Inhoud Analyse + Meetkunde

1 Basisbegrippen 1

1.1 Verzamelingen. 1
1.2 Geordende paren. 4
1.3 Functies, afbeeldingen. 5
1.4 Indexnotatie, rijen. 8
1.5 De lege verzameling nader bekeken. 12
1.6 Bewerkingen. 13
1.7 Groep. 15
1.8 Direct product. 16
1.9 Structuurbehoudende afbeeldingen. 16
1.10 Ondergroep. 17
1.11 Een intern direct product. 19
1.12 De kern van een groepshomomorfie. 20
1.13 De natuurlijke getallen. 21
1.14 Decimale schrijfwijze. 24
1.15 Gehele veelvouden. 26
1.16 Grootste gemene deler. 28
1.17 Priemgetallen. 30
1.18 Aftelbare verzamelingen. 31
1.19 Equivalentierelaties. 32
1.20 Ordening. 35
1.21 Lichamen. 37
1.22 Complexe getallen. 42

2 De getallenlijn en andere lineaire ruimten................. 44

2.1 Archimedische ordening. 45
2.2 Intervallennest. 48
2.3 Het bestaan van wortels. 51
2.4 Kleinste bovengrens en grootste ondergrens. 54
2.5 Geordende lichamen. 59
2.6 Limieten van rijen reële getallen. 62
2.7 Lineaire ruimten. 66
2.8 De translaties van een lineaire ruime. 71
2.9 Affiene deelruimten. 74
2.10 Transformatiegroepen. 76
2.11 Afstand, inwendig product en loodrechte stand. 77
2.12 Exponentiële en logaritmische functies. 79

3 Limieten, continuïteit en afgeleide 83

3.1 Monotone functies. 83
3.2 Intervallen, open en gesloten verzamelingen. 84
3.3 Monotone functies en continuïteit. 90
3.4 Continuïteit. 93
3.5 De limiet van een functie in een verdichtingspunt van zijn domein. 98
3.6 De afgeleide. 101
3.7 Extreme waarden. 105
3.8 Stelling van Rolle, middelwaardestelling. 106
3.9 Stijgen en dalen. 107
3.10 Productregel, quotiëntregel en kettingregel. 108
3.11 Plus en min oneindig. 112
3.12 Lipschitzcontinuïteit en uniforme continuïteit. 114
3.13 Het convergentiekenmerk van Cauchy. 116
3.14 Differentieerbaarheid van de exponentiële en logaritmische functies. 117
3.15 Alternatieve definities van de exponentiële en logaritmische functies. 122

4 Integralen 127

4.1 Middelwaardestelling en oppervlakte. 127
4.2 Primitieve. 129
4.3 Oppervlakte onder de grafiek van een functie. 130
4.4 Integraalfunctie. 134
4.5 Stamfunctie. 138
4.6 Integreerbaarheid. 141
4.7 Primitieven en stamfuncties. 145
4.8 Het integraalteken. 147
4.9 De natuurlijke logaritme. 150
4.10 Exponentiële functies. 153
4.11 Logaritmische functies. 156
4.12 Machtsfuncties. 158
4.13 Enkele belangrijke limieten. 159
4.14 Oneigenlijke integralen. 161

5 De eenheidscirkel en goniometrie 163

5.1 Sinus, cosinus en tangens. 163
5.2 Cosinusregel, sinusregel en oppervlakteformule. 164
5.3 De symmetrieën van de eenheidscirkel. 165
5.4 Radialen. 166
5.5 Cosinus en sinus als functies met domein $\mathbb{R}$. 167

5.6 Eigenschappen en formules van de sinus en cosinus. 169
5.7 Uniekheid van de sinus en de cosinus. 173
5.8 De arcsinus en arccosinus. 174
5.9 De tangens. 176
5.10 Arctangens. 178
5.11 Het bestaan van de sinus, cosinus en tangens. 180
5.12 Nog een andere karakterisering van de sinus en de cosinus. 181
5.13 De lengte van een grafiekboog. 182
5.14 Booglengte bij monotone functies. 185
5.15 Andere eigenschappen die rectificeerbaarheid garanderen. 186
5.16 De cyclometrische functies. 188
5.17 π als oppervlakte van de eenheidscirkel. 190
5.18 Argument en modulus van een punt. 191
5.19 Rotaties om *O* en georiënteerde hoeken. 192
5.20 Spiegelen t.o.v. een lijn door *O*. 195
5.21 Complexe getallen en poolcoördinaten. 196

6 Meetkunde in $\mathbb{R}^2$ 198

6.1 $\mathbb{R}^2$ als lineaire ruimte. 198
6.2 Lijnen in $\mathbb{R}^2$. 198
6.3 Translaties. 202
6.4 De parametervoorstelling van een lijn. 203
6.5 Beschrijving van een lijn d.m.v. determinant of inproduct. 206
6.6 Het complex product en georiënteerde hoeken. 207
6.7 Spiegelen t.o.v. de x-as. 210
6.8 De draaivermenigvuldiging. 211
6.9 Eigenschappen van inproduct en determinant. 212
6.10 Oriëntatie en hoofdwaarde van georiënteerde hoeken. 214
6.11 Niet-georiënteerde hoeken. 215
6.12 Cosinusregel en sinusregel. 219
6.13 De hoek tussen twee lijnen. 221
6.14 Verhoudingen van evenwijdige translaties en pijlen. 223
6.15 De afstand van een punt tot een lijn,
de afstand van twee evenwijdige lijnen. 228
6.16 Halfvlakken. 229
6.17 F-hoeken en Z-hoeken. 231
6.18 Oppervlakte van driehoeken en parallellogrammen. 233
6.19 Lineaire en affiene transformaties van $\mathbb{R}^2$. 236
6.20 Gelijkvormigheden en congruenties. 243
6.21 Gelijkvormige driehoeken. 246

7 Cirkels, driehoeken en meer in $\mathbb{R}^2$ ……..248

7.1 Cirkels en omtrekshoeken. 248
7.2 Bissectrice. 252
7.3 Oppervlaktecoördinaten. 254
7.4 De stellingen van Ceva en Menelaus. 258
7.5 Congruente driehoeken. 262
7.6 Gelijkvormige driehoeken. 264
7.7 Congruenties. 268
7.8 Vermenigvuldigen t.o.v. een punt. 274
7.9 Iedere congruentie is het product van hooguit 3 spiegelingen. 275
7.10 Ellipsen, hyperbolen en parabolen. 276
7.11 De macht van een punt t.o.v. een cirkel. 283
7.12 Inversie t.o.v. een cirkel. 285
7.13 Harmonisch scheiden. 289
7.14 Stereografische projectie. 290
7.15 Centrale projectie. 292
7.16 Möbiustransformaties 297

8 Primitieven en Riemannsommen 305

8.1 Differentiëren. 305
8.2 Primitiveren. 311
8.3 Substitutieregel. 314
8.4 Partiële integratie. 318
8.5 Oppervlakte. 323
8.6 Riemannsommen. 324

9 Hogere afgeleiden 332

9.1 De beste lokale affiene benadering van een functie. 332
9.2 Het o-symbool van Landau. 334
9.3 Hogere afgeleiden. 335
9.4 Een uitbreiding van de middelwaardestelling. 336
9.5 De regel van l'Hospital. 337
9.6 Lokale benadering door Taylorpolynomen. 340
9.7 De stelling van Taylor. 345
9.8 Taylorpolynoom $T_{a,n}(x)$ bij vaste x en toenemende n. 347
9.9 De restterm in integraalvorm. 354
9.10 Convex en concaaf. 357
9.11 Uniforme convergentie. 358

10 Krommen 368

10.1 Krommen in $\mathbb{R}^2$. 368
10.2 Differentieerbaarheid en raaklijnen. 374
10.3 De lengte van een kromme. 381
10.4 Poolcoördinaten. 386
10.5 Windingsgetal. 392
10.6 De lengte van een kromme in poolcoördinaten. 394
10.7 De kromming van een kromme. 396
10.8 De omhullende van een stelsel lijnen. 401

11 Oppervlakte en complexe afgeleide 407

11.1 Vlakdelen. 407
11.2 De oppervlakte van een cirkelsector. 415
11.3 Oppervlakte en intervalsommen. 427
11.4 Limieten in $\mathbb{R}^n$. 432
11.5 Partiële afgeleiden. 436
11.6 Differentieerbaarheid van $\mathbb{R}^n$-$\mathbb{R}^m$-afbeeldingen. 437
11.7 De complexe afgeleide. 440
11.8 Complexe vs. reële differentieerbaarheid. 444
11.9 Enkele elementaire $\mathbb{C}$-$\mathbb{C}$-afbeeldingen. 445
11.10 Complexe polynoomafbeeldingen 449
11.11 Taylorpolynomen. 453
11.12 Lokaal gedrag van holomorfe afbeeldingen. 456

Literatuur 459

Trefwoorden 461

2 De getallenlijn en andere lineaire ruimten

We spreken over $\mathbb{R}$ graag in meetkundige termen. De ordening $<$ van $\mathbb{R}$ is een lineaire ordening. We stellen ons hierbij $\mathbb{R}$ voor als een horizontale lijn, de *getallenlijn*. De reële getallen zijn dan de *punten* van deze getallenlijn. Als $a < b$, dan ligt punt *a* links van punt *b* op de getallenlijn. Punt *x* ligt *tussen a* en *b*, als $a < x < c$. Als $a < b$, dan vormen de punten x uit het interval $[a,b]$ een *lijnstuk* met *beginpunt a* en *eindpunt b*. De *lengte* van dit interval is gelijk aan $b - a$. Etc.

$\mathbb{R}$ is niet volledig gekarakteriseerd door het feit dat $\mathbb{R}$ een lineair geordend lichaam is. We zagen immers dat ook $\mathbb{Q}$ een lineair geordend lichaam is. $\mathbb{Q}$ is een deellichaam van $\mathbb{R}$, maar $\mathbb{Q}$ valt niet samen met $\mathbb{R}$. Omdat we in dit hoofdstuk met een ordening steeds een lineaire ordening bedoelen laten we de toevoeging 'lineair' in het volgende weg.

Voorbeeld. We gaan na dat $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Stel $\sqrt{2} = m / n$ ofwel $m^2 = 2n^2$, waarin *m* en *n* positieve natuurlijke getallen zijn. We mogen veronderstellen dat *m* en *n* niet allebei even zijn [deel anders teller en noemer net zo vaak door 2 tot een van beide even en de andere oneven is]. Uit $m^2 = 2n^2$ volgt dat m^2 en dus ook *m* even is. Dan zijn *n* en ook n^2 oneven. We kunnen in $m^2 = 2n^2$ beide kanten delen door 2. Dat geeft $m \cdot m' = n^2$, met $m = 2m'$. Maar dan is het linkerlid van $m \cdot m' = n^2$ even, terwijl het rechterlid oneven is. Dat is onmogelijk, want beide leden van de vergelijking stellen hetzelfde getal voor. De veronderstelling dat $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ leidt tot een tegenspraak en is dus niet waar.

Er is nog een belangrijke reden waarom $\mathbb{Q}$ niet alle reële getallen kan bevatten, Immers $\mathbb{Q}$ is een aftelbare verzameling en $\mathbb{R}$ is niet aftelbaar [zie paragraaf 1.18].

In dit hoofdstuk gaan we op zoek naar de specifieke kenmerken van de reële getallen. We zullen zien dat het verschil gemaakt wordt door de in 2.2.1 genoemde *intervallennesteigenschap*.

Wanneer we het hier over functies hebben, dan veronderstellen we meestal stilzwijgend dat het gaat om functies waarvan het domein en bereik bestaat uit reële getallen. Zulke functies noemen we $\mathbb{R}$-$\mathbb{R}$ -functies.

Definitie. Een functie $f : D \to \mathbb{R}$ met $A \subset D$ heet *stijgend* op *A*, wanneer $x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$ voor iedere $x, y \in A$. Functie f heet stijgend zonder meer, als f stijgend is op zijn domein *D*. 'Stijgend' wordt hier in zwakke zin gebruikt en betekent eigenlijk 'stijgend of gelijkblijvend'. Als $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ voor iedere $x, y \in A$, dan noemen we f *strikt stijgend* op *A*. Als $x \le y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$ voor $x, y \in A$, dan heet '*f dalend op A*' en *strikt* dalend, als $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$. Stijgende en dalende functies vormen samen de *monotone* functies.

Een strikt monotone functie is 1-1. Als $f : D \to \mathbb{R}$ strikt stijgend (strikt dalend) is en $f(D) = E$, dan is f omkeerbaar en is ook $f^{-1} : E \to D$ strikt stijgend (resp. strikt dalend).

Een functie $f : D \to \mathbb{R}$ heet *constant* op $A \subset D$, wanneer er een $c \in \mathbb{R}$ is zo dat $f(x) = c$ voor iedere $x \in A$. Als f constant is op A, dan is f monotoon op A.

2.1 Archimedische ordening. Een bekende eigenschap van de ordening op $\mathbb{R}$ is:

2.1.1 $\mathbb{R}$ *is archimedisch geordend*. Bij iedere $x \in \mathbb{R}$ bestaat precies één geheel getal $k \in \mathbb{Z}$ zo dat $k \le x < k+1$. Dit getal k is het grootste gehele getal $\le x$ en wordt de *entier* van x genoemd.

De *entier* van x wordt soms genoteerd als $[x]$. Merk op dat 2.1.1 ook nog geldt, wanneer we hierin $\mathbb{R}$ vervangen door $\mathbb{Q}$.

Opgave. Als $a > 0$ en $x \in \mathbb{R}$, dan is er precies één $k \in \mathbb{Z}$ zodat $ka \le x < (k+1)a$. De 'multiplicatieve versie' luidt: Als $a > 1$ en $x \in \mathbb{R}^+$, dan is er precies één $k \in \mathbb{Z}$ zodat $a^k \le x < a^{k+1}$. Bewijs dit laatste met behulp van de ongelijkheid van Bernoulli. [Zie het voorbeeld na 1.13.3. Schrijf a als $1+p$. Dan $a^n = (1+p)^n > 1+np$ voor $n \in \mathbb{N}^+$.]

2.1.2 Bij iedere $\varepsilon > 0$ is er een $n \in \mathbb{N}^+$ zo dat $0 < \dfrac{1}{10^n} < \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

Opmerking. Het is in de wiskunde gebruikelijk om de Griekse letter ε [*epsilon*, niet te verwarren met $\in$] als variabele voor een positief reëel getal te nemen. Meestal hebben we bij epsilon een 'klein' positief getal in gedachten.

Bewijs . Bij $\varepsilon > 0$ is er een $n \in \mathbb{N}$ zo dat $0 < \dfrac{1}{\varepsilon} < n < 2^n < 10^n$ en dit is gelijkwaardig met $0 < \dfrac{1}{10^n} < \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

Als $0 < \dfrac{1}{10^n} < \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$, dan ook $0 < \dfrac{1}{10^m} < \dfrac{1}{2^m} < \dfrac{1}{m} < \varepsilon$ voor ieder natuurlijk getal $m > n$. We drukken dit ook uit door te zeggen dat $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{2^n}$ en $\dfrac{1}{10^n}$ naar 0 convergeren, als n onbegrensd toeneemt. Notatie $\dfrac{1}{n} \to 0$, als $n \to \infty$ ofwel 0 is de *limiet* of *grenswaarde* van de rij $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$. We schrijven dit ook als $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Evenzo $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ en $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{10^n} = 0$.

Definitie. Is $a_1, a_2, a_3, \ldots$ een oneindige rij en V een verzameling, dan zeggen we dat de rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *bijna geheel* in V ligt of dat $a_n \in V$ voor *bijna alle* indices *n*, als dit voor hooguit een eindig aantal indices niet het geval is.

'Bijna alle' krijgt door deze definitie de exacte betekenis van 'met hooguit een eindig aantal uitzonderingen'. Analoog zeggen we bijv. ook '$a_n > 0$ voor bijna alle indices *n*'.

2.1.4 *Definitie*. Een rij reële getallen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ heet een *nulrij*, wanneer voor iedere $\varepsilon > 0$ geldt : $|a_n| < \varepsilon$ voor bijna iedere index *n*. Als $a_1, a_2, a_3, \ldots$ een nulrij is, dan noteren we dit als $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ en zeggen dat de rij *naar* 0 *convergeert*. Verder stellen we $\lim_{n\to\infty} a_n = c$, als $\lim_{n\to\infty}(a_n - c) = 0$, en zeggen dan dat de rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *naar c convergeert*. Is dat het geval dan wordt het getal *c* de *limiet* of *grenswaarde* van de rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ genoemd.

Opmerking. Om typografische redenen schrijven we soms $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ i.p.v. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$. Dit wordt ook genoteerd als '$a_n \to c$, als $n \to \infty$'. Zonder de limiet te specificeren noemen we de rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *convergent*, wanneer $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ bestaat.

Tussen twee verschillende reële getallen ligt altijd een rationaal getal (en dus oneindig veel rationale getallen):

2.1.5 Als $x, y \in \mathbb{R}, x < y$, dan is er een $q \in \mathbb{Q}$ zo dat $x < q < y$.

Bewijs. Stel $x, y \in \mathbb{R}, x < y$, dan $y - x > 0$ en is er een $n \in \mathbb{N}$ zo dat $y - x > \frac{1}{n} > 0$.

Ga na dat er dan een $k \in \mathbb{Z}$ is zo dat $\frac{k-1}{n} \le x < \frac{k}{n} < y$.

Opmerking. Op dezelfde manier tonen we aan dat er tussen twee verschillende reële getallen altijd een getal $\frac{k}{2^n}$ ligt, met $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ (of een getal $\frac{k}{10^n}$).

Ook geldt:

2.1.6 Tussen twee reële getallen ligt altijd een irrationaal getal.

Bewijs. Stel $x, y \in \mathbb{R}, x < y$. Dan is er een $q \in \mathbb{Q}$ zo dat $x - \sqrt{2} < q < y - \sqrt{2}$ en dus $x < q + \sqrt{2} < y$. Hierin $q + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. [Anders zou ook $\sqrt{2} = (q + \sqrt{2}) - q$ tot $\mathbb{Q}$ behoren.]

Ieder reëel getal x kunnen we insluiten tussen twee rijen rationale getallen die beide naar x convergeren. Stel $a_0 = [x]$ (de entier van x) en $b_0 = a_0 + 1$. Dan $a_0 \le x \le b_0$ en $\frac{1}{2}(a_0 + b_0) \in \mathbb{Q}$ is het midden van het interval $[a_0, b_0]$. Het getal x ligt dan in het interval $[a_0, \frac{1}{2}(a_0 + b_0)]$ of in het interval $[\frac{1}{2}(a_0 + b_0), b_0]$ of $x = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ en dan ligt x in beide intervallen. We kiezen van de intervallen $[a_0, \frac{1}{2}(a_0 + b_0)]$ en $[\frac{1}{2}(a_0 + b_0), b_0]$ een interval waarin x ligt en schrijven dit als $[a_1, b_1]$. Op deze manier gaan we door. Het midden van het interval $[a_1, b_1]$ is $\frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ en x ligt in minstens één van de intervallen $[a_1, \frac{1}{2}(a_1 + b_1)]$ en $[\frac{1}{2}(a_1 + b_1), b_1]$. Kies zo'n interval als $[a_2, b_2]$. Merk op dat a_2 en b_2 weer tot $\mathbb{Q}$ behoren. Vervolgens verdelen we het interval $[a_2, b_2]$ weer in twee gelijke helften en kiezen als $\langle a_3, b_3 \rangle$ een helft waarin x ligt. Etc., etc. We krijgen op deze manier twee oneindige rijen rationale getallen $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ en $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ zo dat

$$a_0 \le a_1 \le a_2 \le a_3 \cdots \le x \le \cdots \le b_3 \le b_2 \le b_1 \le b_0 ,$$

waarbij

$$b_1 - a_1 = \tfrac{1}{2}(b_0 - a_0) = \tfrac{1}{2}, b_2 - a_2 = \tfrac{1}{2}(b_1 - a_1) = \tfrac{1}{4}, \ldots, b_n - a_n = 1/2^n, \ldots .$$

Het verschil $b_n - a_n = 1/2^n$ convergeert naar 0, als n de natuurlijke getallen doorloopt en dus convergeren ook de verschillen $x - a_n$ en $b_n - x$ naar 0, als n de natuurlijke getallen doorloopt, m.a.w. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x$.

Een rij als $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ met $a_0 \le a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots$ is een *stijgende* rij. Wanneer $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ dan spreken we van een *strikt* stijgende rij. De rij $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ hierboven *convergeert stijgend* naar x, maar niet noodzakelijk strikt stijgend. De rij $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ *convergeert dalend* naar x, maar niet noodzakelijk strikt dalend.

Samenvattend:

2.1.7 Bij iedere $x \in \mathbb{R}$ bestaat een $k \in \mathbb{Z}$ en rijen rationale getallen $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ en $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ zo dat

$$a_0 = k \le a_1 \le a_2 \le a_3 \cdots \le x \le \cdots \le b_3 \le b_2 \le b_1 \le b_0 = k + 1 ,$$

waarbij de rij $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ stijgend naar x convergeert en de rij $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ dalend naar x convergeert.

Een waarschuwing is hier op zijn plaats: hierboven is *niet* aangetoond dat er bij twee oneindige rijen rationale getallen $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ en $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ zo dat $a_0 = k \le a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le b_3 \le b_2 \le b_1 \le b_0 = k + 1$, voor zekere $k \in \mathbb{Z}$, steeds een getal $x \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat

$$a_0 = k \le a_1 \le a_2 \le a_3 \cdots \le x \le \cdots \le b_3 \le b_2 \le b_1 \le b_0 = k + 1 .$$

We gingen namelijk uit van het bestaan van x.

2.2 Intervallennest.

Als $[a_0,b_0]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots$, dan vormen deze intervallen een *intervallennest*. Is dat het geval, dan is $a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots$ een stijgende rij en $b_0,b_1,b_2,b_3,\ldots$ een dalende rij reële getallen. Bovendien geldt $a_n\le b_n$ voor $n\in\mathbb{N}$. De *intervallennest-eigenschap* zegt dat er een $x\in\mathbb{R}$ is dat tot al deze intervallen behoort, m.a.w. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]\ne\varnothing$. Als $b_n-a_n\to 0$ voor $n\to\infty$, dan bevat $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]$ precies één $x\in\mathbb{R}$.

Belangrijk is wel dat het bij een intervallennest om gesloten intervallen gaat. Het intervallennest $\langle 0,1]\supset\langle 0,\frac{1}{2}]\supset\langle 0,\frac{1}{3}]\supset\cdots\supset\langle 0,\frac{1}{n}]\subset\cdots$ van halfopen intervallen heeft bijv. een lege doorsnede. We veronderstellen in de notatie $[a,b]$ altijd stilzwijgend dat $a\le b$, dus $[a,b]\ne\varnothing$.

2.2.1 *Intervallennesteigenschap*:
Als $a_0,a_1,a_2,\ldots$ en $b_0,b_1,b_2,\ldots$ rijen rationale getallen zijn zo dat

$$[a_0,b_0]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots,$$

dan is er een getal $x\in\mathbb{R}$ dat tot alle intervallen $[a_n,b_n]$ met $n\in\mathbb{N}$ behoort. Er is precies één zo'n getal *x*, als $b_n-a_n\to 0$ voor $n\to\infty$. De lengte van de intervallen $[a_n,b_n]$ convergeert dan naar 0.

Deze ordeningseigenschap van de reële getallen nemen we zonder bewijs aan en beschouwen we als onderdeel van de definitie van de reële getallen. Het is de intervallennesteigenschap die $\mathbb{R}$ onderscheid van $\mathbb{Q}$. Het in 2.2.1 genoemde getal *x* hoeft niet rationaal te zijn, ook al zijn de intervalgrenzen $a_0,a_1,a_2,\ldots$ en $b_0,b_1,b_2,\ldots$ zelf allemaal rationaal. Met behulp van 2.2.1 kunnen we bewijzen dat er *irrationale* getallen bestaan, d.w.z. reële getallen, die niet tot $\mathbb{Q}$ behoren. Dit blijkt bijv. uit het feit dat de intervallennesteigenschap het bestaan van $\sqrt{2}$ garandeert (zie verderop).

Met behulp van de intervallennesteigenschap kunnen we aantonen:

2.2.2 Iedere *oneindige decimale breuk* $a_0,d_1d_2d_3\ldots$, met $a_0\in\mathbb{N}$ en decimalen $d_1,d_2,d_3,\ldots$ uit $\{0,\ldots,9\}$, representeert precies één reëel getal $x\ge 0$.

Bewijs. Stel

$$a_n=a_0,d_1d_2d_3\ldots d_n=a_0+\frac{d_1}{10}+\frac{d_2}{10^2}+\cdots+\frac{d_n}{10^n}.$$

Met $a_0\in\mathbb{N}$ en $d_1,d_2,d_3,\ldots$ uit $\{0,\ldots,9\}$ is $a_n\in\mathbb{Q}$. Stel verder $b_n=a_n+1/10^n$.
Het intervallennest $[a_0,b_0]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots$ bepaalt dan precies één getal $x\ge 0$, want $b_n-a_n=1/10^n\to 0$ als $n\to\infty$. We schrijven dan $x=a_0,d_1d_2d_3\ldots$, waarmee we bedoelen dat $x=\lim_{n\to\infty}a_n$. Merk op dat ook $x=\lim_{n\to\infty}b_n$.