VWO wiskunde in herhaling
1950 tot nu

Algebra- analyse- meetkunde- statistiek- kansrekening- vectoralgebra- grafen en matrices- rijen en reeksen- dynamische modellen- exacte logica- perspectief- kegelsneden in projectie

Over de auteur:

Wim Gronloh, geboren op 5 oktober 1937 in Amsterdam, begon zijn loopbaan als scheepswerktuigkundige bij de Nederlandse Koopvaardij. Was daarna ruim 35 jaar werkzaam als leraar wis- en natuurkunde (sinds 1978 ook informatica) in het Voortgezet Onderwijs. Schreef in 1998 de wiskundemethoden 'Basislijn' voor lbo/mavo en voor het havo/vwo.

Over dit boek:

“*Wiskunde leren is wiskunde doen*” zei Carl Friedrich Gauss, het wonderkind, de ‘Mozart van de Wiskunde’.

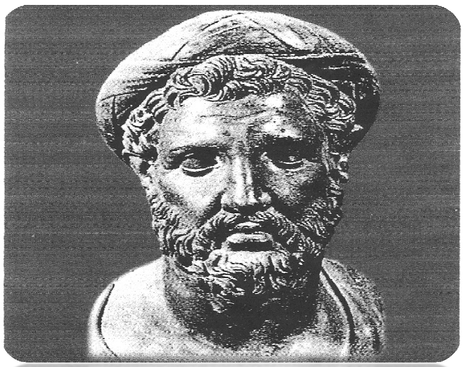
Maar dit boek is vooral als naslagwerk en vademecum bedoeld, niet als lesboek en sommenboek. Het is in het bijzonder bestemd voor diegene die na een vroegere opleiding op HBS, gymnasium of na een meer recente studie op het VWO, zijn wiskundekennis wil gaan opfrissen, of uitbreiden met de nieuwste stof, maar ook voor iedereen die misschien later geïnteresseerd is geworden in de ‘Koningin van de Wetenschappen’. Vrijwel alle onderwerpen uit de klassieke en de moderne school-wiskunde worden uitvoerig behandeld, eigenschappen opnieuw bewezen, formules consequent afgeleid.
De geheel uitgewerkte voorbeelden, toepassingen en opgaven zijn hoofdzakelijk bedoeld ter ondersteuning van de betreffende theorie. Vooral daardoor kunt u zich veel stof in betrekkelijk korte tijd (weer) eigen maken zonder gedemotiveerd te raken doordat u ‘niet opschiet’ vanwege de vele tijdrovende opgaven zoals die, natuurlijk terecht, wel in alle schoolboeken voorkomen.
Omdat de grafische rekenmachine (GR) al sinds vele jaren onmisbaar is in de wiskunde (de tijd van de logaritmetafel en rekenliniaal is reeds lang voorbij…), wordt er ook in dit boek veelvuldig gebruik van gemaakt. Gekozen is, min of meer bij toeval, voor de TI-83 (vrijwel identiek aan de TI-84) van ‘Texas Instruments’. De nodige handelingen voor het gebruik ervan worden pas daar stap voor stap beschreven, waar dit noodzakelijk dan wel wenselijk is. De GR van ‘Casio’ is overigens even goed bruikbaar. Als naslagwerk is het boek duidelijk gerubriceerd via een zeer uitvoerige inhoudsopgave en trefwoordenregister, zodat de voor u interessante onderwerpen snel zijn op te zoeken. Daarnaast is de opbouw van het boek dusdanig, dat het met wat langere adem, zeker ook van voor naar achter kan worden doorgewerkt. Een enkele herhaling van een eerder behandeld onderdeel, kon daarbij voor de duidelijkheid niet worden voorkomen. Van de inmiddels verguisde verzamelingenleer van Georg Cantor, zult u behalve een enkel notatie weinig of niets terugvinden. Een overzicht van alle gebruikte symbolen en uitdrukkingen vindt u achterin. Voor op- en aanmerkingen houd ik me uiteraard van harte aanbevolen

Bij deze uitgave:

Deze nieuwe uitgave 'VWO wiskunde in herhaling 1950 tot nu' is een herziening en uitbreiding van de vorige editie: 'Wiskunde in kort bestek'. Theorie, opgaven en uitwerkingen zijn hier en daar aangepast, mede in verband met de vernieuwde A- en C programma’s binnen het huidige VWO. Daar waar de theorie of bewijzen van stellingen of afleidingen van formules wat saai of triviaal overkwamen na het direct eraan voorafgaande, is een kleiner lettertype gebruikt, ten teken dat ze voor het begrip zelf van ondergeschikt belang zijn. Ik hoop dat ook deze uitgave aan uw verwachtingen zal mogen voldoen.

Wim Gronloh,
Bussum, zomer 2014

Inhoud



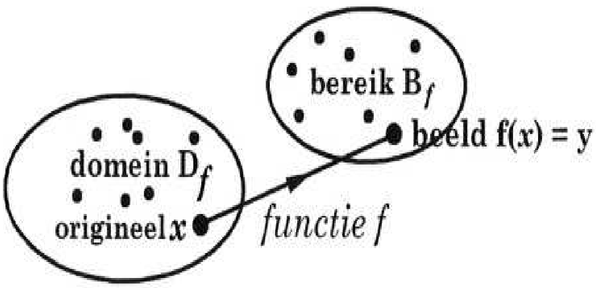
Pythagoras, geboren op Samos (eiland in de Egeïsche Zee) circa 572 jaar v. Chr. Richtte omstreeks 530 in Croton de school van de Pythagoreeërs op. Zij bewezen de beroemdste stelling uit de klassieke wiskunde: In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de schuine zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de twee rechthoekszijden.
De Babyloniërs kenden de eigenschap al ca. 1000 jr. v. Chr. De Egyptische 'harpedonaptai' (touwspanners) gebruikten de stelling ca. 3000 jr. v. Chr. om rechte hoeken uit te zetten via knopentouwen (knopen op afstanden 3-4-5; 5-12-13; 8-15-17,…)

I. FUNCTIES, GRAFIEKEN, EN FUNCTIEVERGELIJKINGEN

Als je rustig wandelend per uur 4 *km* aflegt dan is de afgelegde afstand in 2½ *uur* dus 10 *km*. De lengte van de afgelegde weg *bij die snelheid* is afhankelijk van de *tijd* ofwel: de afstand is een ***functie*** van de tijd. Zo bestaan er talrijke grootheden die afhankelijk zijn van *één of meer* andere grootheden waarbij het verband tussen die grootheden in een functie is vastgelegd door een zeker ***functievoorschrift***.
In het voorbeeld hierboven wordt de afgelegde weg op zeker tijdstip *t* gegeven door de functie: *afstand* = *snelheid* × *tijd.*

1. *Het begrip functie*

Is bijvoorbeeld een functie *f* *gegeven door* het functievoorschrift:
'*vermenigvuldig met drie*' dan is $f(3) = 9$, $f(-7) = -21$ en $f(a) = 3a$.
De functie wordt dan geschreven als: $\boldsymbol{f(x) = 3.\,x}$ of korter $\boldsymbol{y = 3\,x}$



De getallen 3, −7 , *a* heten de ***originelen*** van de functie $f(x) = 3\,\boldsymbol{x}$ de getallen 9, −21 , 3*a* zijn dan de bijbehorende ***beelden*** daarvan.

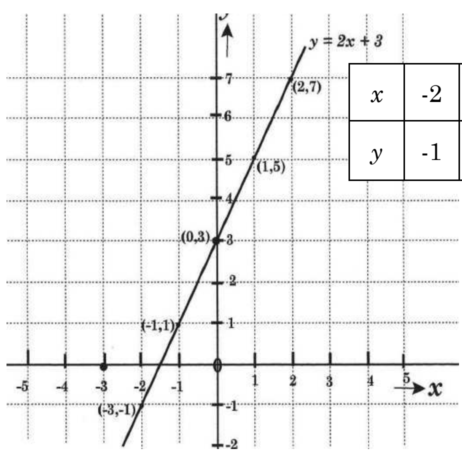
De verzameling van de *originelen* D_f heet het ***domein*** van de functie de verzameling *beelden* heet het ***bereik*** $\boldsymbol{B_f}$.

Als *geen domein of bereik expliciet is aangegeven*, wordt er van uitgegaan dat *alle originelen* (uit het domein) en *alle beelden* (uit het bereik) elementen mogen zijn van de verzameling van de reële getallen ℝ.

> *Een functie van x is in het algemeen een zeker voorschrift f, (g, h, i, …) dat bij elke veranderlijke x uit het domein D_f , precies één element f(x) = y uit het bereik B_f bepaalt*

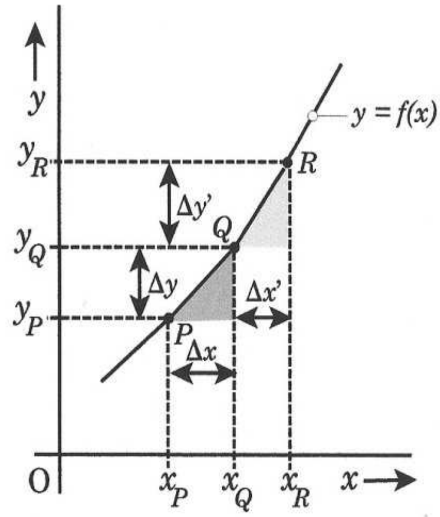
Vaak worden origineel *x* en beeld *y* van een functie getekend als punten *P*(*x*,y) van een grafiek in een rechthoekig coördinatenstelsel: het *origineel x op de x-as*, het beeld *y* = *f*(*x*) op de *y*-as. In bijgaande figuur is de tabel en de grafiek getekend van de (lineaire) functie: $\boldsymbol{f(x) = y = 2.\,x + 3}$

In het algemeen kan met men met '*de functie f*(*x*)' zowel de *grafiek van f*(*x*) als de *functie f*(*x*) *zelf* bedoelen.



x	-2	-1	0	1	2
y	-1	1	3	5	7

2. *Lineaire functies*



Voor *elk tweetal punten P en Q* op de grafiek van een *lineaire functie* geldt dat de verhouding tussen een zekere toename $\Delta x = x_Q - x_P$ van x en de *bijbehorende* toename $\Delta y = y_Q - y_P$ van *y* steeds *een **vaste waarde*** heeft.
De betekenis hiervan is als volgt: Stel *P* en *Q* zijn twee *willekeurig*e naburige punten op de grafiek waarbij $P = (x_P, y_P)$ en $Q = (x_Q, y_Q)$.
De *verhouding* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is bepalend voor de *hoek* die het *lijnstukje PQ* maakt met de *positieve x* –as, dus voor de *richting van lijnstukje PQ*.
Stel $R\ (x_R, y_R)$ is *een ander* naburig punt van *Q* op de grafiek met $x_R = x_Q + \Delta x'$ en $y_R = y_Q + \Delta y'$, dan wordt de richting van *QR* bepaald door de verhouding $\frac{\Delta y'}{\Delta x'}$.
Omdat nu *per definitie* de verhouding $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bij een lineaire functie een vaste waarde heeft, geldt dan: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ dus zijn de *richtingen* van de lijnstukjes *PQ* en *QR gelijk* , ofwel: ***P*, *Q* en *R* liggen op een *rechte lijn.***

Daar *P, Q* en *R* willekeurig gekozen zijn, geldt dit voor alle punten van de grafiek.
De grafiek van een ***lineaire*** functie is dus een ***rechte lijn***. (dit verklaart de naam *lineaire functie).* De *constante verhouding* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $(\Delta x \neq 0)$ is bepalend voor de *richting van lijn l* en noemt men daarom de ***richtingscoëfficiënt a*** van *l*.

De *vergelijking* van lijn *l*, dus de betrekking tussen de waarden *x* en *y waaraan alle punten P (x,y) van lijn l voldoen* vind je nu als volgt:

Voor de lijn *l* tussen twee willekeurige punten $P\ (x_p, y_p)$ en $Q\ (x_q, y_q)$ geldt volgens voorgaande dat de *richtingscoëfficiënt* $\boldsymbol{a} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p}$ ..(1)

Kies hierin voor *P* het punt $P\ (\boldsymbol{x_p}, \boldsymbol{y_p}) = \boldsymbol{(0, b)}$ (*op de y-as*), en voor $Q\ (\boldsymbol{x_q}, \boldsymbol{y_q})$ een willekeurig punt $\boldsymbol{Q\ (x, y)}$, dan geldt volgens (1) **:** $\boldsymbol{a} = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{y-b}{x-0} = \frac{\boldsymbol{y-b}}{\boldsymbol{x}}$

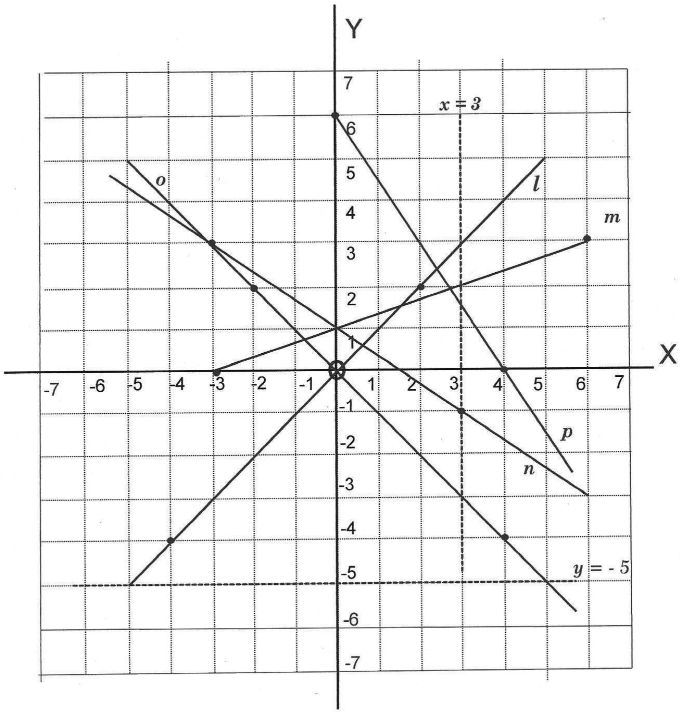
$\Rightarrow ax = y - b$ ofwel $\boldsymbol{y = ax + b}$ **is de vergelijking van *l*.**

De grafiek van een lineaire functie is een rechte lijn l met vergelijking y = ax + b waarin a de richtingscoëfficiënt is van l en b de y-coördinaat is van het snijpunt van l met de y-as.

Toepassingen:

1. In de gegeven figuur zijn de rechte lijnen *l, m, n, o en p* getekend in een *orthonormaal coördinatenstelsel XOY.* (Een orthonormaal stelsel bestaat uit twee onderling loodrechte coördinaatassen: de *X*-as de *Y*-as met de oorsprong *O* als hun snijpunt. De eenheden op de assen hebben daarbij de standaardlengte 1).

a. Bepaal van elke lijn de vergelijking
b. Bepaal ook de vergelijking van de X-as en de Y-as.
c. Hoe lopen de lijnen $x = 3$ en $y = -5$?



a. De grafiek van een lineaire functie is een rechte lijn l met vergelijking $y = ax + b$, waarin $\boldsymbol{a}$ de *richtingscoëfficiënt* is van *l*

en b de *y*-coördinaat van het snijpunt van *l* met de *y*-as. Op elke lijn zijn steeds twee *roosterpunten* (punten op het snijpunt van twee roosterlijnen) met een stip aangegeven waarmee de richtingscoëfficiënt $\boldsymbol{a = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$ is te bepalen.

- Zo is dan van lijn *l*:

$a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{-4-2}{-4-2} = \mathbf{1}$ en $b = \mathbf{0}$, dus de vergelijking is $l: y = 1.\,x + 0 \Rightarrow \boldsymbol{y = x}$.

- Voor $\boldsymbol{m}$ geldt: $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{0-3}{-3-6} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

en $b = \mathbf{1}$, dus wordt de vergelijking :

$\boldsymbol{m: y = \frac{1}{3}x + 1}$

- Voor $\boldsymbol{n}$ geldt: :

$a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{-3-(-1)}{6-0} = \frac{4}{6} = \frac{\mathbf{-2}}{\mathbf{3}}$ en $b = \mathbf{1}$ dus is de vergelijking is $\boldsymbol{n: y = \frac{-2}{3}x + 1}$

- Voor $\boldsymbol{o}$ geldt:

$a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{2-(-4)}{-2-4} = \frac{6}{-6} = \mathbf{-1}$ en $b = \mathbf{0}$, dus de vergelijking is: $\boldsymbol{o: y = -x}$

- Voor $\boldsymbol{p}$ geldt

$a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{6-0}{0-4} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$ en $b = \mathbf{6}$, dus de vergelijking is: $\boldsymbol{p: y = -\frac{3}{2}x + 6}$

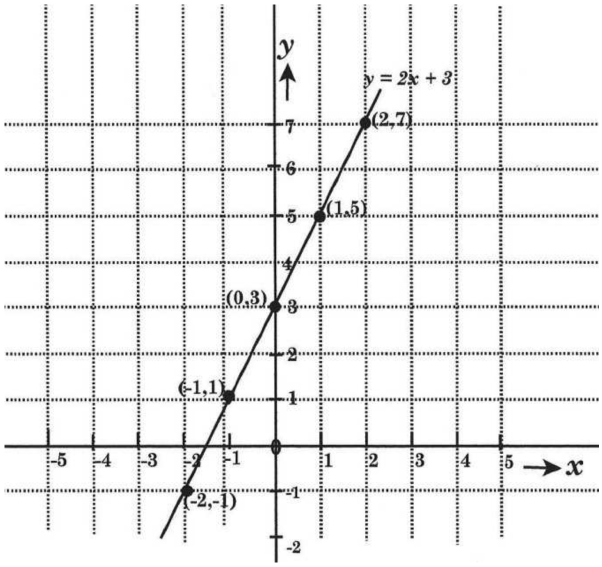
- b**.** Voor *alle punten op de x-as* geldt: $y = 0$, dus ongeacht de waarde van *x*.
De vergelijking van de *x*-as dan**:** $\boldsymbol{y = 0}$

- c. Alle punten (x, y) van de lijn met vergelijking $x = 3$, zijn van de vorm $(3, y)$.
Het is dan de ***verticale lijn*** (evenwijdig met de y-as) ***door het punt*** **(3, 0)**

- Zo is $y = -5$ de ***horizontale lijn*** (evenwijdig met de x-as) ***door het punt* (0, - 5)**

2. - a. Bepaal de vergelijking van de lijn l door de punten (3, 4) en (−4, −2)
   - b. Bepaal het snijpunt van de lijnen p: $y = 2x - 3$ en $q : y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

a. In $y = ax + b$ volgt de richtingscoëfficiënt uit $\boldsymbol{a} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-4}{-4-3} = \frac{-6}{-7} = \boldsymbol{\frac{6}{7}}$

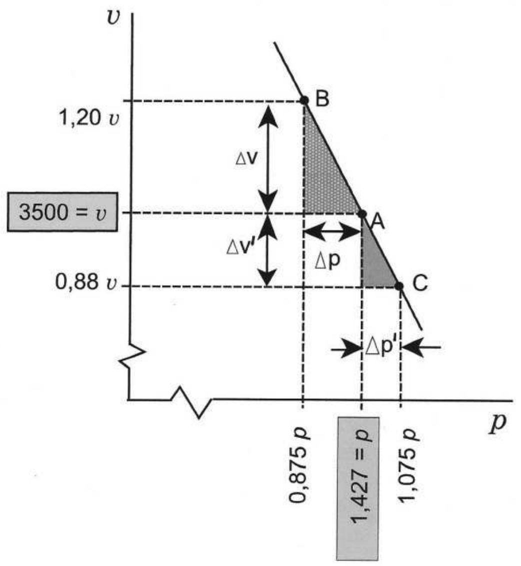


De lijn heeft dan als vergelijking: $l : y = \frac{6}{7}x + b$.
Hierin de coördinaten van A (of B) = (3,4)
ingevuld geeft $\mathbf{4 = \frac{6}{7} \cdot 3} + b \Rightarrow b = \frac{10}{7}$, zodat de vergelijking is: $\boldsymbol{l\colon y = \frac{6}{7}x + \frac{10}{7}}$ *)

b. Het snijpunt $S\,(x_S, y_S)$ van de lijnen p en q ligt zowel op p als op q , dus voldoen de coördinaten x_s en y_s aan beide vergelijkingen: $y_s = 2x_s - 3$ en $y_s = -\frac{1}{2}x_s + \frac{9}{2}$

Uit $y_s = 2x_s - 3 = -\frac{1}{2}x_s + \frac{9}{2}$ volgt dan $2\frac{1}{2}x_s = 7\frac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{x_s = 3}$, met gevolg:
$y_s = 2x_s - 3 \Rightarrow \boldsymbol{y_s = 3}$. Snijpunt is dus het punt ***S* (3,3)**

3. Bij een ‘witte pomp’ in Vreemdemuiden verkoopt men gemiddeld per dag 3500 liter ‘Euro-95’ benzine als hun literprijs €1,427 bedraagt. (punt A in de grafiek).
Verlaagt men de prijs met 12,5% dan stijgt de verkoop met 20% (punt C).
Verhoogt men de prijs met 7,5% dan daalt de verkoop met 12%.(punt C).



a. Toon aan dat de punten A, B en C op een rechte lijn liggen en geef de betekenis hiervan.
b. Bereken de gemiddelde verkoop per dag bij een literprijs van € 1,500 als het verband tussen literprijs en gemiddelde verkoop *op het hele traject AC* lineair blijft.

---

*) Met de grafische rekenmachine TI-83 gaat dit als volgt: Voer de *lijsten* in **{3, - 4} [STO] L1** en **{4, - 2} [STO] L2.** Druk op **[STAT] [CALC**] en kies optie 4 [ENTER]: **LinReg (*ax* + *b*)** [ENTER]
De waarden van a en b worden direct getoond LinReg y = ax + b: a = .85714…, = $\frac{6}{7}$; b = 1.42857….= $\frac{10}{7}$

a. De richtingscoëfficiënt van AB is:

$$\frac{\Delta v}{\Delta p} = \frac{v - 1{,}20\,v}{p - 0{,}875\,p} = \frac{-0{,}20\,v}{0{,}125\,p} = -\,\mathbf{1{,}6}\,\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{p}}$$

De richtingscoëfficiënt van CA is $\dfrac{\Delta v'}{\Delta p'} = \dfrac{0{,}88v - v}{1{,}075p - p} = \dfrac{-0{,}12v}{0{,}075\,p} = -\,\mathbf{1{,}6}\,\dfrac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{p}}$

De richtingen van AC en BA zijn dus gelijk $\Rightarrow$
***A, B* en *C* liggen op een rechte lijn.**

Dit betekent dat de *afname van de verkoop* bij de prijs*stijging* in punt C evenredig is met de *toename van de verkoop* bij de prijs*daling* in punt B.

b. De literprijs van € 1,500 ligt tussen die van A (= 1,427) en C (= 1,075 × 1,427 = 1,534), dus deze ligt op het lijnstuk AC .
De relatie tussen verkoopprijs p en verkoop v blijft dus volgens het gegeven lineair.
Volgens a. is de richtingscoëfficiënt van $BC = -1{,}6\,\frac{v}{\mathrm{p}}$ zodat

$a = -1{,}6.\,\frac{3500}{1{,}427} \approx -\,3924.$

De algemene vergelijking van de lineaire betrekking tussen p en v is $v = a.\,p + b$
dus met $a \approx -\,3924$ is dan $v = -\,3924\,p + b$
Vullen we hierin de coördinaten in van A (1,427; 3500) dan vinden we:

$3500 = -3924.\,1{,}427 + b \;\Rightarrow b \approx 9100$

De vergelijking van BC is dan : $\boldsymbol{v = -3924\,p + 9100}$
dus bij een literprijs met p = € 1,500 is dan de gemiddelde verkoop v per dag:

$v = -3924\,.\,1{,}500 + 9100 \approx$ **3214 *l*.**

3. *Kwadratische functies*

Een kwadratische, ofwel tweedegraadsfunctie, is een functie f(x) van de vorm
$f(x) = ax^2 + bx + c$ waarin a, b en c reële getallen zijn en $a \neq 0$

Voor onderzoek naar de eigenschappen van tweedegraads- functies, herleiden we de algemene vorm door middel van ***kwadraatafsplitsing***:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a})$$
$$= a\,(x^2 + 2.\frac{b}{2a}\,x + \frac{b^2}{4a^2}) + a.(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2})$$
$$= a.\,(x + \frac{b}{2a})^2 - a\,(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a})$$

$$f(x) = a\,(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a}) \text{ ofwel:}$$

'Uit het schoolboek':

$(a+b)(c+d) = (a+b) \times (c+d)$
$= a.d + a.c + b.d + b.c$

$(a+b)(a+b) = (a+b) \times (a+b)$
$= a.b + a.a + b.a + b.b$
$= \boldsymbol{a^2 + 2\,a.b + b^2}$

$$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} \quad als \;\; D = b^2 - 4ac \qquad \text{...(1)}$$

Kies $x = -\frac{b}{2a}$ in $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}$ dan is

$f(x) = a\,(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} = a.\,(0) - \frac{D}{4a}$, ofwel $y = -\frac{D}{4a}$ dus is het punt

$(x, y) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ een punt van *elke functie* $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

Noem dit punt (x, y) verder $T\,(x_T, y_T)$, dus $T\,(x_T, y_T) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$

1. We tonen nu aan dat $T\,(x_T, y_T) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ een uiterste waarde ('***extreem***') is van $f\,(x)$ en wel een ***maximum*** of *een* ***minimum waarde*** .

In (1) vonden we dat $y = a\,(x + (\frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}$ zodat *voor elke punt* (x, y) *van* $f\,(x)$ geldt:

$y - y_T = \{a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}\} - y_T = \{a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}\} - \frac{-D}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2$

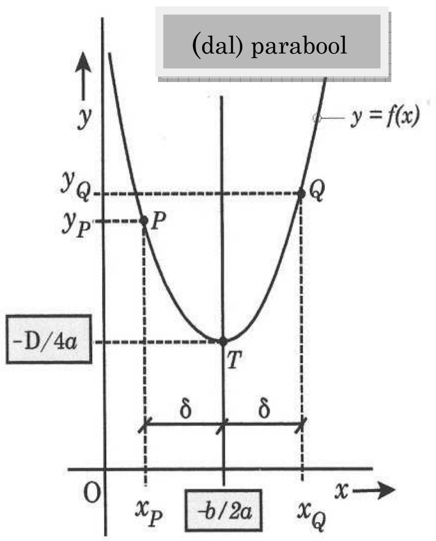
Als hierin $a > 0$ dan is $a.\,(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$, omdat ook $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ zodat $y - y_T \geq 0$

ofwel: $y \geq y_T$. *Elke andere functiewaarde dan y_T is dus groter dan y_T,* met gevolg:

$T = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ is een ***minimum*** van $y = ax^2 + bx + c$ als $a > 0$ ...(2)

Op dezelfde manier blijkt zo uit (1) dat **als $a < 0$** steeds geldt $y - y_T \leq 0$ ofwel
$T = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ is een ***maximum*** van $y = ax^2 + bx + c$ als $a < 0$ ...(3)

2. De lijn $x = -\frac{b}{2a}$ door T is een ***symmetrieas*** *van* $f(x)$, want: Voor een punt P op een afstand δ *links* van de lijn $x = -\frac{b}{2a}$ geldt $x_p = -\frac{b}{2a} - \delta$ en voor een punt Q op eenzelfde afstand *rechts* van deze lijn is $x_Q = -\frac{b}{2a} + \delta$.



Volgens (1) is $y = a\,(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}$, dus

- als $x = x_p = -\frac{b}{2a} - \delta$ dan is $y_p = a\,(\cancel{-\frac{b}{2a}} - \delta + \cancel{\frac{b}{2a}})^2 - \frac{D}{4a} =$
$a\,\delta^2 - \frac{D}{4a}$

- als $x = x_q = -\frac{b}{2a} + \delta$ dan is $y_q = a\,(-\frac{b}{2a} + \delta + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} =$
$a\,\delta^2 - \frac{D}{4a}$ dus is $y_p = y_q$, de punten P en Q liggen *symmetrisch* **t.o.v. de lijn** $x = -\frac{b}{2a}$

De vorm van de kromme heet ***parabool***, de symmetrieas heet de ***as*** van de parabool het maximum of minimum T van $f(x)$ de ***top*** van de parabool. Als $a > 0$ dan is de top T een *minimum* (*'dalparabool'*), als $a < 0$ dan is T een *maximum* (*'bergparabool'*)

> *De grafiek van $y = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$ is een parabool met verticale as $x = \frac{-b}{2a}$ en een punt $T = (\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a})$ als top, waarin $D = b^2 - 4ac$.*
> *Als $a > 0$ dan is T een minimum ('dalparabool'),*
> *als $a < 0$ dan is T een maximum ('bergparabool')*

a. Vierkantsvergelijking

S*nijpunten* van de x- as (met vergelijking $y = 0$) en de parabool $y = ax^2 + bx + c$ noemt men ***nulpunten*** van $f(x)$. Die punten (als ze bestaan) moeten dan voldoen aan $y = ax^2 + bx + c$ en aan $y = 0$ dus aan de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$.
Men heeft hiertoe de zogenaamde '***abc-formule***' afgeleid:

Uit $y = ax^2 + bx + c = 0$ volgt $y = a\,(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} = 0$ ofwel

$$a\,(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{D}{4a} \Rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{D}{4a^2} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{D}}{2a} \text{ dus } \boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$$

> *Nulpunten ('wortels') van $f(x) = ax^2 + bx + c$ zijn oplossingen x_1, x_2 van de vergelijking $y = ax^2 + bx + c = 0$ met $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ en $D = b^2 - 4ac$*

De waarde van D is hierin bepalend voor het *aantal oplossingen*: het aantal *wortels* van $ax^2 + bx + c = 0$. Men noemt daarom D de ***discriminant*** van deze vergelijking:

1. Als $\boldsymbol{D < 0}$ dan bestaat $\sqrt{D}$ niet dus zijn er *geen reële oplossingen.*
De parabool snijdt de x-as niet. Er zijn *geen nulpunten.*
2. Als $\boldsymbol{D = 0}$ dan is er *slechts één* wortel $x = -\frac{b}{2a}$.
De parabool heeft *twee samenvallende* punten gemeen met de x-as.
Top T met $x_T = -\frac{b}{2a}$ is dan een *raakpunt* aan de x-as.
3. Als $\boldsymbol{D > 0}$ dan heeft de vergelijking *twee wortels*: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ en $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$
De parabool snijdt de x-as in twee verschillende punten, ofwel $f(x)$ heeft *twee verschillende nulpunten.*

b. Ontbinden van kwadratische functies

> *De functie $f(x) = x^2 + bx + c$ met nulpunten $x = x_1$ en $x = x_2$*
> *is te schrijven als $f(x) = (x - x_1).(x - x_2)$*

De nulpunten x_1, x_2 van de vierkantsvergelijking $y = a\,x^2 + bx + c$ **met $a = 1$** zijn volgens de *abc-formule*: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2}$ en $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2}$ met $D = b^2 - 4c$ ($a = 1$)

dus $\boldsymbol{(x - x_1)\,.\,(x - x_2)} = \{x - (\frac{-b+\sqrt{D}}{2})\}\,.\,\{(x - (\frac{-b-\sqrt{D}}{2})\}$

$= (\frac{2x+b-\sqrt{D}}{2}).(\frac{2x+b-\sqrt{D}}{2}) = \frac{4x^2+2bx\cancel{-2x\sqrt{D}}+2bx+b^2\cancel{-b\sqrt{D}+2x\sqrt{D}+b\sqrt{D}}-D}{4}$

$= \frac{4x^2+4bx+b^2-D}{4} = \frac{4x^2+4bx+\cancel{b^2}-(\cancel{b^2}-4c)}{4}$ (omdat $D = b^2 - 4\,ac$ *en* $a = 1$) $=$

$\frac{4x^2+4bx+4c}{4}$ $\boldsymbol{= x^2 + bx + c}$, dus $\boldsymbol{(x - x_1)\,.\,(x - x_2) = x^2 + bx + c}$

Hiermee is de som $x^2 + bx + c$ ***ontbonden in twee factoren*** x_1 en x_2 waarin x_1, x_2 dus de *nulpunten* (*wortels*) van *f*(*x*) voorstellen.

Omgekeerd zijn met deze eigenschap $x^2 + bx + c = (x - x_1).\,(x - x_2)$ de wortels van $f(x) = x^2 + bx + c$ soms eenvoudig te berekenen.

Immers uit: $x^2 + \boldsymbol{b}x + \boldsymbol{c} = (x - x_1).(x - x_2) = x^2 - (\boldsymbol{x_1 + x_2})\ x + \boldsymbol{x_1.\ x_2}$

volgt dat $\boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{x_1 + x_2})$ en $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{x_1.\ x_2}$

De wortels x_1 en x_2 van $x^2 + bx + c$ bepalen we dan als volgt: Neem als voorbeeld de vergelijking $x^2 \boldsymbol{-11}\,x + \boldsymbol{28} = 0$ dan is dus

$b = -\,\boldsymbol{(x_1 + x_2)} = \boldsymbol{-11}$ en $c = \boldsymbol{x_1.\ x_2} = \boldsymbol{28}$ waaruit volgt: $\boldsymbol{x_1 = 4}$ **en** $\boldsymbol{x_2 = 7}$

De oplossingen van de vergelijking $x^2 - 11\,x + 28 = 0$ zijn dus $\boldsymbol{x = 4}$ en $\boldsymbol{x = 7.}$

1. Bereken zo ook de nulpunten van $f(x) = x^2 - x - 12$

Stel $x^2 - x - 12 = (x + p).(x + q) = 0$ dan is $p + q = -1$ en $p.\,q = -12$.

Hieraan voldoen $p = -4$ en $q = 3$ dus $x^2 - x - 12 = (x - 4).(x + 3) = 0 \Rightarrow$

$x - 4 = 0 \lor x + 3 = 0.$ [*)]

De nulpunten zijn $\boldsymbol{x_1 = 4}$ **en** $\boldsymbol{x_2 = -3}$**:** ($4^2 - 4 - 12 = 0$ en $(-3)^2 - (-3) - 12 = 0$)

De parabool snijdt de *x*-as in de twee punten (4, 0) en (−3, 0)**.**

2. Los op $x^2 + 2x - 143 = 0$

Stel $x^2 + 2x - 143 = (x + p).\,(x + q)$ dan is $p + q = 2$ en $p.q = -143$, dus

$p = -11$ en $q = 13$. Gevolg: $x^2 + 2x - 143 = (x - 11)(x + 13) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = 11,\ x_2 = -13}$

3. Van de grafiek van een parabool $f(x) = ax^2 + b\,x + c$ is de top $T = (2, -3)$

De lijn l met vergelijking $y = -4x + 1$ is een raaklijn aan de parabool.
Bepaal de vergelijking van *f*(*x*).

De coördinaten top T van de parabool voldoen aan $x_T = \frac{-b}{2a}$ en $y_T = \frac{-D}{4a}$ dus geldt hier

$x_T = \frac{-b}{2a} = 2$ zodat $\boldsymbol{b = -4a}$ ...(1)

---

*) Volgens de "Wet van het nulelement ' geldt algemeen: Als $a \times b = 0$ dan $a = 0$ of $b = 0$ en omgekeerd.

$y_T = \dfrac{-D}{4a} = -\,3$ dus $\dfrac{-(b^2-4ac)}{4a} = -3 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{b^2 - 4ac = 12a}$ …(2)

De snijpunten van f en de lijn l met $y = -\,4x + 1$ volgen uit $ax^2 + bx + c = -\,4x + 1$ ofwel uit $ax^2 + (b+4)\,x + (c-1) = 0$

Omdat *l:* $y = -\,4x + 1$ *raaklijn* is aan de parabool is er slechts één snijpunt van de parabool met l dus moet de *discriminant* van $ax^2 + (b+4)\,x + (c-1) =$ *nul* zijn.

Gevolg: $D = (b+4)^2 - 4a\,(c-1) = 0$ ofwel $\boldsymbol{b^2 + 8b + 16 - 4ac + 4a = 0}$ …(3)

Substitueer $b^2 - 4ac = 12a$ uit (2) in (3) dan vind je $12a + 8b + 16 + 4a = 0$

Met $b = -\,4a$ volgens (1) is dan: $12a + -32a + 16 + 4a = 0 \;\Rightarrow\; -\,16a = -16$ zodat

$\boldsymbol{a = 1}$ **en** $\boldsymbol{b = -\,4}$. Deze waarden in (2) geven: $b^2 - 4ac = 12a \Rightarrow 16 - 4c = 12 \;\Rightarrow \boldsymbol{c = 1}$

zodat $\boldsymbol{f(x) = y} = ax^2 + b\,x + c = \boldsymbol{x^2 - 4x + 1}$ de gevraagde parabool voorstelt.

4. *Machtsfuncties*

> *De functie y =* $\boldsymbol{f(x) = x^a}$ *is een machtsfunctie van x, waarin de* ***exponent a*** *een* ***constante*** *is en het* ***grondtal x de variabele****.*

Bij *samengestelde machtsfuncties* als $f(x) = a_0.x^0 + a_1.x^1 + a_2.x^2 + \ldots + a_n.x^n$, ook n^{de} graads **polynomen** genoemd, maken we gebruik van de *definitieformule van een positieve gehele macht* van a:

$a^1 = a$, $a^2 = a.\,a$; $a^3 = a.\,a.\,a$; $a^4 = a.\,a.\,a\,.a$, dus algemeen: $\boldsymbol{a^p = \overbrace{a.\,a\ldots.\,a}^{p\ keer}}$

Hieruit volgen direct de *regels*: $\boldsymbol{a^p.\,a^q = a^{p+q}}$, $\boldsymbol{\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}}$ en $\boldsymbol{(a^p)^q = a^{p.q}}$

Voor ***elke a*** $\boldsymbol{\in} \mathbb{R}$ geldt $\dfrac{a^p}{a^p} = \boldsymbol{1}$ en ook $\dfrac{a^p}{a^p} = a^{p-p} = \boldsymbol{a^0}$ dus $\boldsymbol{a^0 = 1}$

Gevolg: $\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a^p}} = \dfrac{a^0}{a^p} = a^{0-p} = \boldsymbol{a^{-p}}$ en $\boldsymbol{\sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}}$ omdat $(a^{\frac{1}{p}})^p = a^{\frac{1}{p}\cdot p} = a^1 = a$.

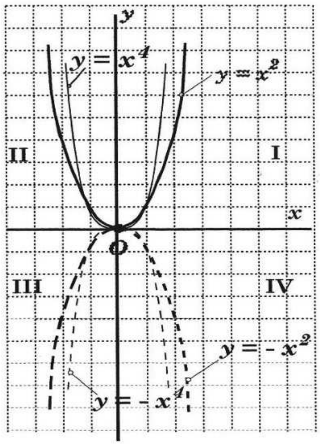
$a^p\,.\,a^q = a^{p+q}$	$(a^p)^q = a^{p.q}$	$a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$	$a^0 = 1$
$\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$(a.b)^p = a^p.\,b^p$	$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Zo is bijvoorbeeld: $3^7.\,3a^{-9} = 3^{-2} = \dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3^2}} = \dfrac{1}{9}$; $5^{-2\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{5^{2\frac{1}{2}}} = \dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\sqrt{5^5}}}$; $7^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{7^3}$

Machtsfuncties waarin *x hoogstens tot de macht n* voorkomen, heten n^{de} *graads machtsfuncties* (*-polynomen*) . Zo is $f(x) = ax + b$ een machtsfunctie van de *eerste graad*. Functies van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ zijn machtsfuncties van de *tweede graad,* et cetera.

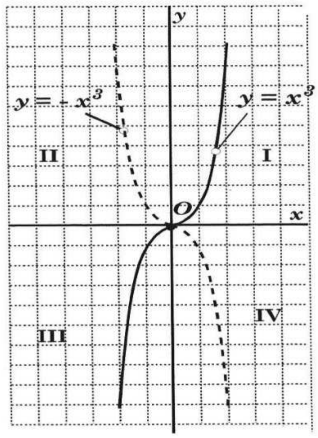
a. Grafieken van machtsfuncties

We tekenen nu de grafieken van enkele *machtsfuncties* $f(x) = y = x^{p}$ in de vier kwadranten. I, II, III en IV

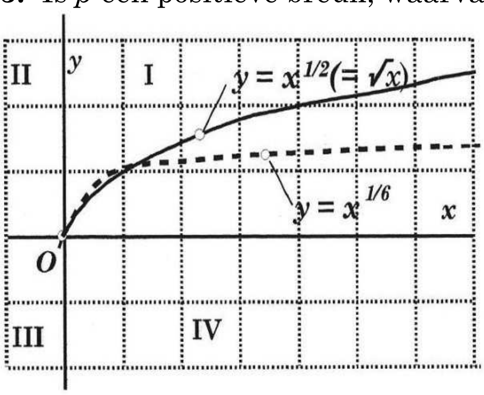


1. Als ***p* een positief, even getal $\neq$ 0** is, dus $p = 2, 4, 6, \ldots$, dan zijn alle y-waarden van $\boldsymbol{y = x^{p}}$ positief en ligt de grafiek geheel in I en II. In de vorm herkennen we de *dalparaboloïde.* Bij eenzelfde waarde van p is $\boldsymbol{y = -x^{p}}$ het spiegelbeeld van $y = x^{p}$ in de x-as en zien we daarin een *bergparaboloïde.*

2. Is ***p* een positief, oneven, geheel getal ≠ *1***, dus $p = 3, 5, 7$, dan bestaan er in tegenstelling tot de *even* machten van x (x^2, x^4, x^6, … die steeds ≥ 0 zijn), ook *negatieve y* waarden. Bijvoorbeeld $(-3)^3 = -27$. Hierdoor heeft $y = x^{p}$ bij *oneven p* dan ook waarden in het *eerste- en derde kwadrant.* Daar hierbij $(-x)^p = -(x^{p})$ is de vorm van het deel van de grafiek in III, een *spiegeling in de oorsprong* van de halve paraboloïde uit I. De grafiek van $y = -x^{p}$ ontstaat dan weer uit die van $y = x^{p}$ door spiegeling in de x-as.



3. Is p een positieve breuk, waarvan de ***teller oneven is en de noemer even,*** zoals



$y = x^{\frac{1}{2}}$ en $x^{\frac{1}{6}}$ dan bestaan *geen reële y waarden bij negatieve x.* Zo is $y = x^{\frac{1}{2}}$ bij $x = -1$ gelijk aan $(-1)^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\sqrt{-1}}$ en $y = (-x)^{\frac{1}{6}}$ bij $x = -1$ gelijk aan $(-1)^{\frac{1}{6}} = ((-1)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\sqrt{-1}}$ dus beide bestaat niet in ℝ. Alle waarden van $y = x^{p}$ liggen dan *in I*

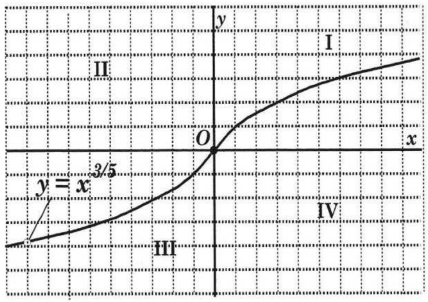
4. Als p een positieve breuk is met ***teller en noemer oneven*** dan bestaan er ook reële y waarden bij *negatieve x,* die dan ook zelf negatief zijn, en dus in III liggen. Zo is hier de y waarde van $x = -4$ in

$y = x^{\frac{3}{5}}$: $y = (-4)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-4)^3} = \sqrt[5]{-64} \approx -2{,}297$. De grafiek van $y = x^{\frac{3}{5}}$ ligt nu in I en III. *)

---

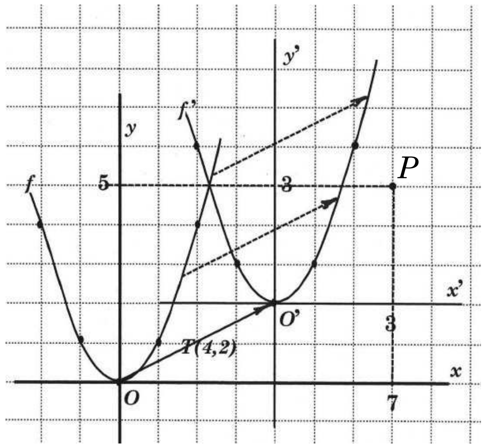
*) Met de GR TI-83 zijn alle grafieken ter controle te ‘plotten’. VB: Druk op **Y1 =** en voer in **X ^(3/5) ENTER** Typ zo ook **Y2 = X ^(3/7) ENTER.** Druk **WINDOW** en kies Xmin = −5, Xmax = 5, Ymin = −5, Ymax = 5. Kies: Xscl en Yscl =1 (Xres = 1). Druk op GRAPH en de grafieken uit 4 worden getekend.

b. *Transformaties van machtsfuncties*



Onder *standaard*- machtsfuncties verstaan we machtsfuncties van de tweede graad, de derde graad en meer algemeen machtsfuncties van de graad n zoals dus $y = \pm\, x^2$, $y = \pm\, x^3$, $y = \pm\, x^n$ met $n = 4, 5, 6, \ldots$ en ook $y = \sqrt{x} = (x^{1/2})$.
Uit de grafieken van deze standaardvormen kunnen via transformaties eenvoudig de formules en grafieken voor meer complexe machtsfuncties worden afgeleid.

- *Transformaties door translatie*



In deze figuur is in een xOy stelsel de grafiek getekend van de standaardfunctie ***f*: $y = x^2$**. Via een *evenwijdige verschuiving* van alle punten over +4 eenheden in de x-richting (naar rechts) en + 2 eenheden in de y richting (omhoog) is elk punt van de parabool ***f*: $y = x^2$** ***afgebeeld op een met f congruente grafiek*** f' . *)

Zo'n een *evenwijdige verschuiving* van alle punten in de x richting en in de y richting wordt aangegeven als de ***translatie*** **(4, 2)** ofwel ***T*** **(4,2)**.

Passen we *dezelfde translatie ook toe op de coördinaatassen X en Y* dan ontstaat als beeld het coördinatenstelsel $x'O'y'$. Vergelijk nu de *vorm en positie van het origineel* ***f*:** $y = x^2$ in het *xOy stelsel* met vorm en positie van het beeld f' in het $x'O'y'$ stelsel, dan zie je dat ***ten opzichte van de verschoven coördinaatassen*** x' **en** y' de vergelijking van de nieuwe functie f' zal zijn f': $y' = (x')^2$ …(1)
Voor een willekeurig punt P geldt : $P(x,y) = (7, 5)$ ten opzichte van het (originele) xOy stelsel en $P(x',y') = (3, 3)$ ten opzichte van het (verschoven) $x'O'y'$ stelsel.
Hieruit blijkt dat voor de coördinaten voor elk punt P geldt: $x' = x - 4$ en $y' = y - 2$ en dit ingevuld in (1) geeft: f': $y' = (x')^2 \;\Rightarrow\; y - 2 = (x - 4)^2$ dus:
De functie ***f′*** *voldoet dus na de translatie* $T(a,b) = T(4,2)$ *aan de vergelijking* $y = (x - 4)^2 + 2$. Algemeen geldt dan:

> *Bij de translatie* $T(a, b)$ *gaat de functie* f: $y = x^2$ *over in* $y = (x - a)^2 + b$

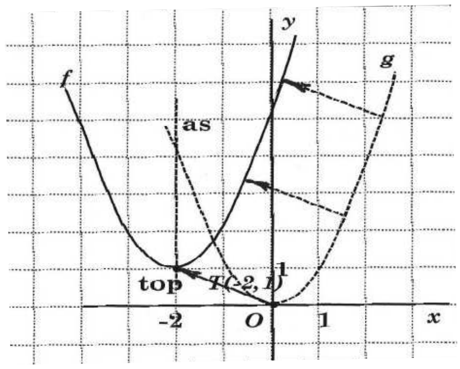
Elke functie f: $y = x^2 + p\,x + q$ is te schrijven in de vorm $y = (x - a)^2 + b$, want:
$x^2 + p\,x + q = (x^2 + p\,x + \cancel{\tfrac{1}{4}p^2}) + q - \cancel{\tfrac{1}{4}p^2} = (x + \tfrac{1}{2}p)^2 + (q - \tfrac{1}{4}p^2)$ dus met
$a = -\tfrac{1}{2}p$ en $b = q - \tfrac{1}{4}p^2 \Rightarrow \boldsymbol{y = (x - a)^2 + b}$

*) Figuur A is congruent met figuur B ($A \cong B$) als A en B identiek zijn, dus dezelfde vorm en afmeting hebben.

Dit betekent dat (de grafiek van) elke tweedegraadsfunctie van de vorm $y = x^2 + p\,x + q$ is te beschouwen als *een translatie* over *T(a,b)* van de standaardgrafiek $\boldsymbol{y = x^2}$**.** Alle grafieken hiervan zijn dus congruent met de standaardvorm de functie $\boldsymbol{f : y = x^2}$ en hebben dezelfde vorm.

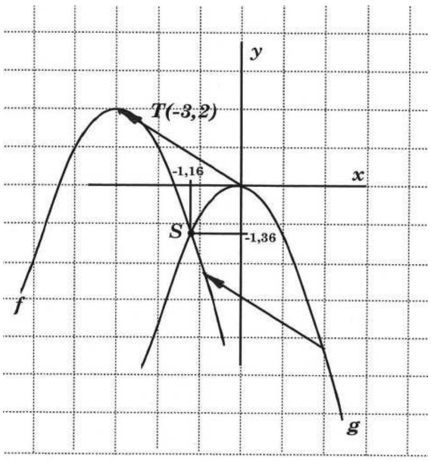
Toepassingen:

1. Schets de grafiek van de functie f: $y = (x + 2)^2 + 1$



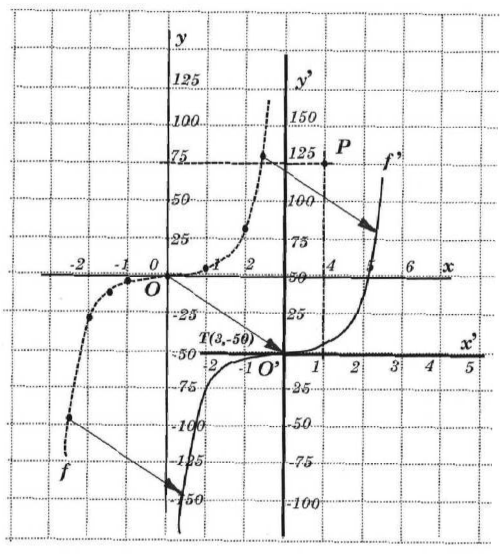
Volgens voorgaande gaat bij een translatie $T\,(a,\,b)$ de grafiek van $y = x^2$ over in $y = (x - a)^2 + b$.
In f: $y = (x + 2)^2 + 1$ is dan $a = -2$ en $b = 1$ dus ontstaat de functie f: $y = (x + 2)^2 + 1$ uit een ***translatie*** van de standaardfunctie ***over*** T **(−2, 1)**
In bijgaande figuur is de grafiek van f getekend.
De top is het punt (−2, 1), de as is de lijn $x = -2$.

2. Schets de grafiek van de functie f: $y = -x^2 - 6x - 7$ en bepaal het snijpunt van f en de parabool g: $y = -x^2$



Door kwadraatafsplitsing herleiden we de gegeven functie f: $y = -x^2 - 6x - 7$ tot: f: $y = -x^2 - 6x - 7 =$
$(-x^2 - 6x - 9) + 2 = -(x + 3)^2 + 2$
Volgens regel (1) is dit de grafiek van de functie die ontstaat uit de standaardfunctie g: $y = -x^2$ door de ***translatie T* (− 3, 2)**
De ***top*** van f (bergparabool) is dan het punt **(− 3, 2)**
***de as is de lijn met* x =** − 3.
Het ***snijpunt* S (*x*, *y*)** van de grafieken f en g volgt uit: $y = -x^2 - 6x - 7 = y = -x^2 \Rightarrow -6x - 7 = 0 \Rightarrow$

$\boldsymbol{x = -\frac{7}{6} \approx -1{,}16}$ en $\boldsymbol{y = -x^2 = -(-\frac{7}{6})^2 \approx -1{,}36}$

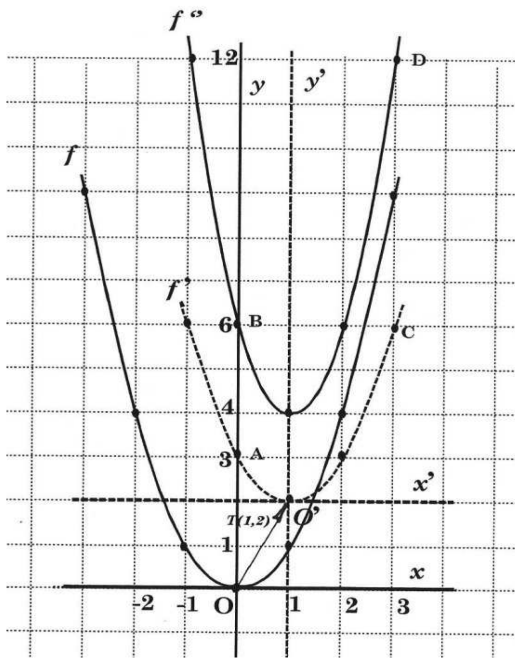


Omdat bij *elke translatie T* (*a* ,*b*) het *beeld congruent is met het origineel*, geldt de eerder afgeleide transformatieregel (1) voor tweedegraadsfuncties (parabolen) ook algemeen voor machtsfuncties van de n^{de} graad (n = 3, 4, …) We tonen dit als volgt aan:
In de figuur is in een xOy stelsel de grafiek getekend van de standaardfunctie $\boldsymbol{f\!: y = x^5}$. Via de ***translatie T*** **(3, −50)**, dus een *evenwijdige verschuiving* van alle punten over 3 eenheden in de positieve x richting (naar rechts) en 50 eenheden in de negatieve y richting. (omlaag), is elk punt van de functie $\boldsymbol{f\!: y = x^5}$ *afgebeeld op de congruente grafiek* f' .

Ten opzichte van het verschoven coördinaten-stelsel $x'O'y'$. is de vergelijking van de nieuwe functie $\boldsymbol{f'}$**:** $\boldsymbol{y' = (x')^5}$ zoals direct is in te zien door f' binnen de nieuwe assen x' en y' terug te schuiven, *waarbij O′ weer samenvalt met de originele oorsprong O.*
Beschouw nu het willekeurig gekozen punt P in het getekende rooster dan kan dit worden aangeven met de coördinaten $\boldsymbol{x = 4}$ en $\boldsymbol{y = 75}$ *ten opzichte van het originele XOY-stelsel.* Ten opzichte van het nieuwe stelsel *X′O′Y′ zijn de coördinaten van P :*
$\boldsymbol{x' = 1}$ en $\boldsymbol{y' = 125}$ met gevolg: $\boldsymbol{x' = x - 3}$ en $\boldsymbol{y' = y + 50.}$
Deze waarden voor x' en y' gesubstitueerd in de functievergelijking
f': $y' = (x')^5$ geeft dan tenslotte: $y + 50 = (x - 3)^2 \Rightarrow \boldsymbol{y = (x - 3)^2 - 50}$
Noemen we de translatie $T = (3,-50)$ in het algemeen $T(a,b)$ dan is hiermee weer aangetoond:

> *Bij een translatie T (a, b) gaat de functie f: $y = x^n$ over in f ′: $y = (x - a)^n + b$*

- *Transformaties door vermenigvuldiging*



De grafiek van bijvoorbeeld de functie
f: $y = \mathbf{2}x^2 - 4x + 6$ heeft niet de *standaardvorm* van $y = x^2$ zoals wel alle grafieken van de functies $y = (\mathbf{1})\, x^2 + a\,x + b$.
We schrijven de vorm
f: $y = 2x^2 - 4x + 6$ als $y = 2\,(x^2 - 2x + 3)$
$= 2\{(x^2 - 2x + 1) + 2\} = \boldsymbol{2\,\{(x - 1)^2 + 2\}}$
In deze vorm is de grafiek van de gegeven functie f: $y = 2x^2 - 4x + 6$ eenvoudig te tekenen, door
- *eerst de translati*e $T(1,2)$ uit te voeren op de standaardgrafiek $f: y = x^2$ zodat het beeld ontstaat van de grafiek $f' = (x - 1)^2 + 2$ en
- daarna dit beeld *ten opzichte van de x-as te vermenigvuldigen met +2* zodat de gevraagde grafiek ontstaat van $\boldsymbol{f'' : y = 2 \,.\, \{(x - 1)^2 + 2\}}$
$\boldsymbol{= 2x^2 - 4x + 6}$ *)

- *Transformaties van wortelvormen*

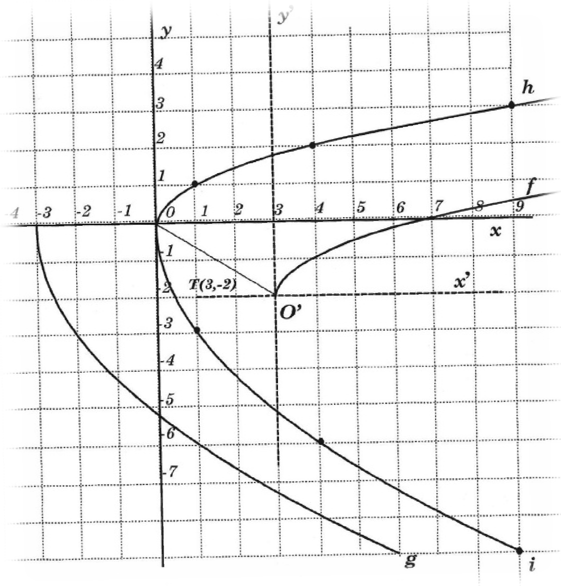
Ook de grafieken van *wortelvormen* (machtsfuncties met gebroken exponent) kunnen via translatie en/of vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as *soms* afgeleid worden van hun standaardvorm $y = \sqrt{x}$ volgens de bekende regels:

standaardvorm ⟶	*transformatie* ⟶	*beeldgrafiek*
$y = \sqrt{x}$	*T (a,b)*	$y = \sqrt{x - a} + b$
$y = \sqrt{x}$	× *P (x-as, a)*	$y = a.\,\sqrt{x}$

*) Het beeld van een punt A(0,3) bij vermenigvuldiging t.o.v. de x-as met de factor 2 is het punt B(0,6) waarbij geldt $|OB| = 2\times\,|OA|$. Zo zijn ook de andere punten van f' afgebeeld op f''

Voorbeeld:

a. Schets de grafieken van de functies f: $y = \sqrt{x-3} - 2$ en g: $y = -3\sqrt{x+3}$ in één figuur.
b. Geef de coördinaten van het beginpunt van elk.
c. Geef domein en bereik aan van beide functies.



a. Teken de standaardgrafiek h: $y = \sqrt{x}$.
Deze heeft als startpunt het punt (0,0) en gaat verder door de roosterpunten (1,1), (4,2), (9,3),…Pas op h de translatie T $(3,-2)$ toe dan ontstaat volgens voorgaande regel de gevraagde grafiek $\boldsymbol{f}$**:** $\boldsymbol{y = \sqrt{x-3} - 2}$

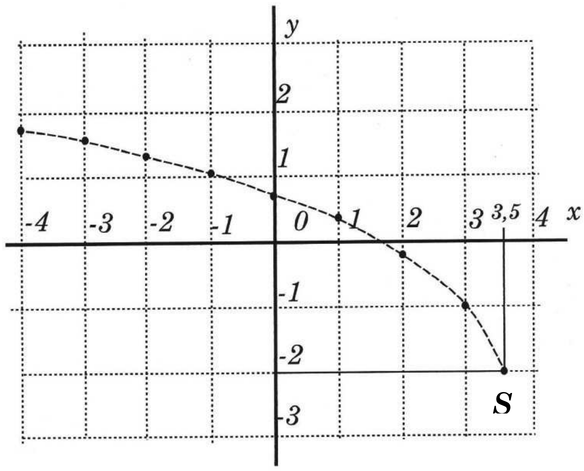
Uitgaande van de standaardgrafiek h: $y = \sqrt{x}$ vermenigvuldigen we deze t.o.v. de x-as met de factor – **3**, waaruit de grafiek $\boldsymbol{i: y = -3\sqrt{x}}$ ontstaat.
Pas hierop de translatie T $(0,-3)$ toe, dan vind je de grafiek van $\boldsymbol{g: y = -3\sqrt{x+3}}$ zoals werd gevraagd.

b. Uit de figuur is direct af te leiden dat het startpunt van f: $y = \sqrt{x-3} - 2$ het ***beeldpunt*** $(\mathbf{3}, \mathbf{-2})$ is van het origineel (0,0) van h: $y = \sqrt{x}$ (bij de translatie $T(3,-2)$)
Zo is ook het beeldpunt $(\mathbf{-3}, 0)$ het startpunt van g: $y = -3\sqrt{x+3}$.

c. De waarde van f: $y = \sqrt{x-3} - 2$ is alleen gedefinieerd *als* $\sqrt{x-3} \geq 0$, dus *als* $x \geq 3$
Het domein van de functie f is dan $\boldsymbol{D_f = [3, \rightarrow\rangle}$
Daar $\sqrt{x-3} \geq 0$ is $\sqrt{x-3} - 2 \geq -2 \Rightarrow$ **het bereik** $\boldsymbol{B_f = [-2, \rightarrow\rangle}$

De waarde van g: $y = -3\sqrt{x+3}$ is alleen gedefinieerd *als* $\sqrt{x+3} \geq 0$, dus *als* $x \geq -3$. Het domein van de functie g is dan $\boldsymbol{D_g = [-3, \rightarrow\rangle}$.
Daar $\sqrt{x+3} \geq 0$ is $-3\sqrt{x+3} \leq 0 \Rightarrow$ **het bereik** $\boldsymbol{Bg = \langle\leftarrow, 0]}$

Meestal is het niet eenvoudig om via transformeren de grafiek van een wortelvorm te vinden uit die van de standaardvorm van $y = \sqrt{x}$.
Zelfs plotten in de GR geeft nog problemen...
Voorbeeld: Voer in de GR in f: $y = -2 + \sqrt{7-2x}$ en kies als 'WINDOW'
$X_{min} = -4$; $X_{max} = 4$; $Y_{min} = -2$; $Y_{max} = 2$ (andere variabelen =1 laten)
De tabel van de grafiek geeft vanaf X = 4 'ERROR' omdat dan immers $\sqrt{7-2x}$ niet bestaat. Ook vindt de GR geen 'beginpunt' van de grafiek, omdat de 'trace-cursor' met een vaste stapgrootte werkt.



Zo'n beginpunt moet dan handmatig worden bepaald: $\sqrt{7-2x} \geq 0$, dus $2x \leq 7 \Rightarrow$ $x \leq 3{,}5$, dus geldt voor het startpunt $x = 3{,}5$ waarbij dan $\boldsymbol{y} = -2 + \sqrt{7-2x} = -2$

Beginpunt van *f*: *$y = -2 + \sqrt{7-2x}$ is dus het punt* ***S* (3,5 ; −2)**

Het domein van de functie is $\langle \leftarrow ;\ 3{,}5\,]$, het bereik is dus $[-2\ , \rightarrow \rangle$

Verdere punten van de grafiek volgen uit onderstaande tabel:

x	3,5	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4
y	−2, 00	−1,00	−0,27	0,24	0,65	1,00	1,32	1,61	1,87

Bereken van de volgende functies het domein, bereik en de coördinaten van het beginpunt: $f(x) = 3 + \sqrt{8-4x}$, $g(x) = -2\sqrt{x+3}$ en $h(x) = 5 - \sqrt{2x+6}$

1. $f(x) = 3 + \sqrt{8-4x}$
Er moet gelden: $8 - 4x \geq 0$ dus $-4x \geq -8 \Rightarrow \boldsymbol{x \leq 2}$.
Van het beginpunt is dan $x = 2$ dus $y = 3 \Rightarrow$ beginpunt is het *punt* **(2, 3)**
Domein $D_f = \langle \leftarrow, 2\,]$, bereik $B_f = [3\ , \rightarrow \rangle$

2. $g(x) = 3 + \sqrt{4x-8}$
Hier moet gelden: $4x - 8 \geq 0$ dus $4x \geq 8 \Rightarrow x \geq 2$.
Van het beginpunt is dan $x = 2$ dus $y = 3 \Rightarrow$ beginpunt is het *punt* **(2, 3)**
Domein $D_f = [2\ , \rightarrow \rangle$, bereik $B_f = [3\ , \rightarrow \rangle$

3. $h(x) = 5 - \sqrt{2x+6}$
$2x + 6 \geq 0$ dus $\boldsymbol{x \geq -3}$ Van het beginpunt is dan $x = -3$ dus $y = 5 - \sqrt{2,(-3)+6} = 5$
$\Rightarrow$ beginpunt is dus het *punt* **(−3, 5)**
Domein $D_f = [\mathbf{-3}, \rightarrow \rangle$, bereik $B_f = [\leftarrow, 5]$.

5. *Exponentiële functies*

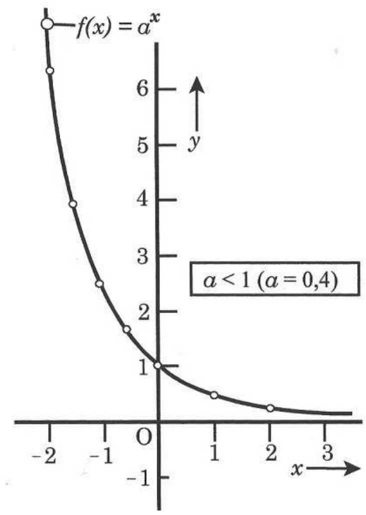
Behalve de ***machtsfunctie f(x) = x^a*** kennen we 'omgekeerd' ook de ***exponentiële functie f(x) = a^x***:

> *Functies waarvan een* ***exponent x*** *de* ***variabele*** *is en een positief* ***grondtal*** *de* ***constante****, heten exponentiële functies. Algemene vergelijking: $f(x) = y = a^x$ $(a > 0)$*

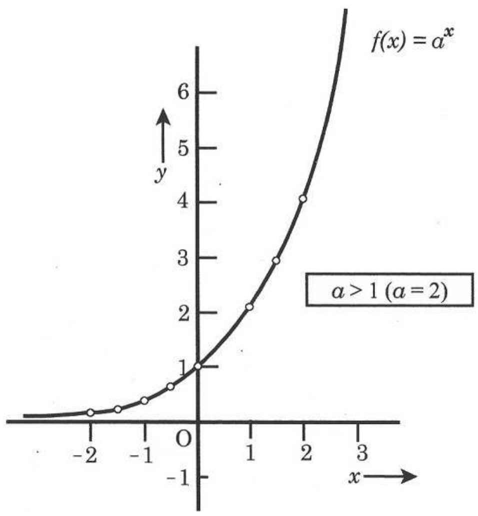
Voor $\boldsymbol{a \leq 0}$ is de functie *niet gedefinieerd.* Immers als $a = 0$ dan is $a^x = 0$ voor elke x, dus is a^x *geen functie.* Als $\boldsymbol{a < 0}$ dan *bestaat* a^x *niet* voor *alle waarden van x*
Zo zijn: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; $a^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{a})^3$; $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$; …. *ongedefinieerd* als *a negatief* is.
Als $\boldsymbol{a = 1}$ dan is $y = a^x = 1$ omdat $1^x = 1$ voor elke reële x.

Onderzoeken we nu de *functie* $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ voor waarden van a, met $\mathbf{0 < a < 1}$ en $\boldsymbol{a > 1}$:
Bij elke exponent x, is de waarde van a^x ($a > 0$) steeds positief zoals uit de definitie van machten volgt. Alle grafieken $y = f(x) = a^x$ liggen dus *boven de x-as*.
Omdat $a^0 = 1$ voor iedere a gaan de grafieken dan *alle door het punt* (0,1)

1. $f(x) = a^x$ ($0 < a < 1$)



Voor $0 < a < 1$ is de functie ***monotoon dalend***, dus bij *toenemende x* neemt *y af*. Immers als $f(x) = a^x$ dan is $f(x+1) = a^{x+1} = a.\,a^x$ en daar $a < 1$ is $a.\,a^x < a^x$ dus $\boldsymbol{a^{x+1} < a^x}$ zodat $f(x) = a^x$ *monotoon daalt.*
Bij *onbepaald grote toename van x,* we zeggen:
als x tot oneindig nadert, notatie $x \to \infty$, dan nadert a^x onbepaald tot de waarde nul omdat $0 < a < 1$. Immers als $a^x = \delta$ waarin $\delta \to 0$ dan is $a^{x+1} = a.\,a^x < \delta$ omdat $a < 1$.
De waarde nul wordt nooit bereikt, want er bestaat geen x, hoe groot of klein ook, waarvoor $a^x = 0$.
Dit betekent dat bij toenemende x de grafiek steeds dichter tot de *positieve x-as* nadert *zonder hem ooit te raken*:
De x-as heet een (horizontale) ***asymptoot*** van de grafiek van $f(x) = a^x$. ($0 < a < 1$)



2. $f(x) = a^x$ ($a > 1$)
Als $a > 1$ dan is de functie ***monotoon stijgend***, want: als $f(x) = a^x$ dan is $f(x+1) = a^{x+1} = a.\,a^x$ en daar $a > 1$ is $a.\,a^x > a^x$ dus $\boldsymbol{a^{x+1} > a^x}$ zodat $f(x+1) > f(x) \Rightarrow a^x$ is *monotoon stijgend.*
Als $a^x = \delta$ waarbij $\delta \to 0$ dan is $a^{x-1} = \frac{a^x}{a} < a^x < \delta$ omdat $a > 1$. Bij onbepaald grote afname van x nadert a^x dan onbepaald tot nul.
Omdat er geen x bestaat met $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = 0$ is ook hier de x-as een *horizontale asymptoot.*

Exponentiële groei
In onderstaande tabel wordt de groei weergegeven van de bevolking van Latijns-Amerika in de vierjaarlijkse perioden tussen 1950 en.1970

jaar	1950	1954	1958	1962	1966	1970
aantal $\times 10^6$	164	183	203	227	254	282

Elke periode blijkt de bevolking met een *factor* van circa 1,11 toe te nemen, want
$\frac{183}{164} \approx \frac{203}{183} \approx \frac{227}{203} \approx \frac{254}{227} \approx \frac{282}{254} \approx 1{,}11.$
De factor 1,11 heet in zo'n geval de ***groeifactor***.

Werk je hiermee de onderste rij van de tabel uit, dan vind je:

aantal $\times 10^6$	164	183 = 1,11 × 164	203 = 1,11 × 1,11 × 164	227 = 1,11 × 1,11 × 1,11 × 164	254 = 1,11 × 1,11 × 1,11 × 1,11 × 164	282 ....
	$\mathbf{1,11^0 \times 164}$	$\mathbf{1,11^1 \times 164}$	$\mathbf{1,11^2 \times 164}$	$\mathbf{1,11^3 \times 164}$	$\mathbf{1,11^4 \times 164}$	$\mathbf{1,11^5 \times 164}$

We zien dan dat bij de *groeifactor* 1,11 *na* ***t*** *perioden van* 4 *jaar* (hier $t = 0, 1, 2, 3, 4$) de *beginwaarde* 164 (dus na $t = 0$ perioden) met een factor $\mathbf{1{,}11^{\,t}}$ is toegenomen. Noemen we 164 de ***startwaarde*** $N(0)$ en 1,11 de ***groeifactor g per periode*** dan is dus na t perioden: $\boldsymbol{N(t) = N(0)\ .\ g^t}$. $N(t)$ is dus een *exponentiële functie van t.*

> *Als bij een functie N(t) de groeifactor g in gelijke perioden constant is,*
> *dan is na t perioden:* $N(t) = N(0)\ .\ g^t$ ($N(0)$ = *startwaarde*)

Voorbeelden

1. Als in voorgaande voorbeeld ook de *groei per jaar* constant zou zijn gebleven, hoe groot was dan de *procentuele bevolkingsgroei* per jaar?

Na 4 perioden van een jaar zou dan gelden $(g')^4 = 1{,}11$, dus $g' = 1{,}11^{\frac{1}{4}} \approx \mathbf{1{,}026}$
De procentuele bevolkingsgroei was dan **2,6 % per jaar**.

2. Een zekere hoeveelheid neemt *elk kwartier* met 12% toe. Bereken:
a. de groei*factor* per kwartier
b. de groeifactor en het groei*percentage* per uur
c. Het groeipercentage per *vijf minuten*

a. Na een kwartier is de hoeveelheid gegroeid tot 1,12 × het startbedrag (= 1).
De *groeifactor per kwartier* is dan 1,12 : 1 = **1,12.**
b. De *groeifactor per uur* is $1{,}12^4 = \mathbf{1,\ 574}$; het *groeipercentage* is dan **57,4%**
c. De groeifactor in vijf minuten (= 1/3 kwartier) is $1{,}12^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1{,}12}\,) \approx 1{,}0385$
dus het *groeipercentage* per vijf minuten is dan ≈ **3,85%**

3. Een bacteriecultuur groeit exponentieel.
Op $t = 4$ zijn er 50.000 bacteriën, op $t = 8$ zijn er 130.000 bacteriën als t de tijd is in uren. Bereken groeifactor en groeipercentage per uur en de groeifactor per dag.

De *groeifactor* is in vier uur $\frac{130.000}{50.000} = 2{,}6$, dus *per uur* $(2{,}6)^{\frac{1}{4}} \approx \mathbf{1{,}269.}$
Het *groeipercentage* per uur is dan ≈ **26,9%**
Per dag is dan de groeifactor $1{,}269^{24} \approx \mathbf{304.}$

6.. *Gebroken rationale functies*

Gebroken rationale functies zijn functies van de vorm $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$

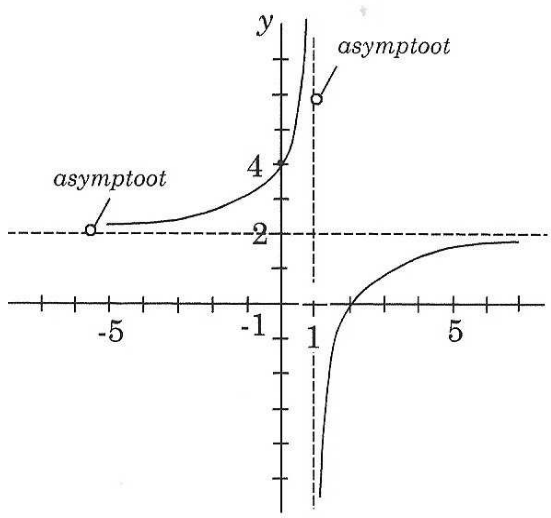
waarin $g(x)$ *en* $h(x)$ *machtsfuncties zijn met reële coëfficiënten.*

De grafieken van deze functies kunnen veel verschillende vormen aannemen.
We beperken ons hier tot twee voorbeelden:

1. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{2x-4}{x-1}}$

De functie is niet gedefinieerd in het punt met $x = 1$, omdat voor die waarde de *noemer gelijk aan nul* wordt en dus de bijbehorende functiewaarde onbepaald is. Verder volgt uit $x = 0 \Rightarrow y = 4$ en uit $y = 0 \Rightarrow x = 2$ zodat de grafiek de x-as snijdt in het punt (2,0) en de y-as in (0,4).

Plotten we de functie op de GR, dan blijkt de grafiek te bestaan uit twee krommen die we later zullen herkennen als twee *takken van een hyperbool.*



Ook zien we dat *bij toenemende* $|x|$ (dus naar rechts of naar links toenemend) *,* beide takken van de parabool *naderen tot de lijn* en *bij toenemende* $|y|$ beide takken *naderen tot de lijn* .

De functie heeft dus een horizontale asymptoot $y = 2$ en een verticale asymptoot $x = 1$. [*)]
('*symptootos*' = *samenvallend*).

In dit voorbeeld betekent dit:

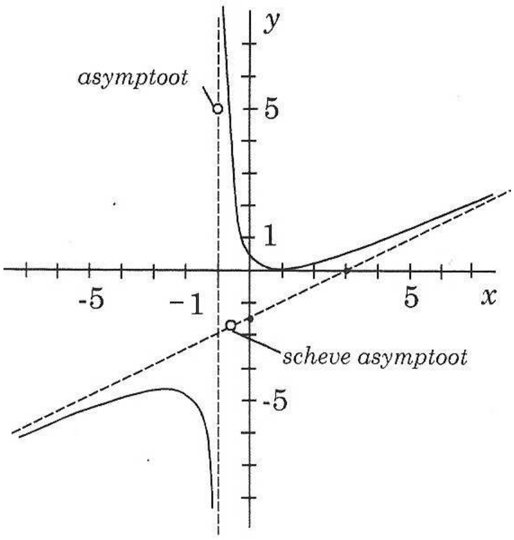
a. Hoe dichter x tot de waarde 1 nadert (van links of van rechts), dus hoe dichter de noemer $x - 1$ tot nul nadert, hoe dichter de waarde $f(x)$ tot $\pm\infty$ nadert. De lijn $x = 1$ is *verticale asymptoot* van $f(x)$ de grafiek is *discontinu* in het punt met $x = 1$.

b. Schrijven we $y = \dfrac{2x-4}{x-1}$ als: $y = \dfrac{2-\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}}$ (teller en noemer door x gedeeld) dan zien we dat bij oneindig grote x de waarde van y tot 2 zal naderen, omdat dan $\dfrac{4}{x}$ en $\dfrac{1}{x}$ tot nul naderen.

[*)] Na *limieten en continuïteiten* aan het einde van dit hoofdstuk, zal het begrip asymptoot nader gedefinieerd kunnen worden. Ook wordt in deze twee voorbeelden geen verschil gemaakt tussen '*echte*' gebroken rationale functies (graad van $g(x)$ in de teller kleiner dan de graad van $h(x)$ in de noemer) en '*onechte*' gebroken rationale functies (graad van $g(x) \geq$ die van $h(x)$.

2. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1}}$

- Omdat de noemer van de breuk bij $x = -\,1$ de waarde nul aanneemt, is de functie voor dat punt niet gedefinieerd. We zien dan ook dat de grafiek van $f\,(x)$ in $x = -\,1$ onderbroken is: Men noemt dan in $x = -\,1$ de functie: ***discontinu.***



- Het *snijpunt met de y-as* is het punt met $x = 0$ en $y = \dfrac{0{,}5\,(0-1)^2}{0+1} = 0{,}5$, dus het punt (0; 0,5).

- Een *snijpunt met de x-as* is het punt met $y = 0$, dus als $\dfrac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1} = 0$ ofwel: $x^2 - 2\,x + 1 = 0 \Rightarrow$ $(x-1)^2 = 0$ met 2 samenvallende wortels $\boldsymbol{x = 1}$

Punt (1, 0) is dan *raakpunt* van $f\,(x)$ aan de x-as.

- De grafiek heeft een verticale asymptoot in het punt met $x = -1$. Bewijs::

Als *x van links* nadert tot -1 ($x < 1$). dan nadert de noemer van $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1}}$ tot $(-1-\delta)+1$ $= 0$ en daarmee de waarde van $f\,(x) = \dfrac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1}$ tot $-\,\infty$**,** dus $x = -1$ *is een (verticale) asymptoot van de linkertak van de hyperbool.*

- Ook van de rechtertak is de lijn $x = 1$ een asymptoot want als x van rechts nadert tot -1 dan nadert de noemer van $f\,(x) = \dfrac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1}$ tot $(-1+\delta)+1 = 0$ en dus de waarde van $f\,(x) = \dfrac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1}$ tot $+\,\infty$ dus $x = -1$ *is tevens asymptoot van de rechtertak van de hyperbool.*

- Omdat een eventuele limiet van $f\,(x) = \dfrac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1}$ als *x tot oneindig nadert* niet direct is te bepalen herleiden we de functie: door een *staartdeling* uit te voeren:

$$
\begin{array}{lrl}
x + 1\ / & 0{,}5\,x^2 \quad -x + 0{,}5\ \backslash & \ \mathbf{0{,}5\,x\ -1{,}5} \\
 & 0{,}5\,x^2\ +0{,}5\,x \qquad\quad & \\
\hline
 & -1{,}5\,x + 0{,}5 & \\
 & -1{,}5\,x - 1{,}5 & \\
\hline
 & \mathbf{2} \qquad\quad &
\end{array}
$$

dus is de gegeven functie herleid tot:

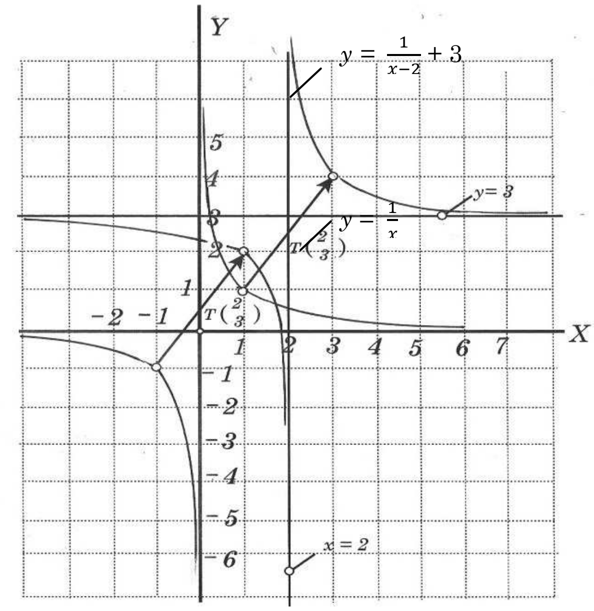
$y = 0{,}5\,x\ -1{,}5 + \dfrac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x+1}}$.

De limiet hiervan als x tot oneindig nadert is dan $\boldsymbol{y\ =\ 0{,}5\,x\ -1{,}5}$

De lijn met vergelijking $y\ =\ 0{,}5\,x\ -1{,}5$ is dus *een* ***(scheve) asymptoot*** van de gegeven functie.

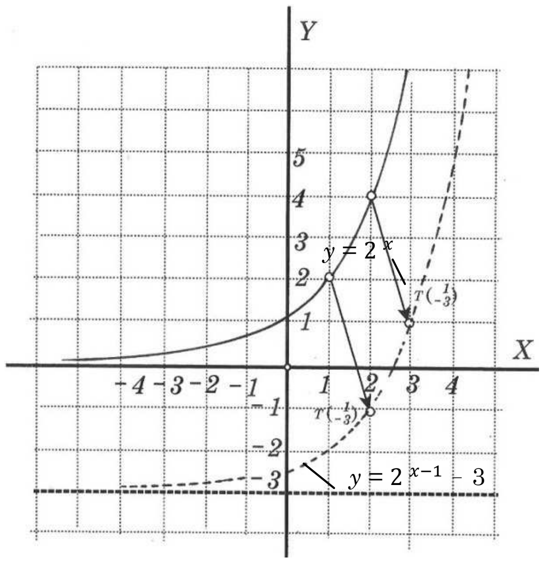
7. *Transformaties van gebroken- en exponentiële functies*

a. Gebroken rationale functies



De grafiek van de gebroken functie g: $y = \frac{1}{x-2} + 3$ verkrijgen we volgens eerdere algemene regel (blz. 13) door de translatie $\boldsymbol{T(2,3)}$ op de standaardhyperbool f: $y = \frac{1}{x}$ toe te passen.
De horizontale asymptoot van f: $y = \frac{1}{x}$ is de x-as met vergelijking $y = 0$, de verticale asymptoot is de y-as met vergelijking $x = 0$. Bij de translatie $T(2,3)$ gaan deze vergelijkingen respectievelijk over in $\boldsymbol{y = 0 + 3 = 3}$ en in $\boldsymbol{x = 0 + 2 = 2}$
De lijn $\boldsymbol{y = 3}$ is dus *horizontale asymptoot,* $\boldsymbol{x = 2}$ is de *verticale asymptoot van g:* $y = \frac{1}{x-2} + 3$,

b. Exponentiële functies



De grafiek van de exponentiële functie $g(x) = 2^{x-1} - 3$ ontstaat uit de standaardgrafiek f: $y = 2^x$ door hierop de translatie $\boldsymbol{T(1,-3)}$ toe te passen.
Horizontale asymptoot van: $y = 2^x$ is de x-as , dus de lijn $y = 0$. Er is geen verticale asymptoot want $\lim_{x \to \infty} 2^x$ bestaat niet.
De *horizontale asymptoot* van $g(x) = 2^{x-1} - 3$ is dan $\boldsymbol{y = 0}$.
Het domein van f is $\mathbb{R}$, dus is ook $\mathbb{R}$ het *domein van g*; het bereik van f is $\langle 0, \rightarrow \rangle$, dus $\langle \boldsymbol{-3}, \rightarrow \rangle$ is het *bereik van g.*

Toepassing:
Gegeven is de functie: $f(x) = 2^{x+3} - 4$
a. Hoe ontstaat de grafiek van f uit de standaardgrafiek ?
b. Bepaal het bereik van f
c. Los op $f(x) \leq 2$

a. $f(x) = 2^{x+3} - 4$ ontstaat uit de grafiek van $g(x) = 2^x$ via de translatie $\boldsymbol{T(-3,-4)}$
b. Het bereik van $g(x) = 2^x$ is $\langle\ 0, \rightarrow \rangle$. dus van $f: y = 2^{x+3} - 4$ is het bereik: $\langle \boldsymbol{-4}, \rightarrow \rangle$
c. Als $f(x) = 2$ dan $2^{x+3} - 4 = 2 \Rightarrow 2^{x+3} = 6$ zodat $(x + 3).\log 2 = \log 6$
dus $x + 3 = \frac{\log 6}{\log 2} = 2{,}58 \Rightarrow x = -0{,}42$.
Daar $g(x) = 2^x$ dalend is, is ook $f(x) = 2^{x+3} - 4$ dalend zodat $f(x) \leq 2$ als $\boldsymbol{x \leq -0,42}$

9. *Logaritmische functies*

a. *Logaritme van een getal*

Exponentiële vergelijkingen als bij voorbeeld $17^x = 500$ kunnen we na voorgaande theorie nog niet wiskundig oplossen. Alleen door 'proberen' met een rekenmachine is een benadering mogelijk.
Men heeft daarom het begrip *logaritme van een getal* ingevoerd.
De Engelse wiskundige Henry Briggs (1561-1630) besloot alle *positieve getallen* als een ***macht van tien*** te schrijven. De *exponenten* van deze machten noemde hij ***logaritmen***, dus de logaritme van een getal a is het getal p waarvoor $10^p = a$.
Definitie: ***log a = p* als 10 *^p^* = *a***. i.e. $\log a = p$ als $10^p = a$.
Zo is bijvoorbeeld $100 = 10^2$ dus de logaritme van 100 = 2. Notatie: $log\ 100 = 2$.
$1000 = 10^3$ dus $log\ 1000 = 3$; $1 = 10^0 \Rightarrow log\ 1 = 0$; $0{,}001 = 10^{-3} \Rightarrow log\ 0{,}001 = -3$
De logaritme van getallen a met $\boldsymbol{a \leq 0}$ *bestaan niet* want er is geen getal p waarvoor $10^p = a$ als $a \leq 0$.
Briggs berekende de logaritmen van alle viercijferige getallen en verzamelde ze in 'logaritmetafels'. Zo ontstonden de ***Briggse logaritmen***, met 10 als *grondtal* [*)]

Niet alleen het getal tien kan als grondtal voor logaritmen dienen, maar in feite *elk* ***positief reëel*** *getal*.
Omdat bijvoorbeeld $9 = 3^2$ kan men met *als grondtal* 3 zeggen: $log\ 9 = 2$.
Om verwarring te voorkomen schrijft men dan ${}^3log\ 9 = 2$.
Zo is ${}^5log\ 125 = 3$ want $5^3 = 125$; ${}^{1/3}log\ \frac{1}{27} = 3$, want $(1/3)^3 = \frac{1}{27}$, …, maar:
Als $\boldsymbol{a \leq 0}$ dan volgt uit ${}^a log\ p = x$ dat $p = \boldsymbol{a}^x$ en deze *exponentiële functie* met $\boldsymbol{a \leq 0}$ is ongedefinieerd zoals al eerder werd aangetoond.

> *De ^{g}logaritme van een getal a is gedefinieerd door:* ${}^g log\ a = b$ *als* $g^b = a$ (a en $g > 0$)

De wiskundige John Napier voerde ***e*** het '***Getal van Euler***' (1707-1783) in voor het grondtal ***g*** van de logaritmen. ($e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2{,}718281828\ldots$)
Logaritmen met dit grondtal noemt men nu Neperiaanse- of *natuurlijke logaritmen* omdat de waarde ervan een grote rol speelt in veel natuurprocessen.
Notatie voor logaritmen *met grondtal e* is ***ln x***, zodat dus $\ln x = {}^e log\ x$.

> *Log x is de Briggse-logaritme van x met 10 als grondtal dus* $log\ x = {}^{10}log\ x$
> *ln x is de natuurlijke logaritme met grondtal e, dus* $ln\ x = {}^e log\ x$
> *Als* $log\ x = p$ *dan is* $10^p = x$, *als* $ln\ x = p$ *dan is* $e^p = x$

[*)] Zo berekende Briggs handmatig de wortel uit 10 daarna de wortel uit de uitkomst, daaruit weer de wortel et cetera. Alles in zestien decimalen nauwkeurig ! Omdat $\sqrt{10} = 10^{0,5} = 3{,}16227766\ldots$, is log $3{,}16227766\ldots = 0{,}5$; $\sqrt{3{,}16277766} = \sqrt{10^{0,5}} = 10^{0,25} = 1{,}77827941\ldots$ dus log $1{,}77827941\ldots = 0{,}25$ enz.. En dit was nog maar het begin…

b. Eigenschappen van logaritmen

Voor elk positief grondtal g en alle positieve waarden voor a en b gelden de regels

1. ${}^{g}\log ab = {}^{g}\log a + {}^{g}\log b$
2. ${}^{g}\log \frac{a}{b} = {}^{g}\log a - {}^{g}\log b$
3. ${}^{g}\log(a^{n}) = n.\,{}^{g}\log a$
4. ${}^{g}\log(g^{x}) = x$ en $g^{{}^{g}\log x} = x$

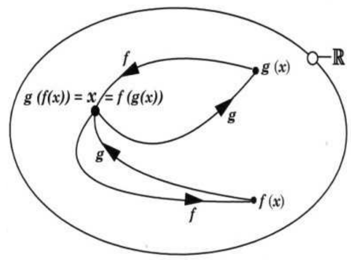
Bewijzen:

1. Noem ${}^{g}\log a = p$ en ${}^{g}\log b = q$ dan is $g^{p} = a$ en $g^{q} = b \Rightarrow ab = g^{p}.\, g^{q} = g^{p+q}$, dus per definitie is dan ${}^{g}\log ab = p + q$ ofwel $\boldsymbol{{}^{g}\log ab = {}^{g}\log a + {}^{g}\log b}$ [*]
2. Noem ${}^{g}\log a = p$ en ${}^{g}\log b = q$ dan is $g^{p} = a$, $g^{q} = b$ dus $\frac{a}{b} = \frac{g^{p}}{g^{q}} = g^{p-q}$ zodat ${}^{g}\log \frac{a}{b} = p - q \Rightarrow$ $\boldsymbol{{}^{g}\log \frac{a}{b} = {}^{g}\log a - {}^{g}\log b}$
3. Als ${}^{g}\log a = p$ dan $g^{p} = a$ en $a^{n} = (g^{p})^{n} = g^{n.p} \Rightarrow$ ${}^{g}\log(a^{n}) = n.\,p = n.\,{}^{g}\log a$ dus $\boldsymbol{{}^{g}\log(a^{n}) = n.\,{}^{g}\log a}$
4. ${}^{g}\log(g^{x}) = x\,.\,{}^{g}\log g$ (volgens 3) $= x\,.\,1 = x$ (want ${}^{g}\log g = 1$) $\Rightarrow$ $\boldsymbol{{}^{g}\log(g^{x}) = x}$

Noem ${}^{g}\log x = p$ dus $g^{p} = x$ zodat $g^{{}^{g}\log x} = g^{p} = x \Rightarrow$ $\boldsymbol{g^{{}^{g}\log x} = x}$

c. *Inverse functies*

Beschouw twee functies f en g waarvan zowel *domein als bereik* de verzameling van de reële getallen is. Men noemt deze: functies in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$



Stel daarbij dat het *f-beeld van elk origineel x*, dus $f(x)$, door de functie g wordt *afgebeeld op het origineel x,* zodat dus $g\,(f(x)) = x$, kortweg $\boldsymbol{g.\,f\,(x) = x}$
Als nu omgekeerd ook het *g-beeld* van elk origineel x , dus $g(x)$, door de functie f wordt afgebeeld op het origineel x, dus als $\boldsymbol{f\,(g(x)) = x}$ ofwel $\boldsymbol{f.\,g\,(x)) = x}$ dan heten f en g elkaars *inverse functies*.

Zijn f en g twee functies in ℝ waarbij voor elk element x geldt dat
f. g (x)) = g. f (x)) = x dan heten f en g elkaars inverse functies

Zo kennen we bijvoorbeeld de *inverse rekenkundige bewerking* worteltrekken en machtsverheffen: Is $f(x) = x^{a}$ en $g(x) = \sqrt[a]{x}$ dan is $\boldsymbol{f\,.\,g(x)} = f\,(\sqrt[a]{x}) = (\sqrt[a]{x}\,)^{a} = (x^{\frac{1}{a}})^{a} = \boldsymbol{x}$
en $\boldsymbol{g\,.\,f(x)} = g(x^{a}) = \sqrt[a]{x^{a}} = (x^{a})^{\frac{1}{a}} = x^{1} = \boldsymbol{x},$ dus zijn machtsverheffen en worteltrekken elkaars inverse functies.

---

[*] Op deze eigenschap berust de werking van een *rekenliniaal,* voorloper van de elektronische rekenmachine: Voorbeeld log 5237 = 3,719083 en log 753 = 2,876795 dus $5237 = 10^{3{,}719083}$ en $753 = 10^{2{,}876795}$. Gevolg: $5237 \times 753 = 10^{3{,}719083} \times 10^{2{,}876795} = 10^{3{,}719083 + 2{,}876795} = 10^{6{,}595878}$ dus log (5237 × 753) = 6,595878. ⇒ 5237 × 753 = inverse log 6,595878 = **3943461.** Hiermee is een *product* berekend via een *optelling* van logaritmen (= exponenten).