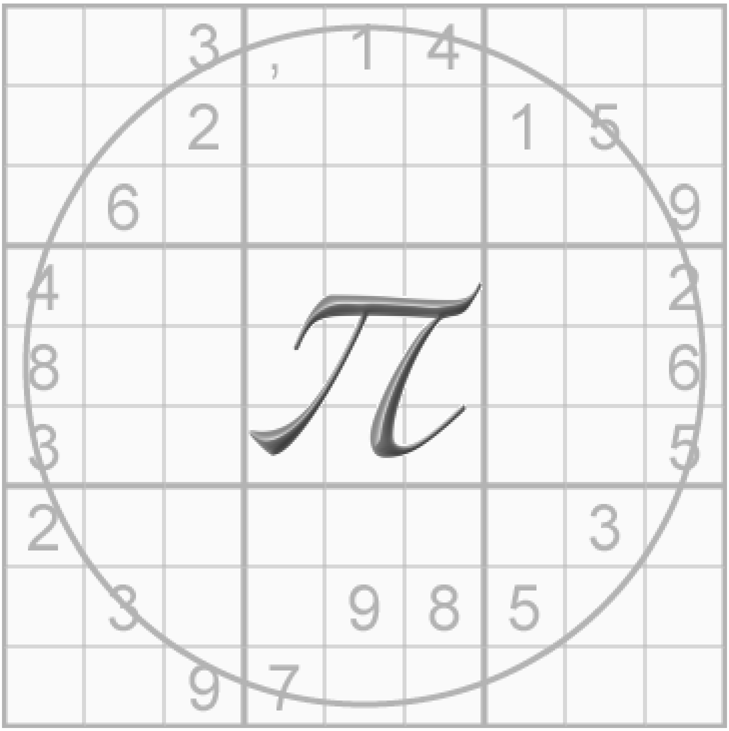
Exotische Sudoku´s



Voorwoord

Er zijn sudokupuzzels, daar zijn er veel van, en er zijn sudoku-puzzels, daar zijn er weinig van. De puzzels in deze verzameling behoren tot de laatste soort: die van exotische sudoku's voor de ware puzzelliefhebber. Als u van logische deductie houdt bent u hier aan het juiste adres.

Hoe is het allemaal zo gekomen? In maart 2009 raakte ik met Aad vdW in correspondentie over sudoku's. Als ik hem een idee of ontwerp stuurde voor een puzzel kon ik er op rekenen dat hij me de dag daarop een puzzel bezorgde. Al gauw werd "A puzzle a day keeps the doctor away" ons motto. In de loop van enkele jaren produceerde Aad meer dan 800 puzzels. Keer op keer bewees hij zijn volmaakte beheersing van het programmeren. Voornamelijk mijn persoonlijke voorkeur volgend maakte ik een doorsnee-selectie uit die 800 unieke puzzels.

Zoals uit de titels van de thema's blijkt exploreerden we een heel scala van facetten van de sudoku en in feite nog veel meer. Ook lieten we niet na de wiskundige kanten van de ingevulde sudoku te onderzoeken. Als u de oplossing van een puzzel heeft gevonden loont het om te zien of ze een symmetrie bezit. Over symmetrie en andere aspecten schreven we in de 51ste jaargang van wiskundetijdschrift *Pythagoras* een zestal artikelen. Er zitten meer interessante kanten aan de sudoku dan u zou vermoeden.

Veel plezier gewenst bij het oplossen!

Aad Thoen   Amsterdam, 16 januari 2016

Inleiding

In een 9x9-sudoku staan in de rijen, kolommen en 3x3-vakken de cijfers 1 t/m 9. Veelvuldig staan hier op de hoofddiagonalen ook de cijfers 1 t/m 9. Of dit vereist is kan de oplosser zien aan de puntjes op die diagonalen.
De 81 vakjes kunnen ook op een andere manier dan in 3x3-vakken zijn ingedeeld, dit is in het bijzonder het geval in de sectie *Vormsudoku*. In de sectie *Curiosa* staan enkele puzzels met de afmeting 8 of 10 i.p.v. 9; let op dat de puzzels 156, 158 en 159 geen complete vakindeling hebben.

Verder zijn de sudokupuzzels in deze bundel nog onderhevig aan een scala van voorwaarden. De meest elementaire daarvan is die van “Diagonale buren zijn ongelijk”.

Orthogonale en diagonale buren

Elk vakje (of cijfer) heeft vier orthogonale en vier diagonale buren tenzij het cijfer aan de rand staat, dan zijn er minder buren (zie figuur 1).

c	o				
o					
				o	
o			o	c	o
c	o			o	
o					

c					
	d				
			d		d
	d			c	
c			d		d
	d				

Figuur 1: *links* ortho- (o) en *rechts* diagonale buren (d).

De veelvoorkomende eis “Diagonale buren zijn ongelijk” houdt in dat de diagonale buren van elk cijfer (c) ongelijk aan c zijn. “Orthogonale buren niet opeenvolgend” houdt in dat naast, onder en boven een cijfer c niet c + 1 of c – 1 mogen staan.

Afstanden

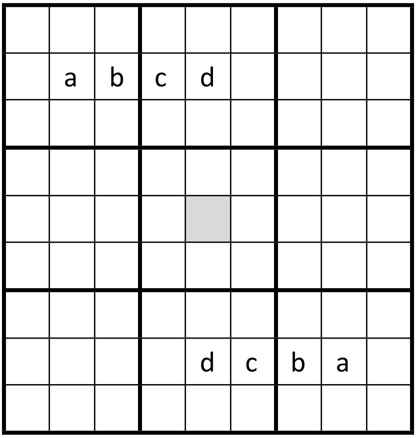
In termen van digitale afstanden kun je orthogonale buren 0-1 buren noemen en diagonale buren 1-1 buren. Een andere gangbare afstand is 1-2, de paardensprong. Een cijfer kan maximaal acht paardensprongburen hebben, zie figuur 2 links. In dezelfde figuur rechts kun je de 2-2 buren zien. Ook op deze afstanden kan de eis ‘ongelijk’ van toepassing zijn.

	p		p		
p				p	
		c			
p				p	
	p		p		

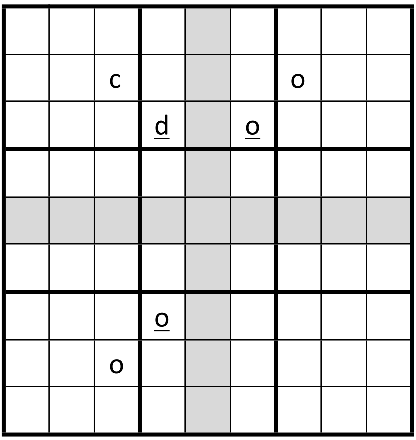
	e				e
			c		
	e				e

Figuur 2: *links* 1-2 (p) en *rechts* 2-2 buren (e).

Nog andere (vaak verre) buren zijn gebaseerd op symmetrie. Twee cijfers zijn puntsymmetrisch als ze symmetrisch liggen t.o.v. het centrale veld van de sudoku, orthosymmetrisch als ze symmetrisch liggen t.o.v. een verticale of horizontale spiegelas, zie figuur 3a en 3b. Ook aan deze ‘buren’ worden een enkele keer (on)gelijkheidseisen gesteld.



Figuur 3a: puntsymmetrische buren (abcd paren)



Figuur 3b: orthosymmetrische buren (o).

Magische vierkanten en ruiten

Een vierkant (of ruit) heet *magisch* als de cijfers in elke rij en kolom dezelfde (zgn. magische) som hebben en als dit bovendien geldt voor de twee hoofddiagonalen. Afgezien van symmetrie bestaat er maar één magisch 3x3-vierkant met precies de cijfers 1 t/m 9, zie figuur 4.

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Figuur 4: het magische 3x3-vierkant.

In een *half*magisch vierkant (of ruit) is het *niet* vereist dat de diagonalen de magische som hebben. Elk halfmagisch vierkant met de cijfers 1 t/m 9 wordt verkregen uit een magisch vierkant via enige verwisselingen van rijen en/of kolommen.

NB: op diagonale lijntjes in een ruit (of vierkant) is het echter geen vereiste dat de cijfers verschillend zijn!

Een voorbeeld van een 4x4 magisch vierkant staat in figuur 5.

1	5	4	9
3	9	2	5
8	1	7	3
7	4	6	2

Figuur 5: 4x4 magisch vierkant met 1 t/m 9.

Vriendelijk

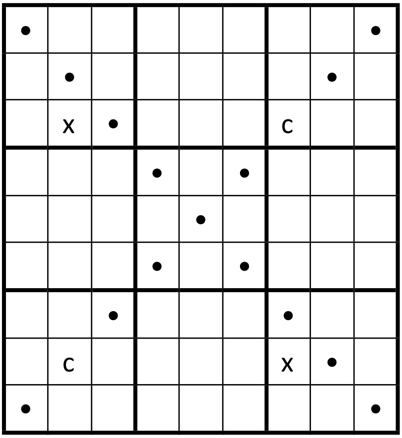
Een 3x3-vak heet vriendelijk als de cijfers 1 t/m 9 er in kunnen worden doorlopen via een aaneenschakeling van 0-1 zet (horizontaal/verticaal), 1-1 zet (diagonaal) of 1-2 zet (paardensprong).
Figuur 6 toont een voorbeeld.

2	5	7
8	1	6
9	3	4

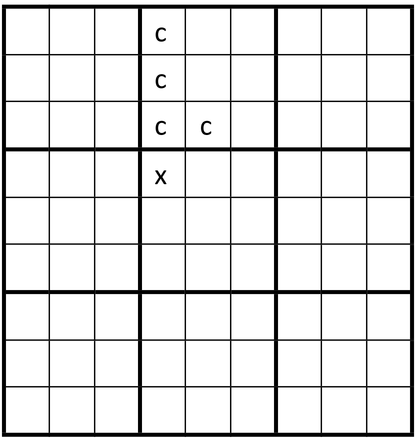
Figuur 6: vriendelijk.

Hulp aan de oplosser: driehoekjes

De puzzels in deze bundel zijn beredeneerbaar hoewel soms lastig. Een veelvoorkomend verschijnsel onmisbaar bij het oplossen is dat van ‘driehoekjes’. De benaming stamt van het voorkomen van dit verschijnsel op de diagonalen. Zie figuur 7a: stel bijvoorbeeld dat op de /-diagonaal het cijfer c nog maar op twee plekken kan staan, dan kan het cijfer c niet op de gemerkte plaatsen x staan. Figuur 7b toont een soortgelijke situatie met ‘ongelijke diagonale buren’. Als in het 3x3-vak middenboven cijfer c slechts op de getoonde velden kan staan kan geen c op x staan.



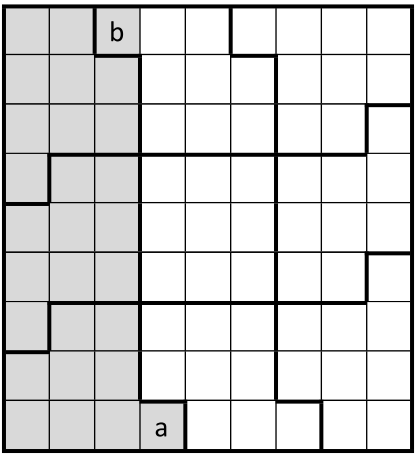
Figuur 7a: driehoekjes op de diagonalen.



Figuur 7b: in de context van ‘ongelijke diagonale buren’.

Vormsudoku's en 'tabgaten'

In vormsudoku's kan het lonen om naar zgn. tabgaten te kijken om invullingen te vinden. Een eenvoudig voorbeeld wordt in figuur 8 gegeven. Beschouw het grijze gebied; dat bestaat uit drie kolommen plus a, maar ook uit drie vormvakken plus b. De drie kolommen en de drie vormvakken bevatten dezelfde verzameling cijfers. Wat overblijft is ook gelijk: het cijfer op veld a is gelijk aan dat op veld b. In het algemeen kan de gelijkheid van 'tab' en 'gat' meerdere velden omvatten.



Figuur 8: zgn. tabgaten.

Drietallen

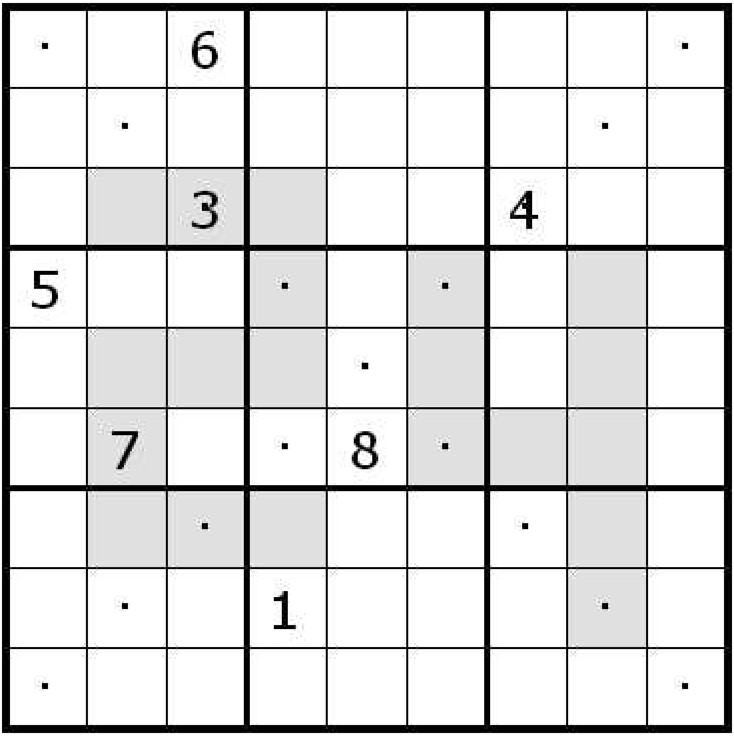
Een paar puzzels in *Curiosa* zijn gewijd aan ‘drietallen’. In elk 3x3-vak van een sudoku staan horizontaal drie drietallen en verticaal ook. Deze drietallen worden als ongeordend beschouwd; bijv. 123 en 213 zijn hetzelfde drietal. Reeds drie verschillende horizontale drietallen plus evenzo verticale zijn voldoende om een sudoku te maken, zie figuur 9. Dat alle 54 drietallen verschillend kunnen zijn is een vereiste in opgaven 145 en 146.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
3	1	2	6	4	5	9	7	8
6	4	5	9	7	8	3	1	2
9	7	8	3	1	2	6	4	5
2	3	1	5	6	4	8	9	7
5	6	4	8	9	7	2	3	1
8	9	7	2	3	1	5	6	4

Figuur 9: een sudoku met slechts zes drietallen.

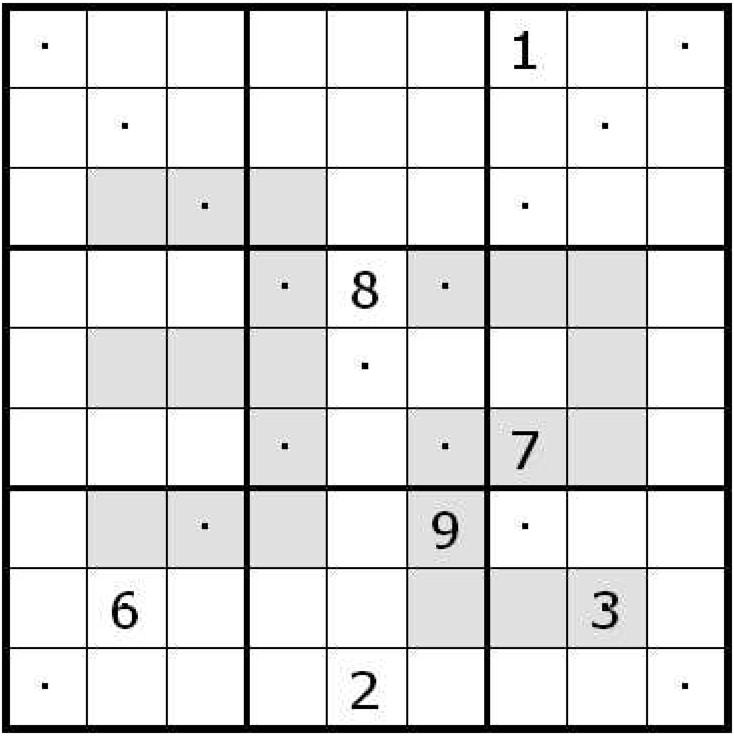
Inhoudsopgave

Oneven ‘grote’ getallen



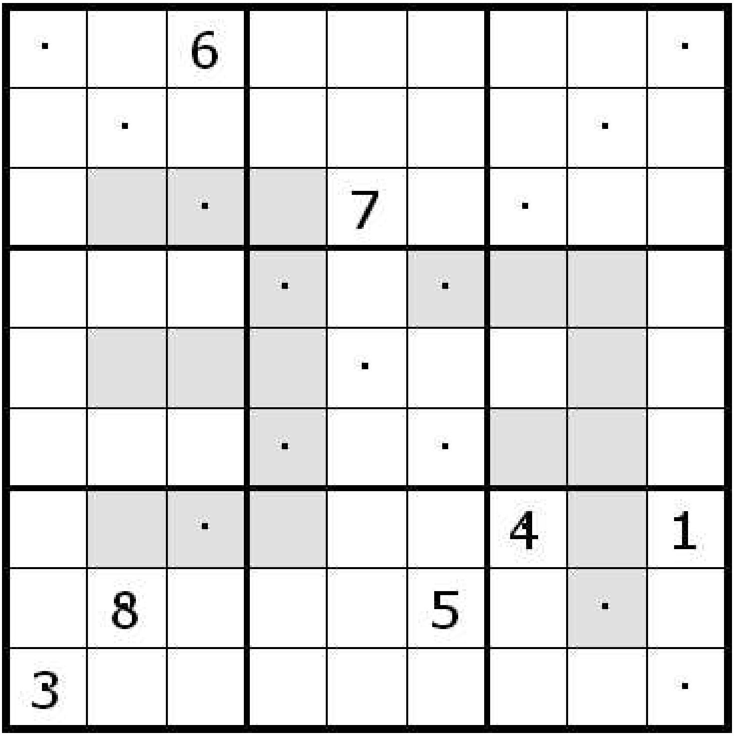
Diagonale buren zijn ongelijk.
In de grijze vakjes staan oneven cijfers.

Oneven ‘grote’ getallen



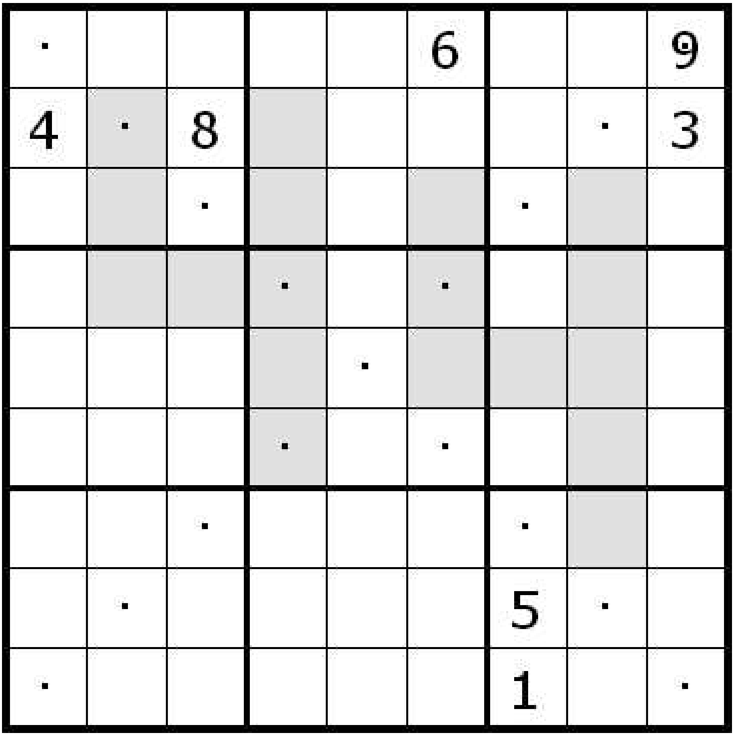
Diagonale buren zijn ongelijk.
In de grijze vakjes staan oneven cijfers.

Oneven ‘grote’ getallen



Diagonale buren zijn ongelijk.
In de grijze vakjes staan oneven cijfers.

Oneven ‘grote’ getallen



Diagonale buren zijn ongelijk.
In de grijze vakjes staan oneven cijfers.