Inhoudsopgave

Voorwoord 7

1. Modellen 10

2. Getallen en abstractie 28

3. Bewijzen 48

4. Limieten en oneindigheid 71

5. Dimensie 88

6. Meetkunde 105

7. Schattingen en benaderingen 133

8. Enkele veelgestelde vragen over wiskunde 149

Verder lezen 163

Index 165

Voorwoord

In het begin van de twintigste eeuw constateerde de grote wiskundige David Hilbert dat verschillende belangrijke wiskundige redeneringen qua structuur op elkaar lijken. Sterker nog, hij kwam tot de conclusie dat ze, op een geschikt niveau van generalisering, als identiek kunnen worden beschouwd. Deze vaststelling leidde, in combinatie met andere soortgelijke vaststellingen, tot het ontstaan van een nieuw deelgebied van de wiskunde, waarvan een van de centrale concepten naar Hilbert werd vernoemd. De notie van een Hilbertruimte werpt op zo een groot aantal onderdelen van de moderne wiskunde licht, van getaltheorie tot kwantummechanica, dat iemand zonder basiskennis van de theorie van de Hilbertruimte zich eigenlijk geen geschoold wiskundige kan noemen.

Wat is een Hilbertruimte precies? Op de universiteit wordt die in het daartoe geëigende college wiskunde gedefinieerd als een volledige inproductruimte. Van studenten die een dergelijk college bijwonen wordt verwacht dat ze uit eerdere colleges weten dat een inproductruimte een van een inproduct voorziene vectorruimte is, en dat een ruimte volledig is als alle Cauchyrijen in die ruimte convergeren. Uiteraard moeten de studenten, willen ze iets aan die definities hebben, ook de definities van vectorruimte, inproduct, Cauchyrij en convergentie kennen. Om hier maar eens een definitie te geven (niet de langste die bestaat): een Cauchyrij is een reeks $x_1, x_2, x_3, \ldots$ waarvoor geldt dat voor elk positief getal ε er een geheel getal N bestaat zodanig dat voor elk paar gehele getallen p en q groter dan N de afstand van x_p tot x_q op zijn hoogst ε is. Samengevat: om enige kans te maken te begrijpen wat een Hilbertruimte is, zul je je eerst een hele hiërarchie van onderliggende concepten eigen moeten maken. Het zal geen verbazing wekken dat dit tijd en inspanning vergt. Aangezien dit voor een groot deel van de belangrijkste wiskundige ideeën geldt, zitten er serieuze grenzen aan wat je kunt bereiken met een boek dat een toegankelijke inleiding in de wiskunde probeert te bieden, zeker als deze ook nog eens heel beknopt moet zijn.

In plaats van een poging te doen om dit probleem listig te omzeilen, heb ik me gericht op een ander obstakel dat speelt bij wiskundige communicatie. Deze hindernis, die eerder filosofisch dan technisch van aard is, scheidt mensen die geen enkel probleem hebben met noties als oneindigheid, de vierkantswortel van min één, de 26ste dimensie en gebogen ruimte van degenen die deze concepten verwarrend paradoxaal vinden. Het is mogelijk met deze ideeën vertrouwd te raken zonder je in technische details onder te hoeven dompelen, en ik ga proberen te laten zien hoe.

Als dit boek al een boodschap heeft, dan is het dat mensen abstract zouden moeten leren denken, omdat als je dat doet veel filosofische moeilijkheden simpelweg verdwijnen. In hoofdstuk 2 leg ik in detail uit wat ik onder de abstracte methode versta. Hoofdstuk 1 houdt zich bezig met een ander, meer vertrouwd en hieraan gerelateerd type abstractie: het proces waarbij je uit een reëel bestaand probleem de essentiële kenmerken distilleert en het daarmee in een wiskundig probleem verandert. Deze twee hoofdstukken en hoofdstuk 3, waarin ik bespreek wat we onder een streng bewijs verstaan, gaan over wiskunde in het algemeen.

Vervolgens laat ik specifiekere onderwerpen de revue passeren. Het laatste hoofdstuk gaat meer over wiskundigen dan over wiskunde, en is daarom van een iets ander karakter dan de voorgaande. Ik adviseer om hoofdstuk 2 als eerste te lezen, maar afgezien daarvan is de opbouw van het boek zo weinig mogelijk hiërarchisch: tegen het eind van het boek zal ik er niet van uitgaan dat de lezer dat wat daaraan is voorafgegaan volledig heeft begrepen en onthouden.

Hoewel dit boek van de lezer heel weinig voorkennis vraagt – wiskunde op havo-/vwo-niveau zou voldoende moeten zijn – ga ik wel uit van enige interesse bij de lezer, in plaats van te proberen die aan te wakkeren. Om die reden heb ik afgezien van anekdotes, cartoons, uitroeptekens, grappig bedoelde hoofdstuktitels en Mandelbrotplaatjes. Daarnaast ben ik onderwerpen uit de weg gegaan, zoals de chaostheorie en de stelling van Gödel, die tot de verbeelding van het grote publiek spreken op een manier die niet in verhouding staat tot hun invloed op hedendaags wiskundig onderzoek, en die hoe dan ook in tal van andere boeken voldoende aan bod komen. In plaats daarvan heb ik minder spectaculaire onderwerpen gekozen die ik in detail bespreek om te laten zien hoe ze op een verfijndere manier kunnen worden begrepen. Ik heb, met andere woorden, gemikt op diepgang in plaats van breedte, en geprobeerd de aantrekkingskracht van de reguliere wiskunde zichtbaar te maken door haar voor zichzelf te laten spreken.

Ik wil het Clay Mathematics Institute en Princeton University bedanken voor hun steun en gastvrijheid gedurende een deel van de tijd waarin ik aan dit boek heb gewerkt. Ik ben Gilbert Adair, Rebecca Gowers, Emily Gowers, Patrick Gowers, Joshua Katz en Edmund Thomas zeer erkentelijk voor het lezen van eerdere versies. Hoewel ze te intelligent en te goed geïnformeerd zijn om voor gewone lezers door te kunnen gaan, is het een geruststellende gedachte dat datgene wat ik heb geschreven voor althans een aantal niet-wiskundigen begrijpelijk is. Hun commentaren hebben tot tal van verbeteringen geleid. Aan Emily draag ik dit boek op, in de hoop dat het haar althans enig idee zal geven van wat ik de hele dag doe.

1. Modellen

Hoe werp ik een steen?

Stel dat je op volkomen vlak terrein staat, op een kalme dag. In je hand heb je een steen die je zo ver mogelijk van je af wilt gooien. Als we je werpkracht als een vast gegeven beschouwen is de belangrijkste keuze die je moet maken de hoek waaronder de steen je hand verlaat. Is deze te klein, dan zal de steen ondanks zijn hoge horizontale snelheid al vrij snel de grond raken, en dus geen kans maken om erg ver te komen. Gooi je de steen daarentegen te hoog, dan zal hij lang in de lucht blijven, maar in die tijd niet ver komen. Het is duidelijk dat de situatie om een soort compromis vraagt.

Het beste compromis, dat kan worden gevonden via een combinatie van Newtoniaanse fysica en wat elementair rekenwerk, blijkt zo fraai als je gegeven de omstandigheden zou mogen hopen: bij het verlaten van je hand zou de steen zich onder een hoek van 45 graden met het horizontale vlak in opwaartse richting moeten bewegen. Dezelfde berekeningen laten zien dat de steen op zijn vlucht een parabolische kromme zal beschrijven, en vertellen je bovendien de snelheid waarmee hij op elk willekeurig moment na het verlaten van je hand vliegt.

Het lijkt er dus op dat een combinatie van wetenschap en wiskunde ons in staat stelt om vanaf de lancering tot aan de landing het gedrag van de steen volledig te beschrijven. Dit geldt echter alleen als we een aantal vereenvoudigende aannames voor lief nemen. De belangrijkste hiervan is dat de enige kracht die op de steen inwerkt de zwaartekracht van de aarde is, en dat deze kracht overal dezelfde magnitude en richting heeft. Dat is echter niet correct, aangezien in dat geval geen rekening wordt gehouden met luchtweerstand, de draaiing van de aarde, de (geringe) invloed van de zwaartekracht van de maan, het feit dat het zwaartekrachtveld van de aarde zwakker wordt naarmate je hoger komt, en de geleidelijk veranderende betekenis van 'verticaal omlaag' als we ons van het ene naar het andere deel van het aardoppervlak verplaatsen. Zelfs als je de berekeningen accepteert, is het advies van 45 graden gebaseerd op een andere impliciete aanname, en wel dat de snelheid van de steen bij het verlaten van je hand niet afhankelijk is van zijn bewegingsrichting. Ook dit is onjuist; hoe kleiner de werphoek, des te harder je een steen kunt gooien.

Hoe zou je, gegeven deze bezwaren, waarvan sommige duidelijk ernstiger zijn dan andere, moeten omgaan met de berekeningen en voorspellingen die eruit voortvloeien? Een mogelijke aanpak zou kunnen zijn dat je met zo veel mogelijk bezwaren rekening probeert te houden. Een veel verstandiger benadering doet echter het volstrekt tegenovergestelde: bepaal welke mate van nauwkeurigheid je nodig hebt, en probeer die dan op zo eenvoudig mogelijke wijze te bereiken. Als je uit ervaring weet dat een vereenvoudigende aanname slechts een gering effect zal hebben op het antwoord, gebruik hem dan.

Zo zal het effect van de luchtweerstand, doordat de steen klein, hard en van een redelijke dichtheid is, betrekkelijk gering zijn. Het heeft weinig zin de berekeningen ingewikkelder te maken door rekening te houden met de luchtweerstand als er hoe dan ook een behoorlijke mate van onnauwkeurigheid zal zitten in de hoek waaronder je de steen uiteindelijk gooit. Als je er toch rekening mee wil houden, dan is de volgende vuistregel voor de meeste doeleinden goed genoeg: hoe groter de luchtweerstand, des te kleiner je de werphoek moet maken om die weerstand te compenseren.

Wat is een wiskundig model?

Als je de oplossing van een natuurkundig probleem bekijkt, is het vaak, zij het niet altijd, mogelijk een helder onderscheid te maken tussen de bijdragen die de wetenschap levert en die de wiskunde levert. Wetenschappers formuleren een theorie die deels gebaseerd is op de resultaten van waarnemingen en experimenten en deels op algemenere overwegingen zoals eenvoud en verklaringskracht. Wiskundigen, of wetenschappers die zich met wiskunde bezighouden, onderzoeken vervolgens de zuiver logische consequenties van de theorie. Soms volgen deze uit standaardberekeningen die precies het soort verschijnselen voorspellen die de theorie geacht wordt te verklaren, maar het gebeurt wel eens dat een theorie zeer onverwachte voorspellingen doet. Als deze dan later experimenteel worden bevestigd, is indrukwekkend bewijs ten gunste van de theorie verzameld.

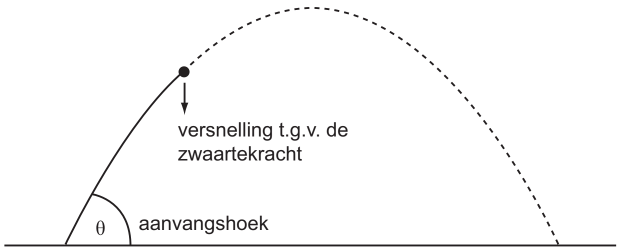
Dat we gedwongen zijn tot het soort simplificaties dat ik hierboven heb besproken maakt de notie van het bevestigen van een wetenschappelijke voorspelling echter enigszins problematisch. Om een ander voorbeeld te nemen: de bewegings- en zwaartekrachtwetten van Newton impliceren dat, als je twee voorwerpen van dezelfde hoogte laat vallen, ze tegelijkertijd de grond raken (gesteld dat deze volkomen horizontaal is). Dit verschijnsel, waar Galileo als eerste op wees, druist enigszins in tegen onze intuïtie. Sterker nog, het is erger dan contra-intuïtief: als je het zelf probeert, met laten we zeggen een golfballetje en een pingpongballetje, dan zul je zien dat het golfballetje als eerste de grond raakt. In welke zin had Galileo dan gelijk?

Het is, uiteraard, de luchtweerstand die maakt dat we dit kleine experiment niet als een weerlegging van de theorie van Galileo beschouwen: de ervaring leert dat de theorie goed werkt als de luchtweerstand gering is. Als jij het wat al te gemakkelijk vindt om steeds maar weer de luchtweerstand van stal te halen zodra de voorspellingen van de Newtoniaanse mechanica ernaast zitten, dan zal je vertrouwen in de wetenschap, en je bewondering voor Galileo, worden hersteld zodra je de kans krijgt de val van een vogelveer in een vacuüm te aanschouwen, die dan inderdaad als een steen omlaag stort.

Desalniettemin hebben we, aangezien wetenschappelijke waarnemingen nooit volkomen rechtstreeks en sluitend zijn, behoefte aan een betere manier om de relatie tussen wetenschap en wiskunde te beschrijven. In plaats van wetenschappelijke theorieën rechtstreeks los te laten op de wereld, passen wiskundigen ze toe op modellen. Een model in deze zin kan worden beschouwd als een denkbeeldige, vereenvoudigde versie van het stuk wereld dat wordt bestudeerd, een versie waarbinnen exacte berekeningen mogelijk zijn. In het geval van de steen is het verband tussen de wereld en het model ongeveer zoals het verband tussen de figuren 1 en 2.

Er zijn tal van manieren om een bepaalde situatie in de werkelijkheid te beschrijven, en we moeten een combinatie van ervaring en verdere theoretische overwegingen gebruiken om te bepalen wat een bepaald model ons waarschijnlijk zal kunnen leren over de wereld zelf. Bij het kiezen van een model is een van de prioriteiten te zorgen dat het gedrag ervan nauw

1. Een bal in volle vlucht I.



2. Een bal in volle vlucht II.

correspondeert met het feitelijke, waargenomen gedrag van de wereld. Andere factoren, zoals eenvoud en wiskundige elegantie, kunnen echter in veel gevallen zwaarder wegen. Sterker nog, er zijn uiterst bruikbare modellen die bijna geen enkele overeenkomst vertonen met de echte wereld, zoals enkele van mijn voorbeelden laten zien.

Een stel dobbelstenen gooien

Als ik een stel dobbelstenen gooi en wil weten hoe ze zich zullen gedragen, leert de ervaring dat sommige vragen niet realistisch zijn. Zo kan je van niemand verwachten dat zij je de uitkomst van een worp vooraf kunnen vertellen, zelfs niet als ze kostbare technologie tot hun beschikking hebben en de dobbelstenen door een machine worden geworpen. Vragen van probabilistische aard daarentegen, kunnen in veel gevallen wel worden beantwoord, en de antwoorden kunnen van pas komen als ik bijvoorbeeld om geld backgammon zou spelen. Een voorbeeld van zo een vraag is: hoe waarschijnlijk is het dat de getallen op de dobbelstenen samen zeven zullen zijn? Voor het tweede type vraag kunnen we de situatie heel eenvoudig modelleren door een worp van de dobbelstenen weer te geven als een random gekozen paar uit de volgende 36 getallenparen.