

VWO wiskunde in herhaling 1950 tot nu

***Algebra- analyse- meetkunde- statistiek- kansrekening-
vectoralgebra- grafen en matrices- rijen en reeksen-
dynamische modellen- exacte logica- perspectief-
kegelsneden in projectie***



Over de auteur:

Wim Gronloh, geboren op 5 oktober 1937 in Amsterdam, begon zijn loopbaan als scheepswerktuigkundige bij de Nederlandse Koopvaardij. Was daarna ruim 35 jaar werkzaam als leraar wis- en natuurkunde (sinds 1978 ook informatica) in het Voortgezet Onderwijs. Schreef in 1998 de wiskundemethoden 'Basislijn' voor lbo/mavo en voor het havo/vwo.

Over dit boek:

“*Wiskunde leren is wiskunde doen*” zei Carl Friedrich Gauss, het wonderkind, de ‘Mozart van de Wiskunde’.

Maar dit boek is vooral als naslagwerk en vademecum bedoeld, niet als lesboek en sommenboek. Het is in het bijzonder bestemd voor diegene die na een vroegere opleiding op HBS, gymnasium of na een meer recente studie op het VWO, zijn wiskundekennis wil gaan opfrissen, of uitbreiden met de nieuwste stof, maar ook voor iedereen die misschien later geïnteresseerd is geworden in de ‘Koningin van de Wetenschappen’. Vrijwel alle onderwerpen uit de klassieke en de moderne schoolwiskunde worden uitvoerig behandeld, eigenschappen opnieuw bewezen, formules consequent afgeleid.

De geheel uitgewerkte voorbeelden, toepassingen en opgaven zijn hoofdzakelijk bedoeld ter ondersteuning van de betreffende theorie. Vooral daardoor kunt u zich veel stof in betrekkelijk korte tijd (weer) eigen maken zonder gedemotiveerd te raken doordat u ‘niet opschiet’ vanwege de vele tijdrovende opgaven zoals die, natuurlijk terecht, wel in alle schoolboeken voorkomen.

Omdat de grafische rekenmachine (GR) al sinds vele jaren onmisbaar is in de wiskunde (de tijd van de logaritmetafel en rekenliniaal is reeds lang voorbij...), wordt er ook in dit boek veelvuldig gebruik van gemaakt. Gekozen is, min of meer bij toeval, voor de TI-83 (vrijwel identiek aan de TI-84) van ‘Texas Instruments’. De nodige handelingen voor het gebruik ervan worden pas daar stap voor stap beschreven, waar dit noodzakelijk dan wel wenselijk is. De GR van ‘Casio’ is overigens even goed bruikbaar. Als naslagwerk is het boek duidelijk gerubriceerd via een zeer uitvoerige inhoudsopgave en trefwoordenregister, zodat de voor u interessante onderwerpen snel zijn op te zoeken. Daarnaast is de opbouw van het boek dusdanig, dat het met wat langere adem, zeker ook van voor naar achter kan worden doorgewerkt. Een enkele herhaling van een eerder behandeld onderdeel, kon daarbij voor de duidelijkheid niet worden voorkomen. Van de inmiddels verguisde verzamelingenleer van Georg Cantor, zult u behalve een enkel notatie weinig of niets terugvinden. Een overzicht van alle gebruikte symbolen en uitdrukkingen vindt u achterin. Voor op- en aanmerkingen houd ik me uiteraard van harte aanbevelen

Bij deze uitgave:

Deze nieuwe uitgave 'VWO wiskunde in herhaling 1950 tot nu' is een herziening en uitbreiding van de vorige editie: 'Wiskunde in kort bestek'. Theorie, opgaven en uitwerkingen zijn hier en daar aangepast, mede in verband met de vernieuwde A- en C programma's binnen het huidige VWO. Daar waar de theorie of bewijzen van stellingen of afleidingen van formules wat saai of triviaal overkwamen na het direct eraan voorafgaande, is een kleiner lettertype gebruikt, ten teken dat ze voor het begrip zelf van ondergeschikt belang zijn. Ik hoop dat ook deze uitgave aan uw verwachtingen zal mogen voldoen.

Wim Gronloh,
Bussum, zomer 2014

Inhoud

Voorwoord	III
Inhoudsopgave	IV–XIII
I. FUNCTIES, GRAFIEKEN, EN FUNCTIEVERGELIJKINGEN	1–38
1. Het begrip functie	1
2. Lineaire functies	2
3. Kwadratische functies	5
a. Vierkantsvergelijking	7
b. Ontbinden van kwadratische functies	7
4. Machtsfuncties	9
a. Grafieken	9
b. Functietransformaties	10
- Transformaties door translatie	11
- Transformaties door vermenigvuldiging	13
- Transformaties van wortelvormen	13
5. Exponentiële functies	15
6. Gebroken rationale functies	18
- Functietransformaties	20
7. Logaritmische functies	21
a. Logaritme van een getal	21
b. Eigenschappen van logaritmen	22
c. Inverse functies	22
8. Goniometrische functies	24
a. Definities	24
b. Herleidingformules	25
- sinus en cosinus van som en verschil	26
- verdubbeling- en halveringsformules	27
- formules van Simpson	27
c. Sinus- en cosinusregel	28
- sinusregel	28
- cosinusregel ('Uitgebreide stelling van Pythagoras')	29
9. Periodieke functies	
a. Sinusfunctie	30
b. Cosinusfunctie	32
c. Tangensfunctie	33
d. Sinusoïden	35

10. Limieten en continuïteit van functies	37
a. Eigenschappen van limieten	38
b. Rechter- en linkerlimiet	39
c. Existentie van limieten	39
II. OPLOSSEN VAN VERGELIJKINGEN EN ONGELIJKHEDEN	43–60
1. Gelijkheden en ongelijkheden	45
2. Oplossen van vergelijkingen	45
a. Lineaire stelsels	45
b. Tweedegraads vergelijkingen	47
- ontbinden in factoren	48
- kwadraatafsplitsing	49
- de <i>abc</i> -formule	49
c. Hogeregraads vergelijkingen	50
- de vergelijking $x^3 = 1$	51
- de vergelijking $x^3 = -1$	52
d. Exponentiële vergelijkingen	52
e. Logaritmische vergelijkingen	54
f. Goniometrische vergelijkingen	57
- $\sin A = p, \cos A = p$	57
- $\sin A = \sin B, \cos A = \cos B$	58
- $\sin A = \cos B, \cos A = \sin B$	59
III. AFGELEIDE FUNCTIES EN DIFFERENTIËREN	61–78
1. Groeisnelheid	61
2. Groeisnelheid, differentiaalquotiënt en afgeleide functie	62
3. Differentieerbaarheid en continuïteit	63
4. Kenmerken van een functie via de afgeleiden	64
a. Stijgen en dalen	64
b. Convexe en concave kromming	65
c. Extreme waarden	65
- voorwaarden voor een lokaal minimum of - maximum	66
d. Buigpunten	67
5. Regels bij het differentiëren	68
a. Somregel	68
b. Productregel	68
c. Quotiëntregel	69
d. Factorregel	69
6. Afgeleiden van elementaire functies	70
a. Machtsfuncties	70
b. Goniometrische functies	71
- afgeleide van sinus x , afgeleide van cosinus x	72
- afgeleide van tangens x	72

VI

c. e -machten	73
- de kettingregel	73
d. Exponentiële functies	74
e. Logaritmische functies	75
f. Samengestelde functies	75
7. Praktische toepassingen van afgeleide functies	76
IV. PRIMITIEVE FUNCTIES EN INTEGREREN	79–96
1. Oppervlakte en integraal	79
2. Integreren en stamprimitieven	81
a. Integreren	81
b. Stamprimitieven	82
c. Rekenregels voor het integreren	83
3. Primitiveren van functies	86
a. Bepaalde- en onbepaalde integralen	86
b. Substitutiemethode	86
c. Partiële integratie	87
4. Meetkunde met integralen	88
a. Lengte van een kromme	88
b. Oppervlakte tussen twee krommen	89
c. Inhoud van een omwentelingslichaam	89
- inhoud van een cilinder	90
- inhoud van een kegel	90
- inhoud van een bol	90
- inhoud van een ellipsoïde	91
d. Oppervlakte van een omwentelingslichaam	94
- oppervlakte van een bol	95
- oppervlakte van een paraboloid	95
- oppervlakte van een ellipsoïde	96
V. COMBINATORIEK EN KANSREKENING	97–114
1. Driehoek van Pascal	97
- binomium van Newton	99
- routes in een rooster	100
2. Kansexperimenten	101
a. Somregel	101
b. Productregel	102
c. Complementregel	102
3. Permutaties, variaties en combinaties	103
a. Permutaties	103

b. Variaties	103
c. Combinaties	104
4. Onderscheid bij kansproblemen	105
a. Trekkingen zonder terugleggen	105
b. Trekkingen met terugleggen	107
c. Binomiale kansverdelingen	107
5. Verwachtingswaarden	110
6. Gemengde kansen	111
VI. STATISTIEK EN KANSREKENING	115 – 140
1. Centrummaten	115
a. Gemiddelde	115
b. Modus	115
c. Mediaan	115
d. Kwartielsafstand, spreiding en boxplot	115
2. Klassenindelingen	116
a. Klassenmidden	116
b. Modale klasse	117
3. Frequentiepolygonen	117
a. Cumulatieve frequenties	117
b. Relatieve cumulatieve frequenties	118
4. Beelddiagrammen	119
- geclusterd staafdiagram	119
- histogram	121
- reepdiagram	122
5. Spreidingsmaten	123
a. Standaardafwijking	124
- standaardafwijking van een serie waarnemingen	124
- betekenis van de standaardafwijking	124
- standaardafwijking van een frequentieverdeling	125
- standaardafwijking van een kansverdeling	127
b. Spreidingsmaten van binomiale kansverdelingen	128
- verwachtingswaarde	128
- variantie en standaardafwijking	129
- de 'Wortel n wet'	133
6. Normale verdelingen	134
a. Eigenschappen van normaalkrommen	135
b. Standaardnormaalkrommen	135

c. Standaardiseren	137
--------------------	-----

VII . PLANIMETRIE EN TRIGONOMETRIE	141–176
------------------------------------	---------

1. Driehoeken	141
a. Zwaartelijnen	142
b. Bissectrices	144
c. Hoogtelijnen	145
d. Middelloodlijnen	145
2. Vierhoeken	146
- koordenvierhoek	147
3. Regelmatige veelhoeken	147
a. De ‘Guldensnede’ en het getal phi	148
b. Regelmatige tienhoek	149
c. Regelmatige vijfhoek	150
d. Het pentagram	151
e. Rij van Fibonacci	151
4. De cirkel	152
a. Hoeken in een cirkel	152
- middelpuntshoek	152
- omtrekshoek	153
- binnenhoek van een cirkel	154
- buitenhoek van een cirkel	154
b. Cirkels in, om, en aan een driehoek	155
- omgeschreven cirkel	155
- ingeschreven cirkel	156
- aangeschreven cirkels	156
c. Omtrek van de cirkel	158
- Getal van Archimedes en pi	159
d. Oppervlakte van de cirkel	161
e. Meetkundige problemen	161
5. Kegelsneden	164
a. Cirkel	165
b. Ellips	165
c. Parabool	166
d. Hyperbool	168
6. Transformaties	169
a. Coördinatentransformaties	170
- algemene vergelijking van de cirkel	170
- de hyperbool $x.y = 1$	170
b. Vermenigvuldiging van figuren	171
- vermenigvuldiging ten opzichte van een punt	171

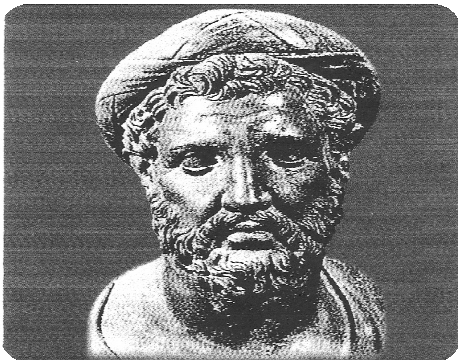
- vermenigvuldiging ten opzichte van een lijn	172
- oppervlakte en omtrek van een ellips	173
c. Poolcoördinaten	174
- Spiraal van Archimedes	175
- Cardioïde	176
VIII. STEREOMETRIE	177–192
1. Meetkundige lichamen	177
a. Prisma	177
b. Piramide	177
c. Cilinder	177
d. Kegel	178
e. Bol	178
2. Oppervlakte en inhoud van lichamen	178
a. Oppervlakte van prisma en piramide	178
b. Inhoud van een prisma	178
c. Inhoud van een piramide	179
d. Inhoud en oppervlakte van een kegel	180
- oppervlakte van een afgeknotte kegel	181
e. Inhoud en oppervlakte van een bol	182
3. Oppervlakte en inhoud van boldelen	182
a. Bolsegment	183
b. Bolschijf	183
c. Bolsector	185
4. Veelvlakken	186
a. Regelmatige veelvlakken	187
b. Halfregelmatige veelvlakken	189
- mogelijke configuraties	189
- verzameling van de halfregelmatige veelvlakken	191
- benadering van de bolvorm	192
IX. VECTORALGEBRA	193–216
1. Het begrip vector	193
2. Basisbewerkingen van vectoren	194
a. Meetkundige som en verschil van twee vectoren	194
b. Meetkundig scalair product	194
3. Vectorcoördinaten en kentallen	195
4. Algebraïsche bewerkingen van vectoren	196
a. De lengte van een vector	197
b. Algebraïsche som van twee vectoren	197
c. Algebraïsch scalair product	198

5. Inwendig product van twee vectoren	199
6. Toepassingen op driehoek, viervlak en lijnstukken	201
7. Vectorvoorstellingen en vergelijkingen	203
a. Vectorvoorstelling van een punt	203
b. Vectorvoorstelling van een lijn	203
c. Normaalvergelijking van een lijn	204
d. Vectorvoorstelling van een vlak	206
e. Normaalvergelijkingen van een vlak	206
8. Vectorproducten	208
a. Uitwendig product van twee vectoren	208
- coördinaten van het uitproduct	211
- uitproduct en determinant	212
b. Blokproduct	213
X. ANALYTISCHE MEETKUNDE MET VECTOREN	217–226
1. Afstanden in vectorruimten	217
a. Afstand van een punt tot een lijn	217
b. Afstand tussen twee evenwijdige lijnen	218
c. Afstand tussen twee elkaar kruisende lijnen	218
d. Afstand van een punt tot een vlak	219
2. Hoeken tussen lijnen en vlakken	220
a. Hoek tussen twee lijnen	220
b. Hoek tussen een lijn en een vlak	221
c. Hoek tussen twee vlakken	221
- snijlijn van twee vlakken	223
3. Vraagstukken	224
XI. GRAFEN EN MATRICES	227–242
1. Werken met grafen en matrices	227
a. Voorstellingen van een graaf	227
b. Gelijkwaardige grafen	227
c. Graaf en matrix	228
d. Het ‘handelsreizigersprobleem’	229
2. Maximale en minimale verbondenheid van een graaf	230
3. Bewerkingen met matrices	
a. Som en verschil van twee matrices	231
b. Scalair product van een matrix en een reëel getal	232
c. Product van twee matrices	232
4. Overgangsmatrices	236
a. Toepassingen bij diverse problemen	236

b. Groei van populaties	238
c. Markowketens	239
d. Stabilisatie	240
5. Populatievoorspellingsmatrices	242
a. Voorbeelden van de betekenis	242
- - leeftijdsopbouw en totale populatie	243
b. Exponentiële groei	244
- bijzondere populatiegroei	244
c. Bevolkingsgroei in China	245
XII. RIJEN EN REEKSEN	249-264
1. Getallenrijen en reeksen	249
2. Bijzondere rijen	250
a. Rekenkundige rij	250
b. Meetkundige rij	250
c. Rij van Fibonacci	251
3. Convergentie en divergentie van rijen	254
4. Reeksen	255
a. Voorbeelden van reeksen	255
b. Convergentie en divergentie van reeksen	255
- Quotiëntencriterium van d' Alembert	256
- Regel van Leibniz	249
5. Bijzondere reeksen	257
a. Rekenkundige reeks	258
b. Meetkundige reeks	258
c. Harmonische reeks	259
d. Alternerende reeksen	260
6. Machtreeksen	260
a. Kenmerken van machtreeksen	261
b. Convergentie van machtreeksen	262
- meetkundige reeks	262
- alternerende machtreeks	263
7. Machtreeksontwikkelingen	264
a. MacLaurinreeksen	264
- de functie $f(x) = e^x$	265
- $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$	266
- $f(x) = \tan^{-1}(x)$	267
b. Taylorreeksen	268
- ontwikkeling van $f(x) = \ln x$	268

8. Resttermen	269
- Formule van Lagrange	269
9. Getal van Euler en het getal pi	270
a. Het getal e van Euler	270
- waarde van e	270
- definitieformule van e	271
b. Het getal pi	272
XIII. DYNAMISCHE MODELLEN	273-287
1. Voorbeelden	273
2. Differentiaalvergelijkingen	275
a. Lijnelementenvelden	275
b. Methode van Euler	278
c. Praktische dynamische modellen	279
XIV. SPECIALE ONDERWERPEN	288-332
A. Perspectief	288-305
1. Beelden via een glasplaat	288
2. Perspectiefbeelden van objecten	289
a. Perspectiefbeeld van een lijn	289
b. Perspectiefbeeld van evenwijdige lijnen	290
c. Beeld van lijnen evenwijdig met het tafereel	291
d. Beeld van een punt in het grondvlak	291
e. Beeld van een tegelpatroon	292
3. Ware gedaante van het perspectiefbeeld	294
- ware beeld van tegelvloeren	294
4. Eenpuntperspectief	294
a. Kubus en vierkante balk	295
b. Tegelpaden van vierkante tegels	299
5. Tweepuntperspectief	300
B. Exacte logica	306-323
1. Conjunctie, disjunctie, implicatie	306
2. Waarheidstabellen	307
a. Tabellen van \wedge , \vee en \Rightarrow	307
b. De ontkenning niet A ($\neg A$)	308
c. Equivalenties	309
- ‘ De Prinses en de tijger ’	311

3. Bijzondere proposities	313
a. Bewerkingsvolgorden	313
b. Modus ponens, modus tollens, (modus nonsens)	313
c. Tautologie, contradictie en paradox	315
4. Logische puzzels	316
a. 'De vier tegels'	316
b. 'De drie petjes'	317
c. 'De vijf slavinnen van de kalief'	318
d. 'De zeven bordjes'	319
5. Algebra van Boole	320
a. Eigenschappen van de logische operatoren	320
- Commutatieve eigenschap	320
- Associatieve eigenschap	321
- Distributieve eigenschap	321
b. Algemene eigenschappen	322
C. Kegelsneden in projectie	324-330
1. Projectieve meetkunde	324
2. De ellips	325
- Ware gedaante van de doorsnede	326
3. De parabool	327
- Ware gedaante van de doorsnede	328
4. De hyperbool	328
a. Gelijkzijdige hyperbool	328
b. Ongelijkzijdige hyperbool	330
D. De Lorentz-factor	331-332
Gebruikte symbolen en uitdrukkingen	333-334
Trefwoordenregister	335-339



Pythagoras, geboren op Samos (eiland in de Egeïsche Zee) circa 572 jaar v. Chr. Richtte omstreeks 530 in Croton de school van de Pythagoreeërs op. Zij bewezen de beroemdste stelling uit de klassieke wiskunde: In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de schuine zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de twee rechthoekszijden.

De Babyloniërs kenden de eigenschap al ca. 1000 jr. v. Chr. De Egyptische 'harpedonaptai' (touwspanners) gebruikten de stelling ca. 3000 jr. v. Chr. om rechte hoeken uit te zetten via knopentouwen (knopen op afstanden 3-4-5; 5-12-13; 8-15-17,...)

I. FUNCTIES, GRAFIEKEN, EN FUNCTIEVERGELIJKINGEN

Als je rustig wandelend per uur 4 km aflegt dan is de afgelegde afstand in $2\frac{1}{2}$ uur dus 10 km. De lengte van de afgelegde weg *bij die snelheid* is afhankelijk van de *tijd* ofwel: de afstand is een **functie** van de tijd. Zo bestaan er talrijke grootheden die afhankelijk zijn van *één of meer* andere grootheden waarbij het verband tussen die grootheden in een functie is vastgelegd door een zeker **functievoorschrift**.

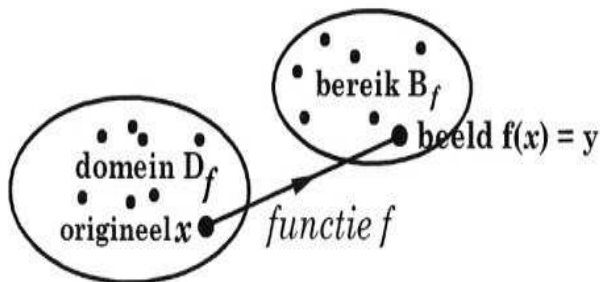
In het voorbeeld hierboven wordt de afgelegde weg op zeker tijdstip t gegeven door de functie: $\text{afstand} = \text{snelheid} \times \text{tijd}$.

1. Het begrip functie

Is bijvoorbeeld een functie f gegeven door het functievoorschrift:

‘vermenigvuldigd met drie’ dan is $f(3) = 9$, $f(-7) = -21$ en $f(a) = 3a$.

De functie wordt dan geschreven als: $f(x) = 3 \cdot x$ of korter $y = 3x$



De getallen 3, -7, a heten de **originelen** van de functie $f(x) = 3x$ de getallen 9, -21, $3a$ zijn dan de bijbehorende **beelden** daarvan.

De verzameling van de *originelen* D_f heet het **domein** van de functie de

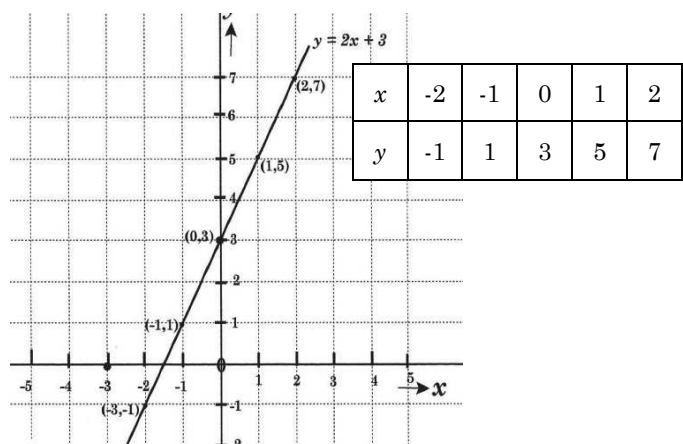
verzameling *beelden* heet het **bereik** B_f .

Als *geen domein of bereik expliciet is aangegeven*, wordt er van uitgegaan dat *alle originelen* (uit het domein) en *alle beelden* (uit het bereik) elementen mogen zijn van de verzameling van de reële getallen \mathbb{R} .

Een functie van x is in het algemeen een zeker voorschrift f , (g, h, i, \dots) dat bij elke veranderlijke x uit het domein D_f , precies één element $f(x) = y$ uit het bereik B_f bepaalt

Vaak worden origineel x en beeld y van een functie getekend als punten $P(x,y)$ van een grafiek in een rechthoekig coördinatenstelsel: het *origineel x* op de x -as, het beeld $y = f(x)$ op de y -as. In bijgaande figuur is de tabel en de grafiek getekend van de (lineaire) functie: $f(x) = y = 2 \cdot x + 3$

In het algemeen kan met men met ‘de functie $f(x)$ ’ zowel de *grafiek van $f(x)$* als de *functie $f(x)$ zelf* bedoelen.



2. Lineaire functies

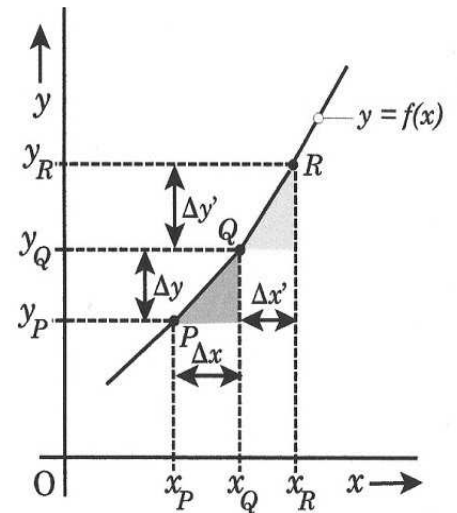
Voor elk tweetal punten P en Q op de grafiek van een *lineaire functie* geldt dat de verhouding tussen een zekere toename $\Delta x = x_Q - x_P$ van x en de *bijbehorende* toename $\Delta y = y_Q - y_P$ van y steeds een **vaste waarde** heeft.

De betekenis hiervan is als volgt: Stel P en Q zijn twee willekeurige naburige punten op de grafiek waarbij $P = (x_P, y_P)$ en $Q = (x_Q, y_Q)$.

De verhouding $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is bepalend voor de *hoek* die het *lijnstukje* PQ maakt met de *positieve* x -as, dus voor de *richting* van *lijnstukje* PQ .

Stel $R(x_R, y_R)$ is een *ander* naburig punt van Q op de grafiek met $x_R = x_Q + \Delta x'$ en $y_R = y_Q + \Delta y'$, dan wordt de *richting* van QR bepaald door de verhouding $\frac{\Delta y'}{\Delta x'}$.

Omdat nu *per definitie* de verhouding $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bij een lineaire functie een vaste waarde heeft, geldt dan: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ dus zijn de *richtingen* van de *lijnstukjes* PQ en QR *gelijk*, ofwel: **P, Q en R liggen op een rechte lijn.**



Daar P, Q en R willekeurig gekozen zijn, geldt dit voor alle punten van de grafiek. De grafiek van een **lineaire** functie is dus een **rechte lijn**. (dit verklaart de naam *lineaire functie*). De *constante verhouding* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ($\Delta x \neq 0$) is bepalend voor de *richting* van *lijn* l en noemt men daarom de **richtingscoëfficiënt** a van l .

De *vergelijking* van *lijn* l , dus de betrekking tussen de waarden x en y *waaraan alle punten* $P(x, y)$ van *lijn* l *voldoen* vind je nu als volgt:

Voor de *lijn* l tussen twee willekeurige punten $P(x_P, y_P)$ en $Q(x_Q, y_Q)$ geldt volgens voorgaande dat de *richtingscoëfficiënt* $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$..(1)

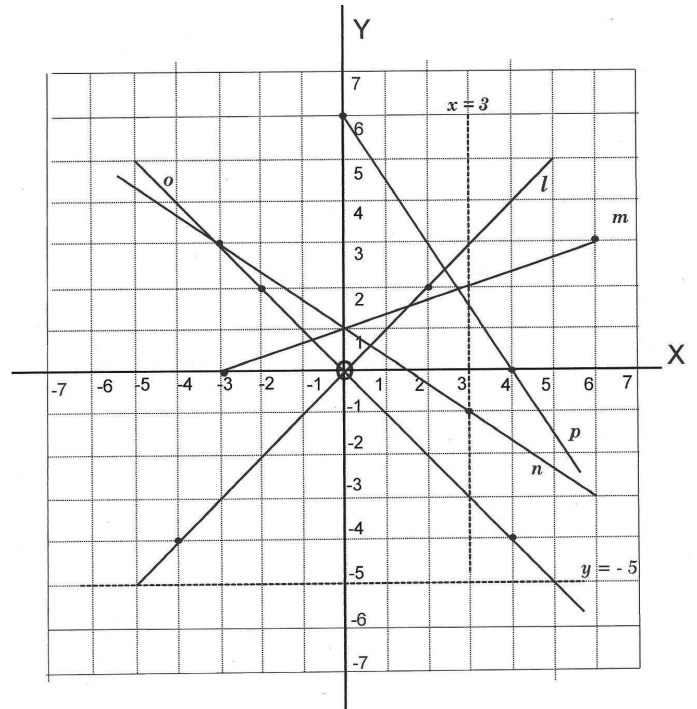
Kies hierin voor P het punt $P(x_P, y_P) = (0, b)$ (op de y -as), en voor $Q(x_Q, y_Q)$ een willekeurig punt $Q(x, y)$, dan geldt volgens (1): $a = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{y - b}{x - 0} = \frac{y - b}{x}$

$\Rightarrow ax = y - b$ ofwel $y = ax + b$ is de *vergelijking* van l .

De grafiek van een lineaire functie is een rechte lijn l met vergelijking $y = ax + b$ waarin a de richtingscoëfficiënt is van l en b de y -coördinaat is van het snijpunt van l met de y -as.

Toepassingen:

1. In de gegeven figuur zijn de rechte lijnen l , m , n , o en p getekend in een orthonormaal coördinatenstelsel XOY . (Een orthonormaal stelsel bestaat uit twee onderling loodrechte coördinaatassen: de X -as de Y -as met de oorsprong O als hun snijpunt. De eenheden op de assen hebben daarbij de standaardlengte 1).



- Bepaal van elke lijn de vergelijking
- Bepaal ook de vergelijking van de X -as en de Y -as.
- Hoe lopen de lijnen $x = 3$ en $y = -5$?

a. De grafiek van een lineaire functie is een rechte lijn l met vergelijking $y = ax + b$, waarin a de richtingscoëfficiënt is van l

en b de y -coördinaat van het snijpunt van l met de y -as. Op elke lijn zijn steeds twee roosterpunten (punten op het snijpunt van twee roosterlijnen) met een stip aangegeven waarmee de richtingscoëfficiënt $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ is te bepalen.

- Zo is dan van lijn l :

$$a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{-4 - 2}{-4 - 2} = 1 \text{ en } b = 0, \text{ dus de vergelijking is } l : y = 1 \cdot x + 0 \Rightarrow y = x.$$

- Voor m geldt: $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{0 - 3}{-3 - 6} = \frac{1}{3}$

en $b = 1$, dus wordt de vergelijking :

$$m : y = \frac{1}{3}x + 1$$

- Voor n geldt :

$$a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{-3 - (-1)}{6 - 0} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ en } b = 1 \text{ dus is de vergelijking is } n : y = \frac{2}{3}x + 1$$

- Voor o geldt:

$$a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{2 - (-4)}{-2 - 4} = \frac{6}{-6} = -1 \text{ en } b = 0, \text{ dus de vergelijking is: } o : y = -x$$

- Voor p geldt

$$a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{6 - 0}{0 - 4} = -\frac{3}{2} \text{ en } b = 6, \text{ dus de vergelijking is: } p : y = -\frac{3}{2}x + 6$$

- b. Voor alle punten op de x -as geldt: $y = 0$, dus ongeacht de waarde van x . De vergelijking van de x -as dan: $y = 0$

- c. Alle punten (x, y) van de lijn met vergelijking $x = 3$, zijn van de vorm $(3, y)$. Het is dan de **verticale lijn** (evenwijdig met de y -as) **door het punt $(3, 0)$**

- Zo is $y = -5$ de **horizontale lijn** (evenwijdig met de x -as) **door het punt (0, - 5)**

2. - a. Bepaal de vergelijking van de lijn l door de punten (3, 4) en (-4, -2)

- b. Bepaal het snijpunt van de lijnen $p: y = 2x - 3$ en $q: y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

a. In $y = ax + b$ volgt de richtingscoëfficiënt uit $a =$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 4}{-4 - 3} = \frac{-6}{-7} = \frac{6}{7}$$

De lijn heeft dan als vergelijking: $l: y = \frac{6}{7}x + b$.

Hierin de coördinaten van A (of B) = (3,4)

ingevuld geeft $4 = \frac{6}{7} \cdot 3 + b \Rightarrow b = \frac{10}{7}$, zodat de

vergelijking is: $l: y = \frac{6}{7}x + \frac{10}{7}$ *)

b. Het snijpunt $S(x_s, y_s)$ van de lijnen p en q ligt

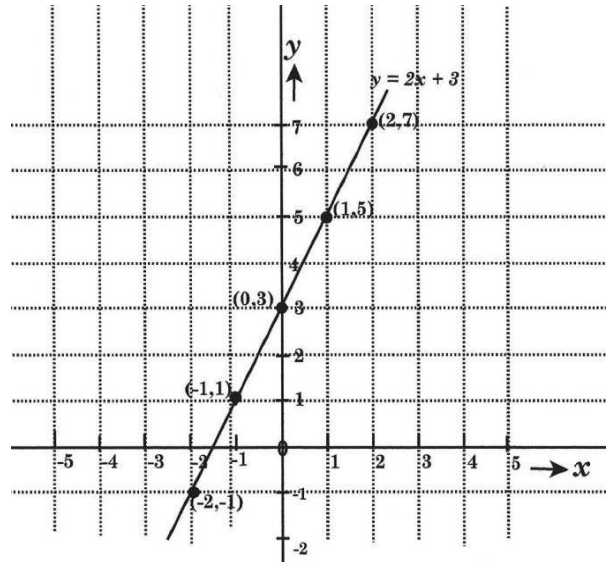
zowel op p als op q , dus voldoen de coördinaten x_s en y_s aan beide vergelijkingen: $y_s = 2x_s - 3$ en

$$y_s = -\frac{1}{2}x_s + \frac{9}{2}$$

Uit $y_s = 2x_s - 3 = -\frac{1}{2}x_s + \frac{9}{2}$ volgt dan $2\frac{1}{2}x_s = 7$

$\frac{1}{2} \Rightarrow x_s = 3$, met gevolg:

$y_s = 2x_s - 3 \Rightarrow y_s = 3$. Snijpunt is dus het punt **S (3,3)**

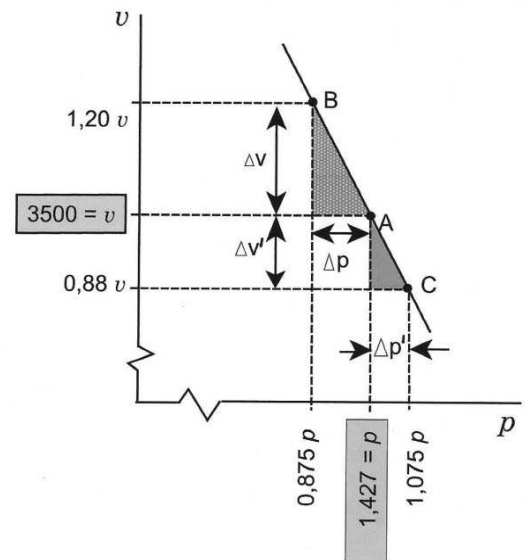


3. Bij een 'witte pomp' in Vreemdemuiden verkoopt men gemiddeld per dag 3500 liter 'Euro-95' benzine als hun literprijs €1,427 bedraagt. (punt A in de grafiek). Verlaagt men de prijs met 12,5% dan stijgt de verkoop met 20% (punt C).

Verhoogt men de prijs met 7,5% dan daalt de verkoop met 12%. (punt C).

a. Toon aan dat de punten A, B en C op een rechte lijn liggen en geef de betekenis hiervan.

b. Bereken de gemiddelde verkoop per dag bij een literprijs van € 1,500 als het verband tussen literprijs en gemiddelde verkoop op *het hele traject AC* lineair blijft.



*) Met de grafische rekenmachine TI-83 gaat dit als volgt: Voer de *lijsten* in {3, - 4} [STO] L1 en {4, - 2} [STO] L2. Druk op [STAT] [CALC] en kies optie 4 [ENTER]: **LinReg (ax + b)** [ENTER]

De waarden van a en b worden direct getoond **LinReg $y = ax + b$: $a = .85714\dots = \frac{6}{7}$; $b = 1.42857\dots = \frac{10}{7}$**

a. De richtingscoëfficiënt van AB is:

$$\frac{\Delta v}{\Delta p} = \frac{v - 1,20 v}{p - 0,875 p} = \frac{-0,20 v}{0,125 p} = -1,6 \frac{v}{p}$$

De richtingscoëfficiënt van CA is $\frac{\Delta v'}{\Delta p'} = \frac{0,88v - v}{1,075p - p} = \frac{-0,12v}{0,075 p} = -1,6 \frac{v}{p}$

De richtingen van AC en BA zijn dus gelijk \Rightarrow
 A, B en C liggen op een rechte lijn.

Dit betekent dat de *afname van de verkoop* bij de *prijsstijging* in punt C evenredig is met de *toename van de verkoop* bij de *prijzdaling* in punt B .

b. De literprijs van € 1,500 ligt tussen die van A ($= 1,427$) en C ($= 1,075 \times 1,427 = 1,534$), dus deze ligt op het lijnstuk AC .

De relatie tussen verkoopprijs p en verkoop v blijft dus volgens het gegeven lineair.

Volgens a. is de richtingscoëfficiënt van $BC = -1,6 \frac{v}{p}$ zodat

$$a = -1,6 \cdot \frac{3500}{1,427} \approx -3924.$$

De algemene vergelijking van de lineaire betrekking tussen p en v is $v = a \cdot p + b$

dus met $a \approx -3924$ is dan $v = -3924 p + b$

Vullen we hierin de coördinaten in van A ($1,427; 3500$) dan vinden we:

$$3500 = -3924 \cdot 1,427 + b \Rightarrow b \approx 9100$$

De vergelijking van BC is dan : $v = -3924 p + 9100$

dus bij een literprijs met $p = € 1,500$ is dan de gemiddelde verkoop v per dag:

$$v = -3924 \cdot 1,500 + 9100 \approx \mathbf{3214 l.}$$

3. Kwadratische functies

Een kwadratische, ofwel tweedegraadsfunctie, is een functie $f(x)$ van de vorm
 $f(x) = ax^2 + bx + c$ waarin a, b en c reële getallen zijn en $a \neq 0$

Voor onderzoek naar de eigenschappen van tweedegraads- functies, herleiden we de algemene vorm door middel van **kwadraatafsplitsing**:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + a \cdot \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) \\ f(x) &= a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \text{ ofwel:} \end{aligned}$$

'Uit het schoolboek':

$$\begin{aligned} (a+b)(c+d) &= (a+b) \times (c+d) \\ &= a \cdot d + a \cdot c + b \cdot d + b \cdot c \\ (a+b)(a+b) &= (a+b) \times (a+b) \\ &= a \cdot b + a \cdot a + b \cdot a + b \cdot b \\ &= \mathbf{a^2 + 2 a \cdot b + b^2} \end{aligned}$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} \quad \text{als } D = b^2 - 4ac \quad \dots(1)$$

Kies $x = -\frac{b}{2a}$ in $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$ dan is

$$f(x) = a\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} = a \cdot (0) - \frac{D}{4a}, \text{ ofwel } y = -\frac{D}{4a} \text{ dus is het punt}$$

$(x, y) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$ een punt van elke functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Noem dit punt (x, y) verder $T(x_T, y_T)$, dus $T(x_T, y_T) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$

1. We tonen nu aan dat $T(x_T, y_T) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$ een uiterste waarde ('*extreem*') is van $f(x)$ en wel een *maximum* of een *minimum waarde*.

In (1) vonden we dat $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$ zodat voor elke punt (x, y) van $f(x)$ geldt:

$$y - y_T = \left\{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}\right\} - y_T = \left\{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}\right\} - \frac{-D}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Als hierin $a > 0$ dan is $a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, omdat ook $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ zodat $y - y_T \geq 0$ ofwel: $y \geq y_T$. Elke andere functiewaarde dan y_T is dus groter dan y_T , met gevolg:

$$T = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right) \text{ is een } \mathbf{minimum} \text{ van } y = ax^2 + bx + c \text{ als } \mathbf{a > 0} \quad \dots(2)$$

Op dezelfde manier blijkt zo uit (1) dat als $a < 0$ steeds geldt $y - y_T \leq 0$ ofwel

$$T = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right) \text{ is een } \mathbf{maximum} \text{ van } y = ax^2 + bx + c \text{ als } \mathbf{a < 0} \quad \dots(3)$$

2. De lijn $x = -\frac{b}{2a}$ door T is een *symmetrieas* van $f(x)$,

want: Voor een punt P op een afstand δ links van de lijn

$x = -\frac{b}{2a}$ geldt $x_p = -\frac{b}{2a} - \delta$ en voor een punt Q op

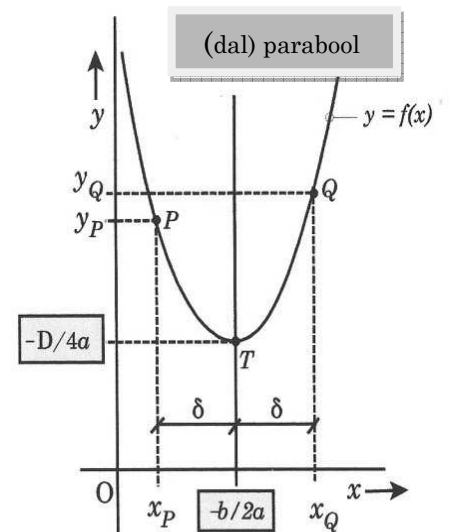
eenzelfde afstand rechts van deze lijn is $x_q = -\frac{b}{2a} + \delta$.

Volgens (1) is $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$, dus

$$\text{- als } x = x_p = -\frac{b}{2a} - \delta \text{ dan is } y_p = a\left(-\frac{b}{2a} - \delta + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} = a\delta^2 - \frac{D}{4a}$$

$$\text{- als } x = x_q = -\frac{b}{2a} + \delta \text{ dan is } y_q = a\left(-\frac{b}{2a} + \delta + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} = a\delta^2 - \frac{D}{4a} \text{ dus is } y_p = y_q, \text{ de punten } P \text{ en } Q \text{ liggen}$$

symmetrisch t.o.v. de lijn $x = -\frac{b}{2a}$



De vorm van de kromme heet **parabool**, de symmetrieas heet de **as** van de parabool het maximum of minimum T van $f(x)$ de **top** van de parabool. Als $a > 0$ dan is de top T een *minimum* ('dalparabool'), als $a < 0$ dan is T een *maximum* ('bergparabool')

De grafiek van $y = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$ is een parabool met verticale as $x = \frac{-b}{2a}$ en een punt $T = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$ als top, waarin $D = b^2 - 4ac$.
Als $a > 0$ dan is T een minimum ('dalparabool'),
als $a < 0$ dan is T een maximum ('bergparabool')

a. Vierkantsvergelijking

Snijpunten van de x -as (met vergelijking $y = 0$) en de parabool $y = ax^2 + bx + c$ noemt men **nulpunten** van $f(x)$. Die punten (als ze bestaan) moeten dan voldoen aan $y = ax^2 + bx + c$ en aan $y = 0$ dus aan de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$.

Men heeft hiertoe de zogenaamde '**abc-formule**' afgeleid:

Uit $y = ax^2 + bx + c = 0$ volgt $y = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} = 0$ ofwel

$$a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} \text{ dus } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Nulpunten ('wortels') van $f(x) = ax^2 + bx + c$ zijn oplossingen x_1, x_2 van de vergelijking $y = ax^2 + bx + c = 0$ met $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ en $D = b^2 - 4ac$

De waarde van D is hierin bepalend voor het *aantal oplossingen*: het aantal *wortels* van $ax^2 + bx + c = 0$. Men noemt daarom D de **discriminant** van deze vergelijking:

1. Als $D < 0$ dan bestaat \sqrt{D} niet dus zijn er *geen reële oplossingen*.

De parabool snijdt de x -as niet. Er zijn *geen nulpunten*.

2. Als $D = 0$ dan is er *slechts één* wortel $x = -\frac{b}{2a}$.

De parabool heeft *twee samenvallende* punten gemeen met de x -as.

Top T met $x_T = -\frac{b}{2a}$ is dan een *raakpunt* aan de x -as.

3. Als $D > 0$ dan heeft de vergelijking *twee wortels*: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ en $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

De parabool snijdt de x -as in twee verschillende punten, ofwel $f(x)$ heeft *twee verschillende nulpunten*.

b. Ontbinden van kwadratische functies

De functie $f(x) = x^2 + bx + c$ met nulpunten $x = x_1$ en $x = x_2$ is te schrijven als $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

De nulpunten x_1, x_2 van de vierkantsvergelijking $y = ax^2 + bx + c$ met $a = 1$ zijn volgens de *abc-formule*: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2}$ en $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2}$ met $D = b^2 - 4c$ ($a = 1$)

$$\begin{aligned} \text{dus } (x - x_1) \cdot (x - x_2) &= \left\{ x - \left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2} \right) \right\} \cdot \left\{ x - \left(\frac{-b - \sqrt{D}}{2} \right) \right\} \\ &= \left(\frac{2x + b - \sqrt{D}}{2} \right) \cdot \left(\frac{2x + b + \sqrt{D}}{2} \right) = \frac{4x^2 + 2bx - 2x\sqrt{D} + 2bx + b^2 - b\sqrt{D} + 2x\sqrt{D} + b\sqrt{D} - D}{4} \\ &= \frac{4x^2 + 4bx + b^2 - D}{4} = \frac{4x^2 + 4bx + b^2 - (b^2 - 4c)}{4} \quad (\text{omdat } D = b^2 - 4ac \text{ en } a = 1) = \\ &= \frac{4x^2 + 4bx + 4c}{4} = x^2 + bx + c, \text{ dus } (x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 + bx + c \end{aligned}$$

Hiermee is de som $x^2 + bx + c$ **ontbonden in twee factoren** x_1 en x_2 waarin x_1, x_2 dus de *nulpunten* (*wortels*) van $f(x)$ voorstellen.

Omgekeerd zijn met deze eigenschap $x^2 + bx + c = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ de wortels van $f(x) = x^2 + bx + c$ soms eenvoudig te berekenen.

Immers uit: $x^2 + bx + c = (x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$ volgt dat $b = -(x_1 + x_2)$ en $c = x_1 \cdot x_2$

De wortels x_1 en x_2 van $x^2 + bx + c$ bepalen we dan als volgt: Neem als voorbeeld de vergelijking $x^2 - 11x + 28 = 0$ dan is dus

$$b = -(x_1 + x_2) = -11 \text{ en } c = x_1 \cdot x_2 = 28 \text{ waaruit volgt: } x_1 = 4 \text{ en } x_2 = 7$$

De oplossingen van de vergelijking $x^2 - 11x + 28 = 0$ zijn dus $x = 4$ en $x = 7$.

1. Bereken zo ook de nulpunten van $f(x) = x^2 - x - 12$

Stel $x^2 - x - 12 = (x + p) \cdot (x + q) = 0$ dan is $p + q = -1$ en $p \cdot q = -12$.

Hieraan voldoen $p = -4$ en $q = 3$ dus $x^2 - x - 12 = (x - 4) \cdot (x + 3) = 0 \Rightarrow x - 4 = 0 \vee x + 3 = 0$. *)

De nulpunten zijn $x_1 = 4$ en $x_2 = -3$: ($4^2 - 4 - 12 = 0$ en $(-3)^2 - (-3) - 12 = 0$)

De parabool snijdt de x -as in de twee punten $(4, 0)$ en $(-3, 0)$.

2. Los op $x^2 + 2x - 143 = 0$

Stel $x^2 + 2x - 143 = (x + p) \cdot (x + q)$ dan is $p + q = 2$ en $p \cdot q = -143$, dus

$$p = -11 \text{ en } q = 13. \text{ Gevolg: } x^2 + 2x - 143 = (x - 11)(x + 13) = 0 \Rightarrow x_1 = 11, x_2 = -13$$

3. Van de grafiek van een parabool $f(x) = ax^2 + bx + c$ is de top $T = (2, -3)$

De lijn l met vergelijking $y = -4x + 1$ is een raaklijn aan de parabool.

Bepaal de vergelijking van $f(x)$.

De coördinaten top T van de parabool voldoen aan $x_T = \frac{-b}{2a}$ en $y_T = \frac{-D}{4a}$ dus geldt hier

$$x_T = \frac{-b}{2a} = 2 \text{ zodat } b = -4a \quad \dots(1)$$

*) Volgens de "Wet van het nulelement" geldt algemeen: Als $a \times b = 0$ dan $a = 0$ of $b = 0$ en omgekeerd.

$$y_T = \frac{-D}{4a} = -3 \text{ dus } \frac{-(b^2-4ac)}{4a} = -3 \Rightarrow b^2 - 4ac = 12a \quad \dots(2)$$

De snijpunten van f en de lijn l met $y = -4x + 1$ volgen uit $ax^2 + bx + c = -4x + 1$ ofwel uit $ax^2 + (b + 4)x + (c - 1) = 0$

Omdat $l: y = -4x + 1$ raaklijn is aan de parabool is er slechts één snijpunt van de parabool met l dus moet de discriminant van $ax^2 + (b + 4)x + (c - 1) = 0$ nul zijn.

$$\text{Gevolg: } D = (b + 4)^2 - 4a(c - 1) = 0 \text{ ofwel } b^2 + 8b + 16 - 4ac + 4a = 0 \quad \dots(3)$$

Substitueer $b^2 - 4ac = 12a$ uit (2) in (3) dan vind je $12a + 8b + 16 + 4a = 0$

Met $b = -4a$ volgens (1) is dan: $12a + -32a + 16 + 4a = 0 \Rightarrow -16a = -16$ zodat

$a = 1$ en $b = -4$. Deze waarden in (2) geven: $b^2 - 4ac = 12a \Rightarrow 16 - 4c = 12 \Rightarrow c = 1$ zodat $f(x) = y = ax^2 + bx + c = x^2 - 4x + 1$ de gevraagde parabool voorstelt.

4. Machtsfuncties

De functie $y = f(x) = x^a$ is een machtsfunctie van x , waarin de **exponent a** een constante is en het **grondtal x** de variabele.

Bij samengestelde machtsfuncties als $f(x) = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$, ook n^{de} graads **polynomen** genoemd, maken we gebruik van de *definitieformule van een positieve gehele macht* van a :

$$a^1 = a, \quad a^2 = a \cdot a; \quad a^3 = a \cdot a \cdot a; \quad a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a, \text{ dus algemeen: } a^p = \overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{p \text{ keer}}$$

Hieruit volgen direct de regels: $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$, $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ en $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

Voor elke $a \in \mathbb{R}$ geldt $\frac{a^p}{a^p} = 1$ en ook $\frac{a^p}{a^p} = a^{p-p} = a^0$ dus $a^0 = 1$

Gevolg: $\frac{1}{a^p} = \frac{a^0}{a^p} = a^{0-p} = a^{-p}$ en $\sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}$ omdat $(a^{\frac{1}{p}})^p = a^{\frac{1}{p} \cdot p} = a^1 = a$.

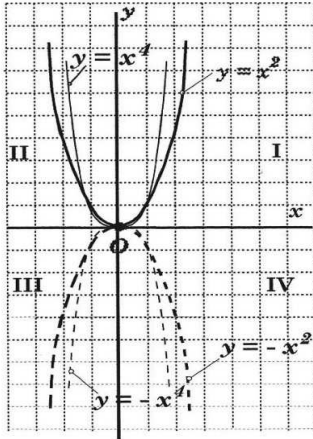
$$\begin{array}{llll} a^p \cdot a^q = a^{p+q} & (a^p)^q = a^{p \cdot q} & a^{-p} = \frac{1}{a^p} & a^0 = 1 \\ \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} & (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p & \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}} & \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \end{array}$$

Zo is bijvoorbeeld: $3^7 \cdot 3a^{-9} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$; $5^{-2\frac{1}{2}} = \frac{1}{5^{2\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5^5}}$; $7^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{7^3}$

Machtsfuncties waarin x hoogstens tot de macht n voorkomen, heten n^{de} graads machtsfuncties (*-polynomen*). Zo is $f(x) = ax + b$ een machtsfunctie van de eerste graad. Functies van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ zijn machtsfuncties van de tweede graad, et cetera.

a. Grafieken van machtsfuncties

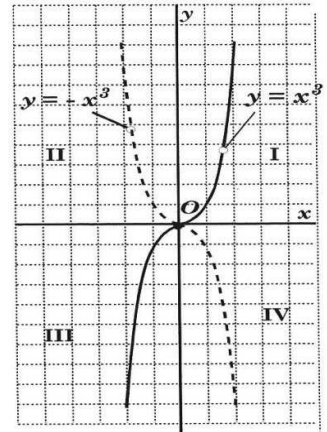
We tekenen nu de grafieken van enkele *machtsfuncties* $f(x) = y = x^p$ in de vier kwadranten. I, II, III en IV



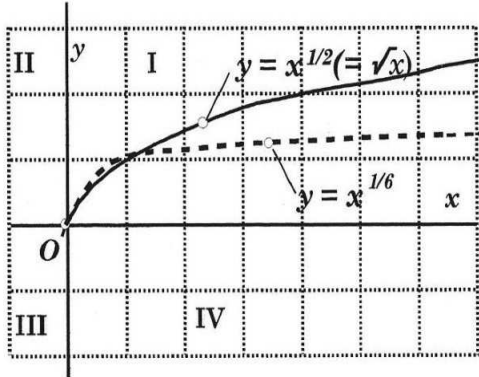
1. Als **p een positief, even getal $\neq 0$** is, dus $p = 2, 4, 6, \dots$, dan zijn alle y -waarden van $y = x^p$ positief en ligt de grafiek geheel in I en II. In de vorm herkennen we de *dalparaboloïde*. Bij eenzelfde waarde van p is $y = -x^p$ het spiegelbeeld van $y = x^p$ in de x -as en zien we daarin een *bergparaboloïde*.

2. Is **p een positief, oneven, geheel getal $\neq 1$** , dus $p = 3, 5, 7$, dan bestaan er in tegenstelling tot de *even* machten van x (x^2, x^4, x^6, \dots die steeds ≥ 0 zijn), ook

negatieve y waarden. Bijvoorbeeld $(-3)^3 = -27$. Hierdoor heeft $y = x^p$ bij *oneven* p dan ook waarden in het *eerste- en derde kwadrant*. Daar hierbij $(-x)^p = -(x^p)$ is de vorm van het deel van de grafiek in III, een *spiegeling in de oorsprong* van de halve paraboloïde uit I. De grafiek van $y = -x^p$ ontstaat dan weer uit die van $y = x^p$ door spiegeling in de x -as.



3. Is p een positieve breuk, waarvan de **teller oneven is en de noemer even**, zoals



$y = x^{\frac{1}{2}}$ en $x^{\frac{1}{6}}$ dan bestaan *geen reële* y waarden bij *negatieve* x . Zo is $y = x^{\frac{1}{2}}$ bij $x = -1$ gelijk aan $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ en $y = (-x)^{\frac{1}{6}}$ bij $x = -1$ gelijk aan $(-1)^{\frac{1}{6}} = ((-1)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ dus beide bestaan niet in \mathbb{R} . Alle waarden van $y = x^p$ liggen dan *in I*

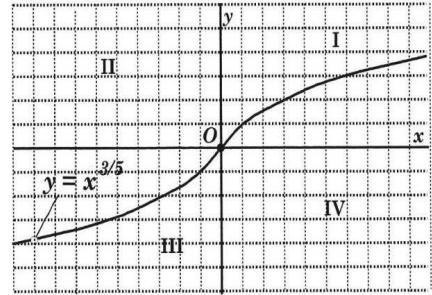
4. Als p een positieve breuk is met **teller en noemer oneven** dan bestaan er ook reële y waarden bij *negatieve* x , die dan ook zelf negatief zijn, en dus in III liggen. Zo is hier de y waarde van $x = -4$ in

$y = x^{\frac{3}{5}} : y = (-4)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-4)^3} = \sqrt[5]{-64} \approx -2,297$. De grafiek van $y = x^{\frac{3}{5}}$ ligt nu in I en III. *)

*) Met de GR TI-83 zijn alle grafieken ter controle te 'plotten'. VB: Druk op **Y1 =** en voer in **X^(3/5)** **ENTER** Typ zo ook **Y2 = X^(3/7)** **ENTER**. Druk **WINDOW** en kies **Xmin = -5, Xmax = 5, Ymin = -5, Ymax = 5**. Kies: **Xscl en Yscl = 1 (Xres = 1)**. Druk op **GRAPH** en de grafieken uit 4 worden getekend.

b. Transformaties van machtsfuncties

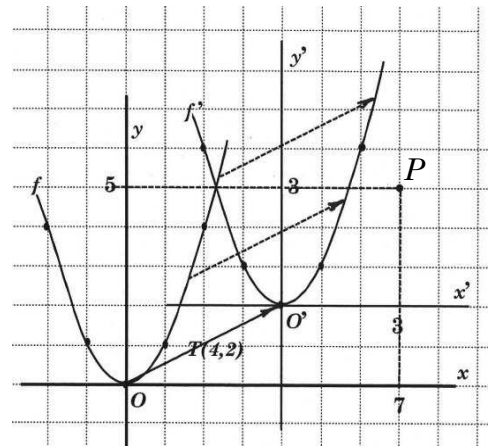
Onder *standaard-* machtsfuncties verstaan we machtsfuncties van de tweede graad, de derde graad en meer algemeen machtsfuncties van de graad n zoals dus $y = \pm x^2$, $y = \pm x^3$, $y = \pm x^n$ met $n = 4, 5, 6, \dots$ en ook $y = \sqrt{x} = (x^{1/2})$.



Uit de grafieken van deze standaardvormen kunnen via transformaties eenvoudig de formules en grafieken voor meer complexe machtsfuncties worden afgeleid.

- Transformaties door translatie

In deze figuur is in een xOy stelsel de grafiek getekend van de standaardfunctie $f: y = x^2$. Via een *evenwijdige verschuiving* van alle punten over +4 eenheden in de x -richting (naar rechts) en + 2 eenheden in de y richting (omhoog) is elk punt van de parabool $f: y = x^2$ **afgebeeld op een met f congruente grafiek f'** .*)



Zo'n een *evenwijdige verschuiving* van alle punten in de x richting en in de y richting wordt aangegeven als de **translatie (4, 2)** ofwel **$T(4,2)$** .

Passen we *dezelfde translatie ook toe op de coördinaatassen X en Y* dan ontstaat als beeld het coördinatenstelsel $x'O'y'$. Vergelijk nu de *vorm en positie van het origineel $f: y = x^2$ in het xOy stelsel met vorm en positie van het beeld f' in het $x'O'y'$ stelsel*, dan zie je dat **ten opzichte van de verschoven coördinaatassen x' en y'** de vergelijking van de nieuwe functie f' zal zijn **$f': y' = (x')^2$** ... (1)

Voor een willekeurig punt P geldt : $P(x,y) = (7, 5)$ ten opzichte van het (originele) xOy stelsel en $P(x',y') = (3, 3)$ ten opzichte van het (vershoven) $x'O'y'$ stelsel.

Hieruit blijkt dat voor de coördinaten voor elk punt P geldt: $x' = x - 4$ en $y' = y - 2$ en dit ingevuld in (1) geeft: $f': y' = (x')^2 \Rightarrow y - 2 = (x - 4)^2$ dus:

De functie f' *voldoet dus na de translatie $T(a,b) = T(4,2)$ aan de vergelijking $y = (x - 4)^2 + 2$* . Algemeen geldt dan:

Bij de translatie $T(a, b)$ gaat de functie $f: y = x^2$ over in $y = (x - a)^2 + b$

Elke functie $f: y = x^2 + px + q$ is te schrijven in de vorm $y = (x - a)^2 + b$, want:

$$x^2 + px + q = (x^2 + px + \frac{1}{4}p^2) + q - \frac{1}{4}p^2 = (x + \frac{1}{2}p)^2 + (q - \frac{1}{4}p^2) \text{ dus met } a = -\frac{1}{2}p \text{ en } b = q - \frac{1}{4}p^2 \Rightarrow y = (x - a)^2 + b$$

*) Figuur A is congruent met figuur B ($A \cong B$) als A en B identiek zijn, dus dezelfde vorm en afmeting hebben.

Dit betekent dat (de grafiek van) elke tweedegraadsfunctie van de vorm $y = x^2 + px + q$ is te beschouwen als *een translatie* over $T(a,b)$ van de standaardgrafiek $y = x^2$. Alle grafieken hiervan zijn dus congruent met de standaardvorm de functie $f: y = x^2$ en hebben dezelfde vorm.

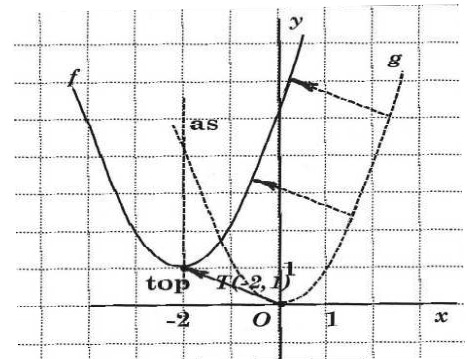
Toepassingen:

- Schets de grafiek van de functie $f: y = (x + 2)^2 + 1$

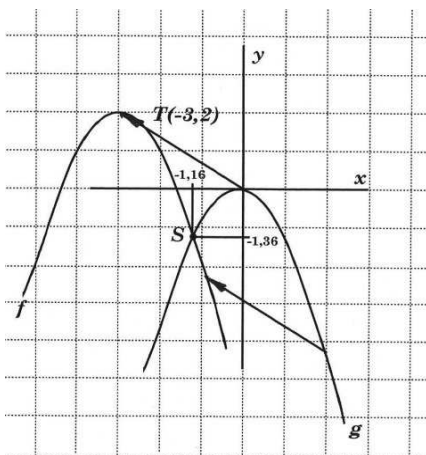
Volgens voorgaande gaat bij een translatie $T(a, b)$ de grafiek van $y = x^2$ over in $y = (x - a)^2 + b$.

In $f: y = (x + 2)^2 + 1$ is dan $a = -2$ en $b = 1$ dus ontstaat de functie $f: y = (x + 2)^2 + 1$ uit een **translatie** van de standaardfunctie **over $T(-2, 1)$**

In bijgaande figuur is de grafiek van f getekend. De top is het punt $(-2, 1)$, de as is de lijn $x = -2$.



- Schets de grafiek van de functie $f: y = -x^2 - 6x - 7$ en bepaal het snijpunt van f en de parabool $g: y = -x^2$



Door kwadraatplitsing herleiden we de gegeven functie

$$f: y = -x^2 - 6x - 7 \text{ tot: } f: y = -x^2 - 6x - 7 = (-x^2 - 6x - 9) + 2 = -(x + 3)^2 + 2$$

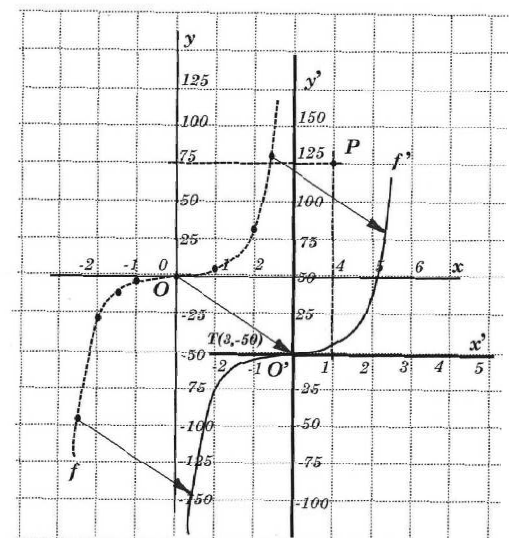
Volgens regel (1) is dit de grafiek van de functie die ontstaat uit de standaardfunctie $g: y = -x^2$ door de **translatie $T(-3, 2)$**

De **top** van f (bergparabool) is dan het punt $(-3, 2)$ **de as is de lijn met $x = -3$.**

Het **snijpunt $S(x, y)$** van de grafieken f en g volgt uit: $y = -x^2 - 6x - 7 = y = -x^2 \Rightarrow -6x - 7 = 0 \Rightarrow$

$$x = -\frac{7}{6} \approx -1,16 \text{ en } y = -x^2 = -\left(-\frac{7}{6}\right)^2 \approx -1,36$$

Omdat bij *elke translatie* $T(a, b)$ het *beeld congruent is met het origineel*, geldt de eerder afgeleide transformatieregel (1) voor tweedegraadsfuncties (parabolen) ook algemeen voor machtsfuncties van de n^{de} graad ($n = 3, 4, \dots$) We tonen dit als volgt aan: In de figuur is in een xOy stelsel de grafiek getekend van de standaardfunctie $f: y = x^5$. Via de **translatie $T(3, -50)$** , dus een *evenwijdige verschuiving* van alle punten over 3 eenheden in de positieve x richting (naar rechts) en 50 eenheden in de negatieve y richting. (omlaag), is elk punt van de functie $f: y = x^5$ *afgebeeld op de congruente grafiek f'* .



Ten opzichte van het verschoven coördinaten-stelsel $x'O'y'$. is de vergelijking van de nieuwe functie $f': y' = (x')^5$ zoals direct is in te zien door f' binnen de nieuwe assen x' en y' terug te schuiven, waarbij O' weer samenvalt met de originele oorsprong O . Beschouw nu het willekeurig gekozen punt P in het getekende rooster dan kan dit worden aangegeven met de coördinaten $x = 4$ en $y = 75$ ten opzichte van het originele XOY -stelsel. Ten opzichte van het nieuwe stelsel $X'O'Y'$ zijn de coördinaten van P : $x' = 1$ en $y' = 125$ met gevolg: $x' = x - 3$ en $y' = y + 50$.

Deze waarden voor x' en y' gesubstitueerd in de functievergelijking $f': y' = (x')^5$ geeft dan tenslotte: $y + 50 = (x - 3)^2 \Rightarrow y = (x - 3)^2 - 50$

Noemen we de translatie $T = (3, -50)$ in het algemeen $T(a, b)$ dan is hiermee weer aangetoond:

Bij een translatie $T(a, b)$ gaat de functie $f: y = x^n$ over in $f': y = (x - a)^n + b$

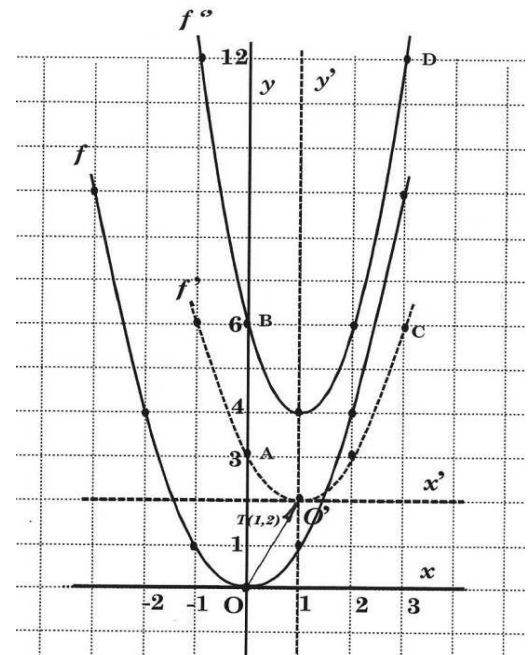
- **Transformaties door vermenigvuldiging**

De grafiek van bijvoorbeeld de functie $f: y = 2x^2 - 4x + 6$ heeft niet de standaardvorm van $y = x^2$ zoals wel alle grafieken van de functies $y = (1)x^2 + ax + b$.

We schrijven de vorm

$$f: y = 2x^2 - 4x + 6 \text{ als } y = 2(x^2 - 2x + 3) \\ = 2\{(x^2 - 2x + 1) + 2\} = 2\{(x - 1)^2 + 2\}$$

In deze vorm is de grafiek van de gegeven functie $f: y = 2x^2 - 4x + 6$ eenvoudig te tekenen, door - eerst de translatie $T(1,2)$ uit te voeren op de standaardgrafiek $f: y = x^2$ zodat het beeld ontstaat van de grafiek $f' = (x - 1)^2 + 2$ en - daarna dit beeld ten opzichte van de x -as te vermenigvuldigen met $+2$ zodat de gevraagde grafiek ontstaat van $f'' : y = 2 \cdot \{(x - 1)^2 + 2\} = 2x^2 - 4x + 6$ *)



- **Transformaties van wortelvormen**

Ook de grafieken van wortelvormen (machtsfuncties met gebroken exponent) kunnen via translatie en/of vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as soms afgeleid worden van hun standaardvorm $y = \sqrt{x}$ volgens de bekende regels:

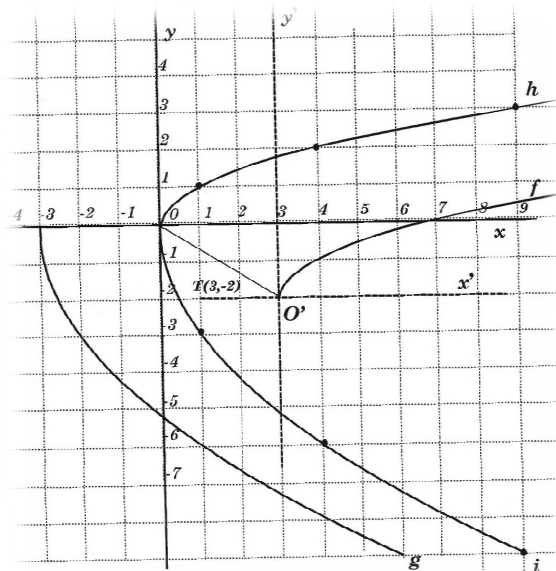
<i>standaardvorm</i>	\rightarrow	<i>transformatie</i>	\rightarrow	<i>beeldgrafiek</i>
$y = \sqrt{x}$		$T(a, b)$		$y = \sqrt{x - a} + b$
$y = \sqrt{x}$		$\times P(x-as, a)$		$y = a \cdot \sqrt{x}$

*) Het beeld van een punt $A(0,3)$ bij vermenigvuldiging t.o.v. de x -as met de factor 2 is het punt $B(0,6)$ waarbij geldt $|OB| = 2 \times |OA|$. Zo zijn ook de andere punten van f'' afgebeeld op f'

Voorbeeld:

- a. Schets de grafieken van de functies $f: y = \sqrt{x-3} - 2$ en $g: y = -3\sqrt{x+3}$ in één figuur.
 b. Geef de coördinaten van het beginpunt van elk.
 c. Geef domein en bereik aan van beide functies.

- a. Teken de standaardgrafiek $h: y = \sqrt{x}$.
 Deze heeft als startpunt het punt $(0,0)$ en gaat verder door de roosterpunten $(1,1)$, $(4,2)$, $(9,3)$,... Pas op h de translatie $T(3,-2)$ toe dan ontstaat volgens voorgaande regel de gevraagde grafiek $f: y = \sqrt{x-3} - 2$



Uitgaande van de standaardgrafiek $h: y = \sqrt{x}$ vermenigvuldigen we deze t.o.v. de x -as met de factor -3 , waaruit de grafiek $i: y = -3\sqrt{x}$ ontstaat.
 Pas hierop de translatie $T(0,-3)$ toe, dan vind je de grafiek van $g: y = -3\sqrt{x+3}$ zoals werd gevraagd.

- b. Uit de figuur is direct af te leiden dat het startpunt van $f: y = \sqrt{x-3} - 2$ het **beeldpunt $(3, -2)$** is van het origineel $(0,0)$ van $h: y = \sqrt{x}$ (bij de translatie $T(3, -2)$)
 Zo is ook het beeldpunt $(-3,0)$ het startpunt van $g: y = -3\sqrt{x+3}$.

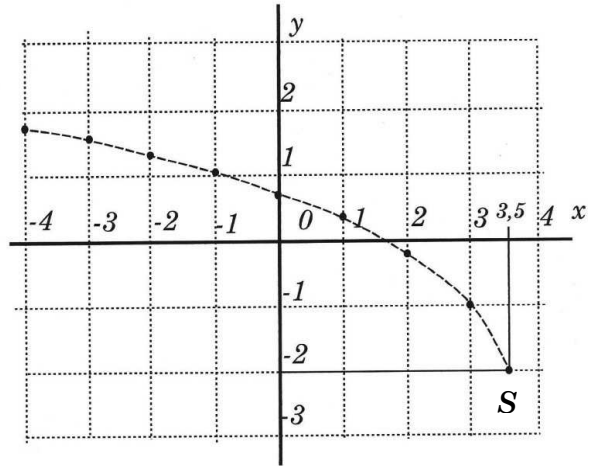
- c. De waarde van $f: y = \sqrt{x-3} - 2$ is alleen gedefinieerd als $\sqrt{x-3} \geq 0$, dus als $x \geq 3$
 Het domein van de functie f is dan $D_f = [3, \rightarrow)$
 Daar $\sqrt{x-3} \geq 0$ is $\sqrt{x-3} - 2 \geq -2 \Rightarrow$ **het bereik $B_f = [-2, \rightarrow)$**

De waarde van $g: y = -3\sqrt{x+3}$ is alleen gedefinieerd als $\sqrt{x+3} \geq 0$, dus als $x \geq -3$. Het domein van de functie g is dan $D_g = [-3, \rightarrow)$.
 Daar $\sqrt{x+3} \geq 0$ is $-3\sqrt{x+3} \leq 0 \Rightarrow$ **het bereik $B_g = \langle -, 0]$**

Meestal is het niet eenvoudig om via transformeren de grafiek van een wortelvorm te vinden uit die van de standaardvorm van $y = \sqrt{x}$.
 Zelfs plotten in de GR geeft nog problemen...
 Voorbeeld: Voer in de GR in $f: y = -2 + \sqrt{7-2x}$ en kies als 'WINDOW'
 $X_{min} = -4; X_{max} = 4; Y_{min} = -2; Y_{max} = 2$ (andere variabelen =1 laten)
 De tabel van de grafiek geeft vanaf $X = 4$ 'ERROR' omdat dan immers $\sqrt{7-2x}$ niet bestaat. Ook vindt de GR geen 'beginpunt' van de grafiek, omdat de 'trace-cursor' met een vaste stapgrootte werkt.

Zo'n beginpunt moet dan handmatig worden bepaald: $\sqrt{7-2x} \geq 0$, dus $2x \leq 7 \Rightarrow x \leq 3,5$, dus geldt voor het startpunt $x = 3,5$ waarbij dan $y = -2 + \sqrt{7-2x} = -2$

Beginpunt van f: $y = -2 + \sqrt{7-2x}$ is dus het punt **S (3,5; -2)**



Het domein van de functie is $\langle \leftarrow; 3,5 \right]$, het bereik is dus $[-2, \rightarrow)$
Verdere punten van de grafiek volgen uit onderstaande tabel:

x	3,5	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
y	-2,00	-1,00	-0,27	0,24	0,65	1,00	1,32	1,61	1,87

Bereken van de volgende functies het domein, bereik en de coördinaten van het beginpunt: $f(x) = 3 + \sqrt{8-4x}$, $g(x) = -2\sqrt{x+3}$ en $h(x) = 5 - \sqrt{2x+6}$

1. $f(x) = 3 + \sqrt{8-4x}$

Er moet gelden: $8-4x \geq 0$ dus $-4x \geq -8 \Rightarrow x \leq 2$.

Van het beginpunt is dan $x = 2$ dus $y = 3 \Rightarrow$ beginpunt is het punt **(2, 3)**

Domein $D_f = \langle \leftarrow, 2 \right]$, bereik $B_f = [3, \rightarrow)$

2. $g(x) = 3 + \sqrt{4x-8}$

Hier moet gelden: $4x-8 \geq 0$ dus $4x \geq 8 \Rightarrow x \geq 2$.

Van het beginpunt is dan $x = 2$ dus $y = 3 \Rightarrow$ beginpunt is het punt **(2, 3)**

Domein $D_f = [2, \rightarrow)$, bereik $B_f = [3, \rightarrow)$

3. $h(x) = 5 - \sqrt{2x+6}$

$2x+6 \geq 0$ dus $x \geq -3$ Van het beginpunt is dan $x = -3$ dus $y = 5 - \sqrt{2(-3)+6} = 5 \Rightarrow$ beginpunt is dus het punt **(-3, 5)**

Domein $D_f = [-3, \rightarrow)$, bereik $B_f = \langle \leftarrow, 5 \rangle$.

5. Exponentiële functies

Behalve de **machtsfunctie** $f(x) = x^a$ kennen we 'omgekeerd' ook de **exponentiële functie** $f(x) = a^x$:

Functies waarvan een **exponent** x de **variabele** is en een positief **grondtal** de **constante**, heten **exponentiële functies**. Algemene vergelijking: $f(x) = y = a^x$ ($a > 0$)

Voor $a \leq 0$ is de functie *niet gedefinieerd*. Immers als $a = 0$ dan is $a^x = 0$ voor elke x , dus is a^x *geen functie*. Als $a < 0$ dan *bestaat* a^x *niet voor alle waarden van* x

Zo zijn: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; $a^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{a})^3$; $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$; *ongedefinieerd* als a *negatief* is.

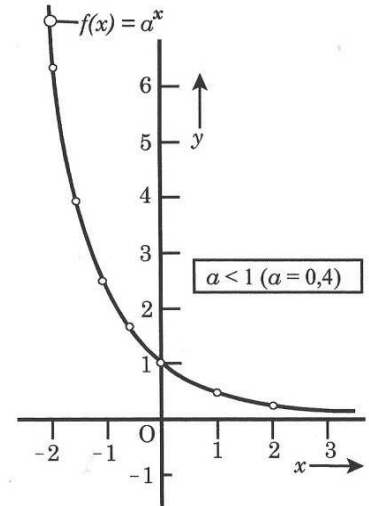
Als $a = 1$ dan is $y = a^x = 1$ omdat $1^x = 1$ voor elke reële x .

Onderzoeken we nu de *functie* $f(x) = a^x$ voor waarden van a , met $0 < a < 1$ en $a > 1$:
 Bij elke exponent x , is de waarde van a^x ($a > 0$) steeds positief zoals uit de definitie van machten volgt. Alle grafieken $y = f(x) = a^x$ liggen dus *boven de x-as*.
 Omdat $a^0 = 1$ voor iedere a gaan de grafieken dan *alle door het punt* $(0,1)$

1. $f(x) = a^x$ ($0 < a < 1$)

Voor $0 < a < 1$ is de functie **monotoon dalend**, dus bij *toenemende* x neemt y *af*. Immers als $f(x) = a^x$ dan is $f(x+1) = a^{x+1} = a \cdot a^x$ en daar $a < 1$ is $a \cdot a^x < a^x$ dus $a^{x+1} < a^x$ zodat $f(x) = a^x$ *monotoon daalt*.

Bij *onbepaald grote toename* van x , we zeggen:
als x tot oneindig nadert, notatie $x \rightarrow \infty$, dan nadert a^x onbepaald tot de waarde nul omdat $0 < a < 1$. Immers als $a^x = \delta$ waarin $\delta \rightarrow 0$ dan is $a^{x+1} = a \cdot a^x < \delta$ omdat $a < 1$.
 De waarde nul wordt nooit bereikt, want er bestaat geen x , hoe groot of klein ook, waarvoor $a^x = 0$.
 Dit betekent dat bij toenemende x de grafiek steeds dichterbij tot de *positieve x-as* nadert *zonder hem ooit te raken*:



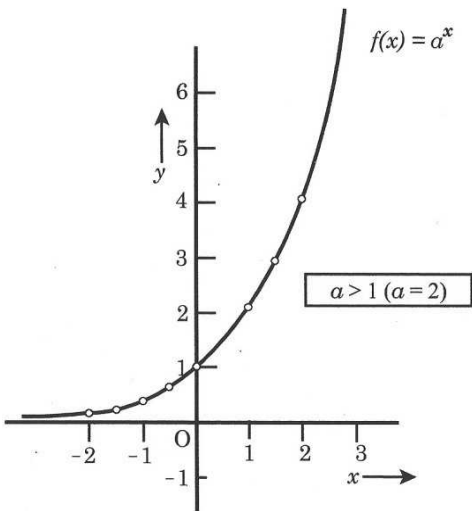
De x -as heet een (horizontale) **asymptoot** van de grafiek van $f(x) = a^x$. ($0 < a < 1$)

2. $f(x) = a^x$ ($a > 1$)

Als $a > 1$ dan is de functie **monotoon stijgend**, want: als $f(x) = a^x$ dan is $f(x+1) = a^{x+1} = a \cdot a^x$ en daar $a > 1$ is $a \cdot a^x > a^x$ dus $a^{x+1} > a^x$ zodat $f(x+1) > f(x) \Rightarrow a^x$ is *monotoon stijgend*.

Als $a^x = \delta$ waarbij $\delta \rightarrow 0$ dan is $a^{x-1} = \frac{a^x}{a} < a^x < \delta$ omdat $a > 1$. Bij onbepaald grote afname van x nadert a^x dan onbepaald tot nul.

Omdat er geen x bestaat met $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = 0$ is ook hier de x -as een *horizontale asymptoot*.



Exponentiële groei

In onderstaande tabel wordt de groei weergegeven van de bevolking van Latijns-Amerika in de vierjaarlijkse perioden tussen 1950 en 1970

jaar	1950	1954	1958	1962	1966	1970
aantal $\times 10^6$	164	183	203	227	254	282

Elke periode blijkt de bevolking met een *factor* van circa 1,11 toe te nemen, want

$$\frac{183}{164} \approx \frac{203}{183} \approx \frac{227}{203} \approx \frac{254}{227} \approx \frac{282}{254} \approx 1,11.$$

De factor 1,11 heet in zo'n geval de **groefactor**.

Werk je hiermee de onderste rij van de tabel uit, dan vind je:

$aantal \times 10^6$	164	183 $= 1,11 \times 164$	203 $= 1,11 \times 1,11 \times 164$	227 $= 1,11 \times 1,11 \times 1,11 \times 164$	254 $= 1,11 \times 1,11 \times 1,11 \times 1,11 \times 164$	282
	$1,11^0 \times 164$	$1,11^1 \times 164$	$1,11^2 \times 164$	$1,11^3 \times 164$	$1,11^4 \times 164$	$1,11^5 \times 164$

We zien dan dat bij de *groefactor* 1,11 na t perioden van 4 jaar (hier $t = 0, 1, 2, 3, 4$) de *beginwaarde* 164 (dus na $t = 0$ perioden) met een factor $1,11^t$ is toegenomen. Noemen we 164 de *startwaarde* $N(0)$ en 1,11 de *groefactor g per periode* dan is dus na t perioden: $N(t) = N(0) \cdot g^t$. $N(t)$ is dus een *exponentiële functie* van t .

Als bij een functie $N(t)$ de groefactor g in gelijke perioden constant is, dan is na t perioden: $N(t) = N(0) \cdot g^t$ ($N(0) = \text{startwaarde}$)

Voorbeelden

1. Als in voorgaande voorbeeld ook de *groei per jaar* constant zou zijn gebleven, hoe groot was dan de *procentuele bevolkingsgroei* per jaar?

Na 4 perioden van een jaar zou dan gelden $(g')^4 = 1,11$, dus $g' = 1,11^{\frac{1}{4}} \approx \mathbf{1,026}$
De procentuele bevolkingsgroei was dan **2,6 % per jaar**.

2. Een zekere hoeveelheid neemt *elk kwartier* met 12% toe. Bereken:

- a. de *groefactor* per kwartier
 - b. de *groefactor* en het *groeipercentage* per uur
 - c. Het *groeipercentage* per *vijf minuten*
- a. Na een kwartier is de hoeveelheid gegroeid tot $1,12 \times$ het startbedrag (= 1). De *groefactor per kwartier* is dan $1,12 : 1 = \mathbf{1,12}$.
 - b. De *groefactor per uur* is $1,12^4 = \mathbf{1,574}$; het *groeipercentage* is dan **57,4%**
 - c. De *groefactor* in vijf minuten (= 1/3 kwartier) is $1,12^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1,12} \approx 1,0385$ dus het *groeipercentage* per vijf minuten is dan $\approx \mathbf{3,85\%}$

3. Een bacteriecultuur groeit exponentieel.

Op $t = 4$ zijn er 50.000 bacteriën, op $t = 8$ zijn er 130.000 bacteriën als t de tijd is in uren. Bereken *groefactor* en *groeipercentage* per uur en de *groefactor* per dag.

De *groefactor* is in vier uur $\frac{130.000}{50.000} = 2,6$, dus *per uur* $(2,6)^{\frac{1}{4}} \approx \mathbf{1,269}$.

Het *groeipercentage* per uur is dan $\approx \mathbf{26,9\%}$

Per dag is dan de *groefactor* $1,269^{24} \approx \mathbf{304}$.

6.. Gebroken rationale functies

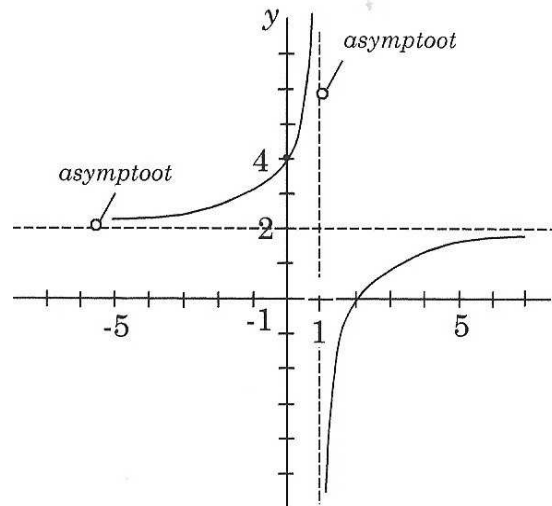
Gebroken rationale functies zijn functies van de vorm $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ waarin $g(x)$ en $h(x)$ machtsfuncties zijn met reële coëfficiënten.

De grafieken van deze functies kunnen veel verschillende vormen aannemen. We beperken ons hier tot twee voorbeelden:

1. $f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$

De functie is niet gedefinieerd in het punt met $x = 1$, omdat voor die waarde de noemer gelijk aan nul wordt en dus de bijbehorende functiewaarde onbepaald is. Verder volgt uit $x = 0 \Rightarrow y = 4$ en uit $y = 0 \Rightarrow x = 2$ zodat de grafiek de x -as snijdt in het punt $(2,0)$ en de y -as in $(0,4)$.

Plotten we de functie op de GR, dan blijkt de grafiek te bestaan uit twee krommen die we later zullen herkennen als twee takken van een hyperbool.



Ook zien we dat bij toenemende $|x|$ (dus naar rechts of naar links toenemend), beide takken van de parabool naderen tot de lijn en bij toenemende $|y|$ beide takken naderen tot de lijn

De functie heeft dus een horizontale asymptoot $y = 2$ en een verticale asymptoot $x = 1$. *) ('symptootos' = samenvallend).

In dit voorbeeld betekent dit:

a. Hoe dichter x tot de waarde 1 nadert (van links of van rechts), dus hoe dichter de noemer $x - 1$ tot nul nadert, hoe dichter de waarde $f(x)$ tot $\pm \infty$ nadert. De lijn $x = 1$ is verticale asymptoot van $f(x)$ de grafiek is discontinu in het punt met $x = 1$.

b. Schrijven we $y = \frac{2x-4}{x-1}$ als: $y = \frac{2-\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}}$ (teller en noemer door x gedeeld) dan zien

we dat bij oneindig grote x de waarde van y tot 2 zal naderen, omdat dan $\frac{4}{x}$ en $\frac{1}{x}$ tot nul naderen.

*) Na limieten en continuïteiten aan het einde van dit hoofdstuk, zal het begrip asymptoot nader gedefinieerd kunnen worden. Ook wordt in deze twee voorbeelden geen verschil gemaakt tussen 'echte' gebroken rationale functies (graad van $g(x)$ in de teller kleiner dan de graad van $h(x)$ in de noemer) en 'onechte' gebroken rationale functies (graad van $g(x) \geq$ die van $h(x)$).

$$2. f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$$

- Omdat de noemer van de breuk bij $x = -1$ de waarde nul aanneemt, is de functie voor dat punt niet gedefinieerd. We zien dan ook dat de grafiek van $f(x)$ in $x = -1$ onderbroken is: Men noemt dan in $x = -1$ de functie: **discontinu**.

- Het *snijpunt met de y-as* is het punt met $x = 0$

en $y = \frac{0,5(0-1)^2}{0+1} = 0,5$, dus het punt $(0; 0,5)$.

- Een *snijpunt met de x-as* is het punt met $y = 0$,

dus als $\frac{0,5(x-1)^2}{x+1} = 0$ ofwel: $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0$ met 2 samenvallende wortels $x = 1$
Punt $(1, 0)$ is dan *raakpunt* van $f(x)$ aan de x-as.

- De grafiek heeft een verticale asymptoot in het punt met $x = -1$. Bewijs::

Als x van links nadert tot -1 ($x < -1$), dan nadert

de noemer van $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$ tot $(-1 - \delta) + 1$

$= 0$ en daarmee de waarde van $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$ tot $-\infty$, dus $x = -1$ is een

(verticale) asymptoot van de linkertak van de hyperbool.

- Ook van de rechtertak is de lijn $x = 1$ een asymptoot want als x van rechts nadert

tot -1 dan nadert de noemer van $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$ tot $(-1 + \delta) + 1 = 0$ en dus de

waarde van $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$ tot $+\infty$ dus $x = -1$ is tevens asymptoot van de rechtertak van de hyperbool.

- Omdat een eventuele limiet van $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$ als x tot oneindig nadert niet direct is te bepalen herleiden we de functie: door een *staartdeling* uit te voeren:

$$\begin{array}{r} x + 1 \mid 0,5x^2 \quad -x + 0,5 \quad \backslash \quad 0,5x - 1,5 \\ \hline 0,5x^2 + 0,5x \\ \hline -1,5x + 0,5 \\ -1,5x - 1,5 \\ \hline 2 \end{array}$$

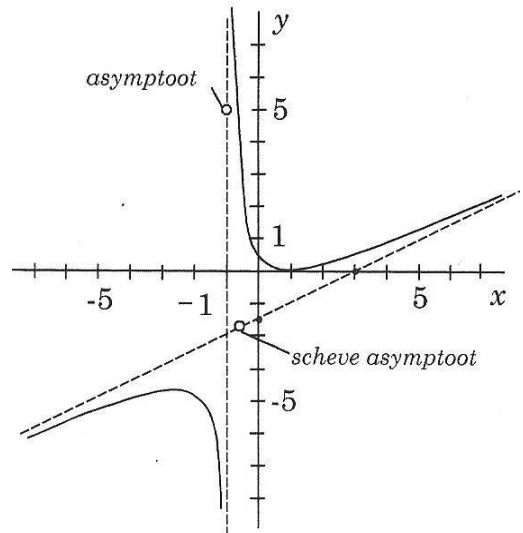
dus is de gegeven functie herleid tot:

$$y = 0,5x - 1,5 + \frac{2}{x+1}$$

De limiet hiervan als x tot oneindig nadert is dan

$$y = 0,5x - 1,5$$

De lijn met vergelijking $y = 0,5x - 1,5$ is dus een (*scheve*) *asymptoot* van de gegeven functie.



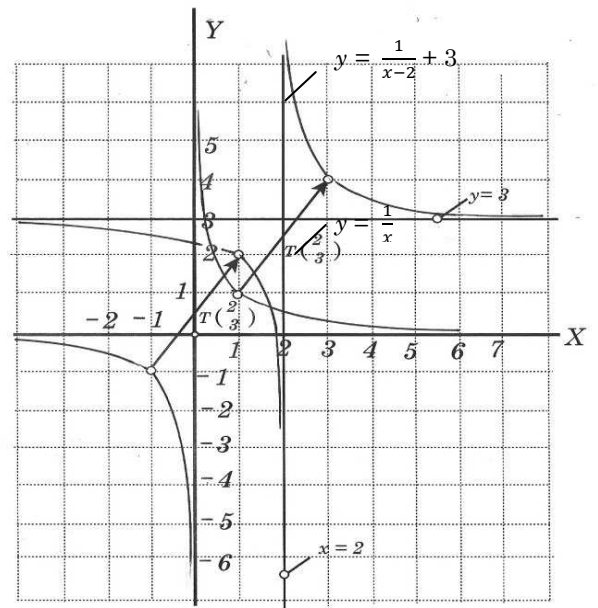
7. Transformaties van gebroken- en exponentiële functies

a. Gebroken rationale functies

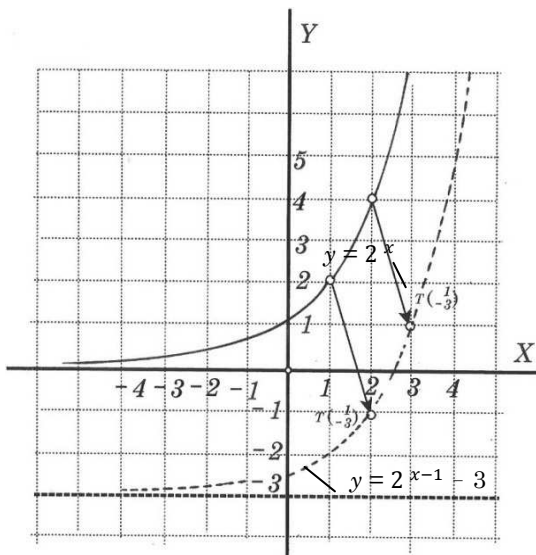
De grafiek van de gebroken functie $g: y = \frac{1}{x-2} + 3$ verkrijgen we volgens eerdere algemene regel (blz. 13) door de translatie $T(2,3)$ op de standaardhyperbool $f: y = \frac{1}{x}$ toe te passen.

De horizontale asymptoot van $f: y = \frac{1}{x}$ is de x -as met vergelijking $y = 0$, de verticale asymptoot is de y -as met vergelijking $x = 0$. Bij de translatie $T(2,3)$ gaan deze vergelijkingen respectievelijk over in $y = 0 + 3 = 3$ en in $x = 0 + 2 = 2$

De lijn $y = 3$ is dus *horizontale asymptoot*, $x = 2$ is de *verticale asymptoot* van $g: y = \frac{1}{x-2} + 3$,



b. Exponentiële functies



De grafiek van de exponentiële functie $g(x) = 2^{x-1} - 3$ ontstaat uit de standaardgrafiek $f: y = 2^x$ door hierop de translatie $T(1,-3)$ toe te passen.

Horizontale asymptoot van: $y = 2^x$ is de x -as, dus de lijn $y = 0$. Er is geen verticale asymptoot want $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x$ bestaat niet.

De *horizontale asymptoot* van $g(x) = 2^{x-1} - 3$ is dan $y = 0$.

Het domein van f is \mathbb{R} , dus is ook \mathbb{R} het *domein* van g ; het bereik van f is $\langle 0, \rightarrow \rangle$, dus $\langle -3, \rightarrow \rangle$ is het *bereik* van g .

Toepassing:

Gegeven is de functie: $f(x) = 2^{x+3} - 4$

a. Hoe ontstaat de grafiek van f uit de standaardgrafiek?

b. Bepaal het bereik van f

c. Los op $f(x) \leq 2$

a. $f(x) = 2^{x+3} - 4$ ontstaat uit de grafiek van $g(x) = 2^x$ via de translatie $T(-3,-4)$

b. Het bereik van $g(x) = 2^x$ is $\langle 0, \rightarrow \rangle$, dus van $f: y = 2^{x+3} - 4$ is het bereik: $\langle -4, \rightarrow \rangle$

c. Als $f(x) = 2$ dan $2^{x+3} - 4 = 2 \Rightarrow 2^{x+3} = 6$ zodat $(x+3) \cdot \log 2 = \log 6$

dus $x+3 = \frac{\log 6}{\log 2} = 2,58 \Rightarrow x = -0,42$.

Daar $g(x) = 2^x$ dalend is, is ook $f(x) = 2^{x+3} - 4$ dalend zodat $f(x) \leq 2$ als $x \leq -0,42$

9. Logaritmische functies

a. Logaritme van een getal

Exponentiële vergelijkingen als bij voorbeeld $17^x = 500$ kunnen we na voorgaande theorie nog niet wiskundig oplossen. Alleen door ‘proberen’ met een rekenmachine is een benadering mogelijk.

Men heeft daarom het begrip *logaritme van een getal* ingevoerd.

De Engelse wiskundige Henry Briggs (1561-1630) besloot alle *positieve getallen* als een **macht van tien** te schrijven. De *exponenten* van deze machten noemde hij **logaritmen**, dus de *logaritme van een getal a* is het getal *p* waarvoor $10^p = a$.

Definitie: **log a = p als $10^p = a$.**

Zo is bijvoorbeeld $100 = 10^2$ dus de *logaritme van 100* = 2. Notatie: $\log 100 = 2$.

$1000 = 10^3$ dus $\log 1000 = 3$; $1 = 10^0 \Rightarrow \log 1 = 0$; $0,001 = 10^{-3} \Rightarrow \log 0,001 = -3$

De *logaritme van getallen a met $a \leq 0$ bestaan niet* want er is geen getal *p* waarvoor $10^p = a$ als $a \leq 0$.

Briggs berekende de *logaritmen van alle viercijferige getallen* en verzamelde ze in ‘logaritmetafels’. Zo ontstonden de **Briggse logaritmen**, met 10 als *grondtal* *)

Niet alleen het getal tien kan als *grondtal* voor *logaritmen* dienen, maar in feite *elk positief reëel getal*.

Omdat bijvoorbeeld $9 = 3^2$ kan men met *als grondtal 3* zeggen: $\log 9 = 2$.

Om verwarring te voorkomen schrijft men dan ${}^3\log 9 = 2$.

Zo is ${}^5\log 125 = 3$ want $5^3 = 125$; ${}^{1/3}\log \frac{1}{27} = 3$, want $(1/3)^3 = \frac{1}{27}$, ..., maar:

Als $a \leq 0$ dan volgt uit ${}^a\log p = x$ dat $p = a^x$ en deze *exponentiële functie* met $a \leq 0$ is ongedefinieerd zoals al eerder werd aangetoond.

De *g* *logaritme van een getal a* is gedefinieerd door: ${}^g\log a = b$ als $g^b = a$ (a en $g > 0$)

De wiskundige John Napier voerde **e** het ‘**Getal van Euler**’ (1707-1783) in voor het *grondtal g* van de *logaritmen*. ($e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2,718281828\dots$)

Logaritmen met dit grondtal noemt men nu *Neperiaanse- of natuurlijke logaritmen* omdat de waarde ervan een grote rol speelt in veel natuurprocessen.

Notatie voor *logaritmen met grondtal e* is **ln x**, zodat dus $\ln x = {}^e\log x$.

*Log x is de Briggse-logaritme van x met 10 als grondtal dus $\log x = {}^{10}\log x$
ln x is de natuurlijke logaritme met grondtal e, dus $\ln x = {}^e\log x$
Als $\log x = p$ dan is $10^p = x$, als $\ln x = p$ dan is $e^p = x$*

*) Zo berekende Briggs handmatig de wortel uit 10 daarna de wortel uit de uitkomst, daaruit weer de wortel et cetera. Alles in zestien decimalen nauwkeurig! Omdat $\sqrt{10} = 10^{0,5} = 3,16227766\dots$, is $\log 3,16227766\dots = 0,5$; $\sqrt{3,16227766} = \sqrt{10^{0,5}} = 10^{0,25} = 1,77827941\dots$ dus $\log 1,77827941\dots = 0,25$ enz.. En dit was nog maar het begin...

b. Eigenschappen van logaritmen

Voor elk positief grondtal g en alle positieve waarden voor a en b gelden de regels

1. ${}_g \log ab = {}_g \log a + {}_g \log b$
2. ${}_g \log \frac{a}{b} = {}_g \log a - {}_g \log b$
3. ${}_g \log (a^n) = n \cdot {}_g \log a$
4. ${}_g \log (g^x) = x$ en $g {}_g \log x = x$

Bewijzen:

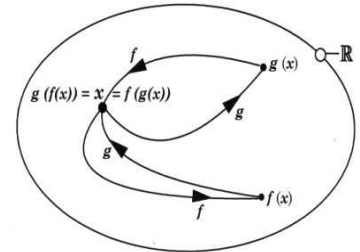
1. Noem ${}_g \log a = p$ en ${}_g \log b = q$ dan is $g^p = a$ en $g^q = b \Rightarrow ab = g^p \cdot g^q = g^{p+q}$, dus per definitie is dan ${}_g \log ab = p + q$ ofwel **${}_g \log ab = {}_g \log a + {}_g \log b$** *)
2. Noem ${}_g \log a = p$ en ${}_g \log b = q$ dan is $g^p = a$, $g^q = b$ dus $\frac{a}{b} = \frac{g^p}{g^q} = g^{p-q}$ zodat ${}_g \log \frac{a}{b} = p - q \Rightarrow$ **${}_g \log \frac{a}{b} = {}_g \log a - {}_g \log b$**
3. Als ${}_g \log a = p$ dan $g^p = a$ en $a^n = (g^p)^n = g^{n \cdot p} \Rightarrow {}_g \log (a^n) = n \cdot p = n \cdot {}_g \log a$ dus **${}_g \log (a^n) = n \cdot {}_g \log a$**
4. ${}_g \log (g^x) = x \cdot {}_g \log g$ (volgens 3) $= x \cdot 1 = x$ (want ${}_g \log g = 1$) \Rightarrow **${}_g \log (g^x) = x$**
 Noem ${}_g \log x = p$ dus $g^p = x$ zodat $g {}_g \log x = g^p = x \Rightarrow$ **$g {}_g \log x = x$**

c. Inverse functies

Beschouw twee functies f en g waarvan zowel *domein* als *bereik* de verzameling van de reële getallen is. Men noemt deze: functies in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Stel daarbij dat het f -beeld van elk origineel x , dus $f(x)$, door de functie g wordt afgebeeld op het origineel x , zodat dus $g(f(x)) = x$, kortweg **$g \cdot f(x) = x$**

Als nu omgekeerd ook het g -beeld van elk origineel x , dus $g(x)$, door de functie f wordt afgebeeld op het origineel x , dus als **$f(g(x)) = x$** ofwel **$f \cdot g(x) = x$** dan heten f en g elkaars *inverse functies*.



Zijn f en g twee functies in \mathbb{R} waarbij voor elk element x geldt dat $f \cdot g(x) = g \cdot f(x) = x$ dan heten f en g elkaars inverse functies

Zo kennen we bijvoorbeeld de *inverse rekenkundige bewerking* worteltrekken en machtsverheffen: Is $f(x) = x^a$ en $g(x) = \sqrt[a]{x}$ dan is **$f \cdot g(x) = f(\sqrt[a]{x}) = (\sqrt[a]{x})^a = (x^{\frac{1}{a}})^a = x$** en **$g \cdot f(x) = g(x^a) = \sqrt[a]{x^a} = (x^a)^{\frac{1}{a}} = x^1 = x$** , dus zijn machtsverheffen en worteltrekken elkaars inverse functies.

*) Op deze eigenschap berust de werking van een *rekenliniaal*, voorloper van de elektronische rekenmachine: Voorbeeld $\log 5237 = 3,719083$ en $\log 753 = 2,876795$ dus $5237 = 10^{3,719083}$ en $753 = 10^{2,876795}$. Gevolg: $5237 \times 753 = 10^{3,719083} \times 10^{2,876795} = 10^{3,719083 + 2,876795} = 10^{6,595878}$ dus $\log(5237 \times 753) = 6,595878 \Rightarrow 5237 \times 753 = \text{inverse log } 6,595878 = \mathbf{3943461}$. Hiermee is een *product* berekend via een *optelling* van logaritmen (= exponenten).