

**Lineaire Algebra  
en  
Voortgezette Analyse**



Rinse Poortinga

**Lineaire Algebra  
en  
Voortgezette Analyse**

© 2012 Rinse Poortinga  
ISBN 9789081813518  
NUR 918

<http://www.rinsepoortinga.nl>

Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, door middel van druk, fotokopieën, geautomatiseerde gegevensbestanden of op welke andere wijze ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

omslagontwerp: Ype Poortinga  
druk: Vior Webmedia V.O.F.

# Voorwoord

De analyse van functies van één reële variabele wordt in dit boek voortgezet naar de analyse van functies van meerdere reële variabelen en naar de analyse van functies van één complexe variabele. De eerste vier hoofdstukken behandelen de lineaire algebra die hierbij nodig is.

De hoofdstukken 5 t/m 10 gaan over limieten, continuïteit en differentieerbaarheid van  $\mathbb{R}^n$ - $\mathbb{R}^m$ -functies, d.w.z. functies met een domein in  $\mathbb{R}^n$  en een bereik in  $\mathbb{R}^m$ . Speciale aandacht krijgen de continu differentieerbare en liefst ook nog reguliere functies. Belangrijke stellingen als de inverse functiestelling en de impliciete functiestelling worden bewezen. Verder behandelen we integralen  $\int_V f$  met integratiedomein  $V \subset \mathbb{R}^n$  en een  $\mathbb{R}^n$ - $\mathbb{R}$ -functie  $f$  als integrand, waarbij we ons beperken tot Riemann-integralen over een integratiedomein, dat meetbaar is in de zin van Jordan. Door ook aan de integrand  $f$  nog enkele eisen te stellen is het mogelijk om een begrijpelijk en wiskundig correct bewijs van de transformatiestelling voor integralen te geven. Op een logische manier volgen daarna integralen over krommen en oppervlakken.

$\mathbb{C}$  is het lichaam van de complexe getallen. We stellen ons  $\mathbb{C}$  voor als een plat vlak. In de laatste vijf hoofdstukken worden de eigenschappen van  $\mathbb{C}$ - $\mathbb{C}$ -functies (met domein en bereik in  $\mathbb{C}$ ) behandeld. De aandacht gaat vooral uit naar holomorfe functies. Dat zijn functies die complex differentieerbaar zijn op een open deelverzameling van  $\mathbb{C}$ . Belangrijk hulpmiddel bij het bestuderen van deze functies zijn de integralen over een kromme in het complexe vlak  $\mathbb{C}$ . In hoofdstuk 11 worden krommen in  $\mathbb{R}^2$  uitvoerig bestudeerd. Punt  $(x, y)$  in  $\mathbb{R}^2$  correspondeert met het complexe getal  $z = x + i \cdot y$ . De resultaten uit hoofdstuk 11 zijn eenvoudig te vertalen naar krommen in  $\mathbb{C}$ . Een kromme in  $\mathbb{C}$  is een continue  $\mathbb{R}$ - $\mathbb{C}$ -afbeelding met een interval  $I \subset \mathbb{R}$  als parameterdomein. We hebben geen andere dan stuksgewijs reguliere krommen nodig. Voor zulke krommen kunnen we een betrekkelijk eenvoudig bewijs van de Jordankrommestelling geven. Holomorfe functies hebben interessante eigenschappen die vaak ontbreken bij differentieerbare  $\mathbb{R}$ - $\mathbb{R}$ -functies. Veel bekende  $\mathbb{R}$ - $\mathbb{R}$ -functies kunnen op precies één manier uitgebreid worden tot holomorfe  $\mathbb{C}$ - $\mathbb{C}$ -functies. De eigenschappen van deze uitbreidingen laten soms opmerkelijke verbanden zien tussen de oorspronkelijke  $\mathbb{R}$ - $\mathbb{R}$ -functies. Verrassend is bijvoorbeeld de manier waarop de complexe sinus en cosinus blijken samen te hangen met de exponentiële functie. Een holomorfe functie is oneindig vaak differentieerbaar. Een functie  $f$  die holomorf is binnen een cirkel met middelpunt  $c$  wordt daar gerepresenteerd door zijn Taylorreeks  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - c)^k$  met  $a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}$ .

We richten ons meer op de theorie dan op praktisch rekenwerk en concrete toepassingen. Door niet de grootst mogelijke algemeenheid na te streven en ons te beperken tot de hoofdzaken, zijn we in staat m.b.t. de stof die wel aan de orde komt redelijk volledig te zijn, met name in het bewijzen van de gebruikte stellingen. Om bepaalde hoofdstukken minder afhankelijk te maken van voorafgaande stof bevatten sommige hoofdstukken enige overlap met eerdere hoofdstukken.

Dit boek kan gebruikt worden als een vervolgdeel bij mijn eerder verschenen *Analyse + Meetkunde*, maar dat hoeft niet. Het is geschreven als een zelfstandig boek, dat geschikt is voor iedereen met voldoende kennis van de analyse van  $\mathbb{R}$ - $\mathbb{R}$ -functies. Als doelgroep hebben we vooral studenten en (aanstaande) docenten wiskunde of een ander exact vak op het oog.

*Lineaire Algebra en Voortgezette Analyse* geeft op universitair bachelorniveau de theoretische onderbouwing van een klassiek en zeer toepasbaar deel van de wiskunde en legt een stevige basis voor verdere studie. Het is goed idee om dit boek te bestuderen in combinatie met meer toepassingsgerichte boeken, zoals de boeken uit de serie *Schaum's Outlines* van McGraw-Hill, die in de literatuurlijst worden genoemd. Deze boeken bevatten een groot aantal uitgewerkte opgaven en zijn daardoor zeer geschikt voor zelfstudie. De beknopte behandeling van de lineaire algebra in de eerste vier hoofdstukken maakt het gewenst dat de lezer (m/v) enige ervaring heeft met het bedrijven van meetkunde in  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$  met behulp van vectoren en matrices. Als eerste inleiding in de lineaire algebra is bijv. *Vectoren en Matrices* van Jan van de Craats geschikt.

IJlst, juli 2012

Rinse Poortinga

# INHOUD

## Lineaire Algebra

<b>1 Lineaire ruimten</b> .....	1
1.1 Translatieruimte. 1	
1.2 Lineaire deelruimte. 3	
1.3 Dimensie. 5	
1.4 Lineaire afbeeldingen. 8	
1.5 Affiene afbeeldingen en affiene deelruimten. 9	
1.6 Multilineaire afbeeldingen. 14	
1.7 Determinant. 16	
1.8 Inproduct. 21	
1.9 Determinant en inproduct van pijlen. 25	
<b>2 Lineaire afbeeldingen</b> .....	27
2.1 Lineaire afbeeldingen. 27	
2.2 Rijen- en kolommenrang. 32	
2.3 Transponeren. 34	
2.4 De determinant. 35	
2.5 De oplossingen van een stelsel lineaire vergelijkingen. 40	
2.6 Gauss-eliminatie. 44	
2.7 Elementaire lineaire transformaties. 50	
<b>3 Volume van een blok</b> .....	52
3.1 Blok. 52	
3.2 Convexe verzamelingen. 54	
3.3 Loodrechte projectie en spiegeling. 57	
3.4 Isometrie. 58	
3.5 De determinant van Gram. 65	
3.6 Het uitwendig product. 67	
3.7 Nog een andere formule voor het volume. 71	
<b>4 Eigenwaarden en kwadrieken</b> .....	75
4.1 Eigenwaarden. 75	
4.2 Symmetrische lineaire afbeeldingen. 79	
4.3 Kwadratische functies. 86	
4.4 Kwadrieken. 88	
4.5 Middelpunt, raakhypervlak. 96	
4.6 Pool en poolhypervlak. 100	

# Analyse in $\mathbb{R}^n$

## 5 Limieten en continuïteit ..... 103

- 5.1 Convergente rijen. 103
- 5.2 Cauchy-rij. 107
- 5.3 Intervallen. 108
- 5.4 Heine-Borel. 108
- 5.5 Continuïteit. 111
- 5.6 Lipschitzcontinuïteit en uniforme continuïteit. 113
- 5.7 Maximum en minimum. 115
- 5.8 Limieten van afbeeldingen. 117
- 5.9  $\mathbb{R}^n$ - $\mathbb{R}$ -functies. 118
- 5.10 Krommen. 120
- 5.11 De lengte van een kromme. 124
- 5.12 Samenhangende verzamelingen. 128
- 5.13 Gebieden. 129
- 5.14 Samenstellen van afbeeldingen. 130
- 5.15 Elementaire opbouw van functies en afbeeldingen. 130

## 6 Afgeleide en integraal ..... 133

- 6.1 Partiële afgeleiden. 133
- 6.2 Differentieerbare functies. 135
- 6.3 Partiële afgeleiden van hogere orde. 146
- 6.4 Continu differentieerbare functies. 146
- 6.5 Differentieerbare afbeeldingen. 150
- 6.6 Integralen met een parameter in de integrand. 153
- 6.7 Integreren over een compact interval in  $\mathbb{R}^2$ . 154
- 6.8 Integreren over een compact interval in  $\mathbb{R}^n$ . 155
- 6.9 Riemannsommen. 157
- 6.10 Herhaalde integraal. 159
- 6.11 Integreren over een x- of y-normaal integratiedomein. 161
- 6.12 Enkele toepassingen. 163

## 7 Differentieerbare afbeeldingen ..... 164

- 7.1 Differentieerbaarheid van  $\mathbb{R}^n$ - $\mathbb{R}^m$ -afbeeldingen. 164
- 7.2 Rekenregels voor de afgeleide. 166
- 7.3 Middelwaardstelling. 169
- 7.4 Extreme waarden. 171
- 7.5 Raakvlak en raakruimte, k-oppervlak in  $\mathbb{R}^n$ . 177
- 7.6 Inverse afbeelding. 184
- 7.7 Impliciet gedefinieerde functies en afbeeldingen. 187
- 7.8 Niveauverzamelingen van  $\mathbb{R}^n$ - $\mathbb{R}$ -functies. 194
- 7.9 Niveauverzamelingen van een  $\mathbb{R}^n$ - $\mathbb{R}^m$ -afbeelding. 200



7.10 Extreme waarden van een functie op  
een niveauperzameling. 204

## **8 Volume en integraal** ..... 210

- 8.1 Partities. 210
- 8.2 Volume en intervalssommen. 211
- 8.3 Integreren over een algemener integratiedomein. 214
- 8.4 Integralen met een meetbaar integratiedomein  
en een integrand die bijna overal continu is. 216
- 8.5 Herhaalde integralen, Fubini. 219
- 8.6 Volume en integraal. 220
- 8.7 Het principe van Cavalieri. 224
- 8.8 Hoe het volume verandert onder een  
affiene transformatie. 227
- 8.9 De discontinuïteiten van een integreerbare functie. 231
- 8.10 Sprongdiscontinuïteiten bij  $\mathbb{R}$ - $\mathbb{R}$ -functies. 239

## **9 Volumes en integralen onder afbeeldingen**..... 241

- 9.1 Volume onder  $\mathbb{R}^n$ - $\mathbb{R}^n$ -afbeeldingen. 241
- 9.2 De transformatiestelling voor integralen. 247
- 9.3 Poolcoördinaten in  $\mathbb{R}^2$ . 250
- 9.4 Bol- en cilindercoördinaten in  $\mathbb{R}^3$ . 255
- 9.5 Enkele standaard toepassingen. 259

## **10 Integreren over een k-oppervlak**..... 265

- 10.1 Meetbaar k-oppervlak in  $\mathbb{R}^n$ . 265
- 10.2 Enkele toepassingen. 275
- 10.3 Integreren over een k-oppervlak in  $\mathbb{R}^n$ . 282
- 10.4 Integreren over een kromme in  $\mathbb{R}^n$ , lijnintegraal. 285
- 10.5 Integreren over een (n-1)-oppervlak in  $\mathbb{R}^n$ . 288
- 10.6 De divergentiestelling. 292
- 10.7 Uitbreiding van de divergentiestelling  
naar normale integratiedomeinen. 300
- 10.8 De stelling van Green. 304
- 10.9 Primitieve. 305

# Analyse in het complexe vlak

<b>11 Krommen in <math>\mathbb{R}^2</math></b> .....	311
11.1 Krommen.	311
11.2 Poolcoördinaten.	315
11.3 Windingsgetal.	318
11.4 Vergelijken van windingsgetallen.	320
11.5 Gebieden waarvan alle randpunten op een kromme liggen.	322
11.6 Jordankrommen.	326
11.7 Lijnintegralen.	330
11.8 De stelling van Green.	331
11.9 Primitieve.	338
11.10 Enkelvoudig samenhangende gebieden.	342
11.11 De hoofdstelling van de algebra.	344
<b>12 Complexe functies</b> .....	348
12.1 Differentieerbaarheid van $\mathbb{C}$ - $\mathbb{C}$ -functies.	352
12.2 De exponentiële functie, sinus en cosinus.	359
12.3 Logaritmen.	366
12.4 Machten met een gehele exponent.	370
12.5 Polynomen.	377
12.6 Differentiëren en integreren van $\mathbb{R}$ - $\mathbb{C}$ -functies.	379
12.7 Krommen.	382
12.8 Integreren langs een kromme.	384
12.9 Windingsgetal.	386
12.10 Integralen met een parameter in de integrand.	388
<b>13 De integraalstelling van Cauchy</b> .....	391
13.1 Functies met een primitieve.	391
13.2 Het lemma van Goursat.	393
13.3 Enkele gevolgen van de integraalformules van Cauchy.	397
13.4 Integraalstelling en integraalformules voor Jordankrommen.	403
13.5 Residuen.	407
13.6 Enkelvoudig samenhangende gebieden.	408
13.7 Meer eigenschappen van holomorfe functies.	414
13.8 Nulpunten, polen en residuen.	420
13.9 Een algemene versie van de integraalstelling en integraalformule van Cauchy.	424
13.10 Cykels.	427

<b>14 Reeksen</b> .....	431
14.1 Taylorreeksen en Maclaurinreeksen.	431
14.2 De MacLaurinreeks van het product van twee functies.	434
14.3 Convergentiecriteria voor reeksen.	437
14.4 Uniforme convergentie.	445
14.5 Machtreeksen.	451
14.6 Eigenschappen van de limietfunctie van een machtreeks.	455
14.7 Sommeren over $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .	457
14.8 Cauchyproduct.	462
 <b>15 Laurentreeksen</b> .....	 464
15.1 Laurentreeksen.	464
15.2 De orde van een functie in een punt.	469
15.3 Berekenen van reële integralen met behulp van residuen.	474
 <b>Literatuur</b> .....	 476
 <b>Trefwoorden</b> .....	 477



# 3 Volume van een blok

## 3.1 Blok.

**3.1.1 Definitie.** De puntenverzameling  $V = \{x_1 A_1 + \dots + x_k A_k \mid x_1, \dots, x_k \in [0, 1]\}$ , met  $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^n$  en  $k \in \mathbb{N}^+$ , noemen we het door de vectoren  $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k}$  in  $\mathbb{R}^n$  opgespannen *blok*, notatie  $V = \text{blok}(\overline{OA_1}, \dots, \overline{OA_k})$ . Staan  $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k}$  twee aan twee loodrecht op elkaar, dan noemen we het blok een *balk*. Zijn  $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k}$  bovendien allemaal even lang, dan noemen we de balk een *kubus*. Is  $A_1, \dots, A_k$  een lineair onafhankelijk stel punten, dan noemen we het blok (de balk, de kubus) *k-dimensionaal* of kortweg een *k-blok* (k-balk, k-kubus).

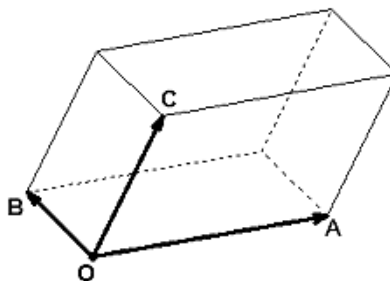
*Voorbeeld.* In  $\mathbb{R}^n$  is de dimensie van een blok hoogstens gelijk aan  $n$ . De  $2^k$  hoekpunten van het k-blok

$$V = \{x_1 A_1 + \dots + x_k A_k \mid x_1, \dots, x_k \in [0, 1]\}.$$

zijn de punten in

$$H = \{x_1 A_1 + \dots + x_k A_k \mid x_1, \dots, x_k \in \{0, 1\}\}.$$

Een 1-dimensionaal blok is een lijnstuk. Een 2-dimensionaal blok wordt een parallellogram genoemd. De 4 zijden van een parallellogram zijn lijnstukken. De 6 zijvlakken van een 3-dimensionaal blok zijn parallellogrammen [zie afbeelding]. Onder de lineaire  $\mathbb{R}^k$ - $\mathbb{R}^n$ -afbeelding  $L = [A_1, \dots, A_k]$  wordt de *eenheidskubus*  $[0, 1]^k$  in  $\mathbb{R}^k$  afgebeeld op het k-blok  $V$ .



Ook het translatiebeeld van een blok in  $\mathbb{R}^n$  noemen we een blok in  $\mathbb{R}^n$ . Het blok  $V = \{x_1 A_1 + \dots + x_k A_k \mid x_1, \dots, x_k \in [0, 1]\}$  gaat onder de translatie  $X \mapsto C$  over in het blok  $V' = \{x_1 A_1 + \dots + x_k A_k + C \mid x_1, \dots, x_k \in [0, 1]\}$ . Is  $A_1, \dots, A_k$  lineair onafhankelijk, dan is  $V'$  een k-dimensionaal blok.

Het blok  $W = \{P + x_1(Q_1 - P) + \dots + x_k(Q_k - P) \mid x_1, \dots, x_k \in [0, 1]\}$  heet het door de pijlen  $\overline{PQ_1}, \overline{PQ_2}, \dots, \overline{PQ_k}$  opgespannen blok, notatie  $W = \text{blok}(\overline{PQ_1}, \overline{PQ_2}, \dots, \overline{PQ_k})$ . Dit blok bestaat uit de eindpunten van de pijlen  $\overline{PX} = x_1 \overline{PQ_1} + \dots + x_n \overline{PQ_n}$  met coëfficiënten  $x_1, \dots, x_k \in [0, 1]$ .  $W$  is het beeld van de door  $\overline{OE_1}, \overline{OE_2}, \dots, \overline{OE_k}$  opgespannen eenheidskubus in  $\mathbb{R}^k$  onder de affiene  $\mathbb{R}^k$ - $\mathbb{R}^n$ -afbeelding  $F$  zo dat  $F(O) = P$  en  $F(E_1) = Q_1, \dots, F(E_k) = Q_k$ .

*Opgave.* Stel  $V = \{xA + yB + zC \mid x, y, z \in [0, 1]\}$  is een blok in  $\mathbb{R}^3$  met  $A, B$  lineair onafhankelijk en  $C = 2A + B$ . Ga na dat  $V$  dan niet een 2-dimensionaal blok [ofwel een parallellogram] in  $\mathbb{R}^3$  is.

Straks zullen we het *volume* van blokken in  $\mathbb{R}^n$  gaan definiëren. We nemen aan dat dit volume onder een translatie niet verandert, dus we kunnen ons beperken tot blokken die worden opgespannen door vectoren. Het translatiebeeld van zo'n blok kennen we dan hetzelfde volume toe.

Het  $k$ -dimensionale volume van het door  $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_k}$  in  $\mathbb{R}^n$  opgespannen blok duiden we aan als  $\text{vol}_{k,n}(A_1, \dots, A_k)$  en we stellen

$$\text{vol}_{k,n}(\overline{PQ_1}, \dots, \overline{PQ_k}) = \text{vol}_{k,n}(Q_1 - P, \dots, Q_k - P).$$

Verder stellen we

$$\text{vol}_{1,n}(A_1) = |A_1| \text{ en } \text{vol}_{2,n}(A_1, A_2) = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \sin \angle A_1 O A_2.$$

Dus  $\text{vol}_{2,n}(A_1, A_2)$  is gelijk aan de oppervlakte van het door  $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}$  opgespannen parallellogram, als  $A_1, A_2$  lineair onafhankelijk is. Als  $A_1, A_2$  lineair afhankelijk is, dan  $\text{vol}_{2,n}(A_1, A_2) = 0$ . Als  $k = n$ , dan bestaat de determinant  $\det(A_1, \dots, A_n)$  en stellen we

$$\text{vol}_{n,n}(A_1, \dots, A_n) = |\det(A_1, \dots, A_n)|.$$

Later zullen we  $\text{vol}_{k,n}(A_1, \dots, A_k)$  ook definiëren voor  $k \neq 1, 2$  of  $n$ . Zie 3.4.7.

We beperken ons eerst even tot het geval  $k = n$ . Dan

$$\det(A_1, \dots, A_n) = 0 \Leftrightarrow A_1, \dots, A_n \text{ is lineair afhankelijk}$$

en dus ook

$$\text{vol}_{n,n}(A_1, \dots, A_n) = 0 \Leftrightarrow A_1, \dots, A_n \text{ is lineair afhankelijk.}$$

Als  $\det(A_1, \dots, A_n) \neq 0$ , dan noemen we de rij  $A_1, \dots, A_n$  positief resp. negatief georiënteerd, als  $\det(A_1, \dots, A_n) > 0$  resp.  $\det(A_1, \dots, A_n) < 0$ . Dan stelt  $\det(A_1, \dots, A_n)$  het georiënteerde [d.w.z. van een teken voorziene] volume voor van het door  $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_n}$  opgespannen blok.

*Opmerking.* Eigenlijk moeten we ook de determinant in  $\mathbb{R}^n$  van een index  $n$  voorzien en  $\det_n$  schrijven in plaats van  $\det$ . Als  $n \neq m$ , dan zijn  $\det_n$  en  $\det_m$  verschillende functies. Toch levert het weglaten van de index  $n$  eigenlijk nooit problemen op,  $n$  is wel bekend uit de context. In bepaalde situaties kan het nodig zijn dat we  $\det_n$  schrijven om misverstand te voorkomen. Hetzelfde geldt natuurlijk ook voor  $\text{vol}_{k,n}(A_1, \dots, A_k)$ . Het getal  $k$  kunnen we wel aflezen uit het aantal punten binnen de haakjes en  $n$  is vrijwel altijd uit de context bekend. Het kan dan geen kwaad om  $\text{vol}(A_1, \dots, A_k)$  te schrijven i.p.v.  $\text{vol}_{k,n}(A_1, \dots, A_k)$ . Voorlopig zullen we de indices er echter voor de duidelijkheid nog bij schrijven.

Is  $L$  een lineaire afbeelding van  $\mathbb{R}^n$  in zichzelf, dan

$$\det(L(A_1), \dots, L(A_n)) = \det(L) \cdot \det(A_1, \dots, A_n).$$

Zie de opmerking na 1.7.6. Dus het  $n$ -dimensionaal volume van een blok in  $\mathbb{R}^n$  wordt onder een lineaire afbeelding  $L$  vermenigvuldigd met  $|\det(L)|$ .

Het *georiënteerde volume* van blok  $(\overline{PQ_1}, \dots, \overline{PQ_n})$  stellen we in overeenstemming met het voorgaande gelijk aan  $\det(\overline{PQ_1}, \dots, \overline{PQ_n})$ . Het niet-georiënteerde volume van blok  $(\overline{PQ_1}, \dots, \overline{PQ_n})$  is gelijk aan  $|\det(\overline{PQ_1}, \dots, \overline{PQ_n})|$ .

Onder een affiene afbeelding  $F$  van  $\mathbb{R}^n$  in zichzelf zo dat  $F(X) = L(X) + C$ , met  $L$  lineair, wordt dit blok afgebeeld op blok  $(\overline{F(P)F(Q_1)}, \dots, \overline{F(P)F(Q_n)})$  met volume

$$\begin{aligned} \det(\overline{F(P)F(Q_1)}, \dots, \overline{F(P)F(Q_n)}) &= \det(F(Q_1) - F(P), \dots, F(Q_n) - F(P)) \\ &= \det(L(Q_1) - L(P), \dots, L(Q_n) - L(P)) = \det(L(Q_1 - P), \dots, L(Q_n - P)) \\ &= \det(L) \cdot \det(Q_1 - P, \dots, Q_n - P) = \det(L) \cdot \det(\overline{PQ_1}, \dots, \overline{PQ_n}). \end{aligned}$$

Dus onder een affiene afbeelding  $F$  wordt het georiënteerd volume van een blok vermenigvuldigd met de determinant van het lineaire deel van  $F$ .

**3.1.2** Is  $F$  een affiene afbeelding van  $\mathbb{R}^n$  in zichzelf zo dat  $F(X) = L(X) + C$ , met  $L$  lineair, dan  $\det(\overline{F(P)F(Q_1)}, \dots, \overline{F(P)F(Q_n)}) = \det(L) \cdot \det(\overline{PQ_1}, \dots, \overline{PQ_n})$ .

*Opmerking.* Een affiene afbeelding  $F(X) = L(X) + C$  induceert op de lineaire pijlenruimte  $\{\overline{PX} \mid X \in \mathbb{R}^n\}$  een afbeelding  $\vec{F}$  zo dat  $\vec{F}(\overline{PX}) = \overline{F(P)F(X)}$ . Deze afbeelding  $\vec{F}$  is lineair  $\Leftrightarrow F$  is affien.

*N.B.* Alleen een  $n$ -dimensionaal blok heeft in  $\mathbb{R}^n$  een oriëntatie. Aan blokken met een lagere dimensie in  $\mathbb{R}^n$  wordt geen oriëntatie toegekend.

### 3.2 Convexe verzamelingen.

**3.2.1 Definitie.** Een verzameling  $V \subset \mathbb{R}^n$  heet *convex*, als  $V$  met ieder tweetal punten  $P$  en  $Q$  ook alle punten van het lijnstuk  $PQ$  bevat.

Lijnstuk  $PQ$  bestaat uit de punten  $P + t \cdot (Q - P) = (1-t)P + tQ$  met  $0 \leq t \leq 1$ . Anders gezegd:  $X$  ligt op lijnstuk  $PQ$ , als  $X = uP + vQ$  met  $u + v = 1$  en  $u, v \in [0, 1]$ .

We noemen  $X$  dan een *convexe combinatie* van  $P$  en  $Q$ .  $V \subset \mathbb{R}^n$  is convex precies dan, wanneer  $V$  met  $P$  en  $Q$  ook iedere convexe combinatie van  $P$  en  $Q$  bevat. Op triviale wijze is ook de lege verzameling convex.

*Voorbeelden.* In  $\mathbb{R}$  zijn de intervallen de convexe deelverzamelingen. Voorbeelden van convexe verzamelingen in  $\mathbb{R}^2$  zijn halfvlakken, het binnengebied van een driehoek, parallellogram of cirkel (we mogen ook nog de grenslijnen er bij nemen). In  $\mathbb{R}^n$  is een  $k$ -dimensionaal blok een convexe verzameling.  $\mathbb{R}^n$  zelf is convex en ook een verzameling die slechts één punt bevat is volgens de definitie convex. De  $n$ -dimensionale bol  $B_n = \{X \in \mathbb{R}^n \mid |X - M| \leq r\}$  in  $\mathbb{R}^n$  met middelpunt  $M$  en straal  $r > 0$  is convex. Iedere affiene deelruimte van  $\mathbb{R}^n$  is een convexe deelverzameling van  $\mathbb{R}^n$ .

Toon aan:

**3.2.2** Is  $A_1, \dots, A_k$  een eindig aantal punten in  $\mathbb{R}^n$ , dan is

$$V = \{x_1 A_1 + \dots + x_k A_k \mid x_1, \dots, x_k \in [0, 1], x_1 + \dots + x_k = 1\}$$

de kleinste convexe deelverzameling van  $\mathbb{R}^n$  die de punten  $A_1, \dots, A_k$  bevat.

We noemen  $V$  de *convexe omhulling* van  $A_1, \dots, A_k$  en een element  $x_1 A_1 + \dots + x_k A_k$  van  $V$  met  $x_1, \dots, x_k \in [0, 1]$  en  $x_1 + \dots + x_k = 1$  heet een *convexe combinatie* van de punten  $A_1, \dots, A_k$ . [Dat  $V$  de *kleinste* convexe deelverzameling van  $\mathbb{R}^n$  is die de punten  $A_1, \dots, A_k$  bevat, houdt in dat  $V \subset W$ , wanneer  $W$  een andere convexe verzameling is die de punten  $A_1, \dots, A_k$  bevat.]

*Opgave.*  $V$  is convex precies dan, wanneer  $V$  gesloten is m.b.t. convexe combinaties van punten. Toon aan dat de doorsnede van een eindig of oneindig aantal convexe deelverzamelingen van  $\mathbb{R}^n$  convex is. Is  $W$  een willekeurige deelverzameling van  $\mathbb{R}^n$ , dan is de *convexe omhulling* van  $W$  de doorsnede van alle convexe deelverzamelingen van  $\mathbb{R}^n$  die  $W$  omvatten. Als  $W = \{A_1, \dots, A_k\}$ , dan is de convexe omhulling van  $W$  de verzameling  $V$  uit 3.2.2. [Ga na dat  $W = V = \emptyset$ , als  $k = 0$ .]

**3.2.3** *Definitie simplex.* Is  $P, Q_1, \dots, Q_k$  een affien onafhankelijke rij punten in  $\mathbb{R}^n$ , dan is de convexe omhulling van  $P, Q_1, \dots, Q_k$  het  *$k$ -dimensionale simplex* of  *$k$ -simplex* met hoekpunten  $P, Q_1, \dots, Q_k$ . Dit simplex bestaat uit de eindpunten van de pijlen  $\overline{PX} = x_1 \overline{PQ_1} + \dots + x_k \overline{PQ_k}$  met  $x_1, \dots, x_k \in [0, 1]$  en  $0 \leq x_1 + \dots + x_k \leq 1$ .

*Voorbeeld.* In  $\mathbb{R}^3$  is de convexe omhulling van  $O, E_1, E_2, E_3$  het *standaard 3-dimensionale simplex*. De zijvlakken, ribben en hoekpunten van deze piramide zijn de standaard 2-dimensionale resp. 1-dimensionale resp. 0-dimensionale simplexen in  $\mathbb{R}^3$ . In  $\mathbb{R}^k$  is het standaard  $k$ -dimensionale simplex de convexe omhulling van  $O, E_1, \dots, E_k$  en bestaat uit de punten  $x_1, \dots, x_k \in [0, 1]$  en  $0 \leq x_1 + \dots + x_k \leq 1$ . Het  $k$ -dimensionale simplex met hoekpunten  $P, Q_1, \dots, Q_k$  in  $\mathbb{R}^n$  uit definitie 3.2.3 is dus het beeld van het standaard  $k$ -dimensionale simplex met hoekpunten  $O, E_1, \dots, E_k$  in  $\mathbb{R}^k$  onder de affiene  $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ -afbeelding  $F$  zo dat  $F(O) = P$ ,  $F(E_1) = Q_1, \dots$ ,

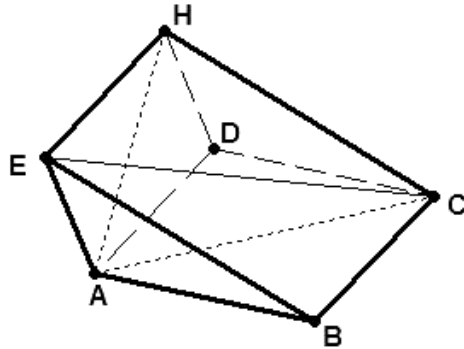


$F(E_k) = Q_k$ . [Onder een affiene afbeelding gaat een affiene combinatie over in een affiene combinatie met dezelfde coëfficiënten, dus een convexe combinatie gaat over in een convexe combinatie.]

*Voorbeeld.* In  $\mathbb{R}^2$  kunnen we ieder parallellogram door het trekken van een diagonaal verdelen in twee congruente driehoeken. Dat maakt het mogelijk om in  $\mathbb{R}^2$  de oppervlakte van een driehoek te definiëren als de helft van de oppervlakte van een parallellogram. Een niet-ontaarde driehoek in  $\mathbb{R}^2$  is een tweedimensionaal simplex in  $\mathbb{R}^2$ .

*Voorbeeld.* In  $\mathbb{R}^3$  is een driedimensionaal simplex een piramide met 4 driehoeken als zijvlakken. Het 3-dim. simplex  $OABC$  in  $\mathbb{R}^3$ , met  $A, B, C$  lin. onafh., is de puntenverzameling  $W = \{xA + yB + zC \mid x, y, z \in [0, 1], 0 \leq x + y + z \leq 1\}$ . We kunnen blok  $V = \{xA + yB + zC \mid x, y, z \in [0, 1]\}$  opsplitsen in 6 simplexen, waarvan de binnengebieden geen punten gemeen hebben, die alle 6 dezelfde inhoud hebben, maar die niet congruent zijn. Dat zou betekenen dat de inhoud van simplex  $W$  gelijk is aan  $\frac{1}{6} \times$  inhoud van blok  $V = \frac{1}{6} \cdot |\det(A, B, C)|$ . Dat kunnen we echter op dit moment nog niet bewijzen. Voor andere lichamen in  $\mathbb{R}^3$  dan blokken hebben we de inhoud überhaupt nog niet gedefinieerd. Het bewijs berust op een speciaal geval van het principe van Cavalieri. Zie de volgende opgave.

*Opgave.* Op school hebben we geleerd dat de inhoud van een piramide gelijk is aan  $\frac{1}{3} \times$  grondvlak  $\times$  hoogte. Dat betekent dat 2 simplexen met congruente grondvlakken en gelijke hoogte dezelfde inhoud hebben. Het maakt daarbij niet uit welk zijvlak van het simplex we als grondvlak beschouwen. Neem even aan dat dit inderdaad zo is. [Later zullen we dit bewijzen.] We nemen



een balk  $ABCD EFGH$  en verdelen de balk eerst door het diagonaalvlak  $BCHE$  in 2 congruente helften. De halve balk wordt opgesplitst in de 3 simplexen  $ADHC$ ,  $AEHC$  en  $ABEC$ . Zie figuur. Toon aan dat deze simplexen allemaal dezelfde inhoud hebben. Ga na dat dit ook geldt voor een blok dat geen balk is. De inhoud van elk van de simplexen is dus  $\frac{1}{6} \times$  inhoud balk (blok).

*Opmerking.* Later zullen we ook het volume van andere lichamen dan blokken definiëren. We zullen dan zien dat in  $\mathbb{R}^n$  het simplex met hoekpunten  $O, A_1, \dots, A_n$  een

volume  $\frac{1}{n!} \cdot |\det(A_1, \dots, A_n)|$  heeft.

### 3.3 Loodrechte projectie en spiegeling.

Stel  $U$  is een lineaire deelruimte van  $\mathbb{R}^n$  met orthonormale basis  $A_1, \dots, A_k$  en  $P$  is een punt in  $\mathbb{R}^n$ . Dan is er een unieke  $Q \in U$  zo dat  $PQ \perp U$ . [Bewijs. Stel  $Q = x_1 A_1 + \dots + x_k A_k$ . Dan  $PQ \perp U \Leftrightarrow \langle P - Q, A_i \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle P, A_i \rangle = \langle Q, A_i \rangle = x_i$  voor  $i = 1, \dots, k$ . Dus  $Q = \langle P, A_1 \rangle \cdot A_1 + \dots + \langle P, A_k \rangle \cdot A_k$  is het gezochte punt  $Q$ .] Punt  $Q$  heet de *loodrechte projectie* van punt  $P$  op de lineaire ruimte  $U$ . Als  $P \in U$ , dan  $Q = P$ . We definiëren  $d(P, U)$ , de afstand van  $P$  tot  $U$ , door middel van  $d(P, U) = d(P, Q)$ .

Algemener:

**3.3.1** Is  $V$  een affiene deelruimte van  $\mathbb{R}^n$  en  $P$  een punt in  $\mathbb{R}^n$ , dan is er precies één punt  $Q \in V$  zo dat  $PQ \perp V$ . We noemen dit punt  $Q$  de (*loodrechte*) *projectie* van  $P$  op  $V$  en we stellen  $d(P, V) = d(P, Q) = PQ$ . De afbeelding  $F$  die  $P \in \mathbb{R}^n$  afbeeldt op zijn projectie  $Q$  op  $V$ , noemen we *de projectie van  $\mathbb{R}^n$  op  $V$* .

*Bewijs.* Stel  $V = U + C$ , waarin de lineaire ruimte  $U$  de richtingsruimte van  $V$  is. Er geldt  $PQ \perp V \Leftrightarrow PQ \perp U \Leftrightarrow P'Q' \perp U$  met  $P' = P - C$  en  $Q' = Q - C$ . We nemen voor  $Q'$  de loodrechte projectie van  $P'$  op  $U$ . Het gezochte punt  $Q \in V$  is dan  $Q = Q' + C$ .

**3.3.2 Definitie.** Is  $V$  een affiene deelruimte van  $\mathbb{R}^n$ , dan noemen we de punten  $P$  en  $Q$  elkaars *spiegelbeeld* t.o.v.  $V$ , wanneer  $PQ \perp V$  en het midden  $M$  van lijnstuk  $PQ$  in  $V$  ligt. De *spiegeling*  $S$  van  $\mathbb{R}^n$  t.o.v. de affiene deelruimte  $V$  is de 1-1-afbeelding van  $\mathbb{R}^n$  op zichzelf die ieder punt  $P \in \mathbb{R}^n$  afbeeldt op zijn spiegelbeeld  $Q$ .

Zijn  $P$  en  $Q$  elkaars spiegelbeeld t.o.v.  $V$ , dan is  $M = \frac{1}{2}(P + Q)$  de projectie van zowel  $P$  als  $Q$  op  $V$ . De spiegeling  $S$  van  $\mathbb{R}^n$  t.o.v. de affiene deelruimte  $V$  beeldt ieder punt  $P \in V$  op zichzelf af. Een spiegeling is zijn eigen inverse: er geldt  $S^{-1} = S$ . Merk op dat  $S$  de identieke afbeelding van  $\mathbb{R}^n$  is, wanneer  $V = \mathbb{R}^n$ . Als  $V = \{C\}$ , dan is  $S$  de *puntspiegeling* t.o.v. punt  $C$ . Straks zullen we zien dat iedere spiegeling tot stand gebracht kan worden door een opeenvolging van spiegelingen t.o.v. een hypervlak [een lijn in  $\mathbb{R}^2$ , een vlak in  $\mathbb{R}^3$ ].

**3.3.3** Een spiegeling  $S$  van  $\mathbb{R}^n$  t.o.v. een affiene deelruimte  $V$  is een affiene afbeelding. Is  $V$  een lineaire deelruimte van  $\mathbb{R}^n$ , dan is  $S$  lineair.

*Bewijs.* We gaan eerst na dat een spiegeling  $L$  t.o.v. een lineaire deelruimte  $U$  een lineaire afbeelding is. Kies een orthonormale basis  $A_1, \dots, A_k$  van  $U$ .

De projectie van punt  $P$  op  $U$  is dan het punt  $M = \langle P, A_1 \rangle \cdot A_1 + \dots + \langle P, A_k \rangle \cdot A_k$ . Voor het spiegelbeeld  $Q$  van  $P$  geldt dan  $P + Q = 2M$ , dus  $Q = L(P) = 2M - P$ .  $L$  is lineair, wanneer  $L(cP) = c \cdot L(P)$  en  $L(P_1 + P_2) = L(P_1) + L(P_2)$ . Ga na dat dit inderdaad het geval is.

