

Meten & Weten

Gerard Tuk

Meten & Weten

Uitgave 2026

Eerste uitgave: 27 december 2023

Tweede uitgave: 26 augustus 2024

Derde uitgave: 7 augustus 2025

correcties: 8 december 2025

Vierde uitgave: 31 juli 2026

Auteur: Gerard Tuk

Druk: Pumbo.nl

Omslagontwerp: Gerard Tuk

Vormgeving binnenwerk: Gerard Tuk

Lettertype: Linux Libertine (tekst)

Amaranth (koppen)

Consolas (code)

Alles uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, door middel van druk, fotokopieën, geautomatiseerde gegevensbestanden of op welke andere wijze ook, ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Inhoud

Proeven.....	1
0. Lees wijzer	3
1. “Tweeënzeventig zes!”	7
2. Snelheidscontroles	9
3. De sleutel	11
4. Doellijntechnologie	13
5. Model & Werkelijkheid	15
6. De glazen bol.....	16
7. Meten & Weten: de... ..	18
Feilen.....	21
8. Model van een meting	23
9. Systematisch & Toevallig.....	27
10. Toevallige systematische fouten	30
11. Nauwkeurig & Precies.....	32
12. Type A & Type B	36
13. Wijzers & Cijfers.....	38
14. Digitaal & Analooq.....	41
15. Definitieprobleem	44
16. Meetschalen.....	45
17. SI: Standaardiseer Iets!.....	47
Ontwarren.....	51
18. Spreiding in ruimte & tijd.....	53
19. Spreiding in wat we meten.....	55
20. Spreiding door het meten.....	57
21. Beïnvloeden van wat we meten.....	59
22. Herhalen & Reproducieren	60
23. Werkelijk & Geaccepteerd.....	62

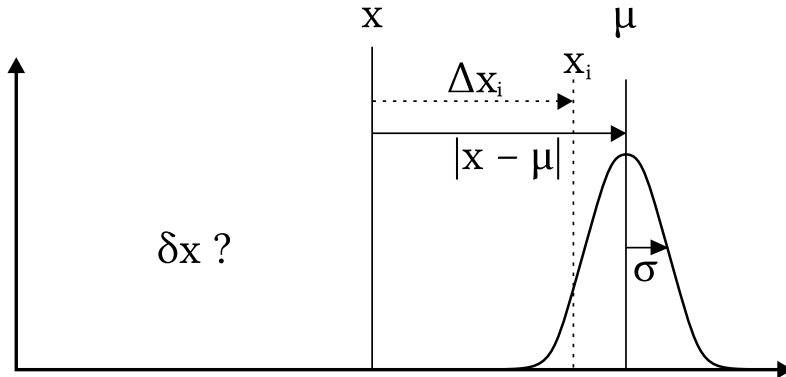
24. Beste schattingen	64
25. Systematische fout door toeval (1).....	66
26. Systematische fout door toeval (2).....	68
27. Systematisch toenemende fout	71
28. Zwevendekommagetallen	73
29. Decimalen in Python & C	76
Dobbelen	79
30. Rekenkundig gemiddelde	81
31. Harmonisch & kwadratisch gemiddelde	83
32. Standaardafwijking.....	85
33. Een klein aantal metingen	87
34. Eindig aantal mogelijkheden.....	89
35. Kansvariabele.....	91
36. Normale verdeling	94
37. Normaal & Uniform	97
38. Overschrijdingskansen	99
39. Kleine phi (φ) & grote phi (Φ).....	103
40. Verwachtingswaarde.....	105
41. Permutaties & Combinaties.....	107
42. Simulatie van een kansvariabele	110
43. Betere schatting van spreiding	112
44. De spreiding in de spreiding	115
45. Normaal & Uniform verdeelde fouten	118
Vertrouwen.....	121
46. Voorbeelden van (on)afhankelijkheid.....	123
47. Extreme voorbeelden	126
48. Onafhankelijke fouten optellen.....	129
49. Met & zonder afhankelijkheid.....	131
50. (On)afhankelijke normale verdelingen	133

51. Het criterium van Chauvenet.....	136
52. Chauvenet in Excel.....	139
53. Kansverdeling resultaat & meting	141
54. Overschrijdingskans & significantie	145
Rekenen.....	147
55. Absolute & relatieve onzekerheden.....	149
56. Kleine waarde, grote onzekerheid.....	151
57. De spreiding schatten	152
58. De wortel van het gemiddelde	156
59. Waarom RMS?	157
60. Foutdoorwerking bij optellen.....	159
61. Doorwerking bij aftrekken	161
62. Doorwerken bij vermenigvuldigen.....	163
63. En als je het niet mag verwaarlozen?.....	166
64. Doorwerken in het algemeen.....	168
65. Doorwerken bij delen	171
66. Doorwerken bij een exacte factor	173
67. Doorwerken bij machtsverheffen	174
Weergeven.....	175
68. Beste schatting & onzekerheid	177
69. Rekenkundig & statistisch afronden	179
70. Significante cijfers	182
71. Significante cijfers in berekeningen	184
72. Significante cijfers in onzekerheden	187
73. Noteren van onzekerheden.....	190
74. De Grote Negen.....	195
75. Maak er maar geen punt van	199
76. Cijfers in letters & U+202F	201
77. Verschillen meten	202

78. Lijnen door punten	204
79. Kleinste kwadraten	207
80. Résidu	210
81. Past het model?	213
Bespiegelen	217
82. Onzekerheid	219
83. Fout gebruik van de term ‘error’	222
84. Verificatie & Validatie	226
85. Relatief & Absoluut	227
86. Graden & Ontraden	229
87. Discrepantie	231
88. Relevant & Significant	234
89. Kwaliteit	236
90. Falsifieerbaarheid	238
91. Inschatten wat verwaarloosbaar is	240
92. Pas op	242
Antwoorden	243
Bijlagen	269
A. Alt-codes & Unicodes	271
B. Bekende afgeleiden	273
C. Competenties bij het meten	274
D. Doorwerking van fouten	276
E. Eenheden in SI	279
F. Foutenvinders	282
G. Gebruikte boeken	283
H. Het bewijs van de correctie van Bessel	285
I. In één pagina: het bewijs van “die $\sqrt{N}$ ”	289
J. Ja, dáááág!	290

8. Model van een meting

Figuur 8.1 toont een klassiek schema dat duidelijk maakt hoe systematische en toevallige fouten zich tot elkaar verhouden.

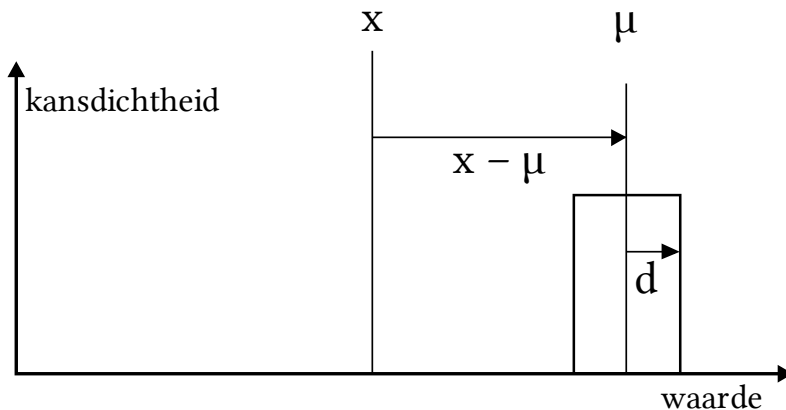


Figuur 8.1 Meting met systematische fout en normaal verdeelde toevallige fout

Deze figuur is overgenomen van *Wikipedia*, met aanpassingen: de woorden *juistheid* en *Precisie* zijn vervangen door symbolen.

De waarde die je wilt meten (de werkelijke waarde of de *true value*) is x .

De meetwaarde zelf is een *kansvariabele*, normaal verdeeld met een gemiddelde μ en een standaardafwijking σ . In deze figuur wordt de meting beschouwd als een normaal verdeeld proces, maar die verdeling kan ook uniform zijn, bijvoorbeeld bij een digitaal meetapparaat dat een toevallige fout heeft die afhangt van de decimalen die je niet kunt aflezen.



Figuur 8.2 Meting met systematische fout en uniform verdeelde toevallige fout

Laten we voor het gemak eens uitgaan van een meting aan een dimensieloze (vage, abstracte) grootheid x met eenheid *nono* (symbool: n), waarvoor geldt

$$x = 1,98 \text{ n}$$

Het meetresultaat dat we vinden is

$$x_{m1} = 2,01 \pm 0,04 \text{ n}$$

De absolute onzekerheid in dit meetresultaat is 4 cn (centinono).

De relatieve onzekerheid in dit meetresultaat is 2%.

Weten we nu hoe groot het verschil is tussen x en μ ? Nee. In de tekst hierboven is *gegeven* dat $x = 1,98 \text{ n}$. In een ‘echte’ situatie weet je dat vrijwel nooit. Je kent soms een *geaccepteerde waarde*, maar slechts zelden de *werkelijke waarde*. Waarom zou je nog meten als je de waarde al kent?

De JCGM (2008), maker van de GUM, schrijft op pagina 16:

NOTE The term “true value” is not used in this Guide for the reasons given in D.3.5; the terms “value of a measurand” (or of a quantity) and “true value of a measurand” (or of a quantity) are viewed as equivalent.

Dat is een vreemde bewering. Ze noemen datgene wat ze *niet* gebruiken niet alleen twee keer in deze ene alinea (om te zeggen dat ze het niet gebruiken), maar als je telt hoe vaak de term *true value* voorkomt in hun hele *manual*, kom je op 55 keer. Dat is toch niet heel weinig in een document van 134 pagina’s. In ieder geval vaker dan nooit.

Kennen we μ eigenlijk wel? Nee. We hebben een waarde x_{m1} gevonden. Die x_{m1} is het steekproefgemiddelde $\bar{x}$ van deze ene steekproef van tien metingen. Doe je nog een keer tien metingen, dan vind je een x_{m2} die – als de toevallige fout niet nul is – anders zal zijn. Naarmate de standaardafwijking σ groter is, zal de spreiding in x_{m1} , x_{m2} , x_{m3} , etc. groter zijn.

Kennen we σ dan wél? Nee. Die is ook al niet bekend in praktische situaties. We kunnen wel een schatting ervan maken door vaak te meten en dan de standaardafwijking van de steekproef te bepalen. Als je oneindig vaak meet, wordt die gelijk aan de ‘echte’ σ . Is er eigenlijk wel een ‘echte’ σ ? Nee. En er is ook geen ‘echte’ μ . We veronderstellen een normale verdeling, maar dat is slechts een model. Maar laten we toch maar doen alsof er wél een echte μ en σ bestaan. Dan kennen we die nog lang niet. En de echte x kennen we alleen maar doordat we die zelf verzonnen hebben in dit hoofdstuk. Op grond van de metingen weten we alleen: $x_{m1} = 2,01 \pm 0,04 \text{ n}$.

Hoe is die onzekerheid van $0,04\text{ n}$ eigenlijk bepaald? Daar hebben we het nog niet over gehad. Er is een constant deel en een toevallig deel in die onzekerheid. Het constante deel kan niet uit de metingen worden afgeleid, maar zou gegeven kunnen zijn in specificaties van de meetapparatuur. Het toevallige deel kan volgen uit die specificaties. Het toevallige deel kan óók worden gevonden door de metingen te herhalen en te kijken wat de spreiding is. Door oneindig vaak te herhalen, kun je de kansverdeling bepalen.

Er is een belangrijk aspect in het soort plaatjes aan het begin van dit hoofdstuk dat meestal onbenoemd blijft. Die plaatjes geven namelijk de kansdichtheidsfunctie van één bepaalde meting voor één bepaalde grootte.

We hadden gevonden als meetresultaat: $x_{m1} = 2,01 \pm 0,04\text{ n}$.

De absolute onzekerheid was 4 cn en de relatieve onzekerheid was 2% . Hoe groot zullen nu de absolute en relatieve onzekerheid zijn in een grootte die twee keer zo groot is? En wéér dat irritante antwoord: dat weten we niet.

Terug naar Figuur 8.1 waar we mee begonnen. Zou onze meting echt normaal verdeeld zijn? Nee. Als je een tijdsduur meet en je komt uit op gemiddeld $1,5\text{ s}$ en een standaardafwijking van $0,3\text{ s}$, dan zou er een (kleine) kans zijn dat die tijd negatief is. En negatieve tijdsduren bestaan niet.

Dat zou mooi zijn, zeg! Een negatieve tijdsduur... Je zit op de fiets naar school en komt waarschijnlijk vijf minuten te laat voor het tentamen. Je snijdt een flink stuk af via een route waar je *een negatief kwartier* over doet... Dan heb je toch nog tien minuten speling!

Die verdeling is dus niet ‘echt’ normaal. En als die verdeling dat wel was, kenden we nog steeds die μ en σ niet. Er is nog meer aan de hand. Die onzekerheid kan *per gemeten waarde* verschillen. Op die $1,5\text{ s}$ zit een onzekerheid van $0,3\text{ s}$. Dat is 20% . Zit er dan op een tijdsduur van $2,5\text{ s}$ óók een onzekerheid van $0,3\text{ s}$? Of óók een onzekerheid van 20% en dus $0,5\text{ s}$? Misschien is het ene waar, misschien het andere... en misschien ook allebei niet.

Het zou kunnen dat de onzekerheid in de tijd t gelijk is aan $0,15\text{ s} + 0,1t$. Het zou zelfs zo kunnen zijn dat er een kwadratisch of logaritmisch verband is tussen het gemiddelde en de standaardafwijking. Theoretisch kan er heel veel. In de praktijk zijn we al blij als het ongeveer normaal (of uniform) verdeeld is en we daar wat getallen bij kunnen schatten.

Wat is hier mis met het model dat we gebruiken? Op zich niet zo veel, maar je moet je altijd realiseren dat die normale verdelingen met z’n μ en σ *slechts een model zijn*. En dat George Box gelijk had: elk model is fout.

In het model van een meting lijkt alles overzichtelijk: er is een meetobject, een instrument en een aflezing die tot een getal leidt. Toch is dat getal nooit het hele verhaal.

Elke meting wordt beïnvloed door factoren die niet direct zichtbaar zijn in de uitkomst. Die factoren zorgen ervoor dat resultaten variëren en dat er altijd onzekerheid is. Die onzekerheid ontstaat dus niet pas bij het rekenen, maar zit al in het meetproces zelf.

Het helpt om die invloeden expliciet te benoemen. Denk aan:

- het **instrument** (resolutie, kalibratie)
- de **omgeving** (temperatuur, trillingen)
- de **waarnemer** (aflezen, interpretatie)
- het **meetobject** (variatie in tijd of plaats)
- het **model** (wat meten we precies?)

Veel boeken over meten en onzekerheid gaan hier wel op in, maar doen dat verspreid of impliciet, bijvoorbeeld bij het onderscheid tussen systematische en toevallige fouten. Fornasini (2008) kiest een andere opbouw. Hij behandelt eerst het meetproces en staat vervolgens expliciet stil bij de verschillende bronnen van onzekerheid, voordat hij overgaat op de probabilistische beschrijving en het rekenen met onzekerheden. Daarmee maakt hij zichtbaar dat het identificeren van invloeden een stap op zichzelf is.

Dat is niet alleen een kwestie van ordening. Als de invloeden eenmaal in beeld zijn, wordt ook duidelijk waar onzekerheden vandaan komen en waar ze mogelijk kunnen worden verkleind, nog voordat ze worden gekwantificeerd.

9. Systematisch & Toevallig

Als we uitgaan van een goed gedefinieerde grootheid, een correcte meting en geen vreemde (of grote) spreidingen in de gemeten grootheid, dan blijven er eigenlijk maar twee soorten onzekerheid over.

- de onzekerheid als gevolg van een toevallige fout
- de onzekerheid als gevolg van een systematische fout

Het toevallige deel verschilt per meting. Het systematische deel is altijd hetzelfde: je meet altijd te veel of te weinig en de hoeveelheid varieert niet.

Een misverstand dat je soms tegenkomt, is dat alleen het toevallige deel als ‘onzekerheid’ wordt gezien. Laten we om dit te illustreren nog eens naar zo’n beginzin kijken, uit het boek van Barford (1985).

Words like error, accurate, truth, probable, likelihood, are part of everyday language. For most of us their meanings may not be mathematically precise, but the ideas behind them reflect experience we have gained from an early age.

Barford kiest zijn uitgangspunt bij de alledaagse ervaring van begrippen. Op zich niets mis mee. Maar dan gaat hij verder.

One way of approaching the subject matter of this book is to step aside from this experience and to talk of tossing coins and rolling dice, of the laws of probability that these activities demonstrate and the statistical predictions that may be derived from them.

En dat is een wat merkwaardige beperking. Munten, dobbelstenen, kansberekening en statistiek hebben allemaal met ‘toeval’ te maken. Maar er zit (soms) ook iets niet-toevalligs in de fout. Nou ja, misschien is het wel *toevallig*, maar *varieert het niet*. Als hij bij elke meting even groot is, heb je niets aan statistische theorieën over munten en dobbelstenen.

Er bestaan dobbelstenen waarmee je vaker dan gemiddeld (of zelfs altijd) 6 gooit: fopdobbelstenen of *fopdobs*. *Valsspelerstenen*, met alleen 1. Andere talen kennen *Glückswürfel* (Duits) of *snydeterninger* (Deens).

Fusketerning, der slår næsten altid en sekser. Superlækkert! Pas på, du ikke bliver afsløret; “åh nej, snyd og fusk igen!” På svensk tärningar, überhaupt.

Dat alleen het toevallige deel soms ten onrechte als onzekerheid beschouwd wordt, zal twee oorzaken hebben.

- Iets wat de hele tijd gelijk blijft, komt niet over als onzeker.
- Wat de hele tijd gelijk blijft, wordt niet zichtbaar door herhalen.

Berendsen (2011) geeft in zijn boek een driedeling die we niet overnemen.

3.1 Classification of errors

There are several types of error in experimental outcomes:

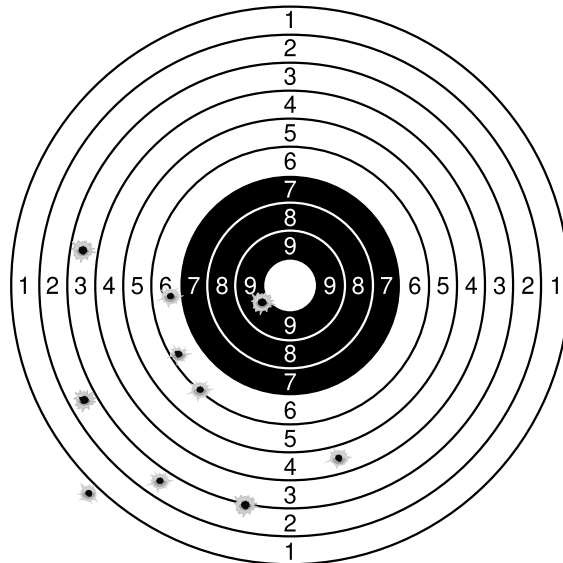
- (i) (accidental, stupid or intended) mistakes*
- (ii) systematic deviations*
- (iii) random errors or uncertainties*

The first type we shall ignore. Accidental mistakes can be avoided by careful checking and double checking. Stupid mistakes are accidental errors that have been overlooked. Intended mistakes (e.g. selecting data that suit your purpose) purposely mislead the reader and belong to the category of scientific crimes.

Stupid? Slim is een fout zelden, maar meestal ook niet stom. Niet toegeven is dat wel, maar een fout maken is vergefelijk en leerzaam en niet erg. De fout zelf kan wel stom zijn. Degene die hem maakt is dat niet.

Als mijn personenweegschaal steeds iets anders aangeeft als ik erop en eraf stap, weet ik heus wel dat mijn gewicht (massa) niet met een paar ons verandert in die korte tijd. Dat toevallige deel zie ik wel. Maar dat ik er de hele tijd een procent naast zit, blijkt nergens uit. (Behalve dan dat ik heus wel lichter ben dan wat dat ding zegt... Een paar jaar geleden gaf hij minder aan.)

Toevallige en systematische fouten worden wel eens in kaart gebracht en uitgelegd aan de hand van schietschijven en pijlen die in de roos belanden of juist niet. Die komen we in de loop van dit boek vaker tegen.



Figuur 9.1 Metafoor van toevallige en systematische fouten: de schietschijf

In de vele plaatjes op het internet wordt er gebruik gemaakt van ronde, tweedimensionale schietschijven. Waarom dan? Meten doe je meestal aan een *scalaire* grootheid, niet aan een vector. Alleen de afstand tot de roos heeft dus betekenis. Maar ja: een ééndimensionale schietschijf... Dan is de kans dat je raak schiet wel erg klein.

Er zit een spreiding in de kogelgaten, veroorzaakt door de schutter en/of het geweer. Die spreiding duidt op een *toevallige fout*. Dat de meeste kogels in het kwadrant linksonder zitten, gemiddeld genomen een stuk van de roos af, duidt op een *systematische fout*. Bij de schietschijf kun je beide zien:

- de toevallige fout zit in de grootte van de spreiding
- de systematische zit in de gemiddelde afstand tot de roos

Bij een meting hebben we een probleem dat we met de schietschijf niet hebben: we zien bij metingen wel een spreiding en weten hoe groot die is. Maar we weten niet hoe ver die afstand tot de roos is. Hier zit wat verwarring. Als we een tijd meten en beweren dat we een systematische fout hebben van 0,2 seconde, dan ben je geneigd om te zeggen: ‘Man (m/v), corrigeer daar dan voor!’ Maar je weet *wel* dat de grootte ongeveer 0,2 seconde is en *niet* of het nou 0,1 s of -0,2 s of 0,15 s of 0,25 s of -0,005 s is. Het zijn in ieder geval geen tien seconden, maar heus wel meer dan een nanoseconde.

We hebben dus een ruwe ‘maat’ voor die systematische fout. Je weet bijvoorbeeld dat je er grofweg 2% naast zal zitten. Maar je weet niet hoeveel precies. Het is een soort stelpost: je weet dat er wat aan mankeert, maar niet hoeveel.

We weten van de systematische fout niet eens of hij positief of negatief is. Als we wisten dat de afwijking in de tijd ergens tussen de 0,1 s en 0,3 s zou zitten, zouden we bij alle waarden 0,2 s optellen. Omdat we dan dichterbij de buurt komen.

Er is nog iets te zeggen over systematische en toevallige fouten, namelijk dat je beter kunt spreken van een *deterministisch* en een *stochastisch* deel. Een stuk dat de hele tijd hetzelfde is en een stuk dat bij elke meting anders kan zijn. Die systematische fout kan door toeval veroorzaakt zijn. Als dat toevallige deel de hele tijd hetzelfde is, noemen we het nog steeds systematisch. De waarde op zich is dan toevallig, maar wel constant. In het volgende hoofdstuk zien we daar een voorbeeld van.

Statistisch geformuleerd: als fouten normaal verdeeld zijn met een gemiddelde μ en een standaardafwijking σ , dan is

- de systematische fout gelijk aan μ
- de toevallige fout een normaal verdeeld proces met een gemiddelde van 0 en een standaardafwijking σ

11. Nauwkeurig & Precies

Als je wilt weten wat een woord betekent, helpt Google of een woordenboek. Dat laatste is betrouwbaarder, want via een zoekmachine weet je maar nooit waar je terechtkomt. Met wat mazzel kom je in de gratis *online Van Dale*.

We willen weten wat het verschil is tussen *nauwkeurig* en *precies*.

nauw•keu•rig (*bijvoeglijk naamwoord, bijwoord*) juist, zorgvuldig, stipt;
= accuraat

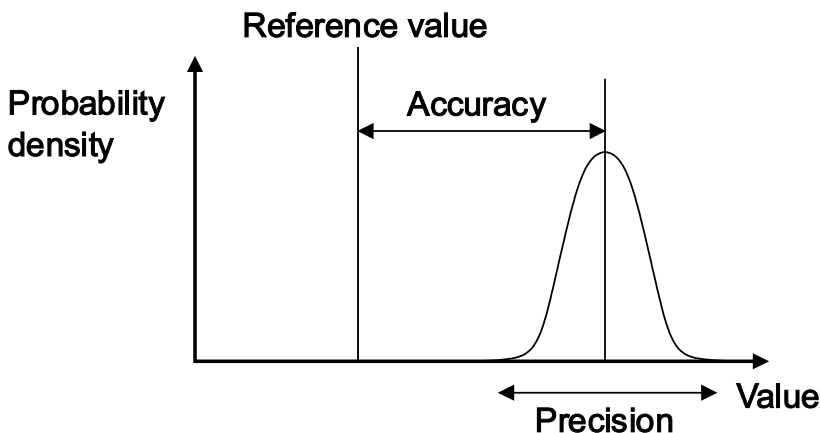
pre•cies (*bijvoeglijk naamwoord, bijwoord*; vergrotende trap: *preciezer*, overtreffende trap: *preciest*) zonder afwijking of verschil; juist, nauwkeurig, stipt: *precies honderd euro*; *hij is al te precies* nauwgezet

Waarom er bij ‘precies’ een vergrotende en overtreffende trap staat en bij ‘nauwkeurig’ niet, is niet duidelijk. Verwarrender is dat bij ‘precies’ het woord ‘nauwkeurig’ als synoniem staat, maar omgekeerd lijkt ‘nauwkeurig’ geen synoniem te zijn van ‘precies’. Hoe zit dat precies?

In het vakgebied van *Metten & Weten* zijn nauwkeurigheid en precisie twee wezenlijk verschillende dingen.

- nauwkeurigheid is de mate waarin het gemiddelde van (oneindig) veel metingen overeenkomt met de werkelijke waarde
anders gezegd: hoe dicht de metingen bij de werkelijke waarde liggen
- precisie is de mate waarin herhaalde metingen met elkaar overeenkomen
anders gezegd: hoe dicht de metingen bij elkaar liggen

Een klassieker is het plaatje hieronder, van de Engelstalige *Wikipedia*.



Figuur 11.1 Het verschil tussen Accuracy en Precision volgens Wikipedia, grafisch weergegeven

De Engelse vertaling van ‘nauwkeurigheid’ is *accuracy* en van ‘precisie’ is het *precision*. Op grond van het plaatje zou je denken dat de nauwkeurigheid toeneemt als de verticale lijnen verder uit elkaar liggen en dat de precisie toeneemt als de klokvormige curve breder is. Dat is juist niet het geval. Het zou beter zijn om te spreken van onnauwkeurigheid en imprecisie. Als je zegt dat je 1,71 meter lang bent en dat vastgesteld hebt met een nauwkeurigheid van 1 cm, bedoel je dan dat je er maar liefst 1,70 meter naast kunt zitten? (“Misschien ben ik wel drie meter veertig, de nauwkeurigheid is nogal klein...”)

Er is nog iets vervelends aan de hand. De termen in de Engelstalige afbeelding (en hun vertalingen in het Nederlands) zijn zeer gangbaar (geweest) en komen ook in veel boeken voor. De officiële termen zijn vastgelegd in ISO 5725. Wat in bovenstaand plaatje *accuracy* is (nauwkeurigheid), heet volgens die norm *trueness* (‘juistheid’). Dat laatste overigens nog met een subtiële toevoeging: de pijl in het plaatje moet korter zijn, omdat we als getalswaarde aan de *precision* de standaardafwijking van de verdeling koppelen. De pijl bij het woord ‘Precision’ in Figuur 11.1 is meer dan vier keer zo groot.

Het wordt nog vervelender: de term *accuracy* (nauwkeurigheid) wordt in ISO 5725-1 gebruikt om te beschrijven hoe dicht een meting bij de werkelijke waarde ligt. Als er dan sprake is van een reeks metingen van dezelfde meetgrootte, gaat het om

- een deel dat wordt veroorzaakt door willekeurige fouten en
- een deel dat wordt veroorzaakt door systematische fouten.

Dan is *juistheid* de mate waarin het gemiddelde van een reeks meetresultaten de feitelijke (ware) waarde benadert en *precisie* de mate van overeenstemming tussen een reeks resultaten.

In Engelstalige boeken en normen kom je vaak het woord *bias* tegen. In het gewone Engels betekent dat soms *vooordeel*, maar een meetinstrument zou geen mening moeten hebben, vind ik.

In de metrologie betekent *bias* dat een meetmethode er gemiddeld stelselmatig naast zit. Nederlandse woorden die in de buurt komen zijn *vertekening*, *systematische afwijking*. *Systematische fout* zou ook kunnen, maar eigenlijk is het beter om te spreken van het systematische deel van de fout: het deel dat niet uitmiddelt.

Maar laten we nog iets preciezer zijn. JCGM (2012) zegt in zijn officiële woordenlijst in paragraaf 2.18: *measurement bias: estimate of a systematic measurement error*. Dan is bias dus niet de fout zelf, maar de schatting ervan. Dat is niet hetzelfde, maar wel de grootte waarmee je verder zult moeten. Geen enkele schatting is beter dan de beste.

We begonnen dit hoofdstuk met het opzoeken van *nauwkeurig* en *precies* in *Van Dale* (online). En we eindigen met het opzoeken van *exact*.

exact (bijvoeglijk naamwoord, bijwoord) nauwkeurig, stipt: exacte wetenschappen wis-, schei- en natuurkunde; *de exacte cijfers heb ik niet; zij heeft exact dezelfde jas als ik* precies dezelfde

Gekker moet het toch niet worden! Als eerste betekenis van 'exact' wordt door *Van Dale* 'nauwkeurig' gegeven. En 'exact dezelfde jas' is volgens datzelfde gezaghebbende boek 'precies dezelfde'... Pak je een naslagwerk erbij, dan wordt het één pot nat. Ze nemen het niet zo nauw, keurig uitgedrukt. Terwijl dat nou juist precies de bedoeling is!

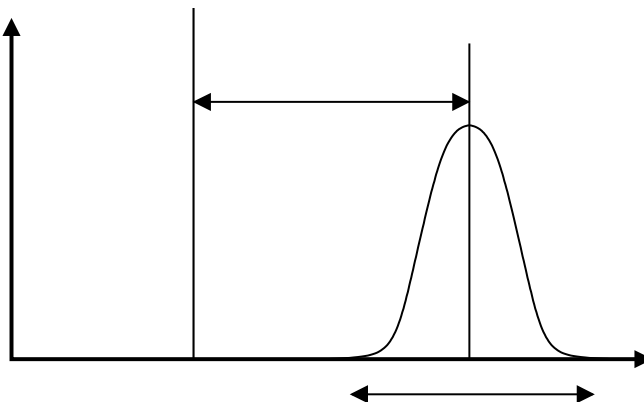
Naast *nauwkeurig* (gemiddeld genomen dicht bij de werkelijke waarde) en *precies* (weinig spreiding in de meetwaarden) hebben we ook nog een derde begrip: *exact*. Een meting is *exact* als de uitkomst in alle mogelijke decimalen overeenkomt met de werkelijke waarde en er geen spreiding is. De onnauwkeurigheid en de imprecisie zijn nul. Er is dan geen verschil tussen meting en werkelijkheid. Bij een telling kan dat het geval zijn.

Voorbeelden van exacte dingen:

- een inch is exact 2,54 cm (want hij is zo gedefinieerd)
- de lichtsnelheid is exact 299 792 458 m/s (want die is zo gedefinieerd)
- er gaan exact twaalf eieren in een dozijn (in een dozijn *eieren* dan...)

Oefeningen

1. Vul in Figuur 11.2 de juiste Nederlandse woorden in.



Figuur 11.2 Soorten onzekerheden, zonder tekst

2. Vul in Figuur 11.2 de juiste Engelse woorden in.

3. Iemand vraagt naar de lichtsnelheid afgerond op een geheel aantal inches per seconde. Is het mogelijk om een exact antwoord te geven?
4. Maak het woord 'precision' met de letters van 'spreiding'.
5. Twee multimeters worden gebruikt voor het bepalen van een spanning. De eerste heeft als meetresultaat $2,36 \pm 0,02$ V.
De tweede heeft als meetresultaat 2350 ± 5 mV.
Welke van beide multimeters is nauwkeuriger?
6. Twee digitale afstandsmeters worden gebruikt voor het bepalen van een lengte. De eerste heeft een spreiding van 2% op een lengte van ongeveer acht meter. De tweede heeft een spreiding van 1 cm op een lengte van ongeveer zestig centimeter.
Welke van beide afstandsmeters heeft de grootste nauwkeurigheid?

Een van mijn vroegste jeugdherinneringen – denk ik – gaat terug naar het antwoord dat ik kreeg van mijn vader op een in mijn ogen eenvoudige vraag. “*Papa, vijftwintig gulden, is dat veel?*” Dat vroeg ik pakweg in 1973 en ik schreef dit hoofdstuk in 2023: precies een halve eeuw later. Gecorrigeerd voor inflatie was f 25 in 1973 net zoveel als € 50 en een paar cent in 2023.

Mijn vraag werd beantwoord met: “Dat ligt eraan waarvoor.” En dat is ook zo. Maar ik vond destijds dat je niets aan dat antwoord had. Vertel nou gewoon maar of het veel is, zonder daar omheen te draaien.

Van 1973 terug naar *Metten & Weten* en iets wat hierop lijkt. Of iets ‘nauwkeurig’ is of ‘precies’, is namelijk ook niet zomaar te beantwoorden. Je kunt alleen zeggen dat de ene manier van meten *nauwkeuriger* (of *preciezer*) is dan de andere. En je kunt ook nog kiezen of je dat absoluut of relatief neemt.

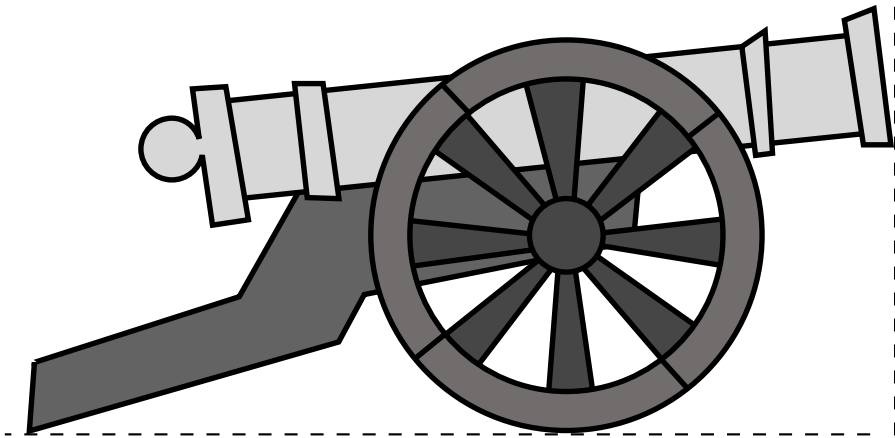
Nauwkeurig en precies zijn dus relatieve begrippen. En wat nu zo bijzonder is: ook de *relatieve* onzekerheden zijn getallen die je moet relateren aan iets anders. “Papa, is een relatieve onzekerheid van 5% klein?” “Dat ligt eraan...” Ook een relatieve fout is betrekkelijk.

19. Spreiding in wat we meten

“Hoe ver kun je schieten met een kanon?”

Hebben we bij deze vraag een definitieprobleem? Ja. Op z'n minst eentje: welk kanon bedoel je? Het ene kanon is het andere niet. Laten we de vraag aanpassen.

“Hoe ver kun je schieten met dit ene kanon uit Figuur 19.1?”



Figuur 19.1 Kanon

Natuurlijk kun je met een getekend kanon niet schieten, maar dit is ook maar een boek. Laten we uitgaan van één specifiek werkelijk bestaand kanon.

Hebben we nu nog een definitieprobleem? Je zou in ieder geval goed moeten vastleggen welke afstand je precies bedoelt. Laten we meten vanaf het kruispunt van de stippellijnen: het uiteinde van de loop van het kanon en de grond zijn dan je uitgangspunten. En we trekken loodrecht een lijn omlaag.

Zijn die lijnen in de werkelijkheid exact gedefinieerd? De horizontale lijn is wat twijfelachtig: de ondergrond is namelijk nooit volmaakt vlak. Maar je zou de verticale lijn wel kunnen definiëren als de exacte richting van de zwaartekracht. Niet dat je die exact kunt *meten*, maar je hebt dan wel een exacte *definitie*.

Missen we iets? We hebben een werkelijkheid met drie ruimtelijke dimensies. (Misschien zijn er ook hogere dimensies, maar die zien we niet en kunnen we dus bij het meten buiten beschouwing laten.)

Toch hebben we nu aan één punt genoeg om het andere te vinden.

- vanaf het exacte midden van de loop van het kanon
- in de richting van de zwaartekracht
- naar de grond toe

We gaan voor het gemak – en voor onze veiligheid – uit van een speelgoedkanon dat een paar meter kan schieten. Dan kunnen we onze meting doen met een meetlint van 5 meter. Hoe groot is de onzekerheid in de meting? Een paar millimeter? Een hele centimeter? Daar kun je verschillend over denken. En dus is het erg belangrijk dát je erover nadenkt.

Dit zijn de afstanden die we meten:

2,60 m, 2,73 m, 2,57 m, 2,69 m, 2,56 m, 2,68 m, 2,72 m, 2,69 m, 2,60 m, 2,67 m.

Het verschil tussen de grootste gemeten afstand (2,73 m) en de kleinste gemeten afstand (2,56 m) is 17 cm. Dat is heus wel meer dan die onzekerheid in het aflezen van het meetlint.

We zien variaties in verschillende soorten:

1. De exacte definitie.
2. De kwaliteit van je meetlint.
3. Het aflezen van het meetlint.
4. De variatie in het schieten.

Het eerste punt valt hier op te lossen door eenduidig te definiëren. Het tweede en derde punt vormen de onzekerheid in je meting (*measurement*). Het vierde punt is de onzekerheid in de grootheid die je meet (*measurand*).

De variaties hebben te maken met luchtweerstand en toevallige windkracht, hoeveelheid kruit, positionering van de kogel en nog wel wat dingen. Die spreiding is zo vreemd niet.

We hebben hier dus te maken met een spreiding in datgene wat je meet die groter is dan je onzekerheid in de meting.

Oefeningen

1. Geef aan hoe je de onzekerheid in de meting zou kunnen schatten.
2. Geef een aanduiding voor de spreiding in de meting zelf.

48. Onafhankelijke fouten optellen

Als je een weegschaal hebt die ergens tussen 0% en 2% te veel aangeeft, maar je weet niet hoeveel, wat moet je dan?

Over dat ‘ergens’ weet je wat weinig. Domweg overnemen wat er op het schermpje staat, zou niet slim zijn. Daar kun je voor corrigeren. Standaard 1% aftrekken en een onzekerheid aanhouden van 1%: dat is geen slecht idee.

We wegen 406 gram suiker af. Dan zeggen we dat het 1% minder is en geven de bijbehorende onzekerheid op.

$$m_{\text{suiker}} = 0,402 \pm 0,004 \text{ kg}$$

Het zou kunnen, dat het 406 gram was. Maar 398 gram is ook mogelijk.

Intussen hebben we een nieuwe weegschaal gekocht en de fabrikant is zo slim geweest om die ene procent al te corrigeren. Dat rekensommetje hoeft dus niet meer, maar die onzekerheid zit er nog steeds in. De schaal kan nu te veel of te weinig aangeven: we weten alleen niet hoeveel precies. (De fabrikant ook niet, anders hadden ze daar ook wel voor gecorrigeerd.)

We wegen opnieuw vier ons suiker af, maar ook nog eens twee ons bloem en een pond boter. (Toe maar!) Dat gooien we allemaal bij elkaar... hoeveel hebben we dan?

$$m_{\text{suiker}} = 0,404 \pm 0,004 \text{ kg}$$

$$m_{\text{bloem}} = 0,199 \pm 0,002 \text{ kg}$$

$$m_{\text{boter}} = 0,503 \pm 0,005 \text{ kg}$$

Het vervelende van die weegschaal is: we weten wel dat-ie afwijkt, maar niet precies hoeveel en ook niet of het te veel of te weinig is. (Hadden we nou die oude weegschaal nog maar! Die week meer af, maar je wist tenminste zeker dat je nooit te veel nam.)

Die schaal geeft dus structureel te veel of te weinig aan en we ontkomen er niet aan om de onzekerheden bij elkaar op te tellen. Het goede nieuws is: relatief blijft de onzekerheid gewoon die ene procent.

$$m_{\text{alles}} = 1,106 \pm 0,011 \text{ kg}$$

Als we twee keer zo veel hadden genomen, hadden we een significant cijfer moeten inleveren. Eigenlijk is dat niet logisch, maar dat zijn de regels.

$$m_{dubbel} = 2,21 \pm 0,02 \text{ kg}$$

Nu gaan we iets anders doen. We lenen de weegschaal van onze buren. Twee verschillende weegschalen, van hetzelfde merk en met dezelfde specificaties. Die geven beide een procent te veel of te weinig aan, maar het probleem is: het kan best zijn dat de ene altijd te veel aangeeft en de andere altijd te weinig. Of andersom. Of beide te veel, of beide te weinig...

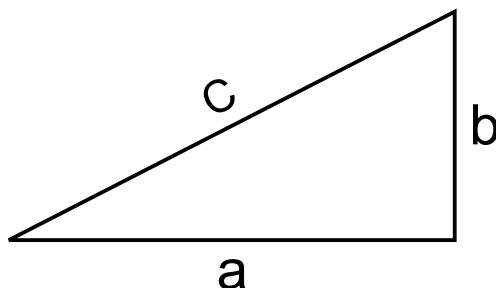
We gaan nu de suiker en de bloem met de ene weegschaal wegen en de boter met de andere. Hoe zit dat nu met het totaal? We moesten eerst de onzekerheden domweg optellen omdat het als maar erger werd. Maar het zou nu kunnen zijn dat de ene te veel aangeeft en de andere te weinig. Het is wel erg pessimistisch om ervan uit te gaan dat je het moet optellen.

Wiskundig gezien kun je bewijzen dat het *kwadratisch optellen* van de onzekerheden een betere maat geeft dan 'gewoon' optellen. Dat heeft iets te maken met Taylorreeksen en fouten die 'haaks' op elkaar staan, maar dat bewijs besparen we je. Hughes & Hase (2010) bewijzen het wel. Dus voor wie wil...

Wiskundigen noemen 'haaks' anders: 'orthogonaal'. Een rechte hoek dus, van 90° of een half pi. Engelsen noemen een halve taart een *half pie*.

Dat heeft niets met elkaar te maken en dat brengt ons terug bij 'orthogonaal': in dit verband betekent het: niets met elkaar te maken hebben. We zeggen wel dat dingen haaks op elkaar staan als ze tegenstrijdig zijn. Vreemd eigenlijk, want dan gaan ze toch juist recht tegen elkaar in?

Het bewijs hoef je niet te kennen of te begrijpen. Maar het is wel handig om in te zien dat een kwadratische optelling altijd minder oplevert dan een gewone optelling (tenzij een van beide nul is, maar dan tel je niets op).



Alleen als b of c gelijk is aan 0 is a gelijk aan de som van die twee. In alle andere gevallen is de waarde kleiner. Een rechte lijn tussen twee punten is nu eenmaal altijd een kortere weg dan eentje met een haakse bocht erin.

73. Noteren van onzekerheden

Je hebt een meting pas goed genoteerd als de volgende punten correct zijn.

1. de eenheid van de beste schatting en de onzekerheid
2. de waarde van de onzekerheid in het juiste aantal cijfers
3. de waarde van de beste schatting in het juiste aantal cijfers
4. eventuele machten van 10 en voorvoegsels zoals ‘milli’
5. een punt of een komma op de juiste plaats
6. eventuele spaties om de waarde duidelijker te maken
7. eventuele haakjes om het geheel duidelijker te maken

De eenheid dus op nummer 1! Zonder een eenheid heb je namelijk niets, ook al kun je het in de praktijk vaak zelf wel invullen. Als iemand zegt dat hij een houten ondergrond van ‘twee bij twee’ gaat aanleggen onder een meetopstelling, dan zullen dat heus wel meters zijn. Maar je hoort ze te noemen.

Met stip op 2: de waarde van de onzekerheid. Ook daarvoor geldt: als je die niet kent, weet je ook weinig. “Ik heb een voorlopig cijfer voor je tentamen: je hebt een 6,2.” “Joepie!” “En de onzekerheid in het cijfer is 3,5 punt.”

Er is nog een reden om met de onzekerheid te beginnen. Het juiste aantal cijfers daarin is namelijk bepalend voor de notatie van de beste schatting. Dat is ook wel logisch: de onzekerheid zegt namelijk iets over de waarde ervoor, namelijk hoe goed je die kent. Het omgekeerde is niet het geval.

Stel dat je een multimeter hebt met te veel cijfers achter de komma. Je meet daarmee een weerstand en komt uit op de volgende waarde.

$$R = (122,143\,766\,8 \pm 0,003\,422\,057\,562\,3) \, \Omega$$

Hoe ga je dit in de juiste vorm schrijven? Begin met de eenheden (die kloppen al) en de onzekerheid. Die noteer je met één significant cijfer.

$$\delta R = 0,003 \, \Omega$$

Let op: de onzekerheid in de gemeten weerstand is hier dus in *één significant cijfer* en in *drie decimalen*. Om de beste schatting daarmee te laten kloppen, moet die waarde ook in drie decimalen worden genoteerd. We krijgen dus:

$$R = (122,144 \pm 0,003) \, \Omega$$

Het derde cijfer achter de komma wordt een 4, omdat er na de 3 een 7 stond.

Is de weerstand zelf nu ook in één significant cijfer gegeven? Nee, de weerstand zelf heeft zes significante cijfers. Als de onzekerheid tien keer zo klein was geweest (0,0003 Ω dus), waren dat zelfs zeven cijfers geweest. De beste

schatting had dan namelijk als $122,1438 \Omega$ moeten worden genoteerd. En was de onzekerheid honderd keer zo groot ($0,3 \Omega$ dus), dan bleven er vier significante cijfers over. Drie voor de komma en één erachter.

Stel nu dat het eerste significante cijfer van de onzekerheid in de weerstand niet een 3 maar een 1 was geweest, en de andere cijfers hetzelfde; wat zou dan het resultaat zijn geworden? De onzekerheid zou in één extra decimaal worden gegeven (twee significante cijfers) en de beste schatting dus ook. De afronding pakt dan wel anders uit. In dat geval komen we op:

$$R = (122,1438 \pm 0,0014) \Omega$$

Dit zijn twee voorbeelden met nogal kleine onzekerheden. Stel nu eens dat de onzekerheid veel groter was.

$$\delta R = 10,00 \Omega$$

We moeten dan de onzekerheid in twee significante cijfers schrijven, omdat het eerste cijfer in δR een 1 is. Dan blijft er een waarde over zonder cijfers achter de komma. Voor de beste schatting geldt dan hetzelfde.

$$R = (122 \pm 10) \Omega$$

Maar wat nu als de onzekerheid nog drie keer zo groot was? Het is verleidelijk om dan in plaats van 10 gewoon 30 te schrijven, maar dat mag niet: een 3 is geen 1, en moet dus met één significant cijfer worden genoteerd. Een oplossing die je in sommige boeken wel ziet, is dat de laatste 2 van 122 wordt weggelaten. Of beter gezegd: omgezet in een 0.

$$R = (120 \pm 30) \Omega$$

Het nadeel hiervan is dat je volgens de regels van significantie nog steeds te veel cijfers hebt. We kunnen dit oplossen door met machten van 10 te werken, of te kiezen voor een voorvoegsel in de eenheid.

$$R = (0,12 \pm 0,03) \text{ k}\Omega$$

Wie niet van onnodige komma's houdt, wordt hier niet blij van. Toch heeft deze notatie een voordeel: de $\text{k}\Omega$ maakt duidelijk dat je het zo heel zeker niet weet.

We gaan nu een spanning meten met de multimeter. Dit is het meetresultaat.

$$U = 3,7502 \text{ V} \pm 42 \text{ mV}$$

De eenheden kloppen nu dimensioneel wel met elkaar, maar het voorvoegsel *m* (milli, een duizendste) maakt dat de getallen niet met elkaar overeenkomen. Er moet dan gekozen worden tussen volt en millivolt. Vanwege de

grootte van de beste schatting ligt de eenheid volt hier het meest voor de hand. Om fouten te voorkomen, voeren we die eerste stap apart uit.

$$U = 3,7502 \text{ V} \pm 0,042 \text{ V}$$

Het lijkt een simpele zet, maar je gaat met het verschuiven van de komma heel snel de mist in. Van millivolt naar volt is een factor 1000. Je moet de komma dus drie plaatsen naar links zetten. Daarna is het nog een kwestie van het juiste aantal significante cijfers kiezen en de haakjes om de getallen.

$$U = (3,75 \pm 0,04) \text{ V}$$

Merrin (2017) maakt hierover een aardige opmerking. Volgens hem kun je aan het getal 4200 zelf niet zien hoeveel significante cijfers het heeft. Dat hangt af van de onzekerheid.

Bij 4200 ± 43 zijn de nullen aan het eind van 4200 volgens Merrin wél significant. De onzekerheid loopt immers door tot in de eenheden. Dan zegt die laatste nul dus iets. Maar bij 4200 ± 1500 zijn diezelfde nullen niet significant. De onzekerheid is zo groot dat alleen de 4 en de 2 nog echt betekenis hebben.

Daar zit veel in. De onzekerheid geeft als het ware betekenis aan de laatste cijfers van de beste schatting. Wel volgt Merrin bij 43 niet de regel die wij in dit boek gebruiken. Wij zouden 43 afronden naar 40, omdat de onzekerheid dan één significant cijfer krijgt. Bij 1500 volgt hij onze regel juist wel: omdat het eerste significante cijfer een 1 is, houden we twee significante cijfers aan.

Naast voorvoegsels kunnen er ook machten van 10 zijn die maken dat de beste schatting en de onzekerheid nog moeten worden ‘uitgelijnd’. Dat zie je in onderstaand voorbeeld.

$$l = 0,017\,734\,52 \cdot 10^{-2} \text{ mm} \pm 6,222 \cdot 10^{-3} \mu\text{m}$$

Een raar geval, maar als oefening des te aardiger. Waar begin je mee? De eerste stap zou kunnen zijn om die machten van 10 weg te werken. Dan krijg je veel cijfers achter de komma, maar dat komt daarna wel goed.

$$l = 0,000\,177\,345\,2 \text{ mm} \pm 0,006\,222 \mu\text{m}$$

Om ze aan elkaar gelijk te maken, moet er worden gekozen tussen mm en μm . Natuurlijk zou je een ander voorvoegsel kunnen kiezen, maar als je dat doet, maak je twee stappen tegelijk en dat vergroot de kans op fouten. Gezien de beide getallen liggen micrometers het meest voor de hand. De beste schatting moet met een factor 1000 worden vermenigvuldigd. De komma gaat dus drie plaatsen naar rechts.

$$l = 0,177\,345\,2\,\mu\text{m} \pm 0,006\,222\,\mu\text{m}$$

$$l = (177,3452 \pm 6,222)\,\text{nm}$$

De laatste stap is het correct noteren van het aantal *significante cijfers* in de *onzekerheid* en het daarmee laten overeenkomen van het aantal *decimalen* in de *beste schatting*. Let in die stap goed op de afronding: in dit geval omlaag, omdat er na de komma een 3 staat.

$$l = (177 \pm 6)\,\text{nm}$$

Een onzekerheid is pas volledig gespecificeerd als ook duidelijk is wat die betekent. De GUM stelt dat een resultaat met zijn onzekerheid niet alleen met een passend aantal significante cijfers moet worden gegeven, maar ook in relatie tot de gekozen onzekerheidsmaat, en dat het meestal volstaat om hooguit twee significante cijfers te gebruiken. In veel boeken blijft die betekenis impliciet. Taylor (1997) en Hughes & Hase (2010) werken bijvoorbeeld met standaardafwijkingen en bijbehorende intervallen, zonder dat expliciet te vermelden bij elk resultaat. Rabinovich (2005) bespreekt betrouwbaarheidsintervallen wel, maar zonder daar een vaste notatie-eis aan te koppelen.

Ratcliffe & Ratcliffe (2015) vormen een uitzondering en zijn hierin explicieter en benadrukken dat het betrouwbaarheidsniveau moet worden opgegeven. Een notatie met alleen een beste schatting en onzekerheid (met plusmin en eenheid) is dus op zichzelf niet volledig.

Op toetsen van het vak *Error Budgeting* in de opleiding Mechatronica van de Haagse Hogeschool (locatie Delft) wordt al jarenlang dezelfde vraag 1 gesteld. Die vraag luidt als volgt.

Herschrijf de volgende (berekende) grootheden zodanig dat het aantal significante cijfers klopt met de regels zoals die gegeven zijn in het vak Error Budgeting.

Er volgen daarna vijf metingen en onzekerheden die correct moeten worden opgeschreven. De vraag is één punt waard en per fout gaat er een halve punt af. Als je twee of meer (van de vijf) vragen fout doet, heb je dus nul punten... Streng? Misschien. Maar studenten weten van tevoren dat ze deze vraag krijgen! En de regels zijn gegeven en uitgelegd.

Oefeningen

Herschrijf de volgende (berekende) grootheden zodanig dat het aantal significante cijfers klopt met de regels zoals die gegeven zijn in dit hoofdstuk.

1. lengte = $1,71 \text{ m} \pm 1\frac{1}{2} \text{ cm}$
2. breedte = $200 \text{ mm} \pm \text{een half inch}$
3. oppervlakte = $60,55 \text{ m}^2 \pm 450 \text{ cm}^2$
4. volume = $40,3020 \text{ cl} \pm 10 \text{ cc}$
5. tijd = $59,9876 \text{ s} \pm 5 \text{ ms}$
6. massa = $72,55 \text{ kg} \pm 391 \text{ g}$
7. hoek = $3,1415279 \pm 0,025 \text{ rad}$
8. volume = $98,357 \text{ cm}^3 \pm 246 \text{ mm}^3$
9. frequentie = $50 \text{ Hz} \pm 5\%$
10. temperatuur = $20 \text{ }^\circ\text{C} \pm 2 \text{ }^\circ\text{F}$
11. elektrische weerstand = $1,101011001 \text{ } \Omega \pm 1,49 \text{ m}\Omega$
12. volume = $0,44 \times 10^{-2} \text{ mm}^3 \pm 7,1 \times 10^{12} \text{ nm}^3$
13. spanning = $230,00000500025 \text{ V} \pm 45 \text{ } \mu\text{V}$
14. elektrische stroomdichtheid = $0,04 \text{ A/m}^2 \pm 400 \text{ mA/mm}^2$
15. warmte = $6033 \text{ kJ} \pm 4499 \times 10^2 \text{ J}$
16. oppervlakte = $7659 \times 10^{-6} \text{ } \mu\text{m}^2 \pm 8,834 \times 10^{-1} \text{ nm}^2$
17. kracht = $99,9 \text{ kN} \pm 0,99 \times 10^4 \text{ N}$
18. vermogen = $0,22 \text{ kW} \pm 33 \text{ W}$
19. druk = $200 \text{ Pa} \pm 3 \text{ N/dm}^2$
20. elektrische stroomsterkte = $-0,045 \text{ A} \pm 500 \text{ mA}$
21. versnelling = $9,814602537 \text{ mm/ms}^2 \pm 0,213 \text{ m/s}^2$

Tijdens het bestuderen van een vorige editie van dit boek mailde een student naar aanleiding van vraag 10 dat $2 \text{ }^\circ\text{F}$ gelijk is aan $-16,667 \text{ }^\circ\text{C}$. Hij dacht daarom dat het antwoord moest zijn: $20 \pm 17 \text{ }^\circ\text{C}$. Dat vond ik een interessante vergissing! Hij had gelijk dat $2 \text{ }^\circ\text{F}$ gelijk is aan $-16,667 \text{ }^\circ\text{C}$. Maar dat is alleen maar zo als je het hebt over een *temperatuur* en niet als je het hebt over een *temperatuurverschil*. Dan is het $1,111 \text{ }^\circ\text{C}$.

Collega Dirk Doedens vroeg zich af: “Is $10 \text{ }^\circ\text{C}$ hetzelfde als $10 \text{ }^\circ\text{C} - 0 \text{ }^\circ\text{C}$?” Zijn vraag wordt leuk als je die omrekent naar fahrenheit.

83. Fout gebruik van de term ‘error’

Stephanie Bell (1999) beschrijft in haar boek *A Beginner’s Guide to Uncertainty of Measurement* glashelder op wat het verschil is tussen een fout (*error*) en onzekerheid (*uncertainty*). Dat het verschil belangrijk (*important*) genoemd wordt, is terecht.

2.3 Error versus uncertainty

It is important not to confuse the terms ‘error’ and ‘uncertainty’. Error is the difference between the measured value and the ‘true value’ of the thing being measured. Uncertainty is a quantification of the doubt about the measurement result. Whenever possible we try to correct for any known errors: for example, by applying corrections from calibration certificates. But any error whose value we do not know is a source of uncertainty.

Een fout is wel een *bron van onzekerheid*, maar het is niet *de onzekerheid zelf*. De fout kan heel klein zijn terwijl de onzekerheid groot is, als een toevallige fout toevallig klein is. Een fout kan groter zijn dan de onzekerheid, bijvoorbeeld bij een toevallige fout die normaal verdeeld is. In dat geval ligt 68% van de meetresultaten binnen één standaardafwijking rond het gemiddelde – dus ongeveer één op de drie valt daarbuiten.

We hebben nu twee mogelijke misverstanden.

- Een fout is niet per se ‘iets verkeerd gedaan hebben’. Soms (meestal) ontkom je er niet aan dat er een verschil zit tussen de werkelijke waarde en je meting.
- Een fout geeft aan hoeveel je ernaast zit, een onzekerheid is daar slechts een indicatie van. De eerste ken je niet, de tweede is een schatting. De eerste is een getal dat per meting verschilt, de tweede is een kansvariabele.

Je kunt je afvragen of Stephanie Bell zelf helemaal correct is in haar woordkeuze. In *Metten & Weten* verstaan we onder een *meetresultaat* een *beste schatting met een onzekerheid*. Strikt genomen is het beter om te spreken over de twijfel over de *meetwaarde* in plaats van het *meetresultaat*.

Wat Stephanie Bell er niet bij zegt, is dat het vaak door elkaar wordt gehaald. Hughes & Hase benoemen dat wel.

You should note that despite many attempts to standardise the notation, the words ‘error’ and ‘uncertainty’ are often used interchangeably in this context — this is not ideal — but you have to get used to it!

Je zult er inderdaad aan moeten wennen dat veel mensen (en boeken) fouten maken. Maar het is niet handig om daar zelf onnodig aan mee te doen of eroverheen te lezen als iets niet klopt.

Herman Berendsen (1997) gaf zijn oorspronkelijk in het Nederlands uitgegeven boek de titel: *Goed meten met fouten*. Je ontkomt niet aan de fout, zelfs niet als je alles goed doet. Maar je kunt het natuurlijk óók verkeerd doen.

In dit vakgebied is een *error* (fout) **NIET** een vergissing of een misser.

Kirkup & Frenkel (2006) zetten in hoofdstuk 3 van hun boek wat begrippen op een rij. In de tabel hieronder staan de Nederlandse vertalingen van die begrippen. De onderste is toegevoegd en staat niet in de genoemde tabel.

<i>measurement</i>	meting
<i>measurand</i>	meetgrootheid
<i>value</i>	waarde
<i>true value</i>	werkelijke waarde
<i>best estimate</i>	beste schatting
<i>error</i>	fout
<i>random error</i>	toevallige fout
<i>systematic error</i>	systematische fout
<i>accuracy</i>	nauwkeurigheid
<i>precision</i>	precisie
<i>uncertainty</i>	onzekerheid
<i>accepted value</i>	geaccepteerde waarde

Een paar van die begrippen halen we nu naar voren.

De waarde (*value*) bestaat uit een getalswaarde én (meestal) een eenheid. Het getal zelf is nog niet de waarde. (Sterker nog: zonder eenheid is de uitkomst in feite waardeloos én zoals eerder gezegd: FOUT.)

Als iemand op een feestje aan je vraagt hoe oud je bent, mag je heus wel ‘twintig’ antwoorden, als dat waar is. Zolang je in de context van dit vakgebied maar netjes ‘20 jaar’ zegt.

De werkelijke waarde (*true value*) is datgene dat we willen weten en meten, en dus niet kennen, zelfs niet na de meting. De fout (*error*) is het verschil tussen de beste schatting en de werkelijke waarde. De GUM zegt daarover:

NOTE 2 When it is necessary to distinguish “error” from “relative error”, the former is sometimes called absolute error of measurement. This should not be confused with absolute value of error, which is the modulus of the error.

Als de fout (*error*) het verschil is tussen de gemeten waarde en de werkelijke waarde, ligt het voor de hand dat ook voor de fout geldt dat je die niet kent. De fout is: hoeveel je afwijkt van de werkelijke waarde. Je meetresultaat ken je exact, want je schrijft het in een eindig aantal decimalen op. Maar die *true value*... kenden we die maar.

In hoofdstuk 3.2, *Errors, effects, and corrections*, is de GUM zorgvuldig in het gebruik van het woord ‘error’.

3.2.1 In general, a measurement has imperfections that give rise to an error (B.2.19) in the measurement result. Traditionally, an error is viewed as having two components, namely, a random (B.2.21) component and a systematic (B.2.22) component.

NOTE Error is an idealized concept and errors cannot be known exactly.

Zucht. Ik vind het zo vermoeiend lezen als er dingen als (B.2.19) en (B.2.22) in een zin staan. Hadden ze daar nou geen voetnoten voor kunnen gebruiken? Ja, dat had gekund. Maar ze hebben het niet gedaan. In *Metten & Weten* staan trouwens nooit voetnoten.¹

Het zijn dus toevallige en systematische fouten die zorgen voor een onzekerheid. Het verschil tussen de werkelijke waarde en je meetwaarde kan per geval verschillen, maar ook de hele tijd hetzelfde zijn. Je kent het verschil niet. Vandaar die onzekerheid.

3.2.2 Random error presumably arises from unpredictable or stochastic temporal and spatial variations of influence quantities. The effects of such variations, hereafter termed random effects, give rise to variations in repeated observations of the measurand. Although it is not possible to compensate for the random error of a measurement result, it can usually be reduced by increasing the number of observations; its expectation or expected value (C.2.9, C.3.1) is zero.

¹ Behalve dan deze ene.

Je kunt niet systematisch compenseren voor een toevallige fout, want die is telkens anders. Maar je kunt óók niet compenseren voor een systematische fout als je die niet kent.

NOTE 1 The experimental standard deviation of the arithmetic mean or average of a series of observations (see 4.2.3) is not the random error of the mean, although it is so designated in some publications. It is instead a measure of the uncertainty of the mean due to random effects. The exact value of the error in the mean arising from these effects cannot be known.

Ook dit is waar. Je kunt de standaardafwijking van de theoretische verdeling natuurlijk schatten uit herhaalde metingen, maar je weet niet exact hoe groot die in werkelijkheid is. Als je heel veel metingen doet, kom je zeer waarschijnlijk wel heel dicht in de buurt. Er zit niet alleen een fout in je beste schatting, maar ook in je onzekerheid.

NOTE 2 In this Guide, great care is taken to distinguish between the terms “error” and “uncertainty”. They are not synonyms, but represent completely different concepts; they should not be confused with one another or misused.

Taylor (1997) schrijft in de eerste paragraaf van hoofdstuk 1 het volgende.

1.1 Errors as Uncertainties

In science, the word error does not carry the usual connotations of the terms mistake or blunder. Error in a scientific measurement means the inevitable uncertainty that attends all measurements. As such, errors are not mistakes; you cannot eliminate them by being very careful. The best you can hope to do is to ensure that errors are as small as reasonably possible and to have a reliable estimate of how large they are. Most textbooks introduce additional definitions of error, and these are discussed later. For now, error is used exclusively in the sense of uncertainty, and the two words are used interchangeably.

Tsja. *The two words are used interchangeably.* Dat is ook nogal andere taal dan de GUM gebruikt.

In this Guide, great care is taken to distinguish between the terms “error” and “uncertainty”. They are not synonyms, but represent completely different concepts; they should not be confused with one another or misused.

Oefening

1. Geef van de begrippen in het lijstje van Kirkup & Frenkel aan of ze een onzekerheid hebben.