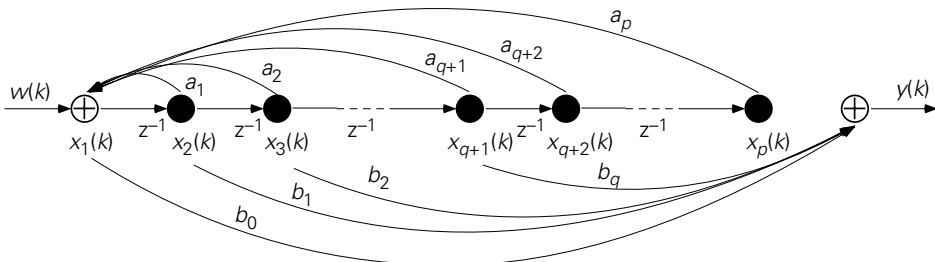
$$\begin{aligned}
 x_1(k) - a_1 x_1(k-1) - \dots - a_p x_1(k-p) &= x_1(k) - a_1 x_1(k-1) - \dots - a_p x_p(k-1) = w(k) \\
 x_2(k) - a_1 x_2(k-1) - \dots - a_p x_2(k-p) &= x_1(k-1) - a_1 x_1(k-2) - \dots - a_p x_p(k-2) = w(k-1) \\
 &\vdots \\
 x_p(k) - a_1 x_p(k-1) - \dots - a_p x_p(k-p) &= x_1(k-p+1) - a_1 x_1(k-p) - \dots - a_p x_p(k-p) \\
 &= w(k-p+1)
 \end{aligned} \tag{1.84}$$

Substitutie van dit resultaat in (1.83) levert

$$y(k) - a_1 y(k-1) - \dots - a_p y(k-p) = c_1 w(k) + c_2 w(k-1) + \dots + c_p w(k-p+1) \tag{1.85}$$

waaruit blijkt dat de coëfficiënten van de matrix \mathbf{C} niets anders zijn dan de coëfficiënten van het MA deel van (1.78), mits $q \leq p-1$, wat al eerder als voorwaarde genoemd was. Dit levert uiteindelijk:

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_q & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{q+1}(k) \\ \vdots \\ x_p(k) \end{bmatrix} \tag{1.86}$$



Figuur 1.11. Stroomdiagram behorende bij de toestandsvergelijkingen (1.81) en (1.86).

Klaarblijkelijk is de matrix D in (1.77) een nul-matrix. Figuur 1.11 laat een mogelijke realisatie zien van het toestandsmodel voor het ARMA signaalmodel aan de hand van een stroomdiagram. Als laatste wordt opgemerkt dat de matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} en \mathbf{C} *tijd-invariant* zijn voor een ARMA model van een zwak-stationair signaal. Zoals uit (1.81) en (1.86) blijkt, kan een ARMA model waarvan de coëfficiënten a_m en b_m van de tijd afhangen, beschreven worden door *tijd-variante* toestandsvergelijkingen.

1.4. Samenvatting en belangrijke termen

Dit hoofdstuk heeft een overzicht gegeven van een aantal concepten en definities die voor de statistische signaalverwerking van belang zijn. Speciaal van belang zijn de karakterisering van zwak-stationaire en (zwak-)ergodische signalen door hun verwachting, correlatie- en covariantiefuncties. Ook het vermogensdichtheidsspectrum neemt een belangrijke plaats in.

Stochastische signalen worden vaak gemodelleerd door AR, MA, of ARMA processen. Van essentieel belang is dat deze modellen gebaseerd zijn op lineaire causale systemen waarvan het ingangssignaal een tijd-discreet wit ruisproces is. Van elk van de modellen is de overdrachtsfunctie, het vermogensdichtheidsspectrum, en de autocorrelatiefunctie besproken. Tevens is getoond hoe de uitwendige beschrijving van een ARMA model aan de hand van een differentievergelijking omgevormd kan worden tot een inwendige beschrijving door toestandsvergelijkingen.

Lijst van belangrijke termen

AR model	marginale kansdichtheid
ARMA model	ongecorreleerd
autocorrelatiefunctie	orthogonaal
autocovariantiefunctie	realisatie
Bayes, regel van	stochastisch onafhankelijk
conditionele kansdichtheid	stochastisch signaal
correlatie	stochastische variabele
covariantie	variantie
ensemble	vectoriële stochastische variabele
ergodiciteit	vermogensdichtheidsspectrum
gezamenlijke kansdichtheid	verwachting
kruiscorrelatiefunctie	witte ruis
kruiscovariantiefunctie	zwak-ergodisch
kruisvermogensdichtheidsspectrum	zwak-stationair
MA model	