Wiskunde voor het MLO – Deel 2

machten / wortels / foutenleer

Jan Lips
Arjo Riemslag

Tweede druk

Oplage 2015

Syntax Media – Utrecht

Voorwoord

Nadat we verschillende jaren met goede ervaringen gewerkt hebben met de verschillende delen van wiskunde voor het MLO, zijn er toch een aantal zaken, die een andere kijk geven op het werken met het boek in de lespraktijk:

- reacties van docenten van collegascholen,
- het instroomniveau van het VMBO,
- meer behoefte aan extra uitleg,
- meer oefening van vaardigheden.

Deze gewijzigde inzichten en ervaringen noopten ons om de uitleg bij nieuwe onderwerpen in kleinere stappen te maken en het aantal voorbeelden uit te breiden. We hebben extra rekenopgaven toegevoegd, waardoor de student vaker oefent en een grotere vaardigheid kan opdoen in het werken met formules en rekenen.

Het gebruik van een ander type rekenmachine, wat de studenten gewend zijn uit hun vorige opleiding, heeft er ook toe geleid dat de voorbeelden daarop zijn aangepast. Verouderde afbeeldingen zijn vervangen en uitwerkingen aangepast aan nieuwere versies van software.

Wij verwachten dat collega's en studenten met de verbeteringen nog beter voorbereid zullen worden op het toepassen van wiskunde in de praktijk.

Arjo Riemslag en Jan Lips

Inhoud

Voorbeeld 1

$$\frac{2^3}{2^3} = 2^{3-3} = 2^0 = 1$$

Deze laatste stap ziet er misschien vreemd uit. Het is blijkbaar mogelijk 0 als exponent te krijgen. Dat er dan 1 uitkomt is niet zo verwonderlijk, dit was aan de opgave al te zien, want:

$$\frac{2^3}{2^3} = \frac{8}{8} = 1$$

Algemeen geldt voor elk grondtal (behalve 0) met als exponent 0, dat er 1 uitkomt! Dus $a^0 = 1$ voor alle a behalve 0.

Voorbeeld 2

$$\frac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2}$$

Zoals je ziet is de exponent hier geen positief geheel getal, maar een negatief getal. Dit soort machten, 2^{-2}, $3^{1,45}$ en $(6,1)^{-5,9}$ heten *oneigenlijke machten*.

Oneigenlijke machten ben je ook tegengekomen bij de wetenschappelijke notatie en bij het omrekenen van eenheden.

Voorbeeld 3

$$1 \text{ ml} = \frac{1}{1000} \text{ l} = 0{,}001 \text{ l} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ l}$$

$$2{,}36 \text{ µA} = \frac{2{,}36}{1000000} = 0{,}00000236 \text{ A} = 2{,}36 \cdot 10^{-6} \text{ A}$$

$$1 \text{ cm}^3 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

Een negatieve exponent geeft aan dat er eigenlijk een breuk bedoeld wordt.

Voorbeeld 4

$$10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1000000}$$

Dit is één miljoenste.

*Als je een macht naar de **andere** kant van de breukstreep brengt is het enige dat verandert het **teken** van de exponent.*

Er geldt bijvoorbeeld:

$$4^{-3} = \frac{1}{4^{+3}}$$

$$10^{-5} = \frac{1}{10^5}$$

$$\frac{1}{a^{-5}} = a^5$$

$$\frac{3}{2 \cdot 10^3} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{a}{b \cdot c \cdot d^3} = a \cdot b^{-1} \cdot c^{-1} \cdot d^{-3}$$

Samenvatting voor bewerkingen met machten

1. $\mathrm{a}^{\mathrm{p}} \cdot \mathrm{a}^{\mathrm{q}} = \mathrm{a}^{(\mathrm{p}+\mathrm{q})}$
2. $\frac{\mathrm{a}^{\mathrm{p}}}{\mathrm{a}^{\mathrm{q}}} = \mathrm{a}^{(\mathrm{p}-\mathrm{q})}$
3. $(\mathrm{a}^{\mathrm{p}})^{\mathrm{q}} = \mathrm{a}^{\mathrm{p} \cdot \mathrm{q}} = \mathrm{a}^{\mathrm{pq}}$
4. $\mathrm{a}^0 = 1$ voor elke a behalve 0.
5. $\mathrm{a}^{-\mathrm{p}} = \frac{1}{\mathrm{a}^{\mathrm{p}}}$

Leer deze samenvatting uit je hoofd zodat je hem *altijd* kunt toepassen!

Opgave 14

Bewerk de volgende opgaven zoveel mogelijk met de regels voor machten. Laat de uitkomst waar mogelijk in de vorm van één macht staan.

a. $2^2 \cdot 2^3$

b. $\frac{2^4}{2^7}$

c. $(-2)^3 \cdot 2^5$

d. $-2^3 \cdot 2^{12}$

e. $10^4 \cdot 10^{-3}$

f. $3^4 \cdot 2^5$

g. $3^4 + 3^3$

h. $10^4 \cdot \frac{10^3 \cdot 10^0}{10^6}$

i. $30^2 - 10^4$

j. $10^0 \cdot a^5$

k. $324^1 \cdot 356^0$

l. $(\frac{1}{2} b^2)^3$

Opgave 15

Schrijf als één macht:

a. $(3^2)^3$

b. $\frac{4^3 \cdot 4^2}{4^5}$

c. $(5^2 \cdot 5^3)^2$

d. $\frac{1}{2^3}$

e. $\frac{2^3}{2^2}$

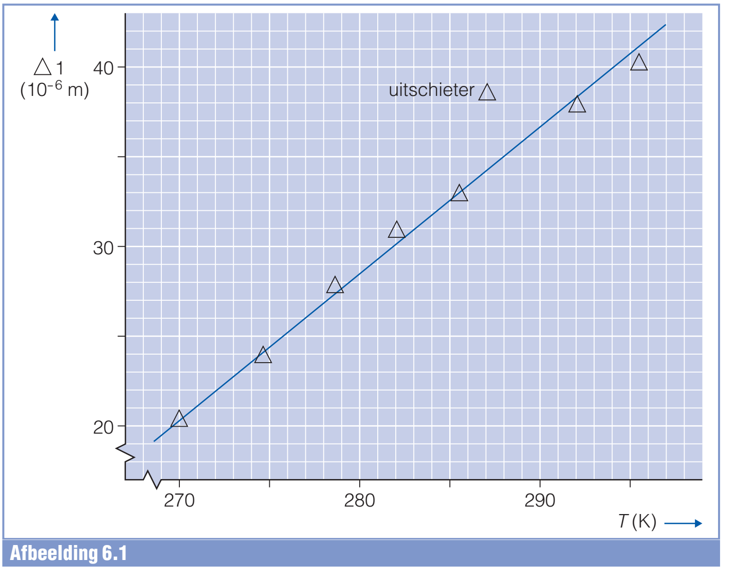
f. $(10^2 \cdot 10^{-2})^2$

g. $3^2 \cdot 3^{-5}$

h. $0^7 \cdot 2^7$

i. $(2a^3)^2$

Wanneer bij een practicumproef onderzocht wordt of er een lineair verband bestaat tussen twee variabelen, wordt hiertoe een aantal meetwaarden genomen, die in een grafiek worden uitgezet. Het resultaat van de grafiek zal een rechte lijn zijn. Een meetwaarde die sterk afwijkt (die dus op de een of andere manier fout gemeten is) valt meteen op, doordat het een grafiekpunt oplevert dat duidelijk niet op de rechte lijn ligt. Zo'n punt wordt een *uitschieter* genoemd.



Afbeelding 6.1

Bovendien is het met behulp van de richtingscoëfficiënt van de lijn mogelijk bepaalde constanten te bepalen, hetgeen al eerder is besproken. Het heeft dus veel voordelen om een verband rechtlijnig (lineair) weer te geven, dit wordt *lineariseren* genoemd.

***Lineariseren** is een niet-lineair verband omzetten in een lineair verband.*

Wanneer dit lukt met formules van de vorm: $s(t) = at^2$ wordt het aantal mogelijkheden wat dat betreft groter.

Het zijn kwadratische formules en als $s(t)$ tegen t wordt uitgezet, zal er een *parabool* ontstaan. Er wordt dan niet voldaan aan de formule voor het lineair verband $y = ax$.
Wordt echter $s(t)$ uitgezet tegen t^2, zodat de x uit de formule vervangen is door t^2, dan wordt hieraan wel voldaan.

De tabel met meetwaarden dient dan te worden uitgebreid met een kolom voor t^2, waarvan de waarden vrij simpel te berekenen zijn.

Voorbeeld 1

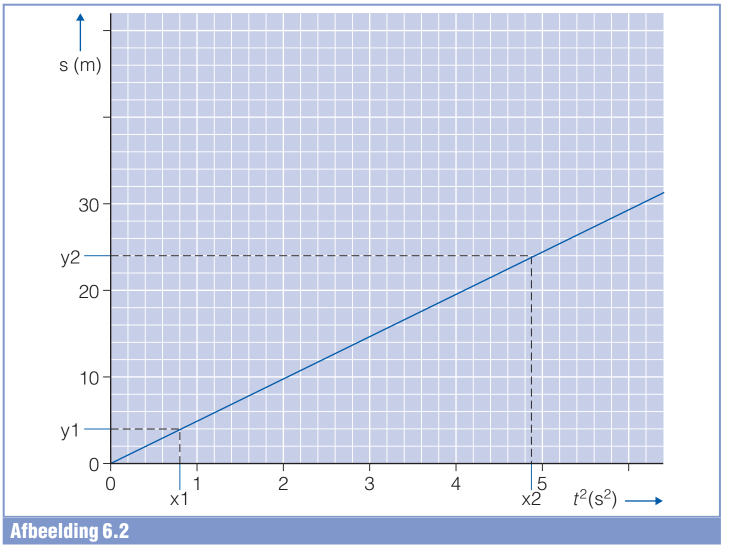
Bij een ‘vrije val’ is het verband tussen de afgelegde weg s en de tijd t:

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

De valversnelling g is een constante, die bepaald moet worden.
Ga voor onderstaande meetwaarden zelf na dat de grafiek van $s(t)$, uitgezet tegen t, geen rechte lijn oplevert.
Volgens bovenstaande moet de tabel worden uitgebreid met een kolom voor t^2, hetgeen hier is gebeurd.

t (s)	s (m)	t^2 (s^2)
0,00	0,00	0,00
0,50	1,24	0,25
1,00	4,95	1,00
1,50	10,85	2,25
2,00	19,60	4,00
2,50	30,50	6,25

De grafiek van s uitgezet tegen t^2 ziet er nu uit als in Afbeelding 6.2.



Afbeelding 6.2

Er is uitgezet: t^2 op de x-as dus t^2 is de onafhankelijke variabele, $s(t)$ op de y-as dus $s(t)$ is de afhankelijke variabele.

Als de formule $s(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2\ (+0)$ vergeleken wordt met:

$$y = \quad a \quad \cdot \quad x \quad + b$$

valt hieruit op te maken dat $a = \frac{1}{2} g$ en $b = 0$.

Het oplossen van exponentiële vergelijkingen

Met de nu bekende regels is het mogelijk de meeste vergelijkingen met de onbekende in de exponent op te lossen.
Laten we nog eens een voorbeeld bekijken:

Voorbeeld

$5{,}38 \cdot 2^x = 100$

eerst de macht isoleren	$2^x = 100{:}5{,}38$
beide kanten de log nemen	$\log 2^x = \log(100{:}5{,}38)$
eigenschap 3 toepassen	$x \cdot \log 2 = \log \mathbf{18{,}5}87$
delen door log 2	$x = \dfrac{\log \mathbf{18{,}5}87}{\log 2}$
uitrekenen 2 is een constante	$x = \dfrac{\mathbf{1{,}269}21}{0{,}301}$
dus	$x = \mathbf{4{,}216}25$
afronden	$x = 4{,}216$

Opgave 15

Los steeds de onbekende op en rond af:

a. $3^x = 200$
b. $4^{2 \cdot x} = 345$
c. $45 \cdot 6^{0{,}5x} = 3000$
d. $100 \cdot 1{,}01^{2x} = 10^6$
e. $0{,}12 \cdot 7^{4x} = 29$
f. $34 \cdot (0{,}5)^{7x} = 0{,}001$
g. $87 \cdot 2^{-4x} = 1$

Opgave 16

Los steeds de onbekende op:

a. ${}^4\log 6 = x$
b. $1{,}87^x = 48{,}9$
c. ${}^8\log 56 = x$
d. $2{,}8^{3x} = 68$
e. ${}^5\log 98^2 = x$
f. ${}^{0{,}3}\log 0{,}1 = x$
g. $3^x = 50$
h. ${}^{0{,}9}\log 0{,}1 = x$
i. ${}^{-4}\log 56 = x$
j. ${}^{333}\log 0{,}1 = x$
k. $45 \cdot 3{,}85^x = 567{,}0 \cdot 10^3$
l. ${}^4\log -8 = x$

Opgave 17

In een salade zitten als hij wordt aangemaakt 250 bacteriën per mg. De bacteriën delen zich in 10 uur in tweeën als de salade bij kamertemperatuur wordt bewaard.
Om 8.00 uur wordt de salade gemaakt en daarna bij kamertemperatuur bewaard.

a. Hoeveel bacteriën per mg zijn er om 18.00 uur en 22.00 uur?
b. Maak een exponentiële vergelijking waarmee je het aantal bacteriën/mg op ieder tijdstip kunt berekenen. (Zoek als je het niet meer weet op hoe dat ook al weer moest.)
c. Als er meer dan 20.000 bacteriën/mg in de salade zitten, is dit schadelijk voor de gezondheid.
Wanneer moet de salade weggegooid worden?

Opgave 18

Om 9.30 uur wordt er een giftige gaswolk ontdekt boven Amsterdam. Deze gaswolk is afkomstig van een chemische fabriek en heeft om 9.30 uur al een inhoud van 120 liter. Ervaring leert dat elk halfuur de wolk driemaal zo groot wordt.

a. Hoe groot is de wolk om 12.00 uur?
b. Geef een vergelijking waarmee je met behulp van de tijd de grootte van de wolk kunt berekenen.
c. Als je weet dat de wolk bij het ontstaan één liter groot was, hoe laat is de wolk dan ontstaan?
d. Een andere wolk is om 9.00 uur vijf liter groot en om 11.00 uur is deze wolk 60 liter.
   Bereken de groeifactor van deze wolk.

Opgave 19

Een fervent liefhebber van vouwblaadjes heeft een supergroot vel papier met een dikte van 0,05 mm. De lengte en de breedte van dit vel zijn oneindig groot.
Hij gaat het papier doorknippen en op elkaar leggen. Daarna pakt hij de stapel en knipt die weer doormidden.

a. Hoe groot is zijn stapel na:
   driemaal knippen en stapelen?
   vijfmaal knippen en stapelen?
   tienmaal knippen en stapelen?
b. Maak een vergelijking waarmee je de dikte kunt berekenen na: x keer knippen en stapelen.
c. Wanneer past zijn stapel niet meer in zijn kamer van 3 m hoog?

Hij gaat naar buiten en vervolgt zijn geknip en gestapel. De buurman komt kijken en zegt: 'Dadelijk kun je naar de maan met jouw stapel.' De vouwer begint te lachen en zegt dat hij dan wel heel lang moet knippen en stapelen. De buurman denkt dat hij er met 100 keer wel komt en de vouwer denkt aan 500 keer.

d. Reken het precies uit als de afstand maan-aarde $3{,}844 \cdot 10^8$ m is.

Opgave 20

Voor de reactie:

$$MnO_4^- + 5Fe^{2+} + 8H_3O^+ \rightleftharpoons Mn^{2+} + 5Fe^{3+} + 12H_2O$$

kan de evenwichtsconstante K berekend worden met de volgende formule:

$$\log K = \frac{5(1{,}51\ V - 0{,}77\ V)}{0{,}059\ V}$$

Bereken deze evenwichtsconstante.
(Omdat K zo'n grote waarde heeft kun je concluderen dat het evenwicht van deze reactie volledig rechts ligt. Waarschijnlijk heb je dat tijdens het practicum ook al ontdekt.)

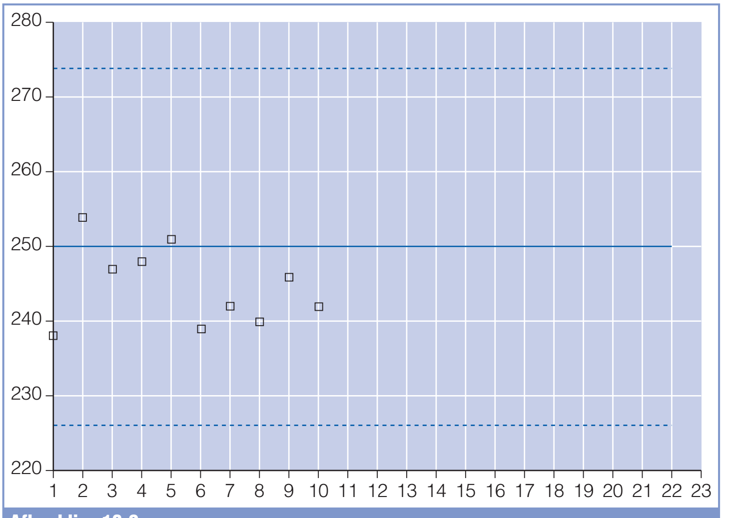
Tabel 16.1

nr.	*waarde*
1	238
2	254
3	247
4	248
5	251
6	239
7	242
8	240
9	246
10	242

Voorbeeld 1

Van de waarnemingen van tabel 16.1 met $\mu = 250$ en $\sigma = 12$ is de Shewhart-kaart van afbeelding 16.2 gemaakt.

Conclusie: er zijn geen uitschieters, maar er liggen wel opvallend veel meetwaarden *onder* het gemiddelde.



Afbeelding 16.2

CuSum-kaart

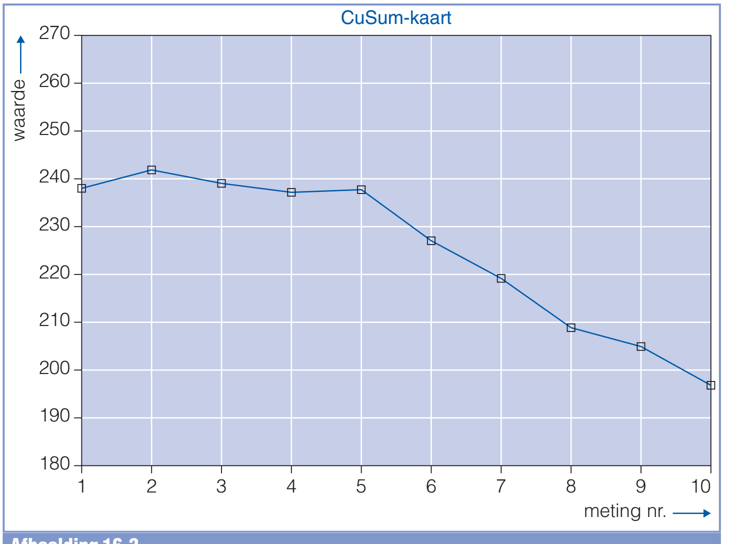
De Shewhart-kaart geeft snel en overzichtelijk informatie, maar heeft als nadeel, dat kleine veranderingen in de precisie niet goed waargenomen worden. Dit kan wel worden bereikt door elke fout in een afzonderlijke meting bij de vorige op te tellen.
De naam CuSum is dan ook afgeleid uit Cumulative Sum (cumulative = opstapelend).

De CuSum-kaart wordt als volgt opgezet:
– Het gemiddelde (μ) wordt als midden-as voor de grafiek genomen.
– Langs de horizontale as komt het nummer of de tijd van de bepaling te staan en verticaal komt cumulatief het verschil met het gemiddelde en opeenvolgende meetwaarden.
  De afwijking wordt met inbegrip van het teken bij de vorige waarden opgeteld.

Bij een normaal verdeelde kaart zullen de waarden rond de horizontale μ-as liggen, omdat de afwijkingen gemiddeld tegen elkaar wegvallen. De afwijking is nu eens positief ten opzichte van μ en dan weer negatief, en zal gemiddeld dus nul zijn.
Wordt er echter systematisch een fout gemaakt of raakt het analyseapparaat defect, waardoor er een foute bepaling ontstaat, dan toont de kaart een *trend*. Dat wil zeggen dat de lijn naar onder of naar boven wegbuigt van de horizontale μ-as.

Voorbeeld 2

Het vorige voorbeeld, nu op een CuSum-kaart uitgewerkt, wordt dan weergegeven in tabel 16.2 en afbeelding 16.3.



Afbeelding 16.3

$\mu = 250$
$\sigma = 12$
$di = x - \mu$
CuSum $= \Sigma\,(x - \mu)$
Waarde $= \mu +$ CuSum

Tabel 16.2

nr.	*waarde*	*di*	*CuSum*	*waarde*
1	238	–12	–12	238
2	254	4	–8	242
3	247	–3	–11	239
4	248	–2	–13	237
5	251	1	–12	238
6	239	–11	–23	227
7	242	–8	–31	219
8	240	–10	–41	209
9	246	–4	–45	205
10	242	–8	–53	197

Conclusie: Van alle metingen die verricht zijn *na* controlemonster 5 mogen de resultaten *niet* doorgegeven worden. Eerst moet de apparatuur worden nagekeken en dan moeten de monsters opnieuw worden gemeten.

Afhankelijk van het beeld dat zo'n CuSum-kaart geeft, wordt actie ondernomen richting de analyse of de apparatuur.