

Een idee van constructiemechanica

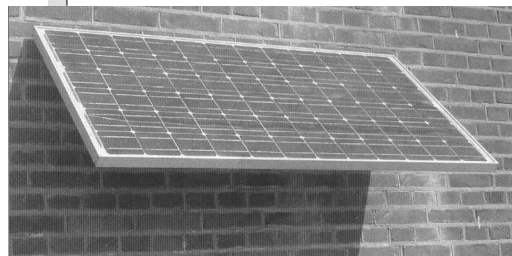
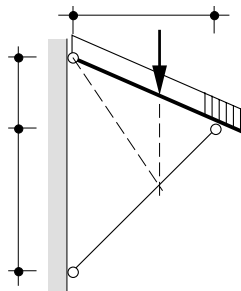
Een wat andere benadering

Aan: Keete, Govert, Ariane

Een idee van constructiemechanica

Een wat andere benadering

Godfried Kruijtzter



Ook van Godfried Kruijtzter en gepubliceerd in opdracht van de VSSD:

Een rechte staaf wordt gebogen, 2000 / 84 p. / ISBN 978-90-71301-66-7.

zie <http://www.vssd.nl/hlf/f010.htm>

Taal en Tal, bij Spinoza, Mannoury, Beth, 2003 / 90 p. / ISBN 978-90-407-2409-1

zie <http://www.vssd.nl/hlf/a016.htm>

The vertical motion of foundations and pontoons, 49 p., / ISBN 978-90-71301-64-3;

zie <http://www.vssd.nl/hlf/f016.htm>

Verschenen bij Architectura + Natura:

Ruimte en getal, 1999. ISBN 90-7157-086-x. Over Dom van der Laan, het plastische getal en het gulden snedegetal.

© **VSSD**

Eerste editie 2004, verbeterd 2008

Uitgegeven door:

VSSD

Leeghwaterstraat 42, 2628 CA Delft, The Netherlands

tel. +31 15 27 82124, telefax +31 15 27 87585, e-mail: hlf@vssd.nl

internet: <http://www.vssd.nl/hlf>

URL over deze publicatie: **<http://www.vssd.nl/hlf/f014.htm>**

Voor docenten die dit boek in cursusverband gebruiken zijn de illustraties in dit boek in elektronische vorm gratis beschikbaar. Een verzoek tot levering kan men richten aan hlf@vssd.nl

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photo-copying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

Printed in The Netherlands.

Gedrukte versie EAN 978-90-407-2478-7 Elektronische versie EAN 978-90-6562-178-8

NUR 955

Trefw: constructiemechanica

Voorwoord

Dit boek is bedoeld als een eerste kennismaking met het vak constructiemechanica op het niveau van universiteit en hogeschool. De grondbeginselen worden erin behandeld. De gebruikte modellen van de werkelijkheid zijn betrekkelijk eenvoudig. Deze eenvoudige modellen benaderen de werkelijkheid niettemin opvallend goed. Dit leidt enerzijds tot verwondering en anderzijds tot bewondering voor de creativiteit van de bedenkers van de modellen, die het vak door de eeuwen heen hebben opgebouwd.

Bij het schrijven van het boek is in beginsel het gebruik van 'hogere wiskunde' vermeden. Met behulp van de bijlagen kan men enige onderwerpen van de gewone wiskunde en natuurkunde desgewenst in herinnering roepen.

Ik dank de medewerkers van de stichting Bouwen met Staal T.J. van den Broek, C.H. van Eldik en H.J. de Keijzer alsmede de uitgever, J. Schievink, voor hun werk bij de verwerking van het manuscript.

Godfried Kruijtzter
Voorburg, maart 2004

Inhoud

1	Inleiding	9
1.1	Bouwwerk en omgeving	9
1.2	Mechanica	15
1.3	Kracht	19
1.4	Constructie-elementen en verbindingen	21
1.5	Bouwconstructie	24
2	Kracht	27
2.1	Voorstelling van een kracht	27
2.2	Soorten krachten	30
2.3	Krachtenrekening (vectorrekening)	33
2.4	Notatie	35
2.4	Statica	35
3	Krachtenrekening en evenwicht van krachten	37
3.1	Samenstellen van krachten in een plat vlak met eenzelfde aangrijpingspunt	37
3.2	Samenstellen van krachten in een plat vlak met verschillende aangrijpingspunten	41
3.3	Ontbinden van krachten in een plat vlak	43
3.4	Evenwicht van een constructie(deel)	45
3.5	Koppel en krachtmoment in een plat vlak	49
3.6	Samenstellen van krachten in de ruimte	54
4	Berekening van het evenwicht van krachten	59
4.1	Evenwicht van krachten in vectorvorm	59
4.2	Evenwicht van krachten in coördinatenform	61
4.3	Algemene werkwijze	70
5	Inwendige contactkrachten; spanning	79
5.1	Contactkrachten	79
5.3	Spanningsvector	82
5.4	Liggermodel	88
6	Vlakke constructies met tussenscharnieren	99
6.1	Tussenscharnier	99
6.2	Vormvastheid	102
7	Buiging van lijnvormige constructie-elementen	107
7.1	Belasting	107
7.2	Buiging	108

7.3	Vergeet-mij-nietjes	121
7.4	Samengestelde ligger	124
7.5	Normaalkracht en buiging	125
7.6	Dwarskracht en buigend moment	127
7.7	Dwarskrachtencentrum	133
7.8	Buiging in twee richtingen	134
7.9	Welving en schranking	136
8	Stabiliteit en standvastigheid	137
8.1	Inleiding	137
8.2	Arbeid en energie	144
8.4	Voorbeelden	147
8.5	Stabiliteitsvoorwaarde	151
8.6	De Eulerse knikstaaf	155
8.7	Eerste- en tweede ordeberekening	161
8.8	Bovengrens en ondergrens	167
	Bijlage 1 Doorsnedegrootheden	171
A1.1	Oppervlakte	172
A1.2	Zwaartelijn en zwaartepunt	177
A1.3	Statisch moment en evenwichtslijn	178
A1.4	Statisch moment van een deeloppervlak	184
A1.5	Traagheidsmoment en traagheidsprodukt	187
	Bijlage 2 Goniometrie en trigonometrie	195
A2.1	Berekenen van hoeken in een plat vlak	195
	Bijlage 3 Matrixrekening	203
A3.1	Definities	203
A3.2	Enkele rekenkundige bewerkingen	207
A3.3	Regels voor matrixbewerkingen	211
A3.4	Toepassingen van de matrixrekening	212
A3.5	Stijfheids- en flexibiliteitsmatrix	214
	Bijlage 4 Grootheden, eenheden en dimensies	219
A4.1	Grootheden	219
A4.2	Eenheden	219
A4.3	Afgeleide grootheden, eenheden en dimensies	220
	Index	223

1 Inleiding

1.1 Bouwwerk en omgeving

Ieder bouwwerk, bijvoorbeeld een gebouw of een brug, staat op de aarde. De zon, de dampkring en de aarde vormen de stoffelijke omgeving van een bouwwerk. Bouwwerk en omgeving – of in het algemeen een voorwerp en zijn omgeving – beïnvloeden elkaar. Deze wederzijdse en gelijktijdige beïnvloeding openbaart zich op vele manieren. Acht voorbeelden laten dit zien.

Voorbeeld 1. De wind waait in het vrije veld anders dan in de directe omgeving van een gebouw: het gebouw hindert de lucht in haar loop, waarbij de lucht om het gebouw heen moet. Deze invloed van het gebouw op de wind gaat vergezeld van de gelijktijdige invloed van de wind op het gebouw: de wind doet het gebouw bewegen (vergelijk het zwiepen van een boom in de wind).

Voorbeeld 2. Uit experimenten is gebleken dat alle voorwerpen, ongeacht of ze nu bijvoorbeeld van hout, ijzer of wol zijn gemaakt, bij hun val naar de aarde een gelijke neerwaartse versnelling bezitten. Dit betekent dat alle voorwerpen die op eenzelfde hoogte boven het aardoppervlak tegelijkertijd vanuit een toestand van rust worden losgelaten, ook tegelijkertijd met gelijke snelheden tegen het aardoppervlak botsen. Dit gegeven houdt in dat een waarnemer, die in een gesloten kist naar de aarde valt, zijn eigen val niet waarneemt. De waarnemer is zwevend in rust ten opzichte van de gesloten kist; de waarnemer voelt en ziet niets.

De aarde bezit een bepaalde *massa* (hoeveelheid stof), evenals de waarnemer. Het naar elkaar toe bewegen van aarde en waarnemer is het gevolg van het in elkaars aanwezigheid zijn van hun massa's; dit gegeven is moeilijk te begrijpen.

De waarnemer die (in een gesloten kist) op de aarde staat, ervaart een druk op zijn voetzolen. Het aardoppervlak (de bodem van de kist) oefent een druk uit op zijn voetzolen, en omgekeerd oefent de waarnemer ter plaatse van de voetzolen een druk uit op het aardoppervlak. Dat de voetzolen en het aardoppervlak gelijktijdig gelijke drukken op elkaar uitoefenen is moeilijk te begrijpen. Deze

wederzijdse druk is ook het gevolg van het in elkaars aanwezigheid zijn van de massa van de aarde en de massa van de waarnemer.

Voorbeeld 3. Een waarnemer die op aarde staat, ervaart druk op zijn voetzolen. Een waarnemer die aan een rekstok hangt, ervaart trek aan zijn handen en armen. Men heeft geleerd de verschijnselen druk op en trek aan het eigen lichaam te vereenzelvigen met de uitoefening van een kracht op het lichaam. Bij een drukkracht wordt het lichaam gestuikt en bij een trekkracht gerekt. Dit onderscheid in druk- en trekkracht wordt vereenzelvigd met het gericht zijn van een kracht. Deze fysieke (lichamelijke) ervaring wordt nu als volgt veralgemeend.

Indien een voorwerp rust op aarde, dan bestaat er een contactvlak (scheidingsvlak) tussen de aarde en het voorwerp. Dit contactvlak heeft twee kanten: de onderkant van het voorwerp en de bovenkant van de aarde (aardoppervlak). Ter plaatse van dit contactvlak oefent de aarde een drukkracht uit op de onderkant van het voorwerp en oefent dit voorwerp een drukkracht uit op de bovenkant van de aarde. Deze krachten zijn gelijk van grootte en hebben een tegengestelde richting. Men voert nu ook het begrip eigen gewicht of gewichtskraft G van een voorwerp in, waarbij deze kracht in grootte en richting gelijk is aan de drukkracht die het voorwerp op de aarde uitoefent. Uit experimenten is gebleken dat de grootte van deze kracht G gegeven is door $G = m \cdot g$, waarin m de massa van het voorwerp is en g de neerwaartse valversnelling nabij het aardoppervlak.

Het verschijnsel waarbij voorwerpen in hun massa's naar elkaar toe bewegen, noemt men gravitatie of zwaartewerking. Met de zwaarte van een voorwerp bedoelt men het eigen gewicht, de gewichtskraft G , van een voorwerp dat rust op de aarde.

Het naar elkaar toe bewegen van massa's is een bepaalde eigenschap van deze massa's. Men noemt deze eigenschap: de zwaarte van een massa. De massa van een voorwerp bezit namelijk ook nog een andere eigenschap, die in het vijfde voorbeeld wordt toegelicht.

Voorbeeld 4. De ervaring leert dat men een veer kan indrukken of kan uitrekken. Drukt men op een veer dan stuikt de veer, trekt men er aan dan rekt de veer. De ervaring leert ook dat hoe groter de uitgeoefende drukkracht is, des te groter de stuik is.

Indien een uiteinde van een veer ergens scharnierend is vastgemaakt, dan kan men deze veer niet alleen indrukken of uitrekken maar ook trekken en drukken in verschillende richtingen. Het on-

derscheid tussen trek en druk en tussen de onderlinge richtingen van trek- of drukkrachten, maken dat men een kracht een richting toekent. Het onderlinge verschil tussen rekgrootten of stuikgrootten, brengt met zich mee dat men aan een kracht een grootte toekent.

Met andere woorden: de fysieke ervaring bij het indrukken en uitrekken van veren houdt in dat men kan zeggen: een kracht werkt op een voorwerp en bezit daarbij een aanwijsbare richting en grootte. Door nu de rek (of de stuik) op een bepaalde veer te wijzigen, kan men een maat voor de grootte F van de kracht op de veer invoeren volgens $F = k \cdot \Delta l$, waarin Δl de lengteverandering en k de stijfheid van de veer is.

Voorbeeld 5. Beschouw een glad voorwerp op een horizontaal glad tafelblad. Indien een waarnemer tegen het voorwerp duwt, dan kan hij zien dat het voorwerp geleidelijk op snelheid (traag op gang) komt. Met andere woorden: door het duwen tegen het voorwerp ondergaat het voorwerp een versnelling.

De ervaring leert dat een voorwerp dat rust op aarde, deze toestand van rust behoudt zolang er tegen dat voorwerp niet wordt geduwd of aan dat voorwerp wordt getrokken. Dat het voorwerp in verticale richting in rust blijft, is in voorbeeld 2 toegelicht. Dat het voorwerp ook in horizontale richting niet beweegt, is nog niet toegelicht.

Dat een voorwerp uit zichzelf in horizontale richting niet beweegt, is helaas ook moeilijk te begrijpen. Het in rust blijven van een voorwerp is het gevolg van het feit dat een voorwerp massa bezit. Duwt men nu tegen een voorwerp, dan komt de tweede eigenschap van massa naar voren: de massa biedt weerstand tegen de verstoring van de rusttoestand; het voorwerp krijgt weliswaar direct een zekere versnelling, maar pas geleidelijk een zekere snelheid.

De eigenschap 'het weerstand bieden tegen het uit zijn rusttoestand geraken' noemt men de traagheid van een voorwerp. Aan deze traagheid ligt de massa van het voorwerp ten grondslag. Met andere woorden: de massa van een voorwerp heeft nog een andere eigenschap, namelijk traagheid. Indien op een los voorwerp een kracht werkt, ondergaat dat voorwerp een verandering van de hoeveelheid beweging in de richting van die kracht. De hoeveelheid beweging van een voorwerp is zijn massa m maal zijn snelheid v : $m \cdot v$. De verandering van de snelheid is de versnelling.

Uit experimenten is gebleken dat de grootte F van een kracht die nodig is om een los voorwerp uit de toestand van rust te doen geraken, gegeven wordt volgens $F = m \cdot a$, waarin m de massa en a de versnelling van het voorwerp is. Heeft de kracht het kenmerk van

een ‘stoot’, een zeer kortstondige kracht, dan verandert de hoeveelheid beweging sprongsgewijs.

Een geblindeerde waarnemer op de achterbank van een auto weet dat wanneer hij tegen de rug van de bank wordt gedrukt, de auto voorwaarts versnelt, en wanneer hij naar voren schiet de auto vertraagt (negatief versnelt). De versnelling van de auto wordt door de waarnemer in de auto ervaren als een kracht in tegenovergestelde richting ter grootte van $m \cdot a$ met m als de massa van de waarnemer en a de versnelling van de auto. We kunnen ook zeggen dat de waarnemer kan denken dat de auto stilstaat doch dat hij zich in een horizontaal zwaartekrachtsveld bevindt waarbij de zwaartekrachtsversnelling even groot maar tegengesteld van richting is aan de oorspronkelijke versnelling van de auto. Een waarnemer die in een gesloten kist naar de aarde valt ervaart geen versnelling omdat de versnelling van de kist aan de waarnemer een versnelling ten opzichte van de kist geeft die even groot doch tegengesteld is aan zijn eigen versnelling .

Uit metingen is gebleken dat de traagheidsmassa en de zwaartemassa even groot zijn.

Voorbeeld 1 is feitelijk een combinatie van voorbeeld 4 en voorbeeld 5: het gebouw gedraagt zich als een veer met een trage massa. De invloed van de wind op een gebouw kan men aangeven met de windkracht op dat gebouw: aan de windzijde (naar de wind toe gericht) een drukkracht en aan de andere zijde (van de wind af gericht) een trekkracht (zuigkracht). Hierdoor raakt (de top van) het gebouw uit de rusttoestand en vervormt (vergelijk de rek of stuik van een veer, met daaraan verbonden een voorwerp).

Uit voorbeeld 4 en voorbeeld 5 blijkt wat het effect van een kracht kan zijn: het indrukken van een veer en het in beweging brengen van een voorwerp. Men kan krachten op een veer vergelijken door de overeenkomstige lengteveranderingen te vergelijken. Met andere woorden: men kan een kracht op een veer normaliseren, dat wil zeggen van een standaardmaat voorzien. Echter het is anders gegaan. De kracht is genormaliseerd volgens $F = m \cdot a$.

Voorbeeld 6. Aan het blote oog doet het oppervlak van een voorwerp (een stuk materie) zich voor als een ononderbroken geheel. Uit de natuurkunde is bekend, dat materie bestaat uit een verzameling van deeltjes waarin de materie is samengeklonterd; de ruimten tussen deze deeltjes is leeg. Alle deeltjes bezitten massa en al dan niet een elektrische lading. Deze deeltjes zijn zelfs met een microscoop niet te zien. Uit experimenten is gebleken dat de deeltjes ten opzichte van elkaar in bepaalde patronen bewegen ingeval hun massa's en ladingen. Deeltjes van verschillende soort

(verschil in massa en lading) groeperen zich tot een wat groter deeltje, molecule geheten. Een molecule van een stof is het kleinste deeltje van een als onderbroken ervaren stof, dat nog zelfstandig kan bestaan. Ook moleculen zijn met een microscoop niet zichtbaar.

Indien een ijzeren veer wordt uitgerekt, treden er in de bewegingstoestand van de deeltjes veranderingen op. Deze veranderingen zijn niet of nauwelijks te beschrijven met de kennis van voorbeeld 5. Immers een kracht op een voorwerp geeft aan ieder deeltje een verandering van hoeveelheid beweging. Omdat er alleen al in bijvoorbeeld een mm^3 van een veer nagenoeg ontelbare deeltjes voorkomen, is het resultaat moeilijk te beschrijven.

Het verband tussen het uitrekken van een veer en het uit hun toestand van beweging brengen van de deeltjes, wordt gelegd met het begrip energie. Indien een kracht werkt op een voorwerp, ondergaat het aangrijpingspunt van die kracht een verplaatsing. Hierdoor verricht de kracht arbeid, volgens $\text{arbeid} = \text{kracht} \times \text{weg}$. In afwezigheid van warmte-effecten is deze arbeid gelijk aan de energie (arbeidsvermogen) die aan het voorwerp wordt toegevoegd. Deze energie heeft in de zintuiglijke aanschouwing het voorkomen van veerenergie (voorbeeld 4), bewegingsenergie (voorbeeld 5), valenergie (voorbeeld 2), veerenergie en bewegingsenergie (voorbeeld 1). Men noemt de veerenergie ook de *inwendige energie* van de veer.

Voorbeeld 7. Indien een stuk ijzer wordt omgeven door vochtige lucht, vormen het ijzer en de waterstof en de zuurstof uit de vochtige lucht een nieuwe stof: roest. De nieuwe stof roest heeft andere eigenschappen dan ijzer en lucht. Bijvoorbeeld: ijzer is magnetisch, roest niet; ijzer kan trek opnemen, roest niet. Met andere woorden: het in elkaars aanwezigheid verkeren van ijzer en vochtige lucht leidt tot een wederzijdse beïnvloeding van ijzer en vochtige lucht, waarbij een nieuwe stof roest ontstaat. De wording van een nieuwe stof noemt men een scheikundig proces, dat te beschrijven is als veranderingen in de schikking van deeltjes waarin de stof is samengeklonterd en welke deeltjes massa en al dan niet elektrische lading bezitten (protonen, neutronen en elektronen). Deze beschrijving behoort tot de hogere natuurkunde. Er is echter ook nog een praktisch natuurkundig probleem.

Roest neemt een groter volume in dan ijzer. Een roestende ijzeren balk, ingemetseld in een muur, oefent door de volumevergroting een druk uit op de muur, waardoor het metselwerk uit zijn verband raakt of scheurt. De roestende balk oefent een kracht uit op het metselwerk en omgekeerd, het metselwerk oefent een kracht uit op

de balk.

In dit voorbeeld wordt chemische energie omgezet in arbeid, verricht door de kracht die de roestende balk uitoefent op de muur (arbeid = kracht \times weg = energie).

Voorbeeld 8. Indien een stuk ijzer in een gasvlam wordt gehouden, stijgt de temperatuur van het ijzer en zet het uit. Bij de verbranding van het gas, een scheikundige reactie, ontstaan nieuwe stoffen zoals koolstofdioxide en waterdamp, en komt warmte vrij. Deze warmte wordt toegevoerd aan het ijzer waarbij de temperatuur van het ijzer stijgt en er in de ijzerkristallen veranderingen optreden waardoor het stuk ijzer uitzet. Indien nu een ijzeren staaf tussen twee vaste steunpunten wordt geklemd en vervolgens wordt verwarmd, wordt de staaf verhinderd van lengte te veranderen, waardoor de staaf een druk uitoefent op de steunpunten en omgekeerd.

In dit voorbeeld is er de verbrandingsenergie – waarbij warmte vrijkomt, die wordt omgezet in bewegingsenergie van de kleinste ijzerdeeltjes – die zich uit als veerenergie van de staaf. \square

Samenvatting

De gegeven voorbeelden laten zien dat er tussen een voorwerp en zijn omgeving wederzijdse invloeden bestaan, waarbij voorwerp en omgeving veranderingen in hun arbeidsvermogen ondergaan. Tevens is gebleken dat het effect van de invloed van de omgeving op een voorwerp kan worden beschreven met behulp van het begrip *kracht*. *Het effect van een kracht op een voorwerp wordt daarbij vereenzelvigd met het effect van de invloed van de omgeving op het voorwerp.* Doordat men krachten in grootte en richting kan vergelijken, kan men krachten normaliseren.

Een kracht is weliswaar een fictief begrip dat onder vele omstandigheden zintuigelijk wordt ervaren, maar wel een handig wiskundig instrument. In de fysieke ervaring van een kracht is een ieder vrij. De een zegt: ‘kracht is massa maal versnelling’, de ander: ‘kracht is lengteverandering maal veerstijfheid’ en nog een ander: ‘kracht is eigen gewicht’. Voor iemand die in een gesloten kist naar de aarde valt, bestaat er geen eigen gewicht. Hij kan het begrip *kracht* wel ervaren door het uittrekken van een veer of door tegen een ander voorwerp in de kist te duwen.

Een ander woord voor *kracht* is *belasting*.

- opgave 1.1 Beschouw een stapel bakstenen. Het blijkt dat de druk tussen twee bovenste stenen kleiner is dan die tussen twee onderste. Verklaar dit verschil (voorbeeld 2 en 3).

- opgave 1.2 Men kan een antiek glas herkennen doordat het is uitgezakt. Dit verschijnsel heet *kruip*. Verklaar dit verschijnsel (voorbeeld 2 en 3).
- opgave 1.3 Voor het meten van grondspanningen gebruikt men drukdozen en stijgbuizen, gevuld met water. Waarop berust de werking van een drukdoos (voorbeeld 3 en 4)?
- opgave 1.4 Iemand die aan een rekstok hangt, ervaart trek in zijn handen en armen en niet bijvoorbeeld in zijn kniegewrichten. Verklaar dit verschijnsel (voorbeeld 2, 3 en 4).
- opgave 1.5 Men boort een buis door het middelpunt van de aarde van de ene kant naar de andere kant van het aardoppervlak. Vervolgens laat men een steen in de buis vallen. Komt de steen terug? (In de aarde neemt de gravitatiekracht lineair af vanaf het aardoppervlak naar het middelpunt. In het middelpunt is de snelheid het grootst.)
- opgave 1.6 Een stalen holle bal wordt gelijkmatig door de zon verwarmd, zodat een grotere bal ontstaat. Waarom bewegen zowel de buitens- als de binnenschil van de bal naar buiten (voorbeeld 8)? (Kijk eerst wat een massieve bol doet.)

1.2 Mechanica

Mechanica is de wetenschap die zich bezighoudt met het wiskundig beschrijven – met behulp van natuurkundige grootheden – van plaatsveranderingen die hoeveelheden materie ten opzichte van elkaar gedurende de tijd ondergaan.

De mechanica houdt zich bijvoorbeeld bezig met botsende ballen, vallende of bewegende voorwerpen in de wind of in stromend water, de onderlinge banen van sterren, de werking van werktuigen, het buigen van loopplanken en balken, het rekken van kabels, het afschuiven van grond en het afkalven van de duinen. Bij al deze verschijnselen gaat het over hoeveelheden stof (materie) die onderling van plaats veranderen. Het is eigenlijk verwonderlijk dat men al deze, en nog vele andere vergelijkbare verschijnselen, op eenzelfde wijze kan behandelen.

In de praktische mechanica wordt het effect van de invloed van de omgeving op de materie vereenzelvigd met het effect van een kracht op deze materie. Een stuk vaste materie heet een voorwerp. Men zegt: op een voorwerp werkt een kracht.

Eerste begrippen

In iedere wetenschap wordt uitgegaan van zogenoemde eerste be-

grippen. Men spreekt ook wel van primitieve begrippen (primus = eerste) of grondbegrippen. Het zijn begrippen waarvan op grond van gemeenschappelijke ervaring en uitwisseling van gedachten wordt ondersteld dat zij de waargenomen verschijnselen kenmerken. En dit zonder dat men die begrippen precies kan omschrijven en op andere begrippen kan terugvoeren. In de meetkunde zijn punt, lijn en vlak eerste begrippen. In de algebra is de verzameling van natuurlijke getallen een eerste begrip; in de natuurkunde zijn dat stof, massa, lading, temperatuur, ruimte en tijd.

In het dagelijks leven bestaan er veel eerste begrippen. De zinnen ‘Er zijn stoffelijke dingen (voorwerpen) met een massa en met een ruimtelijke omvang en vorm’, ‘Er bestaat een ruimtelijke schikking van die dingen’ en ‘Er is de tijd waarin die dingen van omvang, vorm en onderlinge schikking veranderen’ staan vol dagelijkse eerste begrippen. De bijbehorende eerste (natuurkundige) begrippen zijn onder meer: stof, massa, lengte en tijdsduur. Het is namelijk gebleken dat men met deze begrippen de veranderingen in omvang, vorm en onderlinge schikking van voorwerpen kan beschrijven.

Grootheden massa, lengte en tijdsduur

In de natuurkunde wordt aan ieder begrip een hoeveelheid of maat toegekend. Hoeveelheden van eenzelfde begrip zijn door meting te vergelijken. *Een hoeveelheid van een begrip noemt men een grootheid.* Er bestaan de eerste grootheden (basisgrootheden) zoals massa, lengte en tijdsduur (zie bijlage 4).

Hoeveelheden van eenzelfde begrip noemt men grootheden van dezelfde soort. Van grootheden van dezelfde soort zijn hun verhouding door meting in getallen vast te stellen (natuurlijke getallen en breuken). Grootheden van dezelfde soort worden vergeleken met een bepaalde hoeveelheid, die men de *eenheid* noemt. Op deze wijze is een grootheid uit te drukken als het produkt van een getalswaarde en de eenheid. De eenheid van massa is de kilogram (kg), die van lengte de meter (m) en die van tijd de seconde (s).

De eenheid van de grootheid snelheid is m/s. De eenheid van de grootheid versnelling is m/s². De grootheid kracht wordt uitgedrukt in de grootheden massa, lengte en tijdsduur:

$$\text{kracht} = \frac{\text{massa} \times \text{lengte}}{\text{tijdsduur in het kwadraat}} .$$

De eenheid van kracht, de newton, is daarbij gedefinieerd volgens:

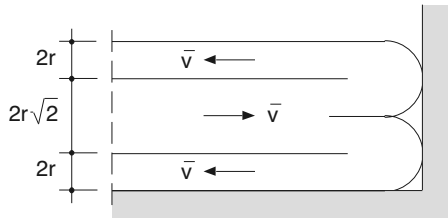
$$1 \text{ newton} = \frac{1 \text{ kg} \times 1 \text{ m}}{1 \text{ s}^2} .$$

Het symbool voor de eenheid van kracht is N. Meestal gebruikt

men de eenheid kN (1 kN = 1000 N).

Zie verder bijlage 4.

- opgave 1.7 De windbelasting op een gevel per eenheid van oppervlakte wordt gegeven door $F = \alpha \rho v^2$, met ρ de massadichtheid van de lucht en v de snelheid van de lucht in het vrije veld (α is een vormfactor). Door een gegeven horizontale buis, met doorsnede $A = 2\pi r^2$, stroomt water naar binnen met een constante snelheid \bar{v} . Aan het einde van de buis wordt het water naar links en rechts geleid in twee kleinere buizen, met ieder een doorsnede $\frac{1}{2}A$. De buizen steunen tegen een wand.



Bereken de permanente kracht, die het water op de buis uitoefent (voorbeeld 1 en 5). (Neem aan dat er geen waterverlies en geen wrijving is. De invloed van de zwaartekracht wordt niet in aanmerking genomen.) (Antwoord: $2\rho A v^2$. Controleer de eenheid van kracht.) \square

Schikking van voorwerpen

Met het begrip schikking van voorwerpen, bijvoorbeeld de schikking van bloemen in een vaas, is verbonden het begrip plaats van een voorwerp. De plaats van een voorwerp is echter betrekkelijk: men kan de plaats van een voorwerp alleen aangeven ten opzichte van andere voorwerpen. Een waarnemer in een overigens lege wereld, kan zijn eigen plaats niet aangeven; een referentie ontbreekt (refereren = verwijzen naar). Het begrip plaats van een voorwerp duidt dus altijd op de plaats van dat voorwerp ten opzichte van de plaatsen van andere voorwerpen.

In de natuurkunde gaat men er van uit dat er een zogenoemd referentiesysteem bestaat ten opzichte waarvan men de plaatsen van voorwerpen door lengtemeting kan aangeven. Een voorstelling van zo'n systeem is een verzameling of samenstel van star gerangschikte starre voorwerpen. 'Star gerangschikt' wil zeggen dat de voorwerpen onderling niet van plaats veranderen en verwisselen, en ook niet ten opzichte van elkaar draaien. Een star voorwerp is een onvervormbaar voorwerp.

Voorbeeld. Een rij kilometerpaaltjes langs de weg vormt een referentiesysteem voor de plaatsbepaling van voertuigen op diezelfde weg. □

In een referentiesysteem kan men bepaalde plaatsen markeren. Op een vel tekenpapier bijvoorbeeld kan men punten tekenen en deze voorzien van namen of cijfers. Blaast men een stofje van het tekenvel, dan passeert het de gemarkeerde punten.

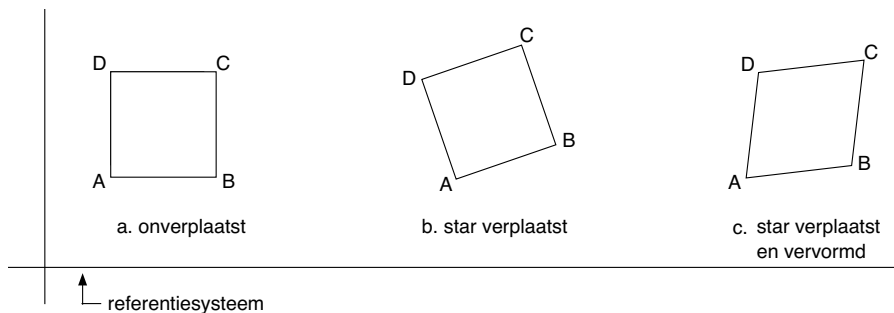
Verplaatsing

Men zegt dat een voorwerp beweegt of van plaats verandert, indien dat voorwerp op een gemarkeerde plek in het referentiesysteem verdwijnt en op een andere gemarkeerde plek verschijnt. Deze omschrijving van de beweging van een voorwerp sluit weliswaar aan bij de dagelijkse ervaring van dat begrip, maar is in natuurkundig opzicht niet altijd bevredigend. In de omschrijving ligt namelijk de veronderstelling verborgen dat een voorwerp daadwerkelijk is aan te wijzen.

Voorbeeld. Beschouw twee tollen met gelijke eigenschappen, waarvan de ene tol om zijn as draait en de andere niet. Veronderstel verder dat de oppervlakken van de tollen er zodanig uitzien dat men door kijken alleen niet kan waarnemen welke van beide tollen draait. Vat men een punt van het oppervlak van een tol op als een voorwerp (stoffelijk punt), dan verliest de gegeven omschrijving van het begrip bewegend voorwerp zijn betekenis, omdat zo'n voorwerp niet is aan te wijzen. Het onderscheid tussen de draaiende tol en de stilstaande tol is waar te nemen indien men de tollassen duwt: de draaiende tol gaat dan wiebelen en de andere tol valt om. Dit leidt tot de volgende beschrijving van het begrip bewegend voorwerp, namelijk de verhouding tussen de hoeveelheid beweging ($\text{massa} \times \text{snelheid}$) en de hoeveelheid massa van dit voorwerp. Deze beschrijving wordt met name in de 'hogere natuurkunde' gehanteerd. □

opgave 1.8 Omschrijf het begrip wind. □

De verplaatsing van een voorwerp heeft twee gedaanten, zie het vierkant ABCD in figuur 1.1. In beide gevallen ondergaat het getekende vierkant een verplaatsing, echter bij b vervormt het niet, bij c wel.



Figuur 1.1. Verplaatsingen van een vierkant

Een verplaatsing van een voorwerp zonder dat dat voorwerp vervormt, heet een starre verplaatsing: het voorwerp gedraagt zich bij zo'n verplaatsing als star (onvervormbaar). Een starre verplaatsing van een voorwerp bestaat in principe uit een evenwijdige verschuiving, gevolgd (of voorafgegaan) door een draaiing van het voorwerp. Vervormt het voorwerp, dan ondergaat het een volumeverandering en/of een gedaanteverandering.

1.3 Kracht

De ervaring leert dat voorwerpen (stukken vaste materie) in elkaars aanwezigheid veranderingen in hun arbeidsvermogen (energie) ondergaan. In 1.1 zijn hiervan enkele voorbeelden gegeven.

Richt men de aandacht op een bepaald voorwerp, dan wordt het effect van de aanwezigheid van andere voorwerpen in de buurt op dat voorwerp vereenzelvigd met het effect van een kracht op dat voorwerp. Men zegt dan: op het beschouwde voorwerp werkt een kracht en die kracht heeft een effect op dat voorwerp tot gevolg. De uitdrukking 'op een voorwerp werkt een kracht, die een effect heeft op dat voorwerp' is een verkorte weergave van de werkelijke beschrijving van het ontstaan van een effect op een voorwerp.

Voorbeeld. Voor de veranderingen van de hoeveelheid beweging van hemellichamen leidde Isaac Newton (1643-1727) de wet (een wiskundige formule) voor de aantrekkingskracht tussen deze lichamen af. Hij maakte daarbij gebruik van de empirische wetten van Johann Kepler (1571-1630), die op zijn beurt gebruik maakte van de meetgegevens van zijn leermeester Tycho Brahe (1546-1601). De tijdgenoten van Newton, met name Christiaan Huygens (1629-1695) en Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) hadden moeite met de idee 'krachten tussen lichamen op afstand', ook al bleek die wet aardig te kloppen. Het vraagstuk van 'de kracht op afstand' heeft velen nadien beziggehouden, onder meer Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894), die een mechanica zonder krachten ontwikkelde, en Ernst Mach (1838-1916). Albert Einstein (1879-

1955) gaf de voorlopig definitieve oplossing in een zwaarte-theorie, waarin het begrip kracht niet voorkomt, doch die evenwel Newton's wet als benadering in zich bergt.

Men kan dus zeggen dat het begrip 'zwaartekracht op afstand' louter een naam of een wiskundige formule of een verkorte schrijfwijze is van een effect dat binnen een bepaalde meetnauwkeurigheid ook met Newton's formule voor die kracht kan worden beschreven. □

In veel gevallen is het begrip kracht evenwel niet slechts een naam, een verkorte schrijfwijze, voor de beschrijving van bedoelde effecten op voorwerpen, maar ook een begrip dat in een zintuigelijk aanschouwing als werkelijkheid kan worden ervaren. Dit kan als volgt worden toegelicht.

Het begrip kracht wordt als werkelijkheid ervaren in die gevallen, waarin de oppervlakken van voorwerpen met elkaar contact maken of wanneer voorwerpen scheuren. In het dagelijks leven is er de ervaring van duwen en trekken en de effecten daarvan op een voorwerp. In de natuurkunde is er de ervaring dat men krachten door meting onderling kan vergelijken: een ingedrukte veer geeft aan een ermee verbonden voorwerp een versnelling, waarvan de grootte recht evenredig is met de grootte van de indrukking. Dit onderling vergelijken geeft een maat voor het effect van een kracht, maar zegt over het begrip kracht zelf niets. (Het vergelijken van een grootte met zichzelf noemt men dan ook een nul-experiment: het experiment verklaart de grootte zelf niet.)

Vóór Newton rekenden onder meer Archimedes van Syracuse (212-187 v.C.), Simon Stevin (1548-1620), Isaac Beeckman (1570-1637) en Isaac Gaston Parides (1636(38)-1673) al met 'krachten' op voorwerpen, die daarbij hun toestand van rust behielden. Het ging daarbij over 'gewichten' die onderling verbonden door touwen, kettingen en balansarmen met elkaar in 'evenwicht' zijn en over waterdrukken. In dit verband moeten tevens Newton's tijdgenoten Edmé Mariotte (1620-1684), Robert Boyle (1627-1691), Robert Hooke (1635-1703) en Pierre Varignon (1654-1727) worden genoemd.

Men zou het zo kunnen stellen: een kracht wordt pas als werkelijkheid ervaren, indien daarbij nog een tweede kracht als werkelijkheid kan worden ervaren. *In de zintuigelijke aanschouwing openbaart het begrip kracht zich in de vorm van een krachtenpaar.* Drukt men met de vinger in een homp klei, dan worden zowel de klei als de vinger geplet. *De krachten van het krachtenpaar zijn voor iedere waarnemer gelijk.* Men noemt die krachten soms echte krachten.

1.4 Constructie-elementen en verbindingen

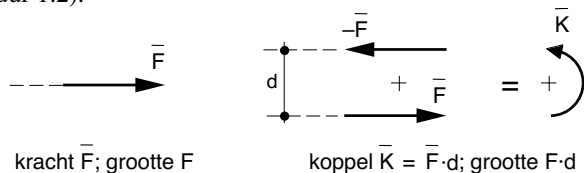
Een (bouw-)constructie bestaat uit een samenstel van onderling verbonden elementen, en vormt als zodanig één geheel.

Constructie-elementen

In de mechanica van bouwconstructies onderscheidt men lijnvormige en vlakvormige constructie-elementen. Lijnvormige elementen zijn bijvoorbeeld: een balk, lat, staaf en touw; vlakvormige elementen zijn onder meer: een vloer, wand, vlak vakwerk en schijf.

In deze paragraaf gaat het vooral om lijnvormige elementen, uitgaande van de dagelijkse ervaring van een kracht (in de vorm van duwen, trekken of wrijven) en van een koppel (in de vorm van wrikken, buigen en draaien). Kracht en koppel werken op een voorwerp. Een kracht heeft een grootte en een richting. Een koppel, twee even grote doch van richting tegengestelde krachten op enige afstand van elkaar, bezit een grootte en een draairichting (figuur 1.2).

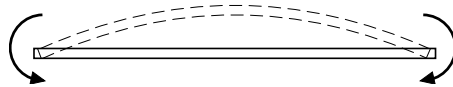
Figuur 1.2. Kracht en koppel, werkend op een constructie-element.



Een lijnvormig constructie-element, of kortweg lijnelement, is een element waarvan de lengte vele malen groter is dan de breedte en de dikte.

Men onderscheidt *buigstijve* en *buigslappe* lijnelementen, afhankelijk van de weerstand tegen buigen. Indien men een recht element buigt, wordt dit element krom. Een lijnelement AB is te buigen door de einden A en B te belasten door tegengestelde koppels van gelijke grootte (figuur 1.3).

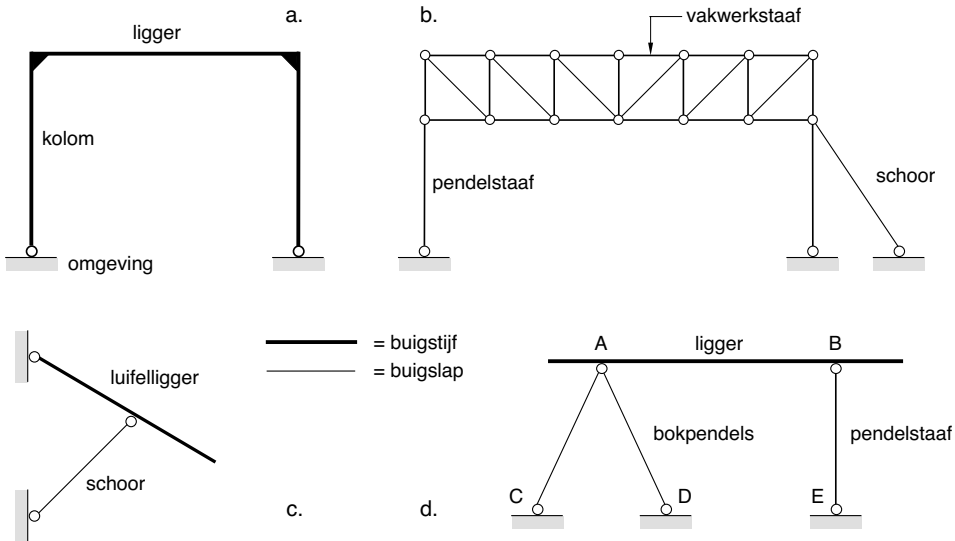
Figuur 1.3. Buigen van een recht element.



De weerstand, die het element biedt tegen het 'krom worden', heet de buigstijfheid van het element. De hoeveelheid buigstijfheid, of kortweg buigstijfheid (genoteerd als B), is een maat voor die weerstand: hoe groter B , des te groter de weerstand. Een buigslap element heeft een B , die kleiner is dan die van een buigstijf element. De omkeringsgrootte B^{-1} noemt men de flexibiliteit of buigzaamheid.

Buigstijve, lijnvormige elementen worden onderscheiden in *liggers*

(liggend) en *kolommen* (staand) (figuur 1.4a). Voorbeelden van buigslappe, lijnvormige elementen zijn een gespannen touw, een vakwerkstaaf, een schoor en een pendelstaaf (figuur 1.4b). Deze elementen gedragen zich als trek- en drukveren: ze bieden alleen weerstand tegen rek (langer worden) of stuijk (korter worden). Men zegt dat een staaf een grote rek- of stuijkstijfheid bezit (getoend als k), indien de weerstand van de staaf tegen rekken of stuijken groot is.



Figuur 1.4. Voorbeelden van buigstijve en buigslappe elementen.

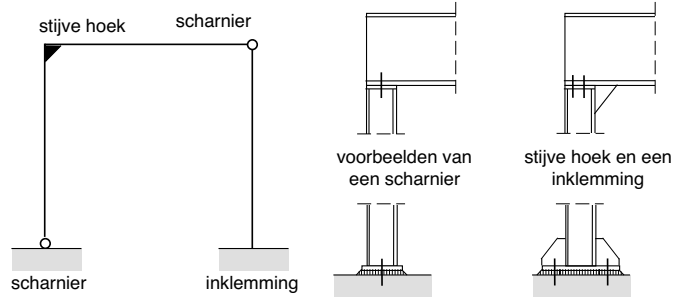
Een samenvoeging van een aantal buigslappe elementen, kan echter een buigstijf element opleveren. Een aantal vakwerkstaven vormen samen een buigstijf vakwerk, dat als geheel is aan te merken als een buigstijf, lijnvormig element (figuur 1.4b). De figuren 1.4c en d tonen een combinatie van buigstijve en buigslappe elementen.

Verbindingen

De verbindingen tussen lijnvormige elementen zijn te onderscheiden in scharnieren (buigslappe verbindingen) en inklemmingen (buigstijve verbindingen). In geschematiseerde constructietekeningen geeft men een scharnier aan met een open rondje en een inklemming met een zwart driehoekje (figuur 1.5). Dit driehoekje wordt ook vaak weggelaten.

Een scharnier biedt geen weerstand aan koppels, een inklemming wel. Buigslappe elementen worden daarom onderling verbonden door een scharnier, buigstijve elementen meestal door een stijve hoek (inklemming).

Figuur 1.5. Scharnier en inklemming.



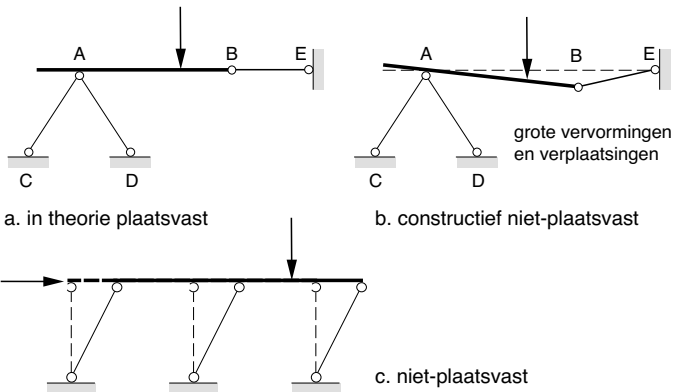
Plaatsvastheid

De uitspraak ‘een element is plaatsvast’ betekent dat het element plaatsvast is ten opzichte van zijn omgeving. Bij het onderzoek naar de plaatsvastheid van een constructie mogen de afzonderlijke elementen en de omgeving van de constructie als star worden beschouwd.

Een star lijnvormig constructie-element is plaatsvast, indien:

- een punt van het element (bijvoorbeeld het ene uiteinde) zodanig is vastgemaakt dat het geen verplaatsing kan ondergaan;
- een tweede punt (bijvoorbeeld het andere uiteinde) zodanig is vastgemaakt, dat het element niet kan draaien.

In het geval van figuur 1.4d is de horizontale ligger AB plaatsvast verbonden met de starre omgeving via twee bokpendels (of schooren) AC en AD en een pendelstaaf BE. De driehoek ACD legt het punt A vast ten opzichte van de starre omgeving. De denkbeeldige driehoek ABE legt het punt B vast ten opzichte van de starre omgeving. Kenmerkend is echter dat de lengte-assen van de bokpendels en van de pendelstaaf niet door één punt gaan.



Figuur 1.6. Een constructie is niet-plaatsvast wanneer de drie pendelstaven door één punt gaan, of wanneer de drie pendelstaven evenwijdig aan elkaar lopen. Let wel: de oplegging bij A is plaatsvast en geen roloplegging.

In figuur 1.6a is de starre ligger AB in theorie plaatsvast gemaakt. Echter, wanneer AB wordt belast door een verticale kracht, worden

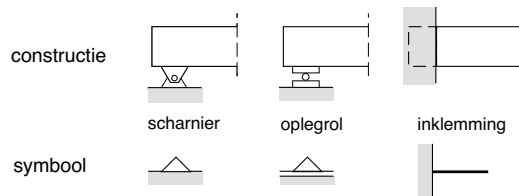
de trekkrachten in de ligger en in de pendelstaaf BE ‘oneindig’ groot, hetgeen tot zeer grote vervormingen en verplaatsingen leidt. Men kan dit vermijden door er voor te zorgen dat de lengte-assen van de bokpendels en van de pendelstaaf niet door één punt gaan, zoals in figuur 1.4d het geval is. Echter de pendelstaven mogen ook niet onderling evenwijdig zijn, waardoor de ligger AB ‘omvalt’ (figuur 1.6b).

Een lijnvormig constructie-element is dus in zijn vlak van ligging (constructief) plaatsvast ten opzichte van de omgeving, indien het met drie pendels – waarvan de lengte-assen niet door één punt gaan of niet evenwijdig zijn – met de omgeving is verbonden. Dit geldt eveneens voor een vlakvormig constructie-element.

Oplegscharnier, oplegrol en inklemming

In figuur 1.4b is het vormvaste en plaatsvaste vakwerk ondersteund door twee bokpendels en een pendelstaaf. In de praktijk is een bok veelal een oplegscharnier en een pendelstaaf een oplegrol, waarbij het eigen gewicht van de constructie de opwaartse verplaatsing van de rol verhindert. Een inklemming verhindert een verplaatsing en een draaiing, zodat een aan een zijde ingeklemd element plaatsvast is (figuur 1.7).

Figuur 1.7. Scharnier, rol-oplegging en inklemming. Bij een roloplegging moet het eigen gewicht van de constructie een opwaartse verplaatsing verhinderen.



Vormvastheid

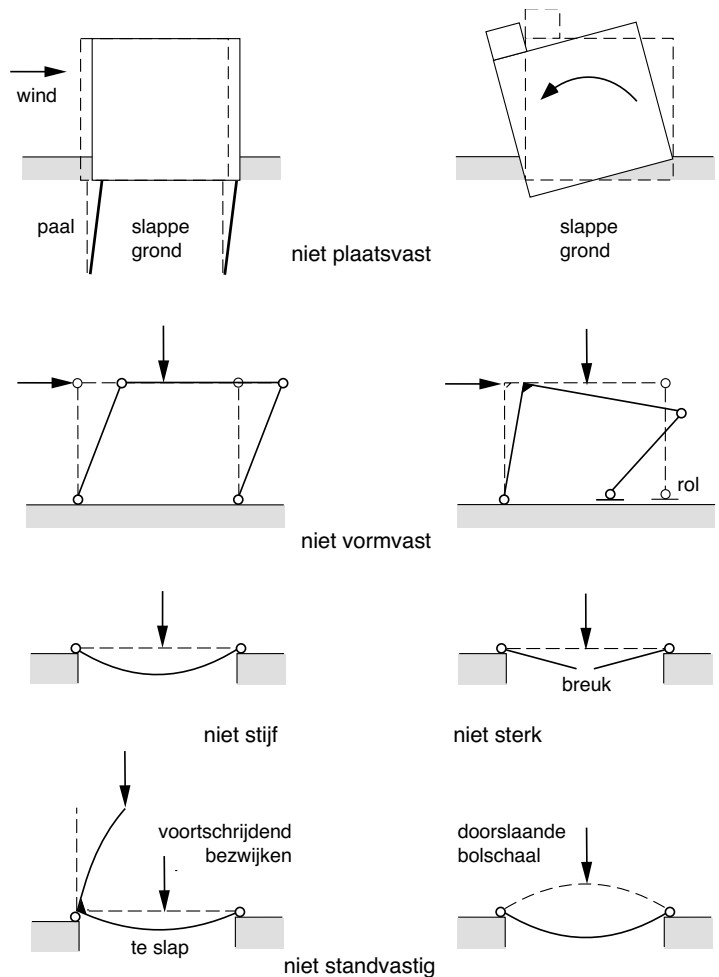
Een constructie is vormvast, indien de elementen onderling niet kunnen draaien. Zorgt men er voor dat iedere verbinding in de constructie plaatsvast is, dan is daarmee de constructie ook vormvast.

1.5 Bouwconstructie

Als gevolg van de invloed van de fysieke omgeving beweegt en vervormt een bouwwerk. Om het bewegen en vervormen binnen zekere grenzen te beperken, stelt men eisen aan de zogeheten *bouwconstructie* van een bouwwerk; dat is *het onderdeel van een bouwwerk dat ervoor zorgt dat het bouwwerk in voldoende mate plaatsvast, vormvast, stijf, sterk en standvastig is* (figuur 1.2). Deze begrippen kunnen als volgt worden toegelicht.

– *Plaatsvast*. In het algemeen mag een bouwwerk niet ten op-

- zichte van de aarde kunnen worden verschoven en/of gekanteld.
- *Vormvast*. De onderdelen van een bouwwerk moeten zodanig met elkaar zijn verbonden, dat ze niet vrijelijk kunnen worden gedraaid.
 - *Stijf*. De onderdelen van een bouwwerk mogen niet te veel worden vervormd. Balken bijvoorbeeld mogen niet te veel worden gebogen.
 - *Sterk*. De onderdelen van een bouwwerk mogen niet breken.
 - *Standbestendig*. Indien de onderdelen van een bouwwerk een weinig van stand worden veranderd, dient het bouwwerk in stand te blijven en niet in te storten. Een ander woord voor standbestendig is standvastig of stabiel.



Figuur 1.8. Schematische voorstelling van de gestelde eisen aan een bouwconstructie.

Het onderzoek naar de plaatsvastheid, de vormvastheid, de stijfheid, de sterkte en de standvastigheid (of stabiliteit) van een bouwwerk is het onderwerp van studie in de mechanica van bouw-

kundige constructies. Bij ieder bouwwerk moet steeds worden nagegaan, of aan de gestelde eisen kan worden voldaan, waarbij het aanhouden van de gegeven volgorde van eisen van groot nut is.

Belastingen op bouwconstructies

In NEN 6702 (TGB 1990. Belastingen en vervormingen) wordt onder meer aangegeven welke krachten op een bouwconstructie in aanmerking moeten worden genomen, gelet op de verschillende fysieke omstandigheden, bijvoorbeeld belasting door sneeuw, wind, eigen gewicht, regenwater en nuttige belasting.

2 Kracht

2.1 Voorstelling van een kracht

Eigenschappen

In de mechanica van constructies is het begrip kracht een eerste begrip met de volgende drie eigenschappen:

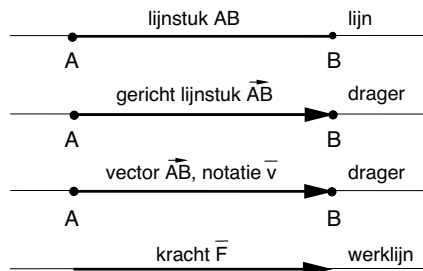
- een kracht werkt op een voorwerp ter plaatse van een punt van dat voorwerp: het aangrijppingspunt van de kracht;
- een kracht bezit een grootte;
- een kracht bezit een ruimtelijke richting.

Deze eigenschappen worden wiskundig weergegeven met onder meer de begrippen vector, kracht, werklijn en aangrijppingspunt.

Vector

Het begrip vector kan men construeren, zoals in figuur 2.1 is weergegeven. Een paar van punten, genoteerd als AB , noemt men een recht lijnstuk met eindpunten A en B . De lengte van het lijnstuk AB is de kortste verbinding tussen de punten A en B .

Een gericht lijnstuk, genoteerd als \vec{AB} , is een gerangschikt paar punten A en B , met A als begin- en B als eindpunt van het lijnstuk. De lijn door A en B noemt men de drager van het gerichte lijnstuk \vec{AB} . De lengte van het gerichte lijnstuk \vec{AB} , is gelijk aan de lengte van het overeenkomstige lijnstuk AB .



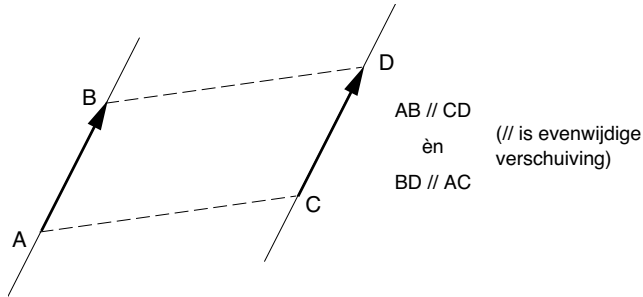
Figuur 2.1. Vector en kracht.

Een lijnstuk bezit in de ruimte een bepaalde stand ten opzichte van een referentiesysteem. *De stand en de gerichtheid van het lijnstuk vormen samen de ruimtelijke richting van het lijnstuk.* Men noemt

de ruimtelijke richting kortweg: richting.

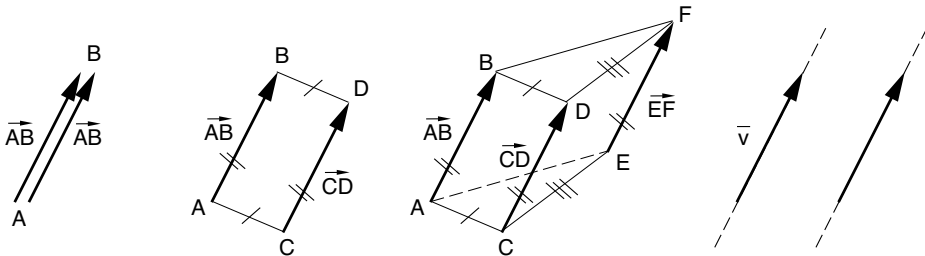
Men noemt twee gerichte lijnstukken \vec{AB} en \vec{CD} *verschuivingsgelijk*, indien het ene gerichte lijnstuk \vec{AB} door evenwijdige verschuiving kan worden overgevoerd in het andere gerichte lijnstuk \vec{CD} , en omgekeerd (figuur 2.2). Een ander woord voor gericht lijnstuk is pijl.

Figuur 2.2. Twee verschuivingsgelijke gerichte lijnstukken.



Uit de omschrijving van verschuivingsgelijkheid en uit figuur 2.3 blijkt dat de betrekking verschuivingsgelijk een betrekking gelijkwaardig is:

- een gericht lijnstuk is verschuivingsgelijk met zichzelf, ofwel: $\vec{AB} \approx \vec{AB}$,
- indien \vec{AB} verschuivingsgelijk is aan \vec{CD} , dan is \vec{CD} verschuivingsgelijk aan \vec{AB} ,
- indien \vec{AB} verschuivingsgelijk is aan \vec{CD} en \vec{CD} verschuivingsgelijk is aan \vec{EF} , dan is ook \vec{AB} verschuivingsgelijk aan \vec{EF} .



Figuur 2.3. Verschuivingsgelijkheid van pijlen.

Een vrije vector, genoteerd als \vec{v} , is een klasse van verschuivingsgelijke gerichte lijnstukken. (Vrij betekent dat het er niet toe doet waar de lijnstukken zich bevinden.) Men definieert daarbij de grootte van een vector als de lengte van de bijbehorende gerichte lijnstukken en de ruimtelijke richting van een vector als de ruimtelijke richting van de bijbehorende verschuivingsgelijke gerichte lijnstukken. Verder definieert men het begin- en eindpunt van de vector overeenkomstig die van de gerichte lijnstukken. De drager van de vector is de drager van het bijbehorende gerichte lijnstuk. Het verschil tussen een vrije vector en een gericht lijnstuk zit niet in de notatie en de voorstelling. Men kan een vrije vector \vec{v} ook

noteren als bijvoorbeeld \vec{AB} . Het verschil tussen een vrije vector en een gericht lijnstuk kan als volgt worden toegelicht.

Stel men staat op de noordpool en drukt een staande veer 1 cm in. Men gaat daarna met dezelfde veer naar de zuidpool, zet de veer verticaal en trekt de veer 1 cm uit. Voor een waarnemer buiten de aarde is de gerichte verplaatsing van het veereinde aan de noordpool gelijkwaardig aan de gerichte verplaatsing aan de zuidpool. Beide verplaatsingen behoren tot eenzelfde klasse en worden voorgesteld door eenzelfde vector.

Kracht

Alle krachten die eenzelfde ruimtelijke richting en eenzelfde grootte bezitten, worden voorgesteld door dezelfde vector. Dit is ook het geval bij de drukkracht op de veer aan de noordpool en de trekkracht op de veer op de zuidpool, mits aan de polen de natuurkundige omstandigheden gelijk zijn.

Grootte en krachtenschaal

In de voorstelling van een kracht door een vector vertegenwoordigt de lengte van de vector de grootte van de kracht. De eenheid van lengte is de meter (m). De eenheid van grootte van een kracht is de newton (N). De afbeelding van een kracht op een vector dient derhalve vergezeld te worden door een schaal. Deze schaal geeft aan welke hoeveelheid eenheid van lengte overeenkomt met welke hoeveelheid krachtgrootte.

Voorbeeld. 10^{-2} m komt overeen met 10^4 N, in symboolvorm: $10^{-2} \text{ m} \equiv 10^4 \text{ N}$. Met $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$ en $1 \text{ kN} = 10^3 \text{ N}$, volgt in dit voorbeeld: $1 \text{ cm} \equiv 10 \text{ kN}$. Deze laatste schaal is op de tekenafel van een constructiebureau niet ongebruikelijk. \square

Richting

De ruimtelijke richting van de kracht wordt gegeven door de ruimtelijke richting van de vector die de kracht voorstelt.

Werklijn en aangrijpingspunt

De werklijn van een kracht komt overeen met de drager van de bijbehorende vector. Het aangrijpingspunt en de stand van de werklijn van de kracht leggen de werklijn ruimtelijk vast.

Symbool

Het symbool voor een kracht is \vec{F} . Bij meer dan één kracht noteert men $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ enz. De grootte van een kracht wordt genoteerd als

F, F_1, F_2, F_3 enz. Hierbij zijn F, F_1, F_2, F_3 enz. positieve getallen, vermenigvuldigd met de eenheid van kracht. Een kracht die even groot is als de kracht \vec{F} , maar met een richting tegengesteld aan die van \vec{F} , wordt genoteerd als $-\vec{F}$.

Het woord ‘kracht’ wordt ook gebruikt in de betekenis van ‘de vector, voorstellende een kracht’.

Getalvermenigvuldiging

Men mag een vector \vec{v} vermenigvuldigen met een getal k volgens $k \cdot \vec{v}$. Indien k positief is, dan is de grootte van $k \cdot \vec{v}$ gelijk aan $k \cdot v$ en de richting gelijk aan die van \vec{v} . Indien $-k$ negatief is, dan is de grootte van $-k \cdot \vec{v}$ gelijk aan $k \cdot v$ en de richting tegengesteld aan die van \vec{v} .

2.2 Soorten krachten

Krachten worden onderscheiden in *krachten op afstand* en in *contactkrachten*.

Krachten op afstand

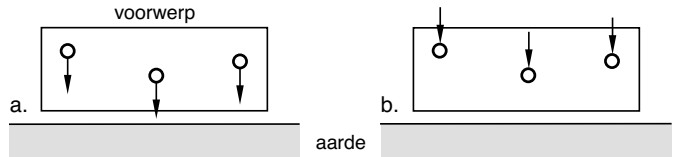
Een voorwerp valt naar de aarde; een deeltje ijzerpoeder beweegt in de richting van een magneet. Het gaat in deze gevallen om een effect op een stuk materie in de aanwezigheid van andere stukken materie, die zich op enige afstand bevinden. Bij de beschrijving van deze effecten behoeft men het begrip kracht niet te gebruiken. Echter in de praktische natuurkunde zegt men: ‘op een voorwerp werkt een kracht op afstand, met name: een zwaartekracht en een magnetische kracht.’

Kenmerkend voor de kracht op afstand is dat deze kracht werkt op ieder onderdeel van een voorwerp.

Voorbeeld. Stel dat een voorwerp met massa m en volume V is onderworpen aan de zwaartekracht $\vec{G} = m \cdot \vec{g}$. Indien het voorwerp homogeen is ten aanzien van de massaverdeling, dan is de massadichtheid ρ (massa per eenheid van volume) van dat voorwerp $\rho = m/V$, waarin V het volume van het voorwerp is. Op elk eenheidsvolume werkt dan de kracht $\rho \cdot \vec{g}$. Men noemt een kracht op afstand daarom veelal ook een volumekracht: de kracht werkt op ieder massavolume van het voorwerp. □

De kracht op afstand werkt op ieder onderdeel van een voorwerp (figuur 2.4). Men zegt nu dat die kracht een gebonden vector is: gebonden aan het aangrijpingspunt .

Figuur 2.4. Voorstelling van een 'kracht op afstand'.



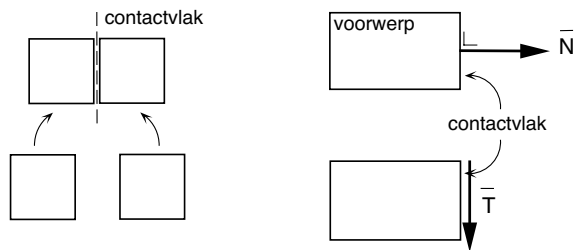
In figuur 2.4 zijn de zwaartekrachten op de onderdelen van een voorwerp op twee manieren aangegeven. In a valt het beginpunt van de vector samen met het aangrijpingspunt van de kracht; in b valt het eindpunt van de vector samen met het aangrijpingspunt. Dit onderscheid heeft geen enkele betekenis. (Men kiest veelal voor geval a.) Wat van belang is, is dat op ieder onderdeel van het voorwerp een zwaartekracht werkt.

Contactkrachten

Indien een voorwerp contact maakt met een ander voorwerp, en daarbij ter plaatse van het contactvlak op dat andere voorwerp een kracht uitoefent, noemt men deze kracht een contactkracht. Contactkrachten zijn derhalve gebonden vectoren.

Het optreden van contactkrachten gaat vergezeld van een vervorming van de voorwerpen in de omgeving van het contactpunt. Het contactpunt wordt daarbij een oppervlak en de contactkrachten min of meer gelijkmatig over de oppervlakte van het contactvlak verdeelde belastingen. Men noemt een contactkracht in dit verband vaak ook een oppervlaktekracht.

Figuur 2.5. Onderscheid tussen normaalkracht en tangentiële kracht.

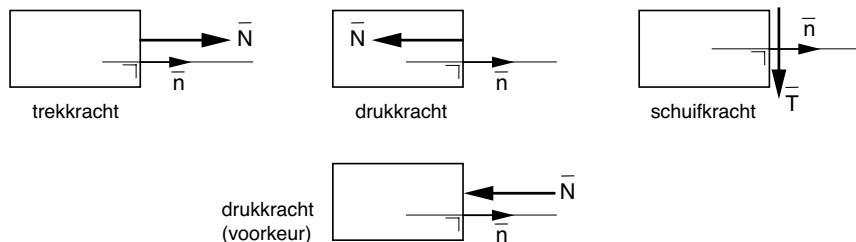


Contactkrachten (figuur 2.5) worden onderscheiden in normaalkrachten \bar{N} , waarvan de werklijnen loodrecht (= normaal) staan op het contactoppervlak, en tangentiële krachten \bar{T} , waarvan de werklijnen raken (= tangere) aan het oppervlak. Een tangentiële kracht noemt men een schuif- of wrijvingskracht.

Een normaalkracht wordt onderscheiden in een drukkracht en een trekkracht (figuur 2.6). Op het oppervlak van een voorwerp kan men een vector(pijltje) \bar{n} tekenen, waarvan de drager loodrecht staat op het oppervlak en waarvan de richting wijst in de richting vanaf het voorwerp naar zijn omgeving. Men noemt zo'n pijltje een buitennormaalvector (normaal = loodrecht op).

Komt nu de richting van dit pijltje overeen met de richting van de

normaalkracht, dan is deze kracht een trekkracht. Is de richting van de buitennormaalvector tegengesteld aan die van de normaalkracht, dan is deze kracht een drukkracht. Figuur 2.6 geeft aan hoe men contactkrachten meestal tekent.



Figuur 2.6. Onderscheid tussen druk- en trekkracht.

Actie en reactie

De grondstelling van het principe van actie en reactie luidt als volgt. *Bij de contactkracht \vec{F}_{BA} die voorwerp A op een ander voorwerp B uitoefent, behoort een contactkracht \vec{F}_{AB} die voorwerp B op voorwerp A uitoefent. De krachten \vec{F}_{BA} en \vec{F}_{AB} zijn even groot, maar hebben tegengestelde richtingen.*

Deze grondstelling staat bekend als de ‘derde wet van Newton’. In zijn toelichting op deze wet schreef Newton in 1687 onder meer: ‘Wat iets anders drukt of trekt, wordt hierdoor gedrukt of getrokken. Indien iemand een steen met zijn vinger drukt, wordt deze vinger ook door de steen gedrukt [...] wegens de gelijkheid der wederkerige drukking’. Newton gebruikt de termen *actio* (werking) en *reactio* (tegenwerking).

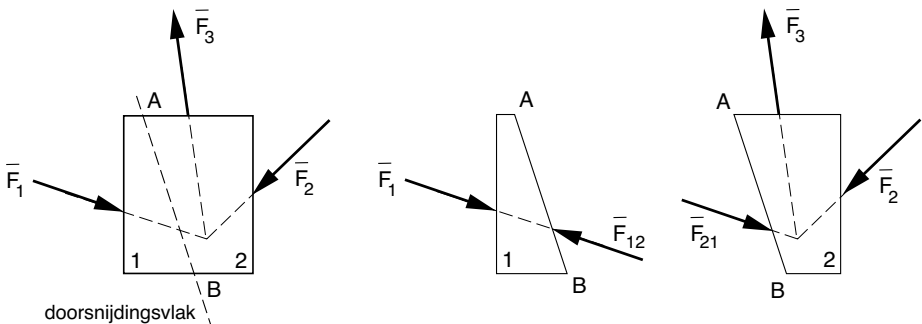
De grondstelling voor contactkrachten omlijnt (definieert) het begrip kracht als iets wat zintuiglijk waarneembaar is. Men ervaart een kracht (druk op de vinger) indien er een tweede kracht is aan te wijzen (druk op de steen, die daardoor beweegt of vervomt). Met andere woorden: een kracht kan als werkelijkheid worden ervaren indien er een tweede kracht is aan te wijzen, die een waarneembaar effect heeft. Slingert men bijvoorbeeld met een touw een steen in de rondte, dan wordt het touw gerekt (kracht 1) en blijft de steen in een cirkelbaan (kracht 2: immers, indien het touw wordt doorgesneden, vliegt de steen weg). Een massaloze waarnemer, die zich tussen het touw en de steen bevindt, zegt: ‘Aan mijn linkerarm en rechterarm wordt gelijk getrokken’. De grondstelling zegt eigenlijk: wanneer een veer een lengteverandering ondergaat tengevolge van krachten dan is het verband tussen lengteverandering en krachten onafhankelijk van een starre translatie en rotatie van de veer (§ 1.2).

Dat $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$ geldt ook in de gevallen van niet-evenwicht,

doch is in het geval van evenwicht eenvoudiger te begrijpen (zie §§ 2.4 en 5.1).

Inwendige contactkrachten

Krachten op afstand en contactkrachten noemt men *uitwendige krachten* op een voorwerp. Indien een door uitwendige krachten belast voorwerp in gedachten wordt doorgesneden, werken er krachten op de twee kanten van het doorsnijdingsvlak (figuur 2.7).



Figuur 2.7. Doorsnijden van een voorwerp, belast door uitwendige krachten.

Aangenomen wordt dat de krachten die het ene deel van het voorwerp ter plaatse van het doorsnijdingsvlak op het andere deel uitoefenen, en omgekeerd, zijn *voor te stellen door contactkrachten*. Dat de contactkracht \bar{F}_{12} die deel 2 van het voorwerp uitoefent op deel 1, gelijk in grootte maar tegengesteld van richting is aan de kracht \bar{F}_{21} die deel 1 uitoefent op het deel 2 volgt uit de grondstelling van actie en reactie.

Men noemt de krachten op de twee kanten van een denkbeeldig doorsnijdingsvlak inwendige contactkrachten. De idee van inwendige krachten is al door Isaac Gaston Parides (1636(38)-1673) toegepast bij het ontwerpen van hangbruggen.

2.3 Krachtenrekening (vectorrekening)

Getalrekening

In de rekenkunde is een bewerking een regel of voorschrift, die aan twee getallen ondubbelzinnig één getal toevoegt. Beschouw bijvoorbeeld de verzameling van de gehele getallen:

$$\dots, -n, \dots, -i, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, i, \dots, n, \dots$$

De bewerking ‘optellen’ op deze getallen bezit de onderstaande vier eigenschappen, waarbij de laatste twee ook de bewerking ‘af-trekken’ vastleggen. Het getal $-n$ heet de omkering van n .

- voor elke i en n geldt: $i + n = n + i$ (omkeringseigenschap);
- voor elke i , k en n geldt: $i + (k + n) = (i + k) + n$ (groeperings-

eigenschap);

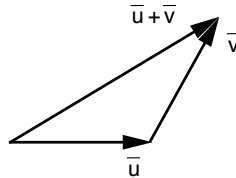
- voor elke n geldt: $0 + n = n$;
- voor elke n is er een $-n$ waarvoor geldt: $n + (-n) = 0$, waarbij per definitie geldt: $n + (-n) = n - n$.

De bewerking ‘optellen’ is daarbij vastgelegd volgens de volgende twee regels, waarin n' de directe opvolger van n is in de rij van de natuurlijke getallen ($1, 2, 3, \dots, i, \dots, n, \dots$) in hun natuurlijke volgorde:

- $n + 1 = n'$;
- $i + n' = (i + n)'$.

Vectorrekening

De bewerking ‘optellen’ van twee vectoren \vec{u} en \vec{v} , genoteerd als $\vec{u} + \vec{v}$, is vastgelegd volgens figuur 2.8. Men noemt $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ de som van \vec{u} en \vec{v} .

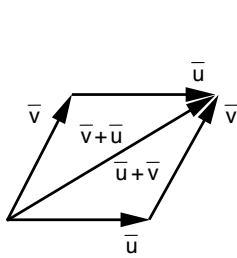


Figuur 2.8. Definitie van de optelling van twee vectoren.

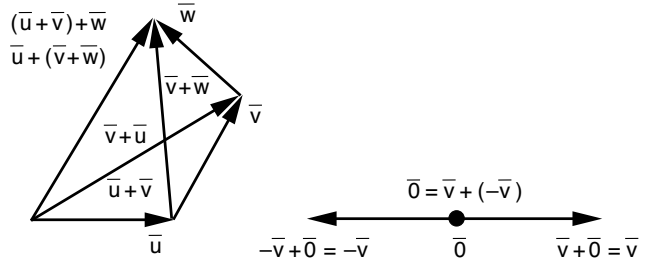
Wil men twee vectoren optellen die gelijke grootten maar tegengestelde richtingen bezitten, dan moet men een nulvector ($\vec{0}$) en een omkeringsvector $-\vec{v}$ van \vec{v} invoeren, naar analogie met de aftrekking van de gehele getallen. De optelling van vectoren blijkt dan de volgende vier eigenschappen te bezitten (figuur 2.9):

- voor elke \vec{u} en \vec{v} geldt: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (omkeringseigenschap),
- voor elke \vec{u}, \vec{v} en \vec{w} geldt: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ (groepe-ringseigenschap),
- voor elke \vec{v} geldt: $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$,
- voor elke \vec{v} is er een $-\vec{v}$ waarvoor geldt: $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$, waarbij per definitie geldt: $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{v} - \vec{v}$.

Men kan de definitie van de som van twee vectoren en de eigenschappen van de vectoroptelling overbrengen naar de klasse van gelijkwaardige krachten. Evenwel moet worden bedacht dat een kracht een aangrijpingspunt bezit. In hoofdstuk 3 wordt daarom de optelling van krachten afzonderlijk behandeld.



Figuur 2.9. De vier eigenschappen van de optelling van vectoren in beeld gebracht.



De hoofdstukken 1 en 2 vormen de basis, het uitgangspunt, voor het vak mechanica van constructies. De hierin behandelde begrippen komen in de volgende hoofdstuken alle weer tersprake.

2.4 Notatie

Een vector \bar{v} is te schrijven als $\bar{v} = v \cdot \bar{e}$ waarbij \bar{e} de eenheidsvector is met lengte 1 en v een getal. Hebben \bar{v} en \bar{e} dezelfde richting dan is v positief en is v de lengte van \bar{v} . Hebben \bar{v} en \bar{e} tegengestelde richtingen dan is v negatief. Voor de vermenigvuldiging van een getal a met een vector \bar{v} wordt geschreven $a \cdot \bar{v} = a \cdot v \cdot \bar{e} = \overline{a \cdot v}$. De getalvermenigvuldiging $a \cdot b$ wordt ook geschreven als ab . De punt in $a \cdot b$ wordt ook wel weggelaten. (zie ook eind § 2.2).

2.5 Statica

In de statica ofwel de leer van het evenwicht van (echte) krachten op constructies wordt ondersteld dat de verandering van de hoeveelheid beweging van ieder constructiedeel ten opzichte van de aarde gelijk nul is. Anders gezegd: in de statica worden de traagheidskrachten niet in aanmerking genomen.