



Fysische transport- verschijnselen

Harrie van den Akker
Rob Mudde

Symbolenlijst

Alleen die symbolen zijn hier opgenomen die door het hele boek heen gebruikt zijn.

		eenheden				
a	absorptiecoëfficiënt	–		j_D	stofoverdrachtsgetal	–
a	specifieke oppervlak	m^2/m^3		j_H	warmteoverdrachtsgetal	–
a	warmtevereffeningscoëfficiënt	m^2/s		k	stofoverdrachtscoëfficiënt	m/s
A	oppervlakte	m^2		k	concentratie van turbulente kinetische energie	J/kg
b	breedte	m		k	constante	–
c	concentratie	kg/m^3 of $kmol/m^3$		k_B	constante van Boltzmann	J/K
c^*	verzadigingsconcentratie	kg/m^3 of $kmol/m^3$		k_r	reactiesnelheidsconstante	wisselend
c_p	soortelijke warmte bij constante druk	J/kgK		K	overall stofoverdrachtscoëfficiënt	m/s
c_v	soortelijke warmte bij constant volume	J/kgK		K	consistency (power law)	wisselend
C_d	uitstroomcoëfficiënt	–		K_w	weerstandsgetal	–
C_D	weerstandcoëfficiënt	–		L	lengte	m
$C(\bullet)$	C -functie	–		ℓ	lengte	m
d	diameter	m		ℓ	gemiddelde vrije weglengte	m
D	diameter	m		m	massa van molecuul	kg
ID	diffusiecoëfficiënt	m^2/s		m	verdelingscoëfficiënt	–
e	energie per massa-eenheid	J/kg		M	totale massa	kg
e	emissiecoëfficiënt	–		M	molaire massa	kg/mol
E	energie	J		n	aantal	–
E_q	warmte-extractiefactor	–		n	flow index (power law)	–
$E(\bullet)$	E -functie	–		N	aantal tanks in serie	–
f	frictiefactor	–		N	toerental (roerder)	s^{-1}
f_D	Stefan's correctiefactor	–		v	kinematische viscositeit	m^2/s
F_D	meesleepkracht (drag)	N		N_{avo}	getal van Avogadro	mol^{-1}
F	kracht	N		p	druk	N/m^2
$F(\bullet)$	F -functie	–		p^*	evenwichts-dampspanning	N/m^2
g	zwaartekrachtsversnelling	m/s^2		P	vermogen	J/s
h	hoogte	m		P	produktie	s^{-1}
h	warmteoverdrachtscoëfficiënt	J/ sm^2K		P	impuls	Ns
h	enthalpie per massa-eenheid	J/kg of J/kmol		q	warmteproductie per volume-eenheid	J/ m^3s
Δh_v	verdampingswarmte	J/kg		r	radiale coördinaat	m
H	Henry coëfficiënt	Pa		r	snelheid van chemische reactie	$kmol/m^3s$
\mathcal{H}	absolute vochtigheid	kg/kg		R	straal	m
				R	gasconstante	J/molK
				s	afstand	m
				S	bevochtigde omtrek	m
				t	tijd	s
				Δt	tijdsinterval	s
				T	temperatuur	K
				u	inwendige energie per massa-eenheid	J/kg
				U	overall warmteoverdrachtscoëfficiënt	J/ sm^2K

vervolg op schutblad achterzijde

vervolg van schutblad voorzijde

v	snelheid	m/s	g	grensvlak	
v_o	superficiële snelheid	m/s	h	hydraulisch	
V	volume	m^3	l	vloeistof	
w	bladhoogte (roerder)	m	L	positie L	
W	afmeting	m	m	meting	
x	plaatscoördinaat	m	m	massa	
x	massafractie	kg/kg	mol	mol	
y	plaatscoördinaat	m	n	natte bol	
z	plaatscoördinaat	m	opw	opwaarts	
β	uitzettingscoëfficiënt	K^{-1}	p	impuls	
δ	filmdikte	m	p	deeltje (particle)	
ε	snelheid van energiedissipatie	J/kg s	q	warmte	
ε	porositeit	m^3/m^3	r	relatief	
ε	wandruwheid	m	s	relatief (slip)	
ζ	hulpfunctie (voorbeeld 1.8)	–	tot	totaal	
θ	dimensieloze tijd	–	u	inwendige energie	
θ	hoek	rad	v	damp (vapour)	
ϕ	debiet	s^{-1}	V	volume	
ϕ'	stroom per lengte-eenheid	$s^{-1}m^{-1}$	w	wand	
ϕ''	flux (stroom per oppervlakte-eenheid)	$s^{-1}m^{-2}$	x,y,z	x,y,z -richting	
ϕ_w	arbeid	J/s	X	component X	
λ	warmtegeleidingscoëfficiënt	J/smK	zw	zwaartekracht	
λ	tijdconstante voor elastisch gedrag	s	0	aanvang; ingang	
μ	dynamische viscositeit	Ns/m ²	1, 2	positie 1, 2	
ν	kinematische viscositeit	m ² /s	\perp	loodrecht op stromingsrichting	
ρ	dichtheid	kg/m ³	$\langle \rangle$	middeling over ruimte	
σ	molecuuldiameter	m	–	middeling over tijd	
σ	oppervlaktespanning	N/m	Br	getal van Brinkman	
σ	constante van Stefan-Boltzmann	W/m ² K ⁴	Fo	getal van Fourier	
τ	gemiddelde verblijftijd	s	Gr	getal van Grashof	
τ_o	zwichspanning (yield stress)	N/m ²	Gz	getal van Graetz	
τ_{xy}	schuifspanning	N/m ²	Le	getal van Lewis	
<i>subscripts</i>				Nu	getal van Nusselt
a	omgeving		Pe	getal van Péclet	
A	component A		Pr	getal van Prandtl	
B	component B		Re	getal van Reynolds	
c	waarde in centrum		Sc	getal van Schmidt	
e	energie		Sh	getal van Sherwood	
fr	wrijving (friction)		Vi	viscositeitskental	

Fysische Transportverschijnselen

Fysische Transportverschijnselen

Harrie van den Akker
Rob Mudde

© VSSD

Eerste druk 1996, 1998

Tweede druk 2003-2005

Derde druk 2008

Uitgegeven door de VSSD

Leeghwaterstraat, 2628 CA Delft, The Netherlands

tel. +31 15 27 82124, telefax +31 15 27 87585, e-mail: hlf@vssd.nl

internet: <http://www.vssd.nl/hlf>

URL met informatie over dit boek: <http://www.vssd.nl/hlf/c014.htm>

De uitgever stelt aan docenten die dit boek in cursusverband gebruiken, desgewenst de collectie digitale illustraties en/of een elektronische versie ter beschikking. Een verzoek kan ingediend worden bij hlf@vssd.nl

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photo-copying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

Printed in The Netherlands.

ISBN gedrukte versie 978-90-6562-185-6

ISBN elektronische versie 978-90-6562-186-3 (inclusief opgavenboek)

NUR 924

Keywords: natuurkunde, transportverschijnselen.



Voorwoord

In 1956 verscheen van de hand van prof.ir. H. Kramers het diktaat “Fysische Transportverschijnselen”: wereldwijd voor technologie-studenten het eerste leer“boek” op dit gebied. Het presenteerde een systematische behandeling van het transport van impuls, energie en materie op basis van balansen (behoudswetten) en wetten voor moleculair transport. In 1961 verscheen dit diktaat in boekvorm bij de Delftsche Uitgevers Maatschappij. Dit boek begon met een kort hoofdstuk (8 pagina’s) over de fundamentele wetten als uitgangspunt voor het opstellen van de transportvergelijkingen; in de drie volgende hoofdstukken werden achtereenvolgens elementen van de technische stromingsleer (ruim 70 pagina’s), warmtegeleiding en warmteoverdracht (bijna 80 pagina’s) en diffusie en stofoverdracht (ruim 20 pagina’s) behandeld, waarna het boek afsloot met een kort hoofdstukje van 11 pagina’s over mengen en roeren.

Ondertussen was Prof. R.B. Bird in 1958 (van januari tot september) de gast van Prof. Kramers in Delft in wat thans het “Kramers Laboratorium voor Fysische Technologie” heet. Veel is toen gediscussieerd over Fysische Transportverschijnselen en over de manier waarop dit nieuwe vak het best gedoceerd kon worden. In de herfst van 1958 zagen “Notes on Transport Phenomena” het licht, gevolgd in 1960 door “Transport Phenomena”. Dit laatste boek, 780 pagina’s dik en met als auteurs Bird, Stewart en Lightfoot, is uitgegroeid tot de bijbel van het vakgebied.

In de loop der jaren zijn in het Delftse steeds nieuwe versies van Kramers’ oorspronkelijke boek verschenen. Zo kwam prof.dr.ir. W.J. Beek in 1968 met een versie zonder het hoofdstuk mengen en roeren, maar met een stuk over verblijftijdspreiding; ook werd de indeling wat aangepast. In 1973 en 1981 liet prof. J.M. Smith M.Sc. opnieuw lichtelijk aangepaste versies verschijnen. Steeds bleef de opbouw van het boek hetzelfde, met name de insteek via de behoudswetten en de wetten voor moleculair transport alsmede de volgorde van behandeling van impuls-, warmte- en stoftransport.

In Eindhoven ontwikkelde prof.dr. K. Rietema een eigen benadering van het vak die hij zelf als inductief omschreef : van eenvoudige waarneming komend tot generalisatie. Zijn boek “Fysische transport- en overdrachtsverschijnselen” bestond uit een deel A over moleculair transport van warmte, materie en impuls (in die volgorde) en een deel B over stromingsleer, grenslaagtheorie en turbulentie, convectief warmte- en stoftransport, en chemische reactoren. Rietema vond deze aanpak didactisch meer verantwoord en meer gericht op het stimuleren van fysisch inzicht en intuïtie.

Anno 1996 denken de auteurs van dit boek dat de tijd rijp is voor een iets andere benadering van het vakgebied “Fysische Transportverschijnselen”. Enerzijds is er de laatste tien jaar zeer veel veranderd in het Nederlandse universitaire onderwijswereld, anderzijds is het vakgebied zelf aan grote veranderingen onderhevig.

Wat de onderwijskundige veranderingen betreft: had vroeger het vak een plaats in het derde jaar van de opleidingen tot natuurkundig en scheikundig ingenieur, thans wordt het vak eerder in deze opleidingen gegeven. Ook studenten van andere technische opleidingen (zoals materiaalkunde, mijnbouw en technische bestuurskunde) krijgen nu het vak. Daarnaast studeren studenten tegenwoordig anders, waar zij in toenemende mate te maken hebben met maatregelen die de studieduur beperken en het studietempo verhogen. Alles bij elkaar voldoende reden voor een bezinning op inhoud en didactiek van het vak.

Verder is het vakgebied zelf aan het veranderen: in 1981 schreef Rietema al dat de fysische technologie aan vernieuwing toe was en hield hij een pleidooi voor een grotere rol van de stromingsleer in het vakgebied. Met de opkomst van Computational Fluid Dynamics (CFD)-technieken is het dan intussen inderdaad mogelijk geworden transport en overdracht van warmte en materie te beschouwen op basis

van informatie over lokale stromingsverschijnselen (snelheidsvelden). Bird (pagina 71 van “Transport Phenomena”) schrijft: “Het is gemakkelijker, sneller en veiliger uit te gaan van de behoudswetten van massa en impuls in algemene vorm en deze te vereenvoudigen tot zij het specifieke probleem in kwestie beschrijven.” In onze visie vormen de tijdafhankelijke driedimensionale transportvergelijkingen met name de basis van de moderne CFD-benadering. De traditionele aanpak met dimensie-analyse en fenomenologische overdrachtscoëfficiënten en met film- en grenslaagtheorieën en empirische drukvalvergelijkingen gaat daaraan vooraf, als een voorbereiding op de veel exactere numerieke aanpak.

In onze visie dienen studenten bij hun eerste kennismaking met het vakgebied eerst vertrouwd te geraken met de techniek van balansen opstellen en met een aantal begrippen, concepten en wetmatigheden. Zelf balansen opstellen voor specifieke problemen van betrekkelijk eenvoudige geometrie is de meest leerzame weg naar fysisch inzicht. In die eenvoudiger balansen mogen nog overdrachtscoëfficiënten voorkomen: dat levert doorgaans analytisch op te lossen vergelijkingen op. De rigoureuze CFD-aanpak bouwt als het ware op de eigenhandig geleerde expertise voort en is, indien de eindige-volumemethode wordt gebruikt voor het numeriek oplossen van de transportvergelijkingen, zelfs synoniem met het opstellen en oplossen van (micro)balansen. Bij simulaties van turbulente stromingen met behulp van turbulentiemodellen dienen vaak nog meer transportvergelijkingen (of balansen) te worden opgelost, zoals één voor de concentratie van turbulente kinetische energie alsmede één voor de dissipatie daarvan.

De behandeling van impulstransport volgt in dit boek pas na warmte- en stoftransport, enerzijds omdat impuls en schuifspanning moeilijker te hanteren begrippen zijn vanwege hun vector karakter (hierin volgen wij Rietema), anderzijds omdat zo een vloeiender overgang wordt verkregen naar de Navier-Stokes-vergelijkingen en CFD (zie ook paragraaf 5.8.3). Juist vanwege de fenomenologische aanpak van convectief warmte- en stoftransport is het ook geen gemis als laminaire stroming pas later behandeld wordt; hetzelfde heeft al die jaren ook voor turbulente stroming gegolden. Wel zijn allerlei concepten en termen tevoren behandeld in de hoofdstukken 1 en 2. Veel studenten zullen ook juist die concepten en termen en de grovere overdrachtsmodellen nodig hebben en de meer gedetailleerde theorieën en vergelijkingen kunnen ontberen.

Streng gehandhaafd is het idee van de analogie van warmte-, stof- en impulstransport. Dit is onder andere tot uiting gebracht in de identieke opbouw van de hoofdstukken 3 en 4. In de tekst is deze analogie ook steeds weer benadrukt, onder meer door consequent het begrip concentratie te hanteren (dus impulsconcentratie in plaats van snelheid) en door zo veel mogelijk de fysische mechanismen van het transport (weerstand, overdracht, filmmodel) in beelden te beschrijven. In hoofdstuk 5.8 komt de analogie ook bij de CFD-aanpak weer sterk naar voren.

Wij hopen dat onze aanpak van Fysische Transportverschijnselen aan zal slaan bij collega's en vooral studenten. Graag houden wij ons voor op- en aanmerkingen aanbevolen.

Aan het eind van dit voorwoord passen woorden van oprechte dank aan het adres van stafleden en promovendi van het Kramers Laboratorium voor Fysische Technologie die aan de totstandkoming van dit boek in enigerlei vorm hebben bijgedragen. Daarnaast danken wij ir. A.G.N. Boers voor diens assistentie bij de voorbeelden in de eerste versie van de tekst en Karin Westra voor haar bijdragen aan de tekstverwerking.

Voorwoord bij de tweede druk

In meerdere opleidingen aan hogescholen en universiteiten blijkt ons boek gehanteerd te worden. Nu het boek mede daarom aan een tweede druk toe is, hebben wij de gelegenheid aangegrepen enige aanvullingen en verbeteringen aan te brengen.

Allereerst hebben wij gemeend de bruikbaarheid en aantrekkelijkheid van het boek te kunnen vergroten door op een aantal plaatsen numerieke oplosmethoden te bespreken. Deze aanpak lijkt ons een gedegen en geleidelijke voorbereiding op de behandeling van numerieke simulaties van drie-dimensionale stromings- en transportverschijnselen die op steeds grotere schaal ingang vinden in research en beroepspraktijk en die - ook al in de eerste druk - in § 5.8.4 (Computational Fluid Dynamics) ingeleid worden.

Voorts hebben wij gemeend uitbreidingen te moeten opnemen over krachten op deeltjes in stromingen (§ 2.3) en over drogen en bevochtigen (§ 4.7). In § 1.3 hebben wij verbeteringen aangebracht in de behandeling van het fluitketeltje,.

Tenslotte zijn enige ondergeschikte tekstcorrecties aangebracht en is de voorbeeldlijst voorzien van paginanummers.

Wij hopen dat door deze aanpassingen het boek aan bruikbaarheid en aantrekkelijkheid heeft gewonnen.

Delft, augustus 2003

H.E.A. van den Akker
R.F. Mudde

Voorwoord bij de derde druk

De verbeteringen aangebracht in de tweede druk in §1.3 en in de behandeling van het fluitketeltje (voorbeeld 1.12) hebben geen einde gemaakt aan de discussie over hoe de verschillende energiebalansen fysisch correct en didactisch verantwoord moeten worden afgeleid en over hoe het begrip enthalpie daarbij kan worden geïntroduceerd. In deze nieuwe druk is daarom opnieuw gesleuteld aan deze afleidingen en aan voorbeeld 1.12; wij hopen nu tot meer bevredigende teksten te zijn gekomen, mede dankzij suggesties van dr.ir. G.C.J. Bart. In dit verband is het nuttig op te merken dat niet geheel toevallig Bird, Stewart & Lightfoot in de tweede editie (2002) van hun *Transport Phenomena* extra paragrafen 9.7 en 9.8 toegevoegd hebben die ook op deze materie ingaan.

Voorts zijn correcties aangebracht in de voorbeelden 1.11 en 4.1, in de beschrijving van de analogie met de wet van Ohm in §3.1 en bij de behandeling van de nattemperatuur in §4.7. Ook is een opmerking toegevoegd over de afleiding van de moleculaire transporttermen in de Navier-Stokes-vergelijkingen (§ 5.8.3). De auteurs bedanken dr.ir. G.C.J. Bart, dr. J.J.Ph. Elich en dr. L.M. Portela voor hun suggesties in deze.

Tenslotte zijn door het boek heen een groot aantal tekstuele en typografische correcties aangebracht en is menige samenvatting aan het eind van een paragraaf herzien. Ook daarmee hopen wij weer de bruikbaarheid van het boek vergroot te hebben. Voor verdere op- en aanmerkingen houden wij ons aanbevolen.

Delft, augustus 2008

Harrie van den Akker
Rob Mudde



Inhoud

VOORWOORD	5
Voorwoord bij de tweede druk	7
Voorwoord bij de derde druk	7
1 BALANSEN	13
1.1 De balans: recept en vorm	13
Samenvatting	17
1.2 De massabalans	17
1.2.1 De totale-massabalans	17
Samenvatting	22
1.2.2 Chemische reactoren	23
Samenvatting	27
1.2.3 Verblijftijdspreiding	27
1.2.4 Tanks in serie	35
Samenvatting	38
1.3 De energiebalans	39
1.3.1 De totale-energiebalans	39
Samenvatting	50
1.3.2 De thermische-energiebalans	50
Samenvatting	52
1.3.3 De mechanische-energiebalans en de Bernoulli-vergelijking	52
Samenvatting	57
1.4 De impulsbalans	57
Samenvatting	63
1.5 Voorbeelden van gecombineerd gebruik van massa-, energie- en impulsbalansen	63
2 MECHANISMEN, KENTALLEN, KRACHTEN	68
2.1 Moleculair transport	68
2.1.1 Bewegende moleculen	68
Samenvatting	71
2.1.2 Fick, Fourier, Newton	71
Samenvatting	76
2.1.3 Transportcoëfficiënten	77
Samenvatting	79

2.1.4	Schuifspanning: een alternatieve beschrijving van moleculair impulstransport	80
	Samenvatting	82
2.2	Dimensie-analyse	82
2.2.1	Dimensieloze kentallen	82
	Samenvatting	86
2.2.2	Dimensie-analyse	86
	Samenvatting	89
2.2.3	Dimensie-analyse: algemene techniek en Buckingham - P theorema	89
	Samenvatting	90
2.2.4	Voorbeelden van dimensie-analyse	90
	Conclusie	95
2.3	Krachten op omstroomde lichamen	95
	Samenvatting	103
3	WARMTETRANSPORT	105
3.1	Stationaire warmtegeleiding	105
	Samenvatting	117
3.2	Newton's afkoelingswet	117
	Samenvatting	119
3.3	Instationaire warmtegeleiding	119
3.3.1	Penetratietheorie	119
3.3.2	Penetratietheorie: gebruik	123
	Samenvatting	128
3.3.3	Doorverwarming	128
	Samenvatting	131
3.3.4	De totale opwarming van een lichaam	131
	Samenvatting	137
3.3.5	Uitwendige weerstand en doorverwarming	137
3.3.6	Numerieke aanpak	138
	Samenvatting	140
3.4	De algemene microbalans voor warmtetransport	140
	Samenvatting	143
3.5	Warmteoverdrachtscoëfficiënten bij convectie	144
3.5.1	Algemene beschouwingen	144
	Samenvatting	147
3.5.2	Warmtetransport bij gedwongen convectie	147
	Samenvatting	155
3.5.3	Warmtetransport bij vrije convectie	156
	Samenvatting	161

3.6	Warmtewisselaars	161
3.6.1	Warmteoverdracht zonder fase-overgang	162
	Samenvatting	165
3.6.2	Warmteoverdracht met fase-overgang	165
	Samenvatting	168
3.7	Warmtetransport door straling	168
3.7.1	Temperatuur en straling	168
	Samenvatting	171
3.7.2	Het gebruik van een warmteoverdrachtscoëfficiënt bij straling	172
	Samenvatting	174
4	MASSATRANSPORT	176
4.1	Analogie tussen massatransport en warmtetransport	176
	Samenvatting	178
4.2	Wederzijdse diffusie naar analogie van warmtetransport	179
4.2.1	Stationaire wederzijdse diffusie	179
	Samenvatting	182
4.2.2	Het analogon van Newtons afkoelingswet	183
	Samenvatting	183
4.2.3	Instationaire wederzijdse diffusie	184
4.2.4	Het analogon van doorverwarming	186
	Samenvatting	187
4.3	Diffusie en driftflux	188
	Samenvatting	192
4.4	De algemene microbalans voor stoftransport	193
	Samenvatting	194
4.5	Stofoverdrachtscoëfficiënten bij convectie	195
4.5.1	Algemene opmerkingen	195
4.5.2	Stofoverdracht bij gedwongen convectie	196
4.5.3	Stofoverdracht bij vrije convectie	199
	Samenvatting	200
4.6	Stofoverdracht over een fasegrensvlak	200
	Samenvatting	206
4.7	Gelijktijdig transport van warmte en massa: de natte-boltemperatuur	206
	Samenvatting	209
	STROMINGSLEER	211
5.1	Inleiding	211
5.2	Stroommeters	214
5.2.1	Overloop	214
5.2.2	Meetschijf	217

5.2.3	Rotameter	218
	Samenvatting	219
5.3	Wrijvingsdrukval over een rechte leiding	220
5.3.1	Het concept van de frictiefactor	220
5.3.2	Het gebruik van de frictiefactor	223
5.3.3	De analogie met warmte- en stofoverdracht	228
	Samenvatting	229
5.4	Drukvalberekeningen voor pijpleidingsystemen	229
	Samenvatting	234
5.5	Drukval over een gepakt bed	234
	Samenvatting	238
5.6	Laminaire stroming van Newtonse vloeistoffen	238
	Samenvatting	246
5.7	Laminaire stroming van niet-Newtonse vloeistoffen	247
5.7.1	Het Ostwald-De Waele model	248
5.7.2	Bingham-vloeistoffen	251
5.7.3	Casson-vloeistoffen	252
5.7.4	Visco-elastische vloeistoffen	253
	Samenvatting	253
5.8	De algemene bewegingsvergelijkingen	254
5.8.1	Stromingsleer en fysische transportverschijnselen	254
	Samenvatting	256
5.8.2	De continuïteitsvergelijking	256
	Samenvatting	257
5.8.3	De Navier-Stokes-vergelijkingen	258
	Samenvatting	263
5.8.4	Computational Fluid Dynamics	264
	Samenvatting	266
6	UITGEWERKTE TENTAMENOPGAVEN	267
	Adviezen	267
6.1	Opgaven	267
6.2	Oplossingen	275
SYMBOLENLIJST		<i>binnenzijde omslag voor en achter</i>
VOORBEELDENLIJST		295
TREFWOORDENLIJST		297

1 Balansen

1.1 De balans: recept en vorm

Het vak Fysische Transportverschijnselen houdt zich bezig met het transport van de drie belangrijkste grootheden massa, warmte en impuls in een willekeurig (fysisch of chemisch) proces. Vooral de toevoeging “in een willekeurig proces” geeft een van de belangrijkste kenmerken van het vakgebied aan: Fysische Transportverschijnselen is bovenal een ingenieursvak met een breed scala van toepassingen..

Toch is het vak ook fundamenteel, aangezien het de basis legt voor veel andere technologische disciplines, zoals reactorkunde en scheidingsprocessen. Fysische Transportverschijnselen is dan ook een “must” voor iedere technoloog. Maar ook natuurkundigen, chemici, bouwkundigen, materiaalkundigen en werktuigbouwkundigen hebben belang bij een goede beheersing van het vak Fysische Transportverschijnselen.

Het terrein dat het vak Fysische Transportverschijnselen en de discipline fysische technologie bestrijken is enorm uitgebreid. Je kunt aan de ene kant denken aan allerlei processen in de (petro-)chemische industrie, de stroming van één of meerdere fasen door een transportleiding, het gedrag van belletjes in een bioreactor of het vullen van een gietmal met vloeibaar metaal. Aan de andere kant is het vakgebied veel dichterbij huis ook van belang, bijvoorbeeld bij de warmteafgifte van een radiator en de daarmee gepaard gaande luchtstromingen in de kamer. Gelukkig zijn zulke zeer verschillende processen goed te begrijpen en te beschrijven met een beperkt aantal regels.

Verschijnselen van stroming en warmte- en impulsoverdracht worden in dit vakgebied beschreven in termen van continuümgrootheden, met slechts hier en daar een verwijzing naar moleculaire processen. Op deze manier wordt de basis gelegd voor de *fysische technologie*: de expertise van het ontwerpen en verbeteren van processen waarin of waarmee stoffen worden getransporteerd, omgezet, bewerkt of vormgegeven. Daarbij is het van belang de essentie van een proces te doorgronden, dat wil zeggen de essentiële stappen bij het transport van massa, warmte en/of impuls te identificeren. Het transport van die drie grootheden kan overigens op precies dezelfde manier beschreven worden. Fysische Transportverschijnselen legt de basis voor de fysische technologie en reikt de gereedschappen aan. Dit boek handelt over die gereedschappen.

Fysische Transportverschijnselen is allereerst een vak van *balansen* en *concepten* waarmee fysische processen en verschijnselen beschreven kunnen worden. Vaak gaat

het in het vak om afwijkingen van evenwichtstoestanden en de dan optredende *weerstanden* voor warmte- en stoftransport. Het gaat dan ook vaak om het kwantitatief beschrijven van oorzaak en gevolg. Met behulp van deze nu nog wat duistere begrippen is het mogelijk om de bovengenoemde en nog talloze andere processen, globaal maar ook zeer gedetailleerd te begrijpen en te beschrijven. In dit hoofdstuk zal het begrip *balans* uitgebreid aan de orde komen.

Voor de beschrijving van het transport van een willekeurige grootheid, bijvoorbeeld de overdracht van zuurstof uit luchtbelletjes naar de vloeistoffase in een fermentor of het transport van warmte door een ovenwand, is de balans een onmisbaar stuk gereedschap. Het basisprincipe van de balans is het boekhouden van een gekozen (fysische) grootheid. Dit concept is van bijzonder belang bij het werken met zogenaamde behouden grootheden; dit zijn grootheden (zoals massa en energie) die gedurende het proces niet verloren gaan, maar behouden blijven.

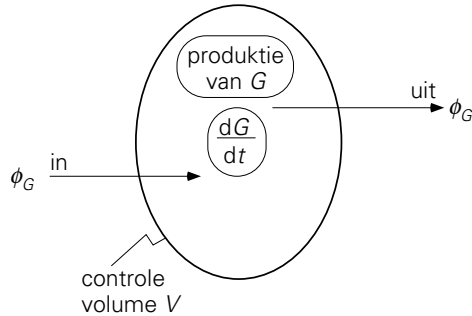
Het vak fysische transportverschijnselen gaat dan ook bovenal over het “boekhouden” van de drie behouden fysische grootheden: massa, energie en impuls. Dit boekhouden kan over een groot volume gaan: het gaat dan om *macrobalansen*; balansen kunnen echter ook over heel kleine volumes opgesteld worden: dan wordt gesproken van *microbalansen*, die informatie op lokale schaal opleveren.

Het *algemene recept* voor het opstellen van een balans luidt als volgt:

- 1) Maak een schets van de situatie.
- 2) Kies de grootheid G die getransporteerd of overgedragen wordt in het te beschouwen proces.
- 3) Kies het “*controlevolume*” V waarover informatie verkregen moet worden.
- 4) Ga na of en, zo ja, waardoor de hoeveelheid van G in het controlevolume V gedurende een kort tijdsinterval Δt verandert.

De hoeveelheid van G in V kan op allerlei manieren veranderen. Deze dienen systematisch te worden nagegaan en, indien van toepassing, meegenomen in de balans. Zo kan er, gedurende Δt , stroming van G van buiten V naar binnen plaatsvinden. Hierdoor neemt de hoeveelheid G in V toe. Er kan ook stroming van G van binnen V naar buiten plaatsvinden. Uiteraard neemt hierdoor de totale hoeveelheid van G in V af. We spreken van “*stroom in*” respectievelijk “*stroom uit*”. Uiteraard kan er gedurende het interval Δt ook *productie* van G binnen V plaatsvinden: hierdoor neemt de totale hoeveelheid G in V toe. Negatieve productie (= vernietiging, consumptie, annihilatie) is ook mogelijk, bijvoorbeeld als G staat voor de massa van een reactant die in een chemisch proces wordt omgezet.

Bedenk dat G niet noodzakelijkerwijs de grootheid is waarin je geïnteresseerd bent. Om de temperatuur T te berekenen moet een thermische-energiebalans opgesteld worden en dan zal voor G de thermische energie U gekozen worden.



Figuur 1.1.

De algemene opzet voor een balans is nu als volgt (zie ook figuur 1.1):

$$\begin{aligned}
 & \text{de verandering van } G \text{ in } V \text{ gedurende } \Delta t = \\
 & = G \text{ (op tijdstip } t + \Delta t) \text{ in } V - G \text{ (op tijdstip } t) \text{ in } V \\
 & = \text{hoeveelheid van } G \text{ die van buiten } V \text{ naar binnen stroomt gedurende } \Delta t \\
 & \quad - \text{hoeveelheid van } G \text{ die van binnen } V \text{ naar buiten stroomt gedurende } \Delta t \\
 & \quad + \text{nettohoeveelheid van } G \text{ die in } V \text{ wordt geproduceerd gedurende } \Delta t
 \end{aligned}$$

Vanaf nu wordt het symbool ϕ gebruikt om een stroom aan te geven. In plaats van stroom spreekt men ook wel van *debiet*. De letter P staat voor de nettoproductie per tijdseenheid. Met behulp van deze notatie kan, indien Δt erg klein is, de hoeveelheid van G die “in” stroomt (= van buiten naar binnen) *gedurende* het interval Δt geschreven worden als het product van de stroom “in” *op tijdstip* t en het tijdsinterval Δt :

$$\phi_{G,\text{in}}(t) \cdot \Delta t$$

Op dezelfde manier geldt voor de stroom van G van binnen naar buiten en voor de netto productie gedurende Δt :

$$\phi_{G,\text{uit}}(t) \cdot \Delta t \quad \text{en} \quad P_G(t) \cdot \Delta t$$

De balans wordt daarmee

$$G^{\text{in}} V(t + \Delta t) - G^{\text{in}} V(t) = \phi_{G,\text{in}} \cdot \Delta t - \phi_{G,\text{uit}} \cdot \Delta t + P_G \cdot \Delta t \quad (1.1)$$

Beide zijden van vergelijking (1.1) delen door Δt en de limiet $\Delta t \rightarrow 0$ nemen levert

$$\frac{d}{dt} G^{\text{in}} V = \phi_{G,\text{in}} - \phi_{G,\text{uit}} + P_G \quad (1.2)$$

Vergelijking (1.2) is de basisvorm van de balans en heet dan ook de *balansvergelijking*. Het linkerlid staat dus voor de verandering van de totale hoeveelheid G in V , terwijl in het rechterlid de drie manieren staan waardoor de totale hoeveelheid G in V kan veranderen. Het linkerlid wordt ook wel aangeduid met “instationaire term”.

Als voor een bepaalde grootheid G de netto-productie *altijd* gelijk aan nul is, bijvoorbeeld bij massa, dan vereenvoudigt vergelijking (1.2) zich tot

$$\frac{d}{dt} G^{\text{in } V} = \phi_{G,\text{in}} - \phi_{G,\text{uit}} \quad (1.3)$$

Vergelijking (1.3) heet een *behoudswet*. Sommige grootheden zijn inderdaad behouden, d.w.z. worden alleen getransporteerd en/of gedistribueerd.

Het is zeer belangrijk om in te zien dat de stromen “in” en “uit” daadwerkelijk *door* het oppervlak van V heen moeten gaan.

Voorbeeld 1.1. *Inwonertal*

Het inwonertal van Nederland is op 31 december van een bepaald jaar bekend. Beschrijf een methode om op basis van dit cijfer het aantal inwoners van Nederland vast te stellen op 31 december van het jaar daarop zonder dan opnieuw alle inwoners te tellen.

Dé manier om het inwonertal bij te houden is gebruik te maken van de balansmethode. Gebruik daartoe het algemene recept: met het aantal inwoners als de grootheid waarvoor de balans opgesteld moet worden, moet eerst het controlevolume gekozen worden. In dit geval is dat Nederland (zie figuur 1.2). Voor de stromen in en uit moeten alle grenzen van het controlevolume beschouwd worden. Dat betekent dat niet alleen de externe grenzen met België, Duitsland en de Noordzee, maar dat ook singuliere punten als de luchthavens bij het opstellen van de balans betrokken moeten worden. De grenzen moeten hier werkelijk in de klassieke zin van ‘het passeren van de douane’ opgevat worden (het vervallen van de controle aan de binnengrenzen van de Europese Unie is hier niet aan de orde). Tenslotte moet ook de ‘productie’ niet vergeten worden: alle geboorten en alle sterfgevallen moeten opgeteld worden tot de nettoproductieterm in de balansvergelijking (1.2).



Figuur 1.2.

Bedenk dat een dergelijke balansmethode ook werkt als het gaat om het aantal inwoners van Nederland met leeftijd tussen 20 en 30 jaar. Wel dient daarbij dan

extra zorg te worden besteed aan alle termen in het rechterlid van vergelijking (1.2): bij de stromen in en uit zou dan gewerkt kunnen worden met de fractie 20- tot 30-jarigen in die stromen, en voor de nettoproductieterm moeten zowel de mensen verantwoord worden die 20 en 30 worden in het betrokken tijdvak Δt als de mensen in deze leeftijdscategorie die komen te overlijden. \square

Samenvatting

De balans is een onmisbaar instrument bij het beschrijven van en rekenen aan transportverschijnselen. Bij het opstellen van de balans zijn *vier regels* van belang:

- 1) maak een schets van de situatie;
- 2) kies de grootheid waarvoor een balans moet worden opgesteld;
- 3) kies het volume waarover de balans wordt opgesteld;
- 4) de vorm van elke balans is:

$$\frac{d}{dt} = \text{in} - \text{uit} + \text{productie}$$

1.2 De massabalans

1.2.1 De totale-massabalans en de componentbalans

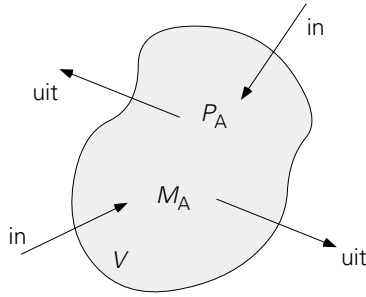
Als eerste zal nu de balans voor de totale massa M behandeld worden. De totale massa is typisch een behouden grootheid: massa produceren of vernietigen kan bezwaarlijk (behalve bij kernreacties); wel is transport mogelijk. Daarom geldt voor M een behoudswet. Vergelijking (1.3) wordt dan door substitutie van M voor G

$$\frac{d}{dt} M = \phi_{m,\text{in}} - \phi_{m,\text{uit}} \quad (1.4)$$

Vervolgens komt nu de massabalans voor een van de componenten van een meer-componentensysteem aan de orde. Het boekhouden gaat nu over de massa M_A van stof A die in het “controlevolume” V aanwezig is. De algemene vorm van zo’n componenten-massabalans luidt:

$$\frac{d}{dt} M_A = \phi_{m,A,\text{in}} - \phi_{m,A,\text{uit}} + P_A \quad (1.5)$$

Vanwege de productieterm P_A kunnen we, anders dan bij vergelijking (1.4), in geval van vergelijking (1.5) niet spreken van een behoudswet. De eenheden van de diverse variabelen in vergelijking (1.5) bieden een handig hulpmiddel bij de controle naar de juistheid van de opgestelde balans. In vergelijking (1.5) hebben alle vier termen de eenheid kg/s (of mol/s).



Figuur 1.3.

Concentratie

Het is vaak veel handiger om de balans op te stellen met behulp van concentraties. Verderop zal veelvuldig blijken, dat het concentraties en concentratieverschillen zijn die transporten bepalen en niet zozeer de grootheid (de massa in dit geval) zelf. In het algemeen is een concentratie gedefinieerd als de grootheid G per volume-eenheid. Anders gezegd, de concentratie (g) van G is de hoeveelheid van G in het volume V gedeeld door de grootte van het volume V ; in formule:

$$g = \frac{G}{V} \quad (1.6)$$

De concentratie van de totale massa is equivalent met de dichtheid ρ , terwijl de concentratie van een component aangegeven wordt met een c . Dus voor een multi-componentensysteem bestaande uit de stoffen A, B, ... enz.

$$\begin{aligned} c_A &= \text{massa van A per eenheid van volume} = M_A/V \\ c_B &= \text{massa van B per eenheid van volume} = M_B/V \\ &\text{enz.} \end{aligned} \quad (1.7)$$

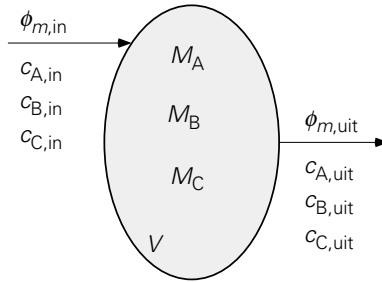
Uiteraard geldt voor de totale (massa) concentratie ρ

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M_A + M_B + \dots}{V} = c_A + c_B + \dots \quad (1.8)$$

Om de massabalans op te stellen voor stof A die aanwezig is in de reactor van figuur 1.4, is het uiterst raadzaam consequent het algemene recept te hanteren zoals dat aan het eind van paragraaf 1.1 is samengevat:

- 1) schets (zie figuur 1.4)
- 2) grootheid \rightarrow massa M_A van A in reactor
- 3) controlevolume \rightarrow gehele reactorvolume V
- 4) ga systematisch na of, waardoor en hoe M_A in V verandert.

Het gaat er dus om systematisch na te gaan welke effecten bij kunnen dragen aan de toe- of afname van M_A in V . Die effecten komen dan in het rechterlid van de balansvergelijking te staan, terwijl links dM_A/dt staat. De verschillende termen aan de



Figuur 1.4.

rechterkant worden in dit geval:

stroom in: er gaat een massastroom $\phi_{m,in}$ de reactor in, die component A bevat met een concentratie $c_{A,in}$.

$$\begin{aligned}
 \phi_{m,A,in} &= \text{massa van A die per tijdseenheid } V \text{ instroomt} \\
 &= (\text{volume dat per tijdseenheid } V \text{ instroomt}) \times (\text{massa van A die} \\
 &\quad \text{zich in een volume-eenheid van de ingaande stroom bevindt}) \\
 &= \phi_{v,in} \cdot c_{A,in} \qquad (1.9)
 \end{aligned}$$

Het symbool $\phi_{v,in}$ staat voor het volumedebiet dat de reactor ingaat, d.w.z. het aantal kubieke meters dat per seconde de reactor instroomt.

stroom uit: hiervoor geldt op analoge wijze

$$\phi_{m,A,uit} = \phi_{v,uit} \cdot c_{A,uit} \qquad (1.10)$$

productie: ten gevolge van een chemische reactie

$$P_A = r_A \cdot V \qquad (1.11)$$

waarbij r_A de productie van A per volume-eenheid is (in $\text{mol}/\text{m}^3\text{s}$). Vanwege deze chemische-reactieterm is het handiger om alle concentraties in deze balansvergelijking uit te drukken in mol/m^3 .

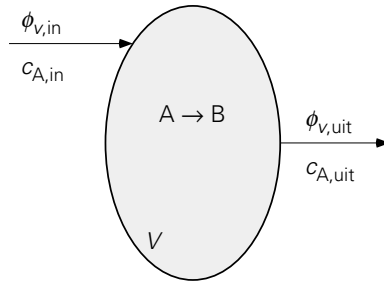
De massabalans voor A in de reactor luidt dus

$$\frac{d}{dt} M_A = \phi_{m,A,in} - \phi_{m,A,uit} + P_A \qquad (1.12)$$

en is met behulp van de vergelijkingen (1.7), (1.9), (1.10) en (1.11) te schrijven als

$$V \frac{d}{dt} c_A = \phi_{v,in} \cdot c_{A,in} - \phi_{v,uit} \cdot c_{A,uit} + r_A V \qquad (1.13)$$

Vergelijking (1.13) is equivalent met



Figuur 1.5.

Dit levert voor de productie

$$P_A = \phi_{V,uit} \cdot c_{A,uit} - \phi_{V,in} \cdot c_{A,in} = 10^{-3} \cdot 20 - 10^{-3} \cdot 100 = -8,0 \cdot 10^{-2} \text{ kg/s} \quad \square$$

Het is overigens ook mogelijk om in plaats van met concentraties met *massafracties* te werken. Deze worden genoteerd met een x en zijn gedefinieerd als de fractie van de stof onder beschouwing t.o.v. de totale massa:

$$x_A = \frac{M_A}{M} \quad (1.16)$$

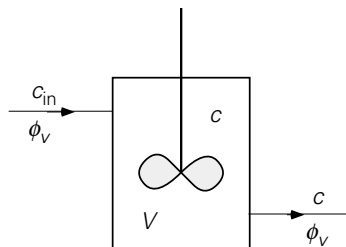
De massabalans voor stof A luidt in termen van de massafractie

$$\frac{d}{dt} (Mx_A) = \phi_{m,in} \cdot x_{A,in} - \phi_{m,uit} \cdot x_{A,uit} + P_A \quad (1.17)$$

Merk op dat x geen dimensie heeft, dat wil zeggen: de eenheid is kg/kg.

Voorbeeld 1.3. Kokosolie in een ideaal geroerde tank (CSTR)

Een ideaal geroerde tank is een apparaat waarin de samenstelling van z'n inhoud overal in de gehele tank hetzelfde is. Dit betekent tevens dat de samenstelling van de vloeistof die uit de tank stroomt op elk tijdstip gelijk is aan die van de inhoud van de tank. In plaats van over een *ideaal geroerde tank* spreekt men ook wel van een perfect geroerde tank (in het Engelse vakjargon heet zoiets een *Continuous Stirred Tank Reactor*: een CSTR).



Figuur 1.6.

Bekijk nu de situatie van figuur 1.6 voor een ideaal geroerde tank. Er stroomt voortdurend een volumedebiet ϕ_V aan palmptienolie de tank in en ook de tank weer uit. De tank is geheel gevuld met palmptienolie. Het gaat hier dus om een stationaire

situatie: debieten en concentraties veranderen niet in de tijd. Op tijdstip $t = 0$ wordt echter aan de ingang plotseling overgeschakeld op kokosolie. De vraag is nu: hoe verandert de concentratie van palmpittenolie aan de uitgang als functie van de tijd.

Om het antwoord te vinden moet weer, volgens het recept, een massabalans opgesteld worden, dit keer voor de palmpittenolie:

- 1) schets \rightarrow zie figuur 1.6
- 2) grootheid \rightarrow massa palmpittenolie $\rightarrow M_P = V \cdot c_P$
- 3) controlevolume \rightarrow volume van de tank V
- 4) massabalans (voor de periode $t \geq 0$):

$$V \frac{d}{dt} c_P = \phi_V \cdot 0 - \phi_V c_P + 0 \quad (1.18)$$

Vanaf $t = 0$ is de ingangconcentratie c_{in} van de palmpittenolie immers gelijk aan nul. Vergelijking (1.18) kan vervolgens herschreven worden als

$$\frac{d}{dt} c_P = -\frac{\phi_V}{V} c_P \quad (1.19)$$

Vergelijking (1.19) moet nu worden opgelost met als randvoorwaarde

$$t = 0 \rightarrow c_P = c_{P0}$$

Dit levert

$$c_P(t) = c_{P0} \cdot \exp\left(-\frac{\phi_V}{V} \cdot t\right) \quad (1.20)$$

□

Samenvatting

De algemene vorm van de massabalans voor stof A is

$$\frac{d}{dt} M_A = \phi_{m,A,in} - \phi_{m,A,uit} + P_A$$

Deze balans kan ook in termen van concentraties geschreven worden. De concentratie van de massa van stof A wordt genoteerd met c_A en is in SI-eenheden het aantal kilogrammen (of molen) A per m^3 .

Het gebruik van concentraties zorgt er o.a. voor dat de stromen en de productie van A gemakkelijker te koppelen zijn aan resp. het totale massadebiet en de totale massa in het volume.

1.2.2 Chemische reactoren

In voorbeeld 1.3 was er geen productieterm. In veel chemische reactoren zal er juist wel sprake zijn van productie (en/of consumptie) van een of meer componenten. Dan moet om de balans te kunnen oplossen de productieterm gespecificeerd worden. Deze werkwijze zal geïllustreerd worden voor een *eerste-orde chemische reactie*. De omzetting van stof A per volume-eenheid, aangeduid met r_A , is dan recht evenredig met de concentratie c_A van A:

$$r_A = -k_r c_A \quad (1.21)$$

Hierin is k_r de *eerste-orde reactiesnelheidsconstante* (eenheid: s^{-1}). Daarmee geldt dan $P_A = r_A \cdot V$. Verschillende typen reactoren zullen nu de revue passeren.

Ladingsgewijs bedreven chemische reactor

Beschouw eerst een ideaal geroerde tank die *ladingsgewijs* wordt bedreven; dat wil zeggen: de tank wordt in één keer gevuld en er stroomt daarna niets in of uit. Hierin wordt A volgens een eerste-orde reactie omgezet. Zo'n reactor wordt ook wel *batchreactor* genoemd. Aangezien er geen stromen in en uit de reactor zijn, luidt de massabalans voor stof A

$$\frac{d}{dt} c_A = 0 - 0 + r_A = r_A = -k_r c_A \quad (1.22)$$

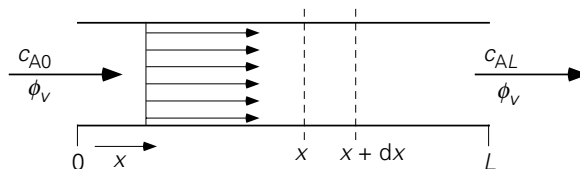
Door gebruik te maken van de randvoorwaarde $c_A(t=0) = c_{A0}$ wordt de oplossing van vergelijking (1.22) verkregen

$$\frac{c_A}{c_{A0}} = \exp(-k_r t) \quad (1.23)$$

Zoals te verwachten viel, loopt de hoeveelheid A in de tank terug met de tijd. Er wordt immers geen A aan de tank toegevoerd, terwijl er wel A omgezet wordt.

Ideale buisreactor

Nu is de beurt aan de ideale buisreactor waarin zich een chemische reactie afspeelt. In zo'n ideale buisreactor beweegt elk vloeistofpakketje even snel als alle andere. Men spreekt van *propstroom*. In ons geval is de reactie weer eerste-orde (met reactiesnelheidsconstante k_r), waarbij A omgezet wordt in B. Als nu gegeven is dat de concentratie van stof A aan het begin van de reactor c_{A0} is, wat is dan de concentratie aan het uiteinde van de buis?



Figuur 1.7.

Voor de eenvoud wordt diffusie (wordt pas later behandeld) verwaarloosd en wordt aangenomen dat de vloeistof (ondanks de reactie) een constante dichtheid heeft. De concentratie van A zal, als gevolg van de chemische reactie, in de richting van de uitgang steeds verder afnemen. Om dit verloop (het *profiel*) te vinden dient als controlevolume een klein maar willekeurig stukje van de buis tussen x en $x + dx$ beschouwd te worden (zie figuur 1.7). De toestand wordt weer stationair verondersteld, d.w.z. dat er geen veranderingen in de tijd zijn. Door het linkerzijvlak komt er een massastroom van A het controlevolume binnen ter grootte $\phi_V c_A$. Hierbij moet natuurlijk wel de concentratie genomen worden zoals die op positie x is. Deze wordt weergegeven met $c_A|_x$. Door het rechterzijvlak stroomt er $\phi_V c_A$ uit, maar nu met c_A zoals die op positie $x + dx$ is: $c_A|_{x+dx}$. De massabalans over het plakje luidt dan

$$0 = \phi_V c_A|_x - \phi_V c_A|_{x+dx} - k_r c_A \cdot A dx \quad (1.24)$$

waarin A het oppervlak is van de dwarsdoorsnede van de buis (loodrecht op de stromingsrichting). Merk op dat het linkerlid van de vergelijking nul is, daar de toestand stationair is verondersteld; er kan dus in het controlevolume geen sprake zijn van verandering van de aanwezige massa van A. Vergelijking (1.24) is door delen door dx en het nemen van de limiet $dx \rightarrow 0$ om te schrijven in

$$\phi_V \cdot \frac{dc_A}{dx} = -k_r \cdot A \cdot c_A \quad (1.25)$$

De oplossing hiervan is, dankzij de randvoorwaarde $c_A(x=0) = c_{A0}$:

$$\frac{c_A(x)}{c_{A0}} = \exp\left(-\frac{k_r \cdot A \cdot x}{\phi_V}\right) \quad (1.26)$$

Daarmee wordt de concentratie aan de uitgang

$$\frac{c_A(L)}{c_{A0}} = \exp\left(-k_r \frac{AL}{\phi_V}\right) = \exp\left(-k_r \frac{V}{\phi_V}\right) \quad (1.27)$$

waarin $V = A \cdot L$ het volume van de buisreactor is.

De hierboven geschetste techniek van het nemen van een balans over een klein plakje waarvan de afmeting naar nul gaat (limiet $dx \rightarrow 0$), leidt tot de zogenaamde *micro-balans* (vergelijking 1.25) en levert gedetailleerde informatie op (namelijk *profielen*). Bedenk dat het niet altijd nodig is om dergelijke gedetailleerde informatie te hebben.

Continue ideaal geroerde tank met chemische reactie

Voorbeeld 1.3 zal nu uitgebreid worden met een chemische reactie. De reactor bevat een katalysator B die zorgt voor afbraak van stof A. De katalysator kan de reactor niet uit. Aanvankelijk wordt de reactor doorstroomd met een debiet ϕ_V dat geen A bevat. Vanaf tijdstip $t = 0$ bevat de inkomende stroom ϕ_V een concentratie c_{A0} aan A. Hoe verloopt de concentratie van A in de uitgang van de reactor als functie van de tijd?

Wederom moet een massabalans opgesteld worden en de resulterende differentiaalvergelijking opgelost. Als grootheid dient de massa A; het controlevolume is het volume van de reactor. De balans luidt

$$\frac{d}{dt} V c_A = \underbrace{\phi_V c_{A0}}_{\text{in}} - \underbrace{\phi_V c_A}_{\text{uit}} - \underbrace{k_r c_A V}_{\text{productie}} \quad (1.28)$$

Met de beginvoorwaarde dat op $t = 0$ geldt $c_A = 0$ (de reactor bevatte aanvankelijk geen A), is de oplossing van vergelijking (1.28):

$$c_A(t) = \frac{\phi_V/V}{\phi_V/V + k_r} c_{A0} \left[1 - \exp \left\{ - \left(\frac{\phi_V}{V} + k_r \right) t \right\} \right] \quad (1.29)$$

Merk op dat zowel ϕ_V/V als k_r de eenheid s^{-1} heeft. In de stationaire situatie geldt de limietsituatie (d.w.z. $t \rightarrow \infty$) van vergelijking (1.29)

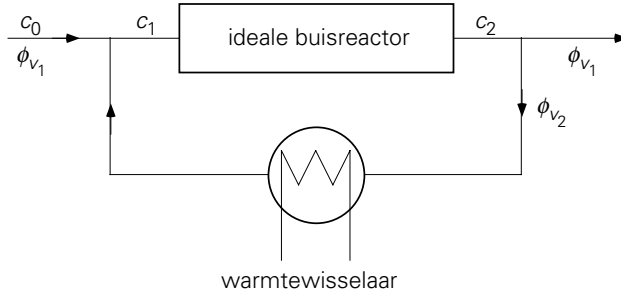
$$c_A = \frac{1}{1 + k_r \frac{V}{\phi_V}} c_{A0} \quad (1.30)$$

Dit resultaat is zowel uit vergelijking (1.29) als uit vergelijking (1.28) (immers stationair $\rightarrow d/dt = 0$) direct af te leiden.

Bij vergelijking van de prestaties van de ideale buisreactor en de ideaal geroerde tank, met beide dezelfde ϕ_V/V -verhouding, is onmiddellijk duidelijk dat de omzetting in de buisreactor veel groter is. Dit wordt veroorzaakt door een verschil in de gemiddelde concentratie $\langle c_A \rangle$ tussen beide reactoren. Voor een reactant die weggeageert geldt: in de buisreactor is $\langle c_A \rangle$ altijd groter dan c_{AL} , terwijl in de tankreactor $\langle c_A \rangle$ juist altijd gelijk is aan de concentratie aan de uitgang. Aangezien bij een eerste-orde reactie de omzetting evenredig is met de concentratie, zal dus de omzetting in de buisreactor groter zijn.

Voorbeeld 1.4. *Ideale buisreactor met recirculatie*

Ter oefening bezien we nu een praktijksituatie waarin een deel van de uitgaande stroom wordt teruggevoerd, opnieuw de reactor in. Dit wordt gedaan om een betere benutting te krijgen van een reactant, als in een enkele passage slechts een deel van die reactant wordt omgezet; op deze wijze kan dus bespaard worden op de lengte van de reactor. Bij een exotherme reactie (veel voorkomend) kan bovendien de temperatuur aan de ingang op deze manier ‘goedkoop’ opgekrikt worden met een gedeelte van de warme uitgangsstroom (de meeste reacties verlopen immers sneller bij een hogere temperatuur). In andere gevallen wordt in de recirculatieleiding vaak een warmtewisselaar geplaatst waarmee een deel van de reactiewarmte onttrokken kan worden aan de stroming en elders gebruikt. In figuur 1.8 is deze situatie geschetst.



Figuur 1.8.

In de ideale buisreactor wordt een stof A omgezet volgens een eerste-orde chemische reactie. Het volumedebiet van toe- en afvoer is ϕ_{V1} . Om de reactiewarmte af te voeren wordt een volumedebiet ϕ_{V2} door een warmtewisselaar gerecirculeerd. De concentratie van stof A in de toevoerstroam ϕ_{V1} is c_0 . De concentratie die de reactor binnenstroomt, wordt aangeduid als c_1 , terwijl de concentratie die de reactor verlaat, c_2 heet. Voor de eenvoud wordt aangenomen dat de reactie enkel in de reactor plaatsvindt. Het volume van de reactor is V en de toestand is stationair. Hoe groot is c_2 t.o.v. c_0 ?

Er gaat een debiet $\phi_{V1} + \phi_{V2}$ de reactor in met een concentratie c_1 . Uit de bespreking van de ideale buisreactor volgt nu dat de uitgangskoncentratie gegeven wordt door:

$$\frac{c_2}{c_1} = \exp\left(-k_r \frac{V}{\phi_{V1} + \phi_{V2}}\right) \quad (1.31)$$

Hieruit dient c_1 nog geëlimineerd te worden. Dit kan door een massabalans over de T-verbinding in de leiding vóór de buisreactor op te stellen:

$$0 = \phi_{V1}c_0 + \phi_{V2}c_2 - (\phi_{V1} + \phi_{V2})c_1 \quad (1.32)$$

Hieruit is c_1 op te lossen (gebruik hierbij de afkorting $a \equiv \frac{\phi_{V2}}{\phi_{V1} + \phi_{V2}}$):

$$c_1 = \frac{\phi_{V1}c_0 + \phi_{V2}c_2}{\phi_{V1} + \phi_{V2}} = (1 - a)c_0 + ac_2 \quad (1.33)$$

Combineren van vergelijking (1.31) en (1.33) levert voor c_2 op:

$$\frac{c_2}{c_0} = \frac{1 - a}{\exp\left((1 - a)k_r \frac{V}{\phi_{V1}}\right) - a} \quad (1.34)$$

Twee limietgevallen verdienen een nadere beschouwing:

1) $a = 0$, d.w.z. geen recirculatie: voor deze situatie volgt uit vergelijking (1.34):

$$\frac{c_2}{c_0} = \exp\left(-k_r \frac{V}{\phi_{V1}}\right) \quad (1.35)$$

Uiteraard is dit het resultaat van de ideale buisreactor van vergelijking (1.27): er is nu immers geen recirculatie.

- 2) $a \rightarrow 1$, d.w.z. dat de recirculatiestroom veel groter is dan ϕ_{v1} . Nu is, met behulp van de reeksontwikkeling $e^x \rightarrow 1 + x$ voor $x \rightarrow 0$, vergelijking (1.34) te benaderen met:

$$\frac{c_2}{c_0} = \frac{1}{1 + k_r \frac{V}{\phi_{v1}}} \quad (1.36)$$

Dit is juist weer het resultaat eerder gevonden (zie vergelijking (1.30)) voor een ideaal geroerde tank in de stationaire situatie! \square

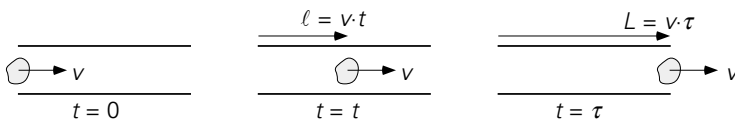
Samenvatting

In deze paragraaf zijn enkele chemische reactoren bekeken. In alle gevallen is gerekend met een eerste-orde reactie. Steeds kwam het er op neer voor een geschikt controle-volume de massabalans op te stellen. Als het controlevolume een dun plakje van een buisreactor is, met dikte dx , volgt uit de differentiaalvergelijking het concentratieprofiel $c(x)$ binnen de reactor. Om een (concentratie)profiel af te leiden moet je dus een microbalans over een dun plakje opstellen.

Achtereenvolgens zijn behandeld: de ladingsgewijs bedreven chemische reactor (ook wel batchreactor genoemd), de ideale buisreactor (met propstroom), de ideaal geroerde tank (ook wel CSTR genoemd) en de ideale buisreactor met recirculatie.

1.2.3 Verblijftijdspreiding

Beschouw een klein vloeistofpakketje dat, als onderdeel van een volume stroom ϕ_v , een buis met volume V , doorsnede A en lengte L instroomt. Op $t = 0$ is het pakketje (of elementje) juist binnen de pijp. Op het tijdstip t heeft het een weg ter lengte $\ell = v \cdot t$ afgelegd (zie figuur 1.9); derhalve is het elementje op het tijdstip $\tau = L/v$ aan het uiteinde van de buis. De tijd τ wordt de *verblijftijd* genoemd.



Figuur 1.9.

Als alle pakketjes in een stroming dezelfde snelheid $v = \phi_v/A$ hebben, dan geldt voor alle pakketjes dezelfde verblijftijd τ :

$$\tau = \frac{L}{v} = \frac{AL}{\phi_v} = \frac{V}{\phi_v} \quad (1.37)$$

Een stroming, waarin alle vloeistofpakketjes (of elementjes) dezelfde verblijftijd hebben, wordt *propstroom* genoemd (zie ook figuur 1.7).

In werkelijkheid is meestal geen sprake van één verblijftijd voor alle pakketjes. Niet alle pakketjes hebben immers dezelfde snelheid en/of leggen dezelfde weg af. In een buis is in werkelijkheid de snelheid op de as het grootst en aan de wand zelfs nul; propstroom is daarmee een ideaal type stroming dat eigenlijk nooit voorkomt. In een geroerd vat volgen de pakketjes juist door de menging sterk verschillende paden. Het resultaat is dat in alle apparaten in werkelijkheid, behalve van een *gemiddelde verblijftijd* τ gegeven door

$$\tau = \frac{V}{\phi_V} \quad (1.38)$$

ook altijd sprake is van een *verblijftijdspreiding*.

Kennis van deze verblijftijdspreiding kan van belang zijn voor een goede procesvoering. Denk bijvoorbeeld aan de sedimentatie (het “uitzakken”) van vaste deeltjes in een rioolzuiveringsinstallatie. De verblijftijd van *alle* pakketjes vloeistof moet voldoende lang zijn om de deeltjes erin alle uit te laten zakken.

Er zijn meerdere functies waarmee de verblijftijdspreiding kan worden getypeerd; deze zullen hieronder successievelijk besproken worden. Steeds wordt gebruik gemaakt van de dimensieloze tijd $\theta = t/\tau$, met τ gedefinieerd door vergelijking (1.37).

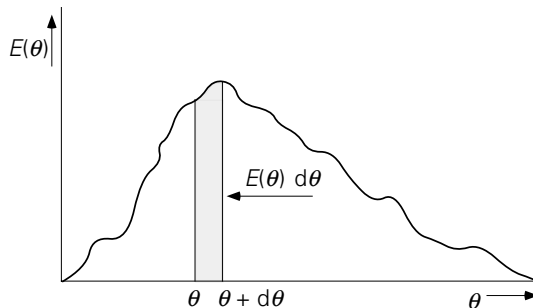
De *E*-functie

Allereerst kan de verblijftijdspreiding getypeerd worden met behulp van de “leeftijden” van de pakketjes als deze de uitgang passeren: zo wordt de leeftijdsverdeling verkregen, die de *E*-functie wordt genoemd. De definitie van de *E*-functie (“exit age function”) is

$$E(\theta)d\theta = \text{volumefractie van de uitgaande stroom} \quad (1.39)$$

met dimensieloze verblijftijd tussen θ en $\theta + d\theta$

Het recept om $E(\theta)$ te bepalen zou zijn: neem een monster uit de uitgaande stroom en bepaal hierin de fractie met een dimensieloze verblijftijd tussen θ en $\theta + d\theta$. Doe dit voor alle θ 's tussen 0 en ∞ . Een voorbeeld van een *E*-functie is gegeven in figuur 1.10.



Figuur 1.10.

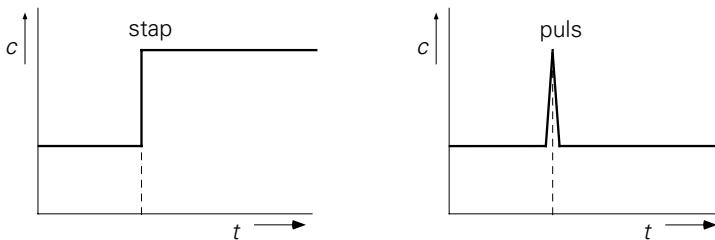
Merk op dat de integraal van $E(\theta)$ over het interval $[0, \infty)$ gelijk aan 1 is. Dit is in te zien door te bedenken dat

$$\int_0^{\theta_1} E(\theta) d\theta = \text{volumefractie van het monster van de uitgaande stroom met verblijftijd } \theta \leq \theta_1 \quad (1.40)$$

Elk pakketje dat via de uitstroom het apparaat verlaat, heeft slechts een eindige verblijftijd in het apparaat gekend. Daarom geldt volgens vergelijking (1.40)

$$\int_0^{\infty} E(\theta) d\theta = 1 \quad (1.41)$$

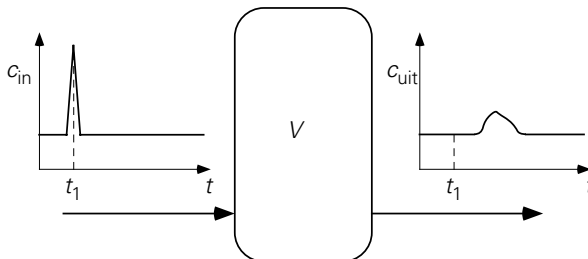
Om in praktische situaties de verblijftijdspreading te vinden die bij een bepaalde tank hoort, worden vaak experimenten uitgevoerd waarin men een bekende verandering in de ingangsstroom van het apparaat aanbrengt en de respons aan de uitgang hierop meet. De twee meest voorkomende ingangsveranderingen zijn de “*stap*” en de “*puls*” (zie figuur 1.11). Bij de *stap* wordt op zeker tijdstip een plotselinge verandering van de concentratie van een merkstof in de ingangsstroom aangebracht. Vervolgens wordt dit nieuwe signaal gehandhaafd. Bij de *puls* is er sprake van een korte “injectie” van merkstof in de ingangsstroom (deze injectie is zo klein dat de stroom ϕ_v vrijwel constant blijft).



Figuur 1.11.

De C -functie

De C -functie geeft de tijdsafhankelijke respons aan de uitgang op een *puls* tracer-materiaal aan de ingang. Deze werkwijze is in figuur 1.12 weergegeven.



Figuur 1.12.

De totale hoeveelheid in het apparaat geïnjecteerd materiaal A bedraagt M_A . Hieruit volgt voor de concentratie c_0 van A in het apparaat als juist alle A er in zit: $M_A = Vc_0$ (V is het volume van het apparaat). De C -functie is nu gedefinieerd als

$$C(\theta) = \frac{c_{\text{uit}}}{c_0} \quad (1.42)$$

c_{uit} is de concentratie van de tracer in de uitgang. De massabalans (voor $t > 0$) voor het tracer materiaal (aangegeven met index tr) in het apparaat luidt

$$\frac{d}{dt} M_{\text{tr}} = \phi_V c_{\text{tr},\text{in}} - \phi_V c_{\text{tr},\text{uit}} = -\phi_V c_{\text{tr},\text{uit}} \quad (1.43)$$

In vergelijking (1.43) is gebruikt dat $c_{\text{tr},\text{in}} = 0$, aangezien het tracer materiaal in een puls op $t = 0$ is ingebracht en de balans is opgesteld voor $t > 0$.

Ook de integraal van de C -functie van 0 tot ∞ is gelijk aan 1. Het bewijs hiervan volgt uit de integratie van het linkerlid van vergelijking (1.43) van $t = 0$ tot $t \rightarrow \infty$:

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} M_{\text{tr}} dt = [M_{\text{tr}}]_0^{\infty} = -M_{\text{tr}}(t=0) = -Vc_0 \quad (1.44)$$

immers $M_{\text{tr}}(t \rightarrow \infty) = 0$: alle tracer komt ooit het apparaat uit. Combineren van vergelijking (1.43) en (1.44) levert

$$Vc_0 = \int_0^{\infty} \phi_V c_{\text{tr},\text{uit}} dt \quad (1.45)$$

Herschikken geeft

$$1 = \int_0^{\infty} \frac{\phi_V}{V} \frac{c_{\text{tr},\text{uit}}}{c_0} dt = \int_0^{\infty} C(\theta) d\theta \quad (1.46)$$

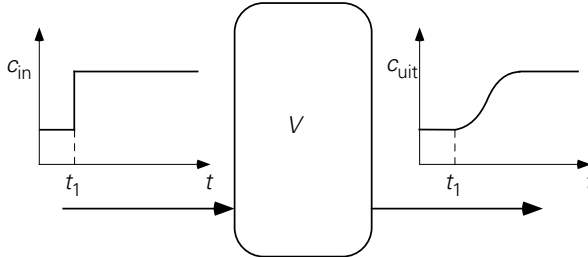
Het recept om de C -functie te bepalen is dus: volg het concentratieverloop van een tracer aan de uitgang van het apparaat nadat er een trerpuls aan de ingang is gegeven. Hierbij is dus bekend, dat aan voorwaarde (1.46) voldaan moet worden.

Aangetoond kan worden dat in een stationaire situatie de E - en C -functies gelijk zijn: $C(\theta) = E(\theta)$. Desondanks blijft de interpretatie van beide functies wezenlijk verschillend.

De F-functie

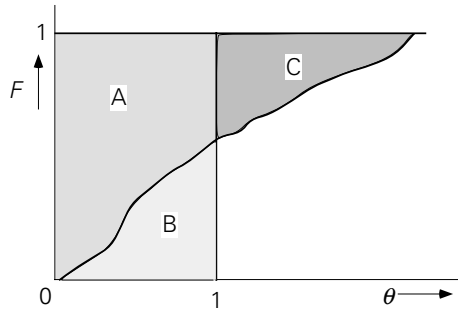
De F -functie is een andere functie die gevonden kan worden door de concentratie in de uitgang als functie van de tijd te volgen. De F -functie representeert de respons van de uitgang op een stap-functie aan de ingang (zie figuur 1.13):

$$F(\theta) = \frac{c_{\text{uit}}}{c_0} \quad (1.47)$$



Figuur 1.13.

De F -functie heeft een aantal vaste karakteristieken. Zo gaat $F \rightarrow 1$ als $t \rightarrow \infty$: uiteindelijk wordt de concentratie in de uitgang immers gelijk aan die in de ingang. In termen van θ : $F(\theta) \rightarrow 1$ voor $\theta \rightarrow \infty$. In figuur 1.14 is een mogelijke vorm van de F -functie geschetst.



Figuur 1.14.

Er is nog een kenmerk dat elke F -functie heeft: de gearceerde oppervlakten B en C in figuur 1.14 zijn even groot. Dit is als volgt in te zien: de massabalans voor het tracer materiaal in het apparaat luidt ($t \geq 0$)

$$\frac{d}{dt} M_{\text{tr}} = \phi_V c_0 - \phi_V c_{\text{uit}} \quad (1.48)$$

Integratie voor $t = 0 \rightarrow \infty$ levert

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} M_{\text{tr}} \cdot dt = \int_0^{\infty} \phi_V (c_0 - c_{\text{uit}}) dt \quad (1.49)$$

Het linkerlid van de vergelijking is weer te herschrijven als

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} M_{\text{tr}} \cdot dt = [M_{\text{tr}}]_0^{\infty} = V c_0 \quad (1.50)$$

Immers op $t = 0$ bevat het apparaat nog geen tracer, dus $M_{\text{tr}}(t = 0) = 0$. Combinatie van de vergelijkingen (1.49) en (1.50) levert

$$1 = \int_0^{\infty} \frac{\phi_V}{V} \left(1 - \frac{c_{\text{uit}}}{c_0}\right) dt = \int_0^{\infty} (1 - F(\theta)) d\theta \quad (1.51)$$

Met andere woorden: de som van de oppervlakten A en C uit figuur 1.14 is exact gelijk aan 1: $A + C = 1$. Tevens geldt dat de som van de oppervlakten A en B gelijk aan 1 is (het vierkant AB heeft immers beide zijden met lengte 1). De conclusie is dus dat de oppervlakten B en C gelijk zijn onafhankelijk van de vorm van de F -functie.

De fysische betekenis van de F -functie is dat F gelijk is aan de volumefractie in de uitgaande stroom met een dimensieloze verblijftijd kleiner dan θ . Uit de definitie van C en E volgt dat $C(\theta)d\theta$ de volumefractie in de uitgaande stroom is met verblijftijd tussen θ en $\theta + d\theta$; derhalve geldt:

$$F(\theta) = \int_0^{\theta} C(\theta') d\theta' = \int_0^{\theta} E(\theta') d\theta' \quad (1.52)$$

De tweede gelijkheid is slechts geldig in een stationaire toestand. Uit vergelijking (1.52) volgt de uiterst praktisch bruikbare relatie:

$$C(\theta) = \frac{dF(\theta)}{d\theta} \quad (1.53)$$

Hieronder zullen nu een aantal voorbeelden van F - en C -functies gegeven worden voor enkele geselecteerde reactoren waarbij de F - en C -functies berekend kunnen worden. Bedenk daarbij dat deze functies de verblijftijdspreiding typeren, zodat de chemische reacties buiten beschouwing kunnen en zelfs moeten blijven. De verblijftijdspreiding in een bepaald apparaat wordt immers uitsluitend door de stromingstoestand bepaald. In veel andere dan de hieronder geselecteerde situaties zullen de F - en C -functies uitsluitend gemeten kunnen worden. Door de aldus gemeten responsies te vergelijken met een set berekende functies kan dan de stromings- of mengtoestand in de onderzochte tank grofweg gekarakteriseerd worden als ideaal gemengd, propstroom, een aantal ideaal gemengde tanks in serie, of een combinatie van propstroom eb tanks.

Voorbeeld 1.5. F - en C -functies voor een ideaal geroerde tank

Bereken de F - en C -functies voor de ideaal geroerde tank, die gevuld is met palmpittenolie. Zie figuur 1.6 en voorbeeld 1.3.

Bij $t = 0$ wordt bij de inlaat overgeschakeld op kokosolie. Dit is dus een “stap” in de concentratie aan de ingang. Om de F - en C -functies te bepalen moet de concentratie van de tracer (de kokosolie) aan de uitgang bepaald worden als functie van de tijd. De massabalans voor kokosolie luidt:

$$V \frac{d}{dt} c_{\text{kokos}} = \phi_V (c_{\text{kokos,in}} - c_{\text{kokos,uit}}) \quad (1.54)$$

met als randvoorwaarde $c_{\text{kokos}} = 0$ bij $t = 0$.

De concentratie van de kokosolie aan de tankinlaat voor $t \geq 0$ wordt aangeduid met c_0 . Bedenk bovendien dat de concentraties in het vat en aan de uitgang aan elkaar gelijk zijn (ideaal geroerd vat!). Met weglating van de aanduiding “kokos” verandert vergelijking (1.54) in:

$$\frac{d}{dt} c_{\text{uit}} = \frac{\phi_V}{V} (c_0 - c_{\text{uit}}) \quad \text{voor alle } t \geq 0 \quad (1.55)$$

met als randvoorwaarde $c_{\text{uit}} = 0$ op $t = 0$.

De oplossing van (1.55) is:

$$\frac{c_{\text{uit}}}{c_0} = \left[1 - \exp\left(-\frac{\phi_V}{V} t\right) \right] \quad (1.56)$$

Met $\tau = V/\phi_V$ en $\theta = t/\tau$ volgt voor de F -functie:

$$F(\theta) = \frac{c_{\text{uit}}}{c_0} = 1 - \exp(-\theta) \quad (1.57)$$

en daarmee, dankzij vergelijking (1.53), voor de C -functie:

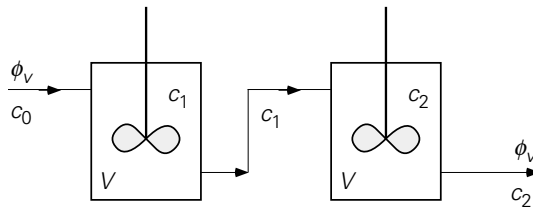
$$C(\theta) = \frac{dF}{d\theta} = \exp(-\theta) \quad (1.58)$$

□

Voorbeeld 1.6. F - en C -functie voor 2 ideaal geroerde tanks in serie

De tanks hebben gelijke volumes V . Bij $t = 0$ wordt bij constant blijvende volumestroom aan de inlaat plotseling overgeschakeld van $c = 0$ op $c = c_0$ (stap-methode).

Om de F - en C -functies van het systeem van deze twee tanks te bepalen moet de concentratie bij de uitlaat bekend zijn, dus $c_2(t)$.



Figuur 1.15.

Massabalans tank 1:

$$V \frac{dc_1}{dt} = \phi_V (c_0 - c_1) \quad \text{met } c_1(0) = 0 \quad (1.59)$$

Massabalans tank 2:

$$V \frac{dc_2}{dt} = \phi_V (c_1 - c_2) \quad \text{met } c_2(0) = 0 \quad (1.60)$$

De oplossing van balans (1.59) luidt:

$$c_1 = c_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{\phi_V}{V} t\right) \right] \quad (1.61)$$

Vergelijking (1.60) is niet zo eenvoudig op te lossen, omdat c_1 een functie van de tijd is. Na substitutie van c_1 uit vergelijking (1.61) in balans (1.60) is de oplossing van (1.60):

$$c_2(t) = c_0 \left[1 - \left(1 + \frac{\phi_V}{V} t\right) \cdot \exp\left(-\frac{\phi_V}{V} t\right) \right] \quad (1.62)$$

met de definities: $\tau = 2V/\phi_V$ (het totale volume van dit “apparaat” is van belang: $2V$) en $\theta = t/\tau$ volgt voor de F -functie:

$$F(\theta) = \frac{c_2(\theta)}{c_0} = 1 - (1 + 2\theta) \exp(-2\theta) \quad (1.63)$$

en voor de C -functie:

$$C(\theta) = \frac{dF}{d\theta} = 4\theta \exp(-2\theta) \quad (1.64)$$

□

Voorbeeld 1.7. F -functie bij een propstroom

De ideale propstroomreactor is al besproken in §1.2.2 (zie figuur 1.7). Nu gaat het om de F -functie van de ideale propstroom, zonder dat er een chemische reactie plaatsvindt. In een propstroom hebben alle vloeistofpakketjes de snelheid v . Nu wordt vanaf $t \geq 0$ een merkstof geïnjecteerd in de inlaatstroom (concentratie c_0). De verblijftijd voor elk vloeistofelement is:

$$\tau = \frac{V}{\phi_V} = \frac{L}{\phi_V} \quad (1.37)$$

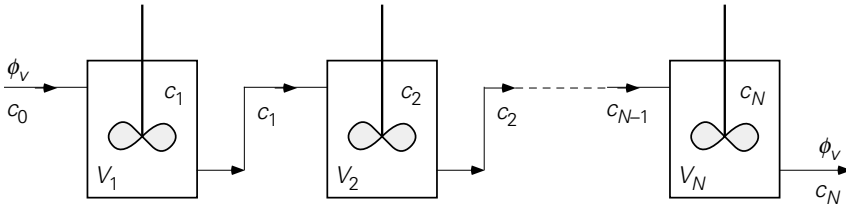
Er is dus geen sprake van een verblijftijdspreiding: voor $t < \tau$ komt er geen merkstof uit, terwijl voor $t \geq \tau$ de merkstof er uitkomt met nog steeds concentratie c_0 . Voor de F -functie geldt dus:

$$F(\theta) = 0 \quad \text{voor } \theta < 1 \quad (1.65)$$

$$F(\theta) = 1 \quad \text{voor } \theta \geq 1 \quad \square$$

1.2.4 Tanks in serie

De ideale buisreactor van §1.2.2 (figuur 1.7) is te benaderen door een aantal ideaal geroerde tanks in serie te zetten en stationair te bedrijven (zie figuur 1.16).



Figuur 1.16.

Na de eerste tank is de concentratie immers (zie §1.2.2)

$$\frac{c_1}{c_0} = \left(1 + k_r \frac{V_1}{\phi_V}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{k_r V / \phi_V}{N}\right)^{-1} \quad (1.66)$$

Hierbij is gebruikt dat $V_1 = V_2 = \dots = V/N$ (N is het aantal tanks in serie, V het volume van alle tanks tezamen). De concentratie c_1 is de concentratie in de ingaande stroom van tank 2, dus geldt er

$$\frac{c_2}{c_1} = \left(1 + \frac{k_r V / \phi_V}{N}\right)^{-1} \quad (1.67)$$

of met behulp van vergelijking (1.66)

$$\frac{c_2}{c_0} = \left(1 + \frac{k_r V / \phi_V}{N}\right)^{-2} \quad (1.68)$$

Uiteindelijk wordt voor de concentratie na de N -de tank gevonden:

$$\frac{c_N}{c_0} = \left(1 + \frac{k_r V / \phi_V}{N}\right)^{-N} \quad (1.69)$$

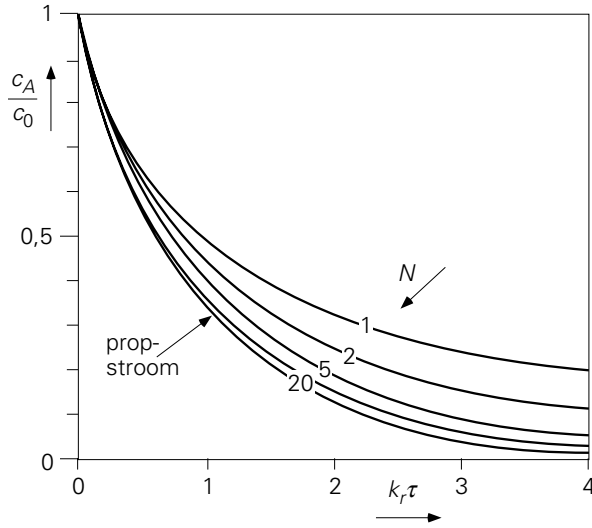
Voor grotere N zullen de tankreactoren in serie steeds meer gaan lijken op de ideale buisreactor. Uiteindelijk in de limiet $N \rightarrow \infty$ zijn beide systemen hetzelfde, immers

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k_r \tau}{N}\right)^{-N} = \exp(-k_r \tau) \quad (1.70)$$

In figuur 1.17 zijn voor een aantal waarden van N de curves van c_N als functie van $k_r \tau$ weergegeven met $\tau = V/\phi_V$. Tevens is het resultaat van de ideale propstroomreactor afgebeeld.

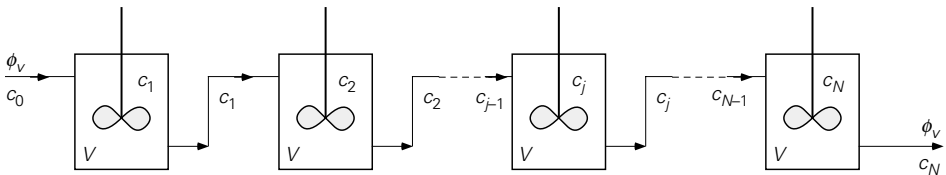
Voorbeeld 1.8. F - en C -functies voor N ideaal geroerde tanks in serie

Voor het bepalen van de F - en C -functies van N tanks in serie dienen N massa-balansen beschouwd te worden zonder een bronterm voor de chemische reactie(s) maar wel tijdsafhankelijk. In figuur 1.18 is de situatie geschetst.



Figuur 1.17.

De tanks hebben alle een gelijk volume V . Op $t = 0$ wordt bij constant blijvende volumestroom aan de inlaat plotseling overgeschakeld van $c = 0$ op $c = c_0$ (stapmethode). Om de F -functie te bepalen moet de concentratie bij de uitlaat bekend zijn, dus $c_N(t)$.



Figuur 1.18.

Massabalans tank 1:

$$V \frac{dc_1}{dt} = \phi_v(c_0 - c_1) \quad \text{met } c_1(0) = 0 \quad (1.71)$$

Massabalans tank j :

$$V \frac{dc_j}{dt} = \phi_v(c_{j-1} - c_j) \quad \text{met } c_j(0) = 0 \quad (1.72)$$

of:

$$\frac{dc_j}{dt} - \frac{N}{\tau} c_{j-1} + \frac{N}{\tau} c_j = 0 \quad \text{waarin } \tau = \frac{NV}{\phi_v} \quad (1.73)$$

De oplossing van (1.73) wordt gegeven door:

$$c_j = \exp\left(-\frac{Nt}{\tau}\right) \int_0^t \frac{N}{\tau} c_{j-1} \exp\left(\frac{Nt}{\tau}\right) dt \quad (1.74)$$

In principe is uitwerking hiervan voor een willekeurige tank in de serie niet moeilijk, maar wel bewerkelijk. De concentratie van al zijn voorgangers moet immers eerst uitgerekend worden. Vergelijking (1.74) wordt door substitutie van $\zeta = \exp(Nt/\tau)$ en delen door c_0 herschreven tot:

$$\frac{c_j}{c_0} = \frac{1}{\zeta} \int_1^{\zeta} \frac{c_{j-1}}{c_0} d\zeta \quad (1.75)$$

Uitwerking voor 1 tank is simpel:

$$\frac{c_1}{c_0} = \frac{1}{\zeta} \int_1^{\zeta} d\zeta = \frac{\zeta - 1}{\zeta} = 1 - \frac{1}{\zeta} \quad (1.76)$$

Voor 2 tanks is dat ook niet moeilijk:

$$\begin{aligned} \frac{c_2}{c_0} &= \frac{1}{\zeta} \int_1^{\zeta} \frac{c_1}{c_0} d\zeta = \frac{1}{\zeta} \int_1^{\zeta} \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) d\zeta = \frac{1}{\zeta} (\zeta - 1 - \ln \zeta) \\ &= 1 - \frac{1}{\zeta} (1 + \ln \zeta) \end{aligned} \quad (1.77)$$

Voor 3 tanks is het al bewerkelijker en levert dit:

$$\begin{aligned} \frac{c_3}{c_0} &= \frac{1}{\zeta} \int_1^{\zeta} \frac{c_2}{c_0} d\zeta = \frac{1}{\zeta} \int_1^{\zeta} \left[1 - \frac{1}{\zeta} (1 + \ln \zeta)\right] d\zeta \\ &= \frac{\zeta - 1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta} \ln \zeta - \frac{1}{2\zeta} (\ln \zeta)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{\zeta} \left[(1 + \ln \zeta) + \frac{1}{2} (\ln \zeta)^2 \right] \end{aligned} \quad (1.78)$$

Voor N tanks zet dit zich gelukkig voort en geldt:

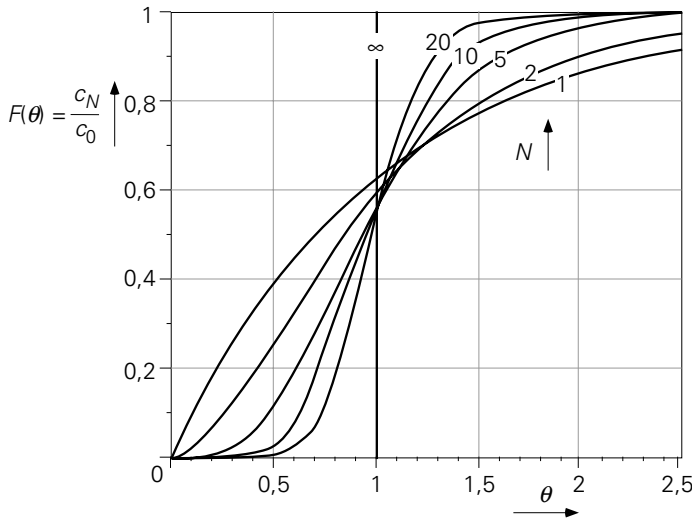
$$\frac{c_N}{c_0} = 1 - \frac{1}{\zeta} \left[1 + \ln \zeta + \frac{1}{2} (\ln \zeta)^2 + \dots + \frac{1}{(N-1)!} (\ln \zeta)^{N-1} \right] \quad (1.79)$$

De F -functie volgt door in vergelijking (1.79) $\theta = t/\tau$ en $\zeta = \exp(N\theta)$ te substitueren:

$$F(\theta) = 1 - \exp(-N\theta) \left[1 + N\theta + \frac{1}{2} (N\theta)^2 + \dots + \frac{1}{(N-1)!} (N\theta)^{N-1} \right] \quad (1.80)$$

De C -functie volgt uit $dF(\theta)/d\theta$.

In figuur 1.19 staat $F(\theta)$ uit als functie van θ ; daaruit blijkt dat $F(\theta)$ bij toenemende N steeds steiler gaat lopen. Bij oneindig grote N is er geen spreiding in verblijftijd meer: de F -functie wordt gelijk aan die voor een buis met propstroom. Dan moet overigens wel het volume van elke tank oneindig klein zijn, anders is de verblijftijd zelf oneindig. \square



Figuur 1.19.

Samenvatting

In een apparaat dat doorstroomd wordt, doen niet alle pakketjes even lang over de reis van in- naar uitgang. In dit verband zijn de begrippen verblijftijd, gemiddelde verblijftijd, dimensieloze (verblijf)tijd en verblijftijdspreiding ingevoerd. Kennis van deze zgn. verblijftijdspreiding is van belang om het apparaat goed te kunnen bedienen.

Er zijn drie functies besproken om de verblijftijdspreiding weer te geven:

de E -functie: geeft de verblijftijden van de delen van een monster uit de uitgaande stroom op één tijdstip weer;

de C -functie: geeft de reactie van de uitgang op een *puls* aan de ingang;

de F -functie: geeft de reactie van de uitgang op een *stap* aan de ingang.

Er is een verband afgeleid tussen de F - en C -functies:

$$C(\theta) = \frac{dF}{d\theta}$$

Voor een systeem bestaande uit een of meer ideale reactoren of ideaal geroerde tanks zijn uitdrukkingen af te leiden voor de F -functie van het systeem.

1.3 De energiebalans

1.3.1 De totale-energiebalans

In § 1.2 stond massa centraal. In deze paragraaf zal de aandacht gericht worden op energie. Energie manifesteert zich in vele soorten die veelal zonder meer in elkaar omgezet kunnen worden, al gaat daarbij altijd wel energie in de vorm van warmte ‘verloren’. Onderstaande tabel geeft een overzicht van de meest voorkomende vormen van energie:

Vorm	Concentratie van energie (uitgedrukt per massaeenheid)
kinetische energie	$\frac{1}{2}v^2$
potentiële energie	gz
inwendige energie	u
druk-energie	p/ρ
enthalpie	$h (= u + p/\rho)$

We gebruiken kleine letters voor *energieconcentraties* per eenheid van massa (in J/kg). Hoofdletters geven de totale energieinhoud (in J) weer (van een specifieke soort) van het beschouwde systeem.

De *inwendige energie* (ook wel aangeduid met *thermische energie*) staat voor

- (i) de thermische bewegingen die de individuele moleculen uitvoeren volgens hun vrijheden van translatie, rotatie (ook inwendig) en vibratie, en
- (ii) de korte-dracht moleculaire wisselwerking tussen de moleculen onderling. Daarmee hangt de inwendige energie ook af van de vorm en de samenstelling van de moleculen. Inwendige energie kan dus opgevat worden als een stoffeigenschap.

Bij omstandigheden van constant volume geldt $du = c_v dT$ en wordt voor u vaak $c_v T$ ingevuld (zie intermezzo hieronder). Voor vloeistoffen (vanwege hun geringe thermische uitzettingscoëfficiënt) geldt in goede benadering $c_v = c_p$ en daarmee $u = c_p T$.

Intermezzo

Volgens de eerste hoofdwet van de thermodynamica geldt (voor een systeem van constante samenstelling en massa):

$$dU = TdS - pdV$$

De entropie, S , is op te vatten als een functie van $\{T, V\}$. Daarmee kan voor dS geschreven worden:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV$$

Dus voor de verandering van de totale inwendige energie, U , kunnen we ook schrijven:

$$dU = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left[T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T - p \right] dV$$

De eerste term in het rechterlid representeert de soortelijke warmte bij constant volume, gedefinieerd als

$$c_v = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V$$

Voor een systeem met constant volume draagt uiteraard alleen de soortelijke warmte bij aan verandering van de inwendige energie:

$$dU = c_v dT$$

Bedenk dat dit voor een systeem met constant volume een exacte uitdrukking is, ook al is de soortelijke warmte in principe een functie van bijvoorbeeld de temperatuur. In integrale vorm wordt de verandering van de inwendige energie, wederom bij constant volume, gegeven door:

$$U - U_{\text{ref}} = \int_{T_{\text{ref}}}^T c_v dT \approx c_v (T - T_{\text{ref}}) \quad \text{voor constante } V$$

De eerste gelijkheid is weer exact, terwijl bij de tweede de benadering is toegepast, dat de soortelijke warmte in eerste orde constant is als T niet te veel verschilt van de referentietemperatuur T_{ref} . Voor de inwendige energieconcentratie, u , kunnen we dus als benadering gebruiken: $u = c_v T$. Als er sprake is van een fase-overgang, is voorzichtigheid geboden. De latente warmte (ΔH) moet dan ook in beschouwing genomen worden.

De p/ρ -term uit tabel 1.3 verdisconteert een soort ‘potentiële’ energie en duidt op het vermogen van een gas of vloeistof om te stromen onder invloed van drukverschillen. In termen van energie is drukenergie om te zetten in bijvoorbeeld kinetische energie: een vloeistof (of gas) gaat stromen onder invloed van drukverschillen in de vloeistof (of het gas). Van nature gaat deze stroming van de gebieden met hoge druk naar die met een lage druk.

Ook in de eerste hoofdwet van de thermodynamica is al te zien, dat druk een soort energieconcentratie is: $dU = TdS - pdV$. De verandering van de totale inwendige energie (dU) van het systeem is voor een deel veroorzaakt door de arbeidsterm, pdV .

Met andere woorden, p kan opgevat worden als een energieconcentratie per volume eenheid, en p/ρ dus als energieconcentratie per massa eenheid. Door gebruik te maken van intensieve variabelen (T, p, \dots) en extensieve variabelen (U, S, V, \dots) kan in de thermodynamica eenvoudig afgeleid worden dat geldt: $U = TS - PV$. Dus voor de inwendige energie per massa-eenheid vinden we $u \equiv \frac{U}{M} = Ts - \frac{p}{\rho}$, waarmee de interpretatie van p/ρ bevestigd wordt.

De totale energie van een systeem is de som van de inwendige, potentiële en kinetische energie. In termen van de energieconcentraties, kunnen we schrijven

$$e = u + gz + \frac{1}{2} v^2 \quad (1.81)$$

Bedenk dat de energieconcentraties bepaald zijn ten opzichte van een geschikt gekozen referentieniveau. Bij balansen gaat het echter doorgaans om *veranderingen* in energieconcentraties; referentieniveaus doen er dan niet toe. Wel moet men dan bedacht zijn op fase-overgangen en de daarmee samenhangende energieveranderingen. Verder worden alle energieconcentraties bij voorkeur uitgedrukt in de eenheid J/kg; dat geldt ook voor de kinetische en potentiële energie.

In de meeste toepassingen van “Transportverschijnselen” is bovenstaande lijst afdoende. Waar chemische reacties een rol spelen, moet evenwel ook de *chemische enthalpie* beschouwd worden die de opbouw van een molecuul uit zijn atomen en de interacties van kernen en elektronen in rekening brengt. Zo komt bij verbranding van methaan chemische enthalpie vrij in de vorm van warmte: de energie opgeslagen in een mol CH_4 komt beschikbaar, daar de producten CO_2 en H_2O energetisch gezien lager op de energieladder staan. Ofschoon in reactoren de chemische-enthalpieveranderingen vaak dominant zijn, zal deze energievorm hier verder buiten beschouwing blijven.

Energie is een *behouden grootheid*, net als massa. Dit is een belangrijk uitgangspunt in de natuurkunde. Voor de balansvergelijking betekent dit, dat de productieterm identiek aan nul is, mits echt de totale energie beschouwd wordt – dus inclusief soorten energie die niet opgenomen zijn in vergelijking (1.81). Als we dus de totale energie van een systeem met gegeven volume beschouwen, kan de energie-inhoud enkel veranderen door in- of uitstroom van energie door de grensvlakken van dit volume:

$$\frac{dE}{dt} = \text{energiestroom in} - \text{energiestroom uit}$$

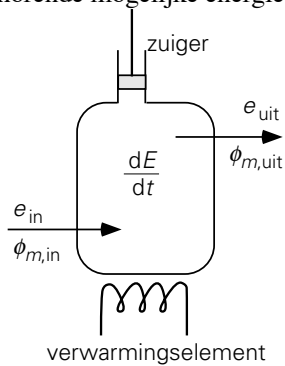
Er is dus geen productieterm in deze vergelijking opgenomen, omdat energie niet uit het niets geproduceerd kan worden. Bovenstaande vergelijking is, geheel vergelijkbaar met vergelijking (1.3) voor massa, een *behoudswet*.

Bij het opstellen van een energiebalans voor een specifieke *energiesoort* (of een

combinatie van soorten) is het belangrijk om niet alleen het transport van de gekozen energiesoort in rekening te brengen zoals in de energiebehoudswet hierboven, maar ook de omzetting (de productie) van de gekozen soort naar andere soorten (en vice versa) op te nemen in de balans. De algemene vorm van een balans voor een specifieke energiesoort heeft weer dezelfde structuur als de componenten-massabalans, vergelijking (1.5):

$$\frac{d}{dt} = \text{stroom in} - \text{stroom uit} + \text{productie} \quad (1.82)$$

We zullen ons nu concentreren op de totale energie van een systeem, gedefinieerd als de som van de inwendige, de potentiële en de kinetische energie: $E = U + E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$, met bijbehorende energieconcentratie $e = u + gz + \frac{1}{2} v^2$. In figuur 1.20 is een controle-volume geschetst met de bijbehorende mogelijke energiestromen.



Figuur 1.20.

De instationaire term (die aangeeft hoe snel de totale energie in V verandert) is:

$$\frac{d}{dt} E$$

Deze term is met behulp van de energieconcentratie e (per massa-eenheid) te schrijven als

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} (\rho V e)$$

Er zijn nu meerdere vormen van *energiestromen* mogelijk:

- Een energiestroom doordat er *massa* het controlevolume in (of uit) stroomt. Deze massa bezit zelf al energie. De massastroom draagt de energie als het ware “onder zijn arm” mee. Analoog aan de transporttermen ‘in’ en ‘uit’ van component A in de vergelijkingen (1.9) en (1.10) schrijven we de transporttermen ‘in’ en ‘uit’ van energie (in J/s) ook als het product van een debiet en een concentratie, nl. als massadebiet (in kg/s) maal energieconcentratie (J/kg):

$$\phi_{m,\text{in}} \cdot e_{\text{in}} \quad \text{en} \quad \phi_{m,\text{uit}} \cdot e_{\text{uit}}$$

- Een energiestroom doordat er *warmte* (bijvoorbeeld via een verwarmingselement) het controlevolume instroomt (of uitstroomt met behulp van een koelelement). Met deze energiestroom is geen massastroom gemoeid. We noteren deze stroom met

$$\phi_q$$

- Een energiestroom, ook weer over de randen van het controlevolume heen, als gevolg van *arbeid* verricht per tijdseenheid door of op de ‘buitenwereld’. Die arbeid kan van buitenaf verricht worden op het controlevolume door middel van een zuiger, roeder, pomp of compressor, dus via zuigerstangen of draaiende assen. Maar ook kan arbeid verricht door de buitenwereld op het controlevolume doordat een massastroom over een van de oppervlakken van het controlevolume naar binnen stroomt tegen de daar heersende druk in. Omgekeerd kan er vanuit het controlevolume ook arbeid verricht worden op de buitenwereld, door middel van een zuiger of een turbine (die uiteindelijk bijvoorbeeld een maalmachine aandrijft of via een dynamo elektrische stroom levert) of door een massastroom die door een van de oppervlakken van het controlevolume naar buiten stroomt tegen de buitendruk in. De totale (netto) ‘stroom’ als gevolg van *arbeid* (op en/of vanuit het controlevolume) wordt genoteerd als

$$W \text{ (van ‘Work’)}$$

Tenslotte is er nog *energieproductie* (per tijdseenheid) P_e in het inwendige van V mogelijk. Dan kan het bijvoorbeeld gaan om warmteproductie zoals in een chemische reactor als gevolg van een exotherme chemische reactie of in een metalen draad ten gevolge van een elektrische stroom. Eigenlijk is de aanwezigheid van de productieterm P_e het gevolg van de zelfgekozen beperking dat E niet alle vormen van energie bevat maar slechts de inwendige, potentiële en kinetische energie. Zonder die beperking zou er immers geen productieterm zijn: het is onmogelijk om energie uit het niets te produceren. *Energie is immers een behouden grootheid.*

Door de bovenstaande uitdrukkingen voor de verschillende bijdragen te substitueren in vergelijking (1.82) komen we tot de algemene vorm van de totale-energiebalans

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} (\rho V e) = \phi_{m,\text{in}} e_{\text{in}} - \phi_{m,\text{uit}} e_{\text{uit}} + \phi_q + W + P_e \quad (1.83)$$

In bovenstaande beschrijving van de productieterm is een belangrijk begrip geïntroduceerd: *energie-dissipatie*. Dissipatie staat voor de bevinding dat de omzetting van de ene energievorm naar de andere van nature altijd in één richting verloopt. De nuttige vormen, zoals kinetische, potentiële en (voor een deel, zie verderop) druk-energie, eindigen uiteindelijk allemaal als inwendige energie. Algemeener gezegd: dissipatie is het omzetten van (voor ons mensen meestal nuttige) ‘mechanische energie’ naar ‘thermische energie’ (dat wil zeggen naar chaotische kinetische energie van individuele moleculen). Het mechanisme voor dissipatie is *wrijving*.

Voorbeeld 1.9. *De stuiterende bal*

Als een tennisbal van een zekere hoogte boven de vloer losgelaten wordt, verliest de bal potentiële energie op zijn weg naar beneden en wint kinetische energie. Tegelijkertijd wordt er een beetje energie van de bal over gedragen naar de lucht, die ook gaat stromen en dus kinetische energie verkrijgt. Bovendien wordt energie gedissipeerd ten gevolge van wrijving met de omringende lucht. Bij de ‘botsing’ met de vloer wordt de kinetische energie omgezet in ‘elastische energie’ en er wordt een deel gedissipeerd. Na de stuit is de elastische energie weer omgezet in kinetische energie die op haar beurt weer overgaat in potentiële energie (en weer voor een klein deel in de lucht ‘verdwijnt’) totdat alle kinetische energie op is en de bal zijn nieuwe ‘hoogste’ punt bereikt. Uiteraard herhaalt de cyclus zich nog enkele keren voordat de bal uiteindelijk stil op de vloer ligt en alle kinetische en potentiële energie gedissipeerd is. \square

Als we ons beperken tot de energiesoorten uit de tabel aan het begin van deze paragraaf, is de productieterm P_e in de energievergelijking gelijk aan nul. Verder is het handig om de energiestroom als gevolg van arbeid, W , op te splitsen in twee delen: een deel ϕ_w dat staat voor de arbeid als gevolg van de werking van zuigers, roerders, pompen, compressoren en/of turbines, en een deel dat te maken heeft met massastromen die het controlevolume in- en/of uitstromen en dan arbeid verricht tegen de ter plaatse heersende druk. Als er een ‘pakketje’ fluïdum met een snelheid v in een tijdsinterval dt door een oppervlak A het controlevolume instroomt, dan werkt er gedurende dt een kracht pA op het pakketje, dat zelf over een afstand $dx = vdt$ verplaatst. Hiermee is dus een energie $dE = Fdx = pAvdt$ gemoeid. In de balans hebben we de energie *per tijdseenheid* nodig (d.w.z. het vermogen) en die is juist gelijk aan pAv , ofwel aan $\phi_V p = \phi_m p/\rho$. Deze opsplitsing van W in twee termen luidt dan in formulevorm:

$$W = \phi_w + \phi_m \left[\left. \frac{p}{\rho} \right|_{in} - \left. \frac{p}{\rho} \right|_{uit} \right] \quad (1.84)$$

Daarmee is vervolgens energiebalans (1.83) te herschrijven tot

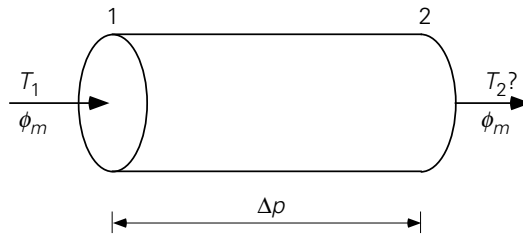
$$\frac{dpeV}{dt} = \phi_{m,in} \left(e + \frac{p}{\rho} \right)_{in} - \phi_{m,uit} \left(e + \frac{p}{\rho} \right)_{uit} + \phi_q + \phi_w \quad (1.85)$$

In veel gevallen, vooral als de druk in het beschouwde systeem (in een goede benadering) als constant beschouwd mag worden en zeker als faseovergangen aan de orde zijn, is het handig de som $e + p/\rho$ te schrijven als de *enthalpie* (per massa-eenheid) h .

De arbeid (per tijdseenheid), ϕ_w , is nu dus enkel arbeid verricht door de buitenwereld als gevolg van zuigers, pompen en dergelijke.

Voorbeeld 1.10. *Transport van water door een buis*

Er vloeit een constante stroom water door een horizontale ronde buis ten gevolge van een aangelegd drukverschil. Dit drukverschil bedraagt $2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ en het massadebiet 1 kg/s . De buis heeft een (constante) diameter van 2 cm en is goed geïsoleerd. Het water heeft een dichtheid van 10^3 kg/m^3 , een soortelijke warmte bij constant volume van $4,2 \cdot 10^3 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ en mag als niet-samendrukbaar worden beschouwd.



Figuur 1.21.

Beantwoord de volgende vragen:

- 1) Geef de energiebalans en bereken de temperatuurstijging van het water.
- 2) Welk vermogen moet een pomp hebben om deze temperatuurstijging te kunnen veroorzaken?

Aangezien er sprake is van een stationaire toestand, geldt:

$$\phi_{m,\text{in}} = \phi_{m,\text{uit}} = \phi \quad \text{en} \quad \frac{dE}{dt} = 0$$

Voorts is $\phi_w = 0$ (geen pomp) en $\phi_q = 0$ (geen warmteuitwisseling). De energiebalans over de gehele buis luidt daarmee:

$$0 = \phi_m \left(u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} v_1^2 + gz_1 \right) - \phi_m \left(u_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} v_2^2 + gz_2 \right) \quad (1.86)$$

De subscripts 1 en 2 slaan op respectievelijk de inlaat en de uitlaat van het controle-volume (= de hele buis). Vergelijking (1.86) wordt veel eenvoudiger wanneer: $z_1 = z_2$ (horizontale buis), $\rho_1 = \rho_2$ (water hier niet samendrukbaar) en $v_1 = v_2$ (mits de doorsnede van buis en de dichtheid ρ van het water constant zijn).

De energiebalans wordt nu:

$$u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} = u_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \quad (1.87)$$

Met andere woorden: *druk-energie wordt omgezet in inwendige energie*. Zoals we gezien hebben, geldt volgens de thermodynamica bij constante ρ bij benadering:

$$u_1 - u_2 = c_v (T_1 - T_2) \quad (1.88)$$

Uit de vergelijkingen (1.87) en (1.88) volgt dan

$$T_2 - T_1 = \frac{p_1 - p_2}{\rho c_v} \quad (1.89)$$

Invullen van de numerieke gegevens levert een stijging van de temperatuur van 0,048 K op!

De temperatuurstijging van het water is dus eigenlijk een omzetting van druk-energie naar inwendige energie: een voorbeeld van dissipatie van mechanische energie. De pomp die het water aan het begin van de buis op de hogere druk brengt, moet deze energie leveren. Een energiebalans over de pomp levert dus (de ideale pomp brengt de vloeistof enkel op een hogere druk; veronderstel $v_1 = v_2$):

$$0 = \phi_m \left(\frac{p_0}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} \right) + \phi_w \quad (1.90)$$

Hierbij is de druk voor de pomp p_0 ; p_0 is gelijk aan de druk aan het einde van de buis: $p_0 = p_2$. Met dit gegeven volgt:

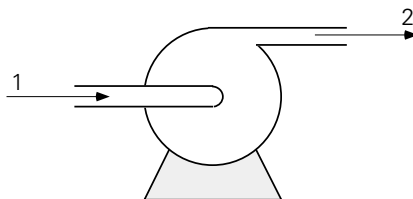
$$\phi_w = \phi_m \frac{p_1 - p_2}{\rho} = 1 \cdot \frac{2 \cdot 10^5}{10^3} = 200 \text{ W} \quad (1.91)$$

Dit resultaat is uiteraard gelijk aan $\phi_m(u_2 - u_1)$: het vermogen dat de pomp levert wordt uiteindelijk teruggevonden als inwendige energie. \square

Voorbeeld 1.11. Compressie van een gas

Lucht wordt met behulp van een compressor (een “luchtpomp”) gecompriemd van 1 bar tot 5 bar. Het vermogensverbruik van de compressor is $6 \cdot 10^3$ W. De massastroom door de compressor is 108 kg/hr en de in- en uitlaatbuis hebben beide een diameter van 5 cm. De kamertemperatuur bedraagt 20 °C. Hoe heet is het gas dat de compressor verlaat?

Er is een stationaire toestand in het controlevolume (= de compressor) zodat dM/dt en dE/dt beide 0 zijn.



Figuur 1.22.

Uit de massabalans volgt:

$$\phi_{m,1} = \phi_{m,2} = \phi_m \quad (1.92)$$

Als we veronderstellen dat de compressor geen warmte via de wand direct aan de omgevingslucht afgeeft (dus $\phi_q = 0$), dan luidt de energiebalans:

$$0 = \phi_{m,1} \left(u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} v_1^2 \right) - \phi_{m,2} \left(u_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} v_2^2 \right) + \phi_w \quad (1.93)$$

v_1 en v_2 kunnen uitgedrukt worden in ϕ_m , ρ en de doorsnede $A (= \pi D^2/4)$ van de in- en uitlaat:

$$v_1 = \frac{\phi_m}{A} \frac{1}{\rho_1} \quad \text{en} \quad v_2 = \frac{\phi_m}{A} \frac{1}{\rho_2} \quad (1.94)$$

Lucht mag onder deze omstandigheden als ideaal gas beschouwd worden:

$$p = \rho \frac{RT}{M} \quad (1.95)$$

$$u = \frac{5}{2} \frac{RT}{M} = \frac{5}{2} \frac{p}{\rho}$$

Deze laatste gelijkheid vindt zijn oorsprong in het feit dat lucht bestaat uit 2-atomige moleculen, die dus 5 vrijheidsgraden hebben: 3 voor “translatie”, 1 voor “rotatie” en 1 voor “vibratie”.

De energiebalans wordt nu na enig invulwerk:

$$0 = \phi_m \left[\frac{7}{2} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_m}{A} \right)^2 \left(\frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2} \right) \right] - \phi_w \quad (1.96)$$

Invullen van de numerieke gegevens levert:

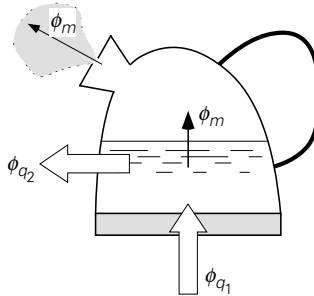
$\rho_1 = 1,19 \text{ kg/m}^3$, $\rho_2 = 3,54 \text{ kg/m}^3$, $T_2 = 492 \text{ K}$ en $\Delta T = 199 \text{ K}$! In de praktijk wordt de uitgaande gasstroom daarom veelal gekoeld (dat impliceert energiedissipatie!) \square

Voorbeeld 1.12. De fluitketel

In dit voorbeeld zal de balansentechniek gebruikt worden om een elementaire beschrijving te ontwikkelen van het opwarmen en laten koken van water in een fluitketel. Bekijk hiertoe de fluitketel in figuur 1.23 en veronderstel dat het opwarmen geschiedt door een constante warmtestroom ϕ_{q_1} . Voor de eenvoud wordt verder verondersteld dat het warmteverlies naar de omgeving (ϕ_{q_2}) ook constant is. Het opwarmen van de ketel zelf laten we voor het gemak buiten beschouwing.

Beschouw eerst de situatie van het opwarmen van het water (het water kookt nog niet). Onder deze omstandigheden kan de verdamping wel verwaarloosd worden; afhankelijk van de watertemperatuur maken we daarmee slechts een kleine fout. We nemen de inhoud van de fluitketel als controlevolume en kijken dan alleen naar de vloeistof en laten de waterdamp dus buiten beschouwing. (Overigens zijn de massa van alle water in de fluitketel, dus inclusief de waterdamp in de ruimte boven de

vloeistof, en de massa van de vloeistof nagenoeg aan elkaar gelijk.) Daarmee wordt de massabalans voor het water (aangeduid door subscript l van 'liquid'):



Figuur 1.23.

$$\frac{d}{dt} M_l = 0 \quad (1.97)$$

De energiebalans luidt:

$$\frac{d}{dt} (M_l c_p T) = \phi_{q1} - \phi_{q2} \quad (1.98)$$

Mits c_p onafhankelijk is van de temperatuur, stijgt de temperatuur met een constante snelheid:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\phi_{q1} - \phi_{q2}}{M_l c_p} \quad (1.99)$$

Beschouw vervolgens de situatie dat het water kookt. Er is nu wel een substantiële massastroom (voornamelijk waterdamp) de fluitketel uit die we nu echt niet meer kunnen verwaarlozen. Dat impliceert dat we ook de hoeveelheid (massa) waterdamp in de ruimte boven de vloeistof beter niet meer kunnen verwaarlozen. De massabalans over het controlevolume, nl. de inhoud van de fluitketel, wordt dan (met subscript v voor 'vapour', de dampfase):

$$\frac{dM_l}{dt} + \frac{dM_v}{dt} = 0 - \phi_m = -\phi_m \quad (1.100)$$

Ook als M_v wel verwaarloosd zou worden, blijft er in vergelijking (1.100) een zinnig resultaat over, omdat het niet onredelijk is te veronderstellen dat tijdens het koken op korte termijn de hoeveelheid water en dus de hoeveelheid damp in de fluitketel constant blijft: er verlaat op elk moment evenveel waterdamp de fluitketel als er vloeibaar water in damp overgaat.

Overigens gaat die vloeistof-damp overgang gepaard met een volumeverandering. De gevormde damp moet dus arbeid op de omgeving (de buitenlucht) uitoefenen, terwijl de druk in de fluitketel constant blijft. Deze overwegingen spelen een rol als we de energiehuishouding van het koken willen analyseren. Wederom bedienen we

ons hierbij van wat bekend is uit de thermodynamica. Voor een gesloten systeem, d.i. een systeem zonder massastromen in en/of uit, weten we uit de thermodynamica:

$$\delta Q = dU + pdV$$

In plaats van te werken met de inwendige energie, U , kunnen we ook de enthalpie, H , gebruiken:

$$H \equiv U + pV$$

Hiermee is behoud van energie te schrijven als:

$$\delta Q = dH - Vdp$$

We zien dus dat, bij constante druk, de enthalpie een heel handige energiegrootheid is vanwege $dU/dt = dH/dt$. Dit geldt te meer omdat in de rechterkant van de vergelijking (1.85) de enthalpie toch ook al voorkomt in de in- en uittermen (als gevolg van massastromen in en uit). Voor het kookproces in het fluitketeltje (een open systeem, vanwege de uitgaande stroom waterdamp) komen we op basis van vergelijking (1.85) en met $\phi_w = 0$ tot de volgende enthalpiebalans voor de totale inhoud van het fluitketeltje (vloeistof plus dampfase):

$$\frac{dH}{dt} = \phi_{m,in} h_{in} - \phi_{m,uit} h_{uit} + \phi_q \quad (1.101)$$

In vergelijking (1.101) zijn alle effecten van kinetische en potentiële energie verwaarloosd – zowel in de d/dt -term aan de linkerkant als in de in- en uitgaande massastromen aan de rechterkant van de vergelijking – omdat deze erg klein zijn ten opzichte van de verschillende enthalpietermen. Voor de totale enthalpie in het controlevolume kunnen we schrijven:

$$H = h_l M_l + h_v M_v$$

Tenslotte, de ingaande massastroom is nul en de uitgaande enthalpie h_v . Omdat zowel druk als temperatuur constant zijn bij het koken zijn de enthalpieconcentraties, h_l en h_v , ook constant. Dus kan voor vergelijking (1.101) geschreven worden:

$$h_l \frac{dM_l}{dt} + h_v \frac{dM_v}{dt} = -\phi_m h_v + \phi_{q1} - \phi_{q2} \quad (1.102)$$

Combineren van de vergelijkingen (1.100) en (1.102) geeft (met de afkorting $\Delta h_v = h_v - h_l$, voor de verdampingsenthalpie)

$$-\frac{dM_l}{dt} \Delta h_v = \phi_{q1} - \phi_{q2} \quad (1.103)$$

Met andere woorden: het toevoeren van warmte aan een ketel kokend water zorgt – niet verrassend – enkel voor vermindering van de watermassa door de faseovergang

bij het constante atmosferische kookpunt bij constante atmosferische druk (als we de heel kleine, overigens constante drukval over de uitstroomopening verwaarlozen): dit resulteert (met name omdat we kinetische en potentiële energiebijdragen verwaarlozen) in de afvoer van waterdamp via het uitstroomdebiet ϕ_m . Besef wel dat we in de gehele analyse de warmtecapaciteit van de fluitketel zelf buiten de beschouwingen hebben gelaten.

Samenvatting

Anders dan bij massa zijn er vele energiesoorten, die bovendien in elkaar omgezet kunnen worden. Dit zorgt er voor dat de totale-energiebalans wat meer soorten stromen bevat. De verschillende soorten energie (inwendige of thermische energie, druk-energie) zijn fysisch nader geïnterpreteerd. Ook zijn de rol en het gebruik van het concept *enthalpie* uitgebreid aan de orde geweest

De totale-energiebalans over een controlevolume heeft weer de basisvorm zoals bekend van de massabalans. Zo kan er energie het controlevolume in en uit getransporteerd worden door een massastroom. Maar onafhankelijk daarvan kan er ook sprake zijn van een warmtestroom van/naar de omgeving en van arbeid verricht door en op de buitenwereld. Verschillende arbeidstermen zijn geïdentificeerd.

Tevens is het begrip dissipatie van energie ingevoerd: het éénrichtingsverkeer van mechanische energie naar thermische energie; het mechanisme hiervoor is wrijving.

1.3.2 De thermische-energiebalans

Tot nu toe is de totale energie beschouwd, maar soms is het handiger enkel naar een specifieke vorm van energie te kijken, bijvoorbeeld de thermische of inwendige energie U . De balans voor U luidt:

$$\frac{d}{dt} U = \frac{d}{dt} (\rho V u) = \phi_{m,\text{in}} \cdot u_{\text{in}} - \phi_{m,\text{uit}} \cdot u_{\text{uit}} + \phi_q + P_u \quad (1.104)$$

Het linkerlid van de vergelijking representeert, zoals gebruikelijk, de verandering in de tijd van de totale inwendige energie U in het controlevolume. De eerste twee termen van het rechterlid zijn het verschil tussen in- en uitstroom van inwendige energie door massastromen. De derde term brengt de nettowarmtestroom die het volume ingaat in rekening. Tenslotte staat de laatste term P_u voor productie van inwendige (thermische) energie binnen in het controlevolume ten gevolge van *dissipatie* (wrijvingseffecten) en voor productie van inwendige energie door *arbeid* die op het systeem verricht wordt.

Bedenk dat zuigers, pompen, compressoren en turbines geen thermische energie toevoeren of onttrekken aan het controlevolume, maar ‘mechanische’ energie: een term als gevolg van de actie van zuigers, pompen, compressoren en turbines hoort dus niet thuis in een thermische-energiebalans. Let wel: thermische energie is zeker *geen* behouden grootheid. Vergelijking (1.104) is dus ook zeker geen *behoudswet*. De vraag is nu een uitdrukking te vinden voor de productieterm P_u .

Beschouw daartoe nog eens de totale-energiebalans, vergelijking (1.85) of, voor een stationaire situatie, vergelijking (1.86), waarin onder meer de termen

$$\phi_m \cdot [u + p/\rho]_{\text{in}} - \phi_m \cdot [u + p/\rho]_{\text{uit}}$$

voorkomen. Deze termen staan voor de enthalpie-afname van ingang naar uitgang. Voor deze enthalpie-afname geldt:

$$dh = du + p \, d \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \, dp$$

De eerste twee termen aan de rechterkant hebben met warmte te maken en dienen expliciet in een thermische-energiebalans voor te komen: volgens de Eerste Hoofdwet van de thermodynamica geldt, geformuleerd op massabasis, immers

$$\delta Q = du + p \, d \frac{1}{\rho} \quad (1.105)$$

waarin δQ staat voor de verandering van de warmte-inhoud (per kg). Uit deze hoofdwet is het duidelijk dat arbeid bij constante druk en onder adiabatische condities verricht op het systeem effect heeft op de inwendige energie van het systeem. Bedenk wel dat het hierbij gaat om een *reversibel proces*: de bewegingsenergie van de moleculen kan gebruikt worden om deze dichter bij elkaar te brengen, en vice versa.

Vanwege vergelijking (1.105) dient in een thermische-energiebalans zoals vergelijking (1.104) naast de term $\phi_m du$ dus ook de term $\phi_m p d(1/\rho)$ expliciet voor te komen. Die term is dus het gevolg van het verschil in dichtheid van ingaande en uitgaande massastromen. Op een soortgelijke manier als bij de opsplitsing van de energieproductie W als gevolg van arbeid in de aanloop naar vergelijking (1.84), halen we in vergelijking (1.104) nu de *reversibele* arbeidsterm $\phi_m p d(1/\rho)$ uit de productieterm P_u en schrijven deze bij de stromen in en uit. Wat overblijft van P_u is een *irreversibele* energie-omzetting: de *dissipatie* van mechanische energie in warmte ten gevolge van wrijving binnen het controlevolume. Deze wrijving, dus productie van thermische energie (warmte), is het gevolg van de weerstand die er binnen het controlevolume geboden wordt aan de stroming *van ingang naar uitgang* en is dus evenredig met het (massa)debiet. Voor deze dissipatieterm schrijven we daarom $\phi_m e_{fr}$ waarin

$e_{fr} \equiv$ de hoeveelheid mechanische energie die per eenheid van massa irreversibel omgezet wordt in thermische energie (warmte).

Voor een stationaire situatie, waarin uiteraard de in- en uitgaande massastromen gelijk zijn ($\phi_{m,\text{in}} = \phi_{m,\text{uit}} = \phi_m$), kan vergelijking (1.104) dan herschreven worden naar de vorm

$$0 = \phi_m \left[u_{\text{in}} - u_{\text{uit}} - \int_{\text{in}}^{\text{uit}} p \, d \frac{1}{\rho} \right] + \phi_q + \phi_m e_{fr} \quad (1.106)$$

die wel de *stationaire thermische energie-* (of warmte-) *balans* genoemd wordt.

Bovenstaande afleiding van de stationaire thermische-energiebalans, met de discussie over enthalpieveranderingen, illustreert hoe zorgvuldig met de productieterm in een balans moet worden omgegaan, wanneer, zoals bij thermische energie, de betrokken grootte *niet behouden* blijft.

Samenvatting

Analoog aan de totale-energiebalans is ook een thermische-energiebalans op te stellen. Met behulp van de Eerste Hoofdwet van de thermodynamica is de productie van inwendige energie te splitsen in een reversibel arbeidsdeel en een irreversibel deel, de dissipatie. Hierdoor sluit de inwendige-energiebalans mooi aan op de totale-energiebalans en komt de dissipatie als producent van thermische energie duidelijk naar voren.

1.3.3 De mechanische-energiebalans en de Bernoulli-vergelijking

Nu de totale-energiebalans en de stationaire thermische-energiebalans geformuleerd zijn, is de constructie van de stationaire mechanische-energiebalans eenvoudig, aanzien

$$E_{\text{tot}} - E_{\text{thermisch}} = E_{\text{mechanisch}} \quad (1.107)$$

Dientengevolge leidt vergelijking (1.106) aftrekken van de stationaire versie van vergelijking (1.85) (waarbij $P_e = 0$ was genomen) tot de stationaire mechanische-energiebalans

$$0 = \phi_m \left(\frac{1}{2} v_{\text{in}}^2 - \frac{1}{2} v_{\text{uit}}^2 + g(z_{\text{in}} - z_{\text{uit}}) + \int_{\text{uit}}^{\text{in}} \frac{1}{\rho} dp \right) + \phi_w - \phi_m e_{fr} \quad (1.108)$$

Deze vergelijking wordt doorgaans iets anders geschreven, namelijk met de indices 1 en 2 voor in respectievelijk uit:

$$0 = -\phi_m \left[\int_1^2 \frac{1}{\rho} dp + \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) + g(z_2 - z_1) \right] + \phi_w - \phi_m e_{fr} \quad (1.109)$$

Merk op, dat de productieterm hier een negatief teken heeft. Dit is in overeenstemming met het feit dat dissipatie mechanische energie vernietigt (zowel ϕ_m als e_{fr} zijn immers altijd positief).

Hier moet nog wel opgemerkt worden dat de mechanische-energiebalans op een veel strakkere wijze kan worden afgeleid uit de impulsbalansen, en wel door scalaire vermenigvuldiging met de snelheidsvector v . De thermische-energiebalans volgt dan juist door de mechanische-energiebalans van de totale-energiebalans af te trekken. In dit boek is voor de andere werkwijze gekozen: enerzijds om de route via impuls-

balansen en de daarbij behorende wiskundige manipulaties te vermijden, anderzijds om de student vertrouwd te maken met het idee dat voor elke grootte (behouden of niet) een balansvergelijking opgesteld kan worden. Daarbij moet dan wel goed nagedacht worden over de fysica van de productieterm; soms is het daarbij zelfs nodig of handig deze productieterm te modelleren. (Zulks is bijvoorbeeld het geval bij het beschrijven en simuleren van turbulente stromingen.) Voor *behouden grootheden* (massa, totale energie, impuls) is de productieterm uiteraard nul; energiedissipatie in de mechanische-energiebalans volgt dan uit de mathematische afleiding.

De Bernoulli-vergelijking

Nu volgen een aantal voorbeelden van het gebruik van de mechanische-energiebalans voor het bijzondere geval dat er *geen arbeid* op het systeem wordt verricht en dat de *dissipatie verwaarloosbaar* klein is:

$$\phi_w = 0 \quad \text{en} \quad e_{fr} \approx 0 \quad (1.110)$$

In dit geval (en mits ρ constant is) gaat de stationaire mechanische-energiebalans (1.109) over in de zgn. *Bernoulli-vergelijking* :

$$\frac{1}{2} v_1^2 + gz_1 + \frac{P_1}{\rho} = \frac{1}{2} v_2^2 + gz_2 + \frac{P_2}{\rho}$$

of:

$$\frac{1}{2} v^2 + gz + \frac{P}{\rho} = \text{constant} \quad (1.111)$$

Deze vergelijking geldt in feite slechts langs een stroomlijn; voor verschillende stroomlijnen zal de constante in vergelijking (1.111) verschillende waarden aannemen. Voor een meer gedetailleerde behandeling wordt verwezen naar bijvoorbeeld Bird, Stewart and Lightfoot, "Transport Phenomena".

Vergelijking (1.111) zegt dus dat de hoeveelheid mechanische energie door het hele systeem hetzelfde is: er is slechts omzetting mogelijk van de ene vorm van mechanische energie naar de andere. Dit is uiteraard geheel in overeenstemming met de voorwaarden uit vergelijking (1.110). De termen in vergelijking (1.111) hebben alle de dimensie energie per massa-eenheid. Afhankelijk van het te beschouwen systeem wordt dit ook wel herschreven naar een vergelijking met dimensie lengte of met dimensie druk.

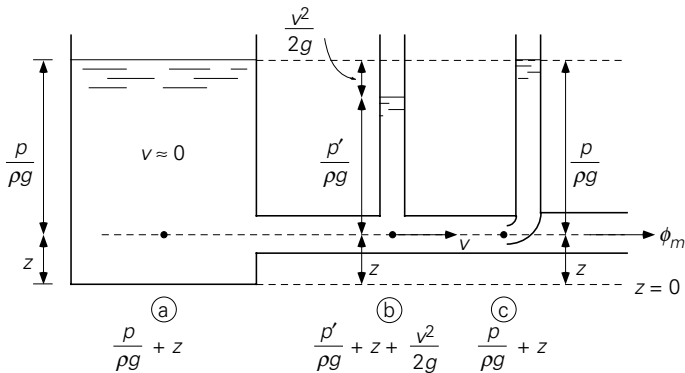
Herschrijving in termen van lengte geeft:

$$\frac{P}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g} = \text{constant} \quad (1.112)$$

Het werken met *drukhoogten* wordt geïllustreerd in figuur 1.24. Vergelijking van de punten a, b en c leert met behulp van de Bernoulli vergelijking dat:

$$\frac{P'}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \frac{P}{\rho g}$$

Dit is in de figuur aangegeven: de druk bij punt b is lager dan bij punt a of punt c.



Figuur 1.24.

De drie lengten uit vergelijking (1.112) hebben een eigen naam, namelijk *drukhoogte* ('pressure head'), *statische hoogte* ('static head') en *snelheidshoogte* ('velocity head'). Het is duidelijk dat in punt b, waar de vloeistof snelheid heeft, de druk p' kleiner is dan de druk p bij punt c precies in de omgebogen opening van de standpijp waar de vloeistof stilstaat. Derhalve zal punt c een grotere vloeistofkolom "dragen" dan punt b; anders geformuleerd: de kinetische energie die in punt b aanwezig is, is in punt c geheel in druk-energie omgezet. Deze extra druk, ter grootte van $\frac{1}{2} \rho v^2$, noemt men de *stuwdruk*. Bij de behandeling van de impulsbalans komt dit begrip weer terug.

Pitotbuis

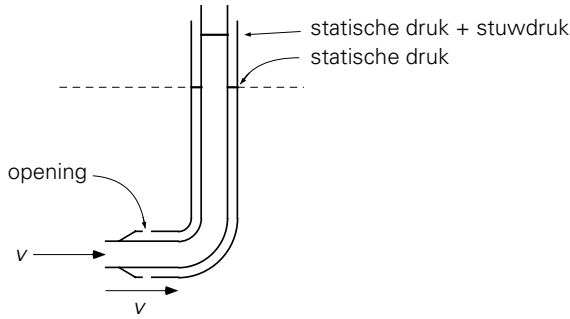
Met de hierboven besproken opstelling is in principe de vloeistofsnelheid te meten. De belangrijkste voorwaarde is dat dissipatie inderdaad verwaarloosbaar is. De *pitotbuis* (zie figuur 1.25) laat zien hoe het principe van de opstelling van figuur 1.24 vorm heeft gekregen in een compact apparaatje.

Het apparaatje bestaat uit twee concentrische buizen. De binnenste buis meet de statische druk en de stuwdruk, de buitenste buis enkel de statische druk. "Ver" voor de buis is de druk immers p en de snelheid v ; dus geldt (op één hoogte):

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constant} \quad (1.113)$$

De buitenste buis meet enkel p , want de snelheid juist buiten het gaatje is gewoon v . Het verschil in de twee gemeten drukken is derhalve de stuwdruk, $\frac{1}{2} \rho v^2$, en is daarmee een rechtstreekse maat voor de vloeistofsnelheid¹.

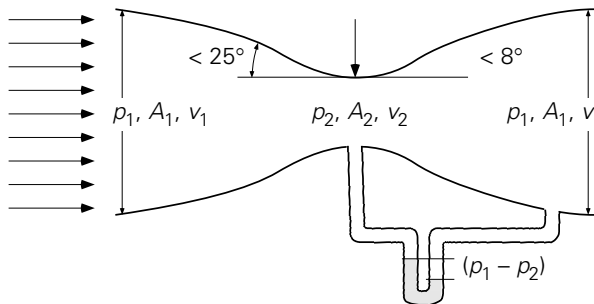
¹ Voor een zorgvuldiger redenering is het noodzakelijk om van juist buiten de buitenste buis naar net binnen de buitenste buis, waar de vloeistof stilstaat, te komen. Dat daar niet weer $p + \frac{1}{2} \rho v^2$ gemeten wordt komt doordat vergelijking (1.113) voor elke stroomlijn een eigen constante heeft. Van buiten de buitenste buis naar binnen gaan betekent overstappen op een andere stroomlijn.



Figuur 1.25.

Venturibuis

Ook de *venturibuis* is een meetinstrument waarbij (door de constructie) de energiedissipatie verwaarloosbaar klein is ($e_{fr} \approx 0$). In het stroomkanaal (zie figuur 1.26) wordt een geleidelijke vernauwing (tophoek $< 25^\circ$) gevolgd door een nog geleidelijker verwijding (tophoek $< 8^\circ$) om aan $e_{fr} \approx 0$ te voldoen). Zolang aan de twee criteria voor de tophoek wordt voldaan, kan men er zeker van zijn dat de stroomlijnen netjes de vorm van de geometrie volgen en dat nergens wervels en energiedissipatie optreden. De venturibuis behoort horizontaal te worden opgesteld om verschillen in potentiële energie tussen de meetstations 1 en 2 te vermijden.



Figuur 1.26.

Het massadebiet (ϕ_m) dat in een stationaire situatie door het stroomkanaal loopt, is nu af te leiden uit een massabalans, de Bernoulli-vergelijking en het drukverschil tussen een punt midden in de vernauwing (2) en één er ver voor of ver na (1). Noem daartoe het oppervlak van de dwarsdoorsneden bij de punten 1 en 2 respectievelijk A_1 en A_2 . Dan volgt uit de massabalans voor deze stationaire conditie:

$$\phi_m = \rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2 \quad (1.114)$$

en uit Bernoulli (mits de vloeistof als incompressibel beschouwd mag worden, d.w.z. $\rho = \text{constant}$):

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^2 \quad (1.115)$$

Samenvoegen van de vergelijkingen (1.114) en (1.115) geeft het gezochte verband

$$\phi_m = \frac{A_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2^2}{A_1^2}\right)}} \sqrt{2\rho(p_1 - p_2)} \quad (1.116)$$

Merk op dat ook bij dit apparaat gebruik gemaakt is van de mogelijkheid om mechanische energievormen in elkaar om te zetten, namelijk: drukenergie wordt kinetische energie, die weer drukenergie wordt.

Voorbeeld 1.13. Rookgassen door een schoorsteen

De rookgassen van een fornuis worden toegevoerd aan de voet van een grote, hoge schoorsteen, die op de grond staat. De schoorsteen heeft een constante diameter. De rookgassen zijn op een constante temperatuur van 227 °C, terwijl de buitenlucht 20 °C is. De druk p_1 onderin de schoorsteen is Δp_m beneden de atmosferische druk van 1 bar (gemeten op grondniveau). De warmteverliezen van het rookgas in de schoorsteen naar de omgeving zijn verwaarloosbaar. Bovendien is er geen noemenswaardige energiedissipatie. Hoe hoog is, op basis van deze gegevens en voor $\Delta p_m = 250$ Pa, de schoorsteen?

Alvorens deze vraag beantwoord kan worden, dient eerst nagegaan te worden waarom het rookgas eigenlijk de schoorsteen uitstroomt. Het komt immers op onderdruk de schoorsteen binnen? Aan de bovenzijde van de schoorsteen is evenwel de luchtdruk ook beneden 1 bar gezakt. In een gas stijgt de druk immers, als de kolom gas die “gedragen” wordt groter wordt. De druk op hoogte H van de schoorsteen is dus niet p_0 , maar $p_0 - \rho_a g H$ (met ρ_a de dichtheid van lucht bij 20 °C = 1,2 kg/m³).

Voor de schoorsteen volgt uit de wet van Bernoulli:

$$0 = \int_0^H \frac{1}{\rho_g} dp + gH \quad (1.117)$$

De druk en de temperatuur van het gas in de schoorsteen verlopen maar weinig of niet, en dus mag de dichtheid van het rookgas ρ_g als constant beschouwd worden (0,65 kg/m³ bij 227 °C). Hiermee wordt vergelijking (1.117):

$$0 = \frac{1}{\rho_g} [(p_0 - \rho_a g H) - (p_0 - \Delta p_m)] + gH \rightarrow H = \frac{\Delta p_m}{(\rho_a - \rho_g)g} \quad (1.118)$$

Invullen van de gegevens levert op $H = 46,3$ m.

Uit vergelijking (1.118) volgen een paar triviale regels voor het ontwerp van een schoorsteen: een grotere Δp_m vraagt om een hogere schoorsteen (bij gelijke ρ_a en ρ_g); hetere rookgassen laten een lagere schoorsteenhoogte toe (betere trek). \square

Samenvatting

In deze paragraaf is de stationaire mechanische-energiebalans geconstrueerd door het verschil te nemen van de (stationaire) totale-energiebalans en de (stationaire) thermische-energiebalans. De productieterm hierin is altijd negatief: dissipatie vernietigt mechanische energie.

Vervolgens is gekeken naar een aantal gevallen waarin geen arbeid verricht wordt en de energiedissipatie verwaarloosbaar klein is, terwijl $\rho = \text{constant}$. Dan gaat de stationaire mechanische-energiebalans over in de Bernoulli-vergelijking. Deze laatste geeft behoud van mechanische energie weer: er zijn wel omzettingen van druk-energie, kinetische energie en zwaartekrachtenergie in elkaar mogelijk, maar de som van de drie blijft constant.

Tenslotte zijn de pitotbuis en de venturibuis behandeld, alsmede de begrippen drukhoogte, statische hoogte, snelheidshoogte en stuwdruk.

1.4 De impulsbalans

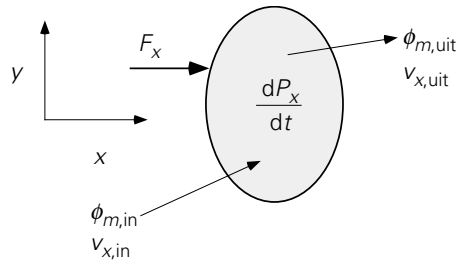
Na de massa- en energiebalans rest, in het kader van dit college, nog de impulsbalans. De grootte waarvoor nu een balans opgesteld moet worden, is dus de impuls \vec{P} . Hier zit, zoals de notatie al laat zien, een extra complicatie ten opzichte van de twee voorgaande balansen. Impuls is namelijk, net als een kracht, een *vector*grootte; dat wil zeggen: om de impuls vast te leggen moeten er drie componenten gespecificeerd worden. Dit in tegenstelling tot massa of energie die met slechts één waarde vastgelegd worden (men noemt massa en energie een scalar). Voor impuls zijn derhalve drie balansen nodig. Gelukkig komen bij gebruik van orthogonale assenstelsels, zoals het veel gebruikte Cartesiaanse stelsel (x, y, z) , de drie impuls-componenten (p_x, p_y, p_z) slechts afzonderlijk in deze balansen voor (let wel dat hier nu even met p niet de druk bedoeld wordt!). Met andere woorden: in de balans voor de impuls in de x -richting (p_x) komen geen termen voor die p_y of p_z bevatten.

Eerst wordt nu de impulsbalans in de (willekeurig gekozen) x -richting geïntroduceerd. De algemene vorm van de x -impulsbalans luidt weer (voor het controlevolume V uit figuur 1.27):

$$\frac{dP_x}{dt} = \text{stroom van } x\text{-impuls in} - \text{stroom van } x\text{-impuls uit} + \text{productie van } x\text{-impuls} \quad (1.119)$$

De linkerterm stelt weer de verandering in de tijd voor van de totale hoeveelheid x -

impuls in het controlevolume. De totale hoeveelheid x -impuls in het controlevolume is te schrijven als² $P_x = M \cdot v_x$.



Figuur 1.27.

De stromen in en uit zijn in dit geval weer het gevolg van een massastroom die x -impuls met zich meedraagt. Ze hebben dus de vorm van $\phi_m \cdot \{x\text{-impuls per eenheid van massa}\}$. Uit de klassieke mechanica volgt dat de x -impuls van een massa m gelijk is aan $m v_x$. Hieruit volgt dat de x -impulsconcentratie (per massa-eenheid) gelijk is aan $(m v_x)/m = v_x$. *De snelheid in de x -richting is derhalve op te vatten als de concentratie (per massa-eenheid) van x -impuls.* (Vanaf nu zal het symbool p niet meer voor impuls gebruikt worden, doch uitsluitend voor druk.) Daarmee worden, weer geheel analoog aan de uitdrukkingen (1.9) en (1.10) en ook analoog aan de energiestromen in en uit in vergelijking (1.83), de stromen x -impuls in en uit

$$\phi_{m,\text{in}} \cdot v_{x,\text{in}} \quad \text{respectievelijk} \quad \phi_{m,\text{uit}} \cdot v_{x,\text{uit}}$$

Analoog geldt dat de concentratie van x -impuls per volume-eenheid gegeven wordt door ρv_x .

Rest nog de productie van x -impuls. Ook hiervoor kan teruggerepen worden op de klassieke mechanica. In feite is de tweede wet van Newton

$$\frac{d}{dt} (m v_x) = \sum F_x \quad (1.120)$$

al een eenvoudige vorm van de door ons gezochte x -impulsbalans. Het linkerlid is de verandering van de x -impuls van het lichaam. Deze verandering is een gevolg van de x -componenten van de krachten die op het lichaam werken. Derhalve stelt het rechterlid van vergelijking (1.120), de som van krachten, dus de impulsproductieterm voor. Kracht kan dus opgevat worden als *producent van impuls*. De algemene vorm van de x -impulsbalans is nu:

² De snelheid v_x is eigenlijk een gemiddelde snelheid gedefinieerd als

$$\langle v_x \rangle = \frac{\int \rho v_x dV}{\int \rho dV}$$

$$\frac{d}{dt} (Mv_x) = \phi_{m,\text{in}} \cdot v_{x,\text{in}} - \phi_{m,\text{uit}} \cdot v_{x,\text{uit}} + \sum F_x \quad (1.121)$$

Voor de y -impuls en z -impuls zijn uiteraard soortgelijke balansen op te schrijven. Het is goed om te bedenken, dat de massastromen niet noodzakelijkerwijs in de x -richting hoeven te staan (zie figuur 1.27).

De eenheid van impuls P is $\text{kg m/s} = \text{N}\cdot\text{s}$. De eenheid van snelheid wordt daarmee Ns/kg . Uit vergelijking (1.121) volgt verder dat de eenheid van kracht ook te schrijven is als Ns/s . Deze ogenschijnlijk onnodig gecompliceerde eenheid geeft beter de nieuwe interpretatie van kracht weer: producent van impuls (Ns) per tijdseenheid (s).

Uit de klassieke mechanica volgt dat er twee soorten kracht onderscheiden kunnen worden:

- zogenaamde *body forces* die over het hele lichaam aangrijpen; de bekendste exponent hiervan is de zwaartekracht,
- krachten die op het oppervlak van het controlevolume aangrijpen; dit zijn bijvoorbeeld de drukkrachten en de wrijvingskracht of schuifspanning.

Op dit punt wijkt de impulsbalans af van de massa- en energiebalans. Terwijl bij de laatste twee balansen productie altijd in het inwendige plaatsvindt, is bij de impulsbalans er de mogelijkheid dat impulsproductie aan de oppervlakken geschiedt. (Verderop zal aangetoond worden dat dit verschil deels is op te heffen door het invoeren van zekere impulsstromen die de wrijvingskrachten aan het oppervlak van het controlevolume vervangen.)

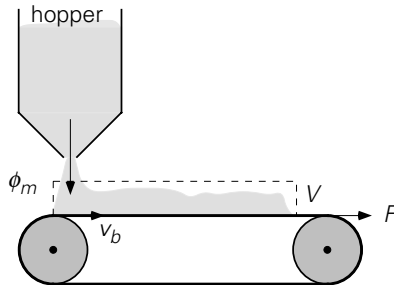
Indien de situatie stationair is en de stromen in vergelijking (1.121) elkaar compenseren (of gelijk aan nul zijn) reduceert de x -impulsbalans tot een *krachtenbalans*:

$$0 = \sum F_x \quad (1.122)$$

Voorbeeld 1.14. *De lopende band*

Een horizontaal opgestelde lopende band, die met een snelheid $v_b = 1,0 \text{ m/s}$ beweegt, vangt zand op, dat uit een hopper (dat is een vultrechter) komt. Het zand valt vertikaal omlaag met een massastroom van 225 kg/s . De lopende band is aanvankelijk leeg en wordt geleidelijk met zand gevuld (maar raakt nog niet vol). Reken de kracht uit die nodig is om de band voort te trekken. Neem hierbij aan dat de band wrijvingsloos over de lagers beweegt.

De eerste vraag die beantwoord moet worden is: waarom moet er een kracht op de band uitgeoefend worden als deze toch wrijvingsloos beweegt? Het antwoord is: het zand dat voortdurend op de band valt, moet voortdurend op snelheid gebracht worden en dient daartoe impuls in de horizontale richting (de x -richting) te ontvangen! Hiervoor is uiteraard een kracht nodig. Om deze kracht uit te rekenen dient een impulsbalans opgesteld te worden over een volume dat al het zand omvat



Figuur 1.28.

dat op de band ligt (zie figuur 1.28).

Deze balans luidt (n.b. het is dus een balans voor x -impuls):

$$\frac{d}{dt} (M_z v_b) = \phi_{p_x, \text{in}} - \phi_{p_x, \text{uit}} + \sum F_x \quad (1.123)$$

hierin is M_z de massa van het zand dat op de band ligt. Deze balans versimpelt doordat er geen x -impuls het controlevolume in of uit stroomt. De som van de krachten is enkel F , de kracht die de band voorttrekt. De instationaire term is met behulp van een massabalans over hetzelfde volume te vereenvoudigen, immers

$$\frac{d}{dt} M_z = \phi_{m, \text{in}} - 0 = \phi_{m, \text{in}} \quad (1.124)$$

Door nu vergelijkingen (1.123) en (1.124) te combineren en te gebruiken dat v_b constant is, volgt

$$F = v_b \cdot \phi_m = 225 \text{ N} \quad (1.125)$$

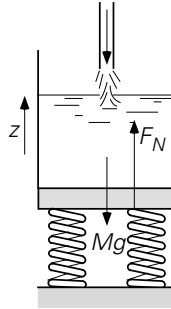
Hetzelfde resultaat kan overigens gevonden worden als het zand ook het controlevolume uitstroomt. \square

Voorbeeld 1.15. Het vullen van een vat

Dit voorbeeld behandelt ook weer de koppeling tussen impulsstroom en kracht als producent van impuls.

In een fabriek worden vaten gevuld met vloeistof. Dit is een geautomatiseerd proces, waarbij het gewicht van de vaten met behulp van een weegschaal bepaald wordt. De vultijd is 20 seconden; de snelheid v van de verticale vloeistofstraal, die in het vat komt, is 10 m/s. Welk percentage overgewicht moet de weegschaal aanwijzen, voordat er gestopt kan worden met vullen?

Als controlevolume wordt nu het gehele vat gekozen. De vloeistof die in het vat zit, heeft geen impuls in de verticale richting. Dus de impulsbalans in die richting luidt (zie figuur 1.29):



Figuur 1.29.

$$0 = -(\rho Av) \cdot v - 0 - M \cdot g + F_N \quad (1.126)$$

waarbij A het oppervlak van de doorsnede van de inlaat is en F_N de kracht die de weegschaal op het vat uitoefent. Vergelijking (1.126) zegt dat de weegschaal het vat moet dragen (compensatie van $M \cdot g$), maar ook de impuls uit de instromende vloeistof moet halen (negatieve productie). De massa M is een functie van de tijd, die eenvoudig bepaald kan worden uit een massabalans over de tank:

$$\frac{dM}{dt} = \rho Av \quad (1.127)$$

Oplossen met de randvoorwaarde $M(t=0) = 0$ levert dat op de vultijd τ geldt

$$M(\tau) = \rho Av \tau \quad (1.128)$$

Voor het percentage overgewicht volgt dan:

$$\frac{F_N - Mg}{Mg} = \frac{\rho Av^2}{\rho Av g \tau} = \frac{v}{g \tau} = 5\% \quad (1.129)$$

□

Voorbeeld 1.16. Een hangende druppel

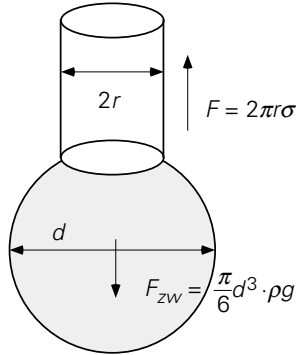
Aan het uiteinde van een verticaal opgesteld glazen capillair, dat een buitendiameter van 2 mm heeft, worden heel langzaam afzonderlijke waterdruppels gevormd. De stroming door het capillair is verwaarloosbaar klein. Als de oppervlaktespanning van water $70 \cdot 10^{-3}$ N/m bedraagt, bereken dan met een krachtenbalans de diameter van de druppels die van het capillair vallen.

Een impulsbalans over het controlevolume (de druppel) zal vanwege de zeer lage snelheden resulteren in een krachtenbalans. De krachten die optreden zijn de zwaartekracht en de oppervlaktespanning van de vloeistof die in contact met het capillair staat, zie figuur 1.30. De krachtenbalans wordt dus:

$$\sum F = 0 = -\frac{\pi}{6} d^3 \rho g + 2\pi r \sigma \quad (1.130)$$

zodat:

$$d = \sqrt[3]{\frac{12r\sigma}{\rho g}} = 4,4 \text{ mm} \quad (1.131)$$



Figuur 1.30.

Opmerkingen over oppervlaktespanning:

De moleculen midden in een vloeistof ondervinden van de omringende moleculen krachten die elkaar opheffen. Dit geldt niet voor moleculen die aan de lucht grenzen; daar werkt een resulterende kracht die loodrecht op het oppervlak naar de vloeistof gericht is. Een hoeveelheid vloeistof waarop geen uitwendige krachten werken, neemt de bolvorm aan; de oppervlakte-energie heeft dan zijn minimumwaarde. De vloeistof is als het ware door een elastisch vlies omsloten.

Bij vergroten van het vloeistofoppervlak komen er meer moleculen in de grenslaag en wordt er arbeid verricht tegen de aantrekkingskrachten van de moleculen in de vloeistof in. De arbeid (of energie), in joule, nodig om het oppervlak met 1 m^2 te vergroten, wordt gerepresenteerd door de *oppervlaktespanning* σ , uitgedrukt in N/m ($= \text{J/m}^2$). De kracht nodig om een oppervlak over een breedte b te vergroten is σb (N).

Aan de rand van een capillair is sprake van een lokale en gecompliceerde krachtenbalans bij de driefasencontactlijn water-lucht-glas. De vloeistofmoleculen in de grenslaag kunnen door een vaste stof sterker worden aangetrokken (*adhesie*) dan door de vloeistof zelf (*cohesie*), waardoor bijvoorbeeld de vloeistof stijgt in een capillair van die vaste stof.

In dit voorbeeld is de *adhesiekracht* gelijk aan de oppervlaktespanning maal de “breedte” ($2\pi r$) van het contactoppervlak. □

Samenvatting

Impuls is een vector. Er zijn dus drie impulsbalansen: voor elke component één. De drie impulsbalansen hebben weer de vertrouwde basisvorm met een d/dt -term, in- en uittermen, en productieterm(en). Uiteraard komt in de x -impulsbalans geen y - of z -impuls voor.

Krachten kunnen gezien worden als producenten van impuls. Ook hier geldt weer dat er geen krachten in de y - of z -richting in de x -impulsbalans voorkomen.

De krachtenbalans is een bijzondere vorm van de impulsbalans.

1.5 Voorbeelden van gecombineerd gebruik van massa-, energie- en impulsbalansen

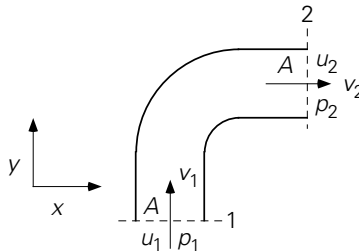
Voorbeeld 1.17. Stroming door een bocht

Er stroomt water door een bocht in een goed geïsoleerde buis die horizontaal is opgesteld. De buis heeft een constante doorsnede A ; het water wordt als niet samendrukbaar opgevat (incompressibel). De toestand is stationair. Stel de massabalans, de energiebalans en de impulsbalansen voor de gehele bocht op.

Er is sprake van een stationaire toestand en dus is het linkerlid in alle drie de balansen is gelijk aan 0.

Massabalans:

$$0 = \rho v_1 A - \rho v_2 A \rightarrow v_1 = v_2 \quad (1.132)$$



Figuur 1.31.

Kennelijk is de snelheid in grootte onveranderd, maar de richting is natuurlijk wel veranderd.

Energiebalans:

$$0 = \rho v_1 A \cdot \left(e + \frac{p}{\rho} \right)_{\text{in}} - \rho v_2 A \cdot \left(e + \frac{p}{\rho} \right)_{\text{uit}} \quad (1.133)$$

Dankzij vergelijking (1.132) volgt dan direct::

$$u_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^2 + gz_1 = u_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^2 + gz_2 \quad (1.134)$$

Daar $v_1 = v_2$ en $z_1 = z_2$ volgt:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = u_2 - u_1 \quad (1.135)$$

Dit resultaat impliceert dat de drukval slechts is te voorspellen als de grootte van de energiedissipatie bekend is.

Impulsbalans in de y-richting:

$$0 = \rho v_1 A \cdot v_1 - \rho v_2 A \cdot 0 + \sum F_y \quad (1.136)$$

In de tweede term van het rechterlid staat dat er door de uitgaande stroom geen impuls in de y-richting wordt meegenomen. De krachten die op de vloeistof werken in de y-richting zijn de drukkracht $+p_1 A$ en de reactiekracht van de wand op de vloeistof $+F_{y,w \rightarrow f}$, dus:

$$F_{y,w \rightarrow f} = -\rho v_1^2 A - p_1 A \quad (1.137)$$

De wand moet dus een kracht in de negatieve y-richting leveren en een kracht $F_{y,f \rightarrow w}$ ($= -F_{y,w \rightarrow f}$) in de positieve y-richting opnemen (actie = -reactie, derde wet van Newton). Deze kracht $F_{y,f \rightarrow w}$ is gelijk aan de som van de drukkracht op de vloeistof en de kracht die ontstaat als de impuls van de instromende vloeistof geheel wordt opgenomen door de wand.

De “impulskracht” op de bocht is in de praktijk meestal verwaarloosbaar t.o.v. de drukkracht.

Impulsbalans in de x-richting:

$$0 = \rho v_1 A \cdot 0 - \rho v_2 A \cdot v_2 + \sum F_x \quad (1.138)$$

In de eerste term van het rechterlid staat dat er door de ingaande stroom geen impuls in de x-richting wordt meegenomen.

De krachten die op de vloeistof werken in de x-richting zijn de drukkracht $-p_2 A$ en de reactiekracht van de wand op de vloeistof $+F_{x,w \rightarrow f}$, dus:

$$F_{x,w \rightarrow f} = \rho v_2^2 A + p_2 A \quad (1.139)$$

De wand moet dus een kracht in de positieve x-richting leveren en een kracht $F_{x,f \rightarrow w}$ ($= -F_{x,w \rightarrow f}$) in de negatieve x-richting opnemen (weer actie = -reactie, derde wet van Newton).

Hierboven is steeds aangenomen dat de snelheidsverdelingen aan in- en uitlaat uniform zijn (geen snelheidsverschillen in de doorsnede). In dat geval is de binnenstromende impuls in de x-richting inderdaad $\rho A v_1 \cdot v_1$. Is dit niet het geval, dan moet

voor het binnenstromende impulsdebiet in de y -richting geschreven worden:

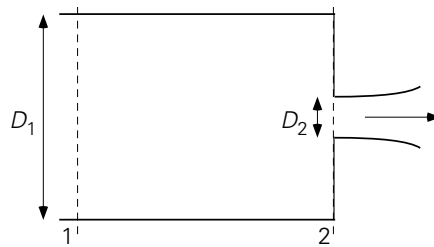
$$\rho \int v_1^2 dA \quad \text{of kortweg} \quad \rho A \langle v_1^2 \rangle \quad (1.140)$$

waarin de haakjes een middeling over de doorsnede voorstellen. \square

Voorbeeld 1.18. De brandslang

Uit een horizontale brandslang (cilindervormig, diameter $D_1 = 10$ cm) spuit een waterstraal door een rond gat (met een diameter $D_2 = 4$ cm) in een flens, die zich aan het einde van de slang bevindt. De snelheid van het water juist in de spuitopening is 15 m/s. De waterstraal spuit vrij de buitenlucht in (zie figuur 1.32). De toestand is stationair.

Bepaal de kracht F , in grootte en richting, die de flens op het water uitoefent. Veronderstel hierbij dat de energiedissipatie verwaarloosd mag worden. Ook mag de contractie van de waterstraal net na de uitstroomopening buiten de beschouwing gehouden worden.



Figuur 1.32.

Om F te bepalen zullen de massa-, de mechanische energie-, en de impulsbalans in de horizontale richting gebruikt moeten worden. Alle drie de balansen hebben hetzelfde controlevolume: het hele buissegment tussen de vlakken 1 en 2 uit figuur 1.32. Vlak 2 loopt precies langs de binnenzijde van de afsluitende flens. De berekening van F gaat als volgt:

massabalans:

$$0 = \rho A_1 v_1 - \rho A_2 v_2 \rightarrow v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 v_2 = 2,4 \text{ m/s} \quad (1.141)$$

De mechanische-energiebalans over het controlevolume luidt:

$$0 = \rho A_1 v_1 \cdot \left(\frac{1}{2} v_1^2 + \frac{p_1}{\rho}\right) - \rho A_2 v_2 \cdot \left(\frac{1}{2} v_2^2 + \frac{p_2}{\rho}\right) \quad (1.142)$$

Dit levert dus dat er een drukval tussen 1 en 2 is: de toename van de kinetische energie wordt gehaald uit de drukenergie. Invullen van de diverse waarden levert

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 = 1,1 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad (1.143)$$

Omdat de druk in de vrij uitstromende straal gelijk is aan de druk van de buitenlucht ($p_2 = 1 \text{ bar}$) is dus de druk in de slang $p_1 = 2,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

Deze drukken komen ook voor in de impulsbalans in de stromingsrichting:

$$0 = \rho A v_1 \cdot v_1 - \rho A_2 v_2 \cdot v_2 + p_1 A_1 - p_2 A_2 + F \quad (1.144)$$

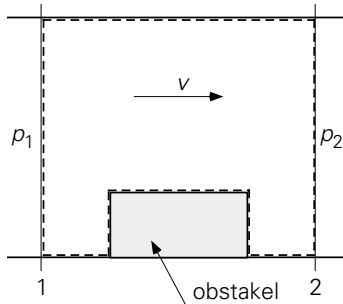
In deze vergelijking zijn behalve F alle grootheden nu bekend; invullen levert dan: $F = -1286 \text{ N}$. De kracht die de flens op het water uitoefent, heeft dus een richting die tegengesteld is aan de richting van de stroming.

Merk op dat de druk in twee vergelijkingen voorkomt: zowel in de mechanische-energiebalans als in de impulsbalans(en). Welke vergelijking voor welk doel gebruikt kan of moet worden, hangt helemaal van het beschouwde probleem af. \square

Voorbeeld 1.19. *Stroming om een obstakel*

Door een horizontale leiding met een constante diameter ($D = 5 \text{ cm}$) stroomt 2 liter water per seconde. In de leiding bevindt zich een obstakel. Dit obstakel vormt een (extra) weerstand voor de stroming, terwijl omgekeerd de stroming een kracht F uitoefent op het obstakel. De toestand is stationair. Met behulp van een druksensor wordt de drukval gemeten over het stuk leiding waarin het obstakel zich bevindt. In dit pijpstuk mag de wrijving aan de wand van de pijp worden verwaarloosd ten opzichte van de stromingsweerstand van het obstakel. Het drukverschil is 980 Pa. Bepaal eerst de kracht F die het water op het obstakel uitoefent.

Stel hiertoe een impulsbalans op over het stuk van de leiding waarover de drukval is gemeten (zie figuur 1.33):



Figuur 1.33.

$$0 = \phi_V \rho v_1 - \phi_V \rho v_2 + p_1 \frac{\pi}{4} D^2 - p_2 \frac{\pi}{4} D^2 - F \quad (1.145)$$

Omdat geldt $v_1 = v_2$ (vanwege de massabalans) en $p_1 - p_2 = 980 \text{ Pa}$ (gemeten) gaat vergelijking (1.145) over in:

$$F = \frac{\pi}{4} D^2 (p_1 - p_2) = 1,92 \text{ N} \quad (1.146)$$

Ten gevolge van wrijving langs het obstakel en in het zog achter het obstakel (in

wervels) wordt er mechanische energie gedissipeerd (omgezet in warmte). Deze energiedissipatie volgt met behulp van de mechanische-energiebalans:

$$0 = -\phi_m \frac{P_2 - P_1}{\rho} - \phi_m e_{fr} \quad (1.147)$$

Hieruit volgt simpel de hoeveelheid mechanische energie die per tijdseenheid vernietigd wordt:

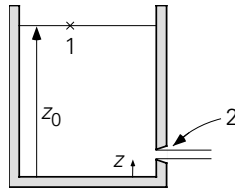
$$\phi_m e_{fr} = 1,96 \text{ J/s} \quad (1.148)$$

In dit voorbeeld kon de energiedissipatie uitgerekend worden, omdat de drukval over het obstakel gemeten en daardoor bekend was. In het algemeen zal dat niet zo zijn en zal gebruik gemaakt moeten worden van een model voor e_{fr} , zodat *drukvalberekeningen* aan leidingsystemen mogelijk zijn. Deze materie komt in hoofdstuk 5 aan de orde. \square

Voorbeeld 1.20. Uitstroming uit een vat

In een groot vat, dat tot een hoogte z_0 gevuld is met water, zit in een van de zijwanden onder de waterspiegel ter hoogte z een gaatje (met een diameter $D \ll D_{\text{vat}}$). Uiteraard stroomt er water door dit gaatje naar buiten. Neem aan dat het gaatje scherpe wanden heeft, zodat bij gebrek aan wand wrijving een ondergeschikte rol zal spelen. Hoe hangt het debiet door het gaatje af van de vloeistofhoogte z_0 ?

Toepassing van de wet van Bernoulli tussen de punten 1 en 2 (zie figuur 1.34) levert voor de snelheid v in het gaatje (met $v = v_2$ en $v_1 \ll v_2$)



Figuur 1.34.

$$v = \sqrt{2g(z_0 - z)} \quad (1.149)$$

En derhalve geldt voor het debiet door het gaatje:

$$\phi_v = \frac{\pi}{4} D^2 v = \frac{\pi}{4} D^2 \sqrt{2g(z_0 - z)} \quad (1.150)$$

In de praktijk is het debiet kleiner dan berekend met vergelijking (1.150) door contractie van de vloeistofstraal. Gewoonlijk wordt dit effect in rekening gebracht door een *uitstroomcoëfficiënt* C op te nemen in het rechterlid van vergelijking (1.150), met $C < 1$. Ook dit komt in hoofdstuk 5 nog aan de orde. \square