

WISKUNDE ***voor alle vwo-niveaus***

Algebra-analyse-meetkunde-statistiek-kansrekening
vectoralgebra-grafen-matrices-rijen-reeksen
dynamische modellen-logica-perspectief-
Lorentzfactor-Poissonverdeling-complexe getallen

II

Over dit boek

Deze nieuwe uitgave '*Wiskunde voor alle vwo-niveaus*' is een volledige herziening, met enkele correcties van '*Wiskunde A,B,C en D op vwo-niveau*'. Gedateerde stof is weggelaten, het taalgebruik is minder formeel geworden, zoals dat ook in de moderne wiskundemethoden en examens gangbaar is. Hierdoor is de leesbaarheid van de stof verbeterd zonder aan exactheid in te boeten.

Ook is ruimte gemaakt voor nieuwere veel gebruikte begrippen in het vwo zoals bijvoorbeeld Perforaties van functies, Parametervoorstellingen, Bewegingsvergelijkingen, Vectorrotaties over $\pm 90^\circ$, en een model voor de 'Grafiek', van een complexe functie.

Tevens zijn voor alle niveaus *A*, *B*, *C* en *D* extra examenopgaven toegevoegd.

De geheel uitgewerkte opgaven en toepassingen zijn hoofdzakelijk bedoeld ter ondersteuning van de direct eraan voorafgaande theorie en zijn beperkt gehouden. Hierdoor kunt u zich in betrekkelijk korte tijd veel stof (weer) eigen maken en raakt u niet gedemotiveerd omdat 'het allemaal niet opschiet' vanwege de schier eindeloze series opgaven zoals die overigens zeer terecht, in alle bestaande methoden en lesboeken voorkomen.

Alle onderdelen: functies, vergelijkingen, planimetrie, stereometrie, kansrekening, differentiaalrekening, ..., complexe getallen, worden steeds op *eind vwo-niveau als compleet geheel* behandeld, dus niet volgens de concentrische, structurele opbouw van de gangbare wiskundemethoden, waarbij die onderwerpen in de opvolgende leerjaren herhaald en uitgebreid worden naar het didactisch model van prof. Herbarts.

Het boek is duidelijk gerubriceerd middels een zeer gedetailleerde inhoudsopgave en trefwoordenregister, waardoor u snel de voor u meest interessante onderwerpen kunt terugvinden. Aan het gebruik van de grafische rekenmachine (GR), wordt, geïntegreerd in de opgaven en toepassingen, alle nodige aandacht besteed. Wij kozen al eerder voor de TI-83 van 'Texas Instruments', vrijwel identiek met de nieuwere, soms iets handiger TI-84.

De moderne GR van 'Casio' is overigens naar mijn ervaring gemakkelijker in het gebruik.

Over de auteur:

Wim Gronloh, begon zijn loopbaan als scheepswerktuigkundige bij de Nederlandse Koopvaardij. Was daarna ruim 35 jaar werkzaam als leraar wis- en natuurkunde. sinds 1988 ook informatica. Publiceerde in 1998 de wiskundemethode 'Basislijn' voor het lbo/mavo en HAVO/vwo en schrijft sedert 2006 wiskundeboeken voor het vwo en HAVO.

Ik hoop dat ook deze nieuwe uitgave aan uw verwachtingen zal mogen voldoen en houd me voor opbouwende kritiek van harte aanbevolen.

Wim Gronloh

e-mail: wimgronloh@kpnplanet.nl

Bussum, oktober 2021

I. FUNCTIES, GRAFIEKEN, EN FUNCTIEVERGELIJKINGEN	1- 42
1. Het begrip functie	1
2. Lineaire functies	2
3. Kwadratische functies	5
a. Nulpunten van een kwadratische functie	7
b. Ontbinden van kwadratische functies	7
4. Machtsfuncties	9
a. Grafieken van machtsfuncties	10
b. Transformaties	11
- Transformaties door translatie	11
- Transformaties door vermenigvuldiging	13
- Transformaties van wortelvormen	14
5. Exponentiële functies	15
- Exponentiële groei	16
6. Gebroken rationale functies	18
7. Grafieken van exponentiële functies	20
8. Logaritmische functies	21
a. logaritme van een getal	21
b. Eigenschappen van logaritmen	22
c. Inverse functies	22
9. Goniometrische functies	24
a. Definities in de eenheidscirkel	24
b. De eenheid radiaal	25
c. Herleidingformules	25
- sinus en cosinus van som en verschil	26
- verdubbeling- en halveringsformules	27
- formules van Simpson	27
d. Sinus- en cosinusregel	28
- sinusregel	28
- cosinusregel ('Uitgebreide stelling van Pythagoras')	28
10. Periodieke functies	30
a. Sinusfunctie	30
b. Cosinusfunctie	31
c. Tangensfunctie	32
d. Sinusoiden	34
e. Perforaties	36
11. Limieten en continuïteit van functies	37
a. Continuïteit van een functie	37
b. Rekenregels voor limieten	38

IV

c.. Rechter- en linkerlimieten	39
d. Existentie van limieten	39
e.. Opgaven	41
II. OPLOSSEN VAN VERGELIJKINGEN EN ONGELIJKHEDEN	43- 60
1. Gelijkheden en ongelijkheden	43
2. Oplossen van vergelijkingen	45
a. Lineaire stelsels	45
b. Tweedegraads vergelijkingen	47
- ontbinden in factoren	47
- kwadraatafsplitsing	48
- de abc -formule	48
c. Hogeregraads vergelijkingen	49
- de vergelijking $x^3 = 1$	49
- de vergelijking $x^3 = -1$	50
d. Exponentiële vergelijkingen	50
e. Logaritmische vergelijkingen	52
f. Goniometrische vergelijkingen	55
- $\sin A = p, \cos A = p$	55
- $\sin A = \sin B, \cos A = \cos B$	56,57
- $\sin A = \cos B$ of $\cos A = \sin B$	57
g. Parametervoorstellingen en bewegingsvergelijkingen	59
III. DIFFERENTIËREN EN AFGELEIDE FUNCTIES	61-78
1. Groeisnelheid	61
2. Differentiaalquotiënt en afgeleide functie	62
3. Differentieerbaarheid en continuïteit	63
4. Kenmerken van functies via hun afgeleiden	64
a. Stijgend en dalende functies	64
b. Convexe en concave kromming	65
c. Extreme waarden	66
- voorwaarden voor een lokaal extreem	66
d. Buigpunten	67
5. Regels bij het differentiëren	68
a. Factorregel	68
b. Somregel	68
c. Productregel	69
d. Quotiëntregel	69
6. Afgeleide van elementaire functies	70
a. Afgeleide van een machtsfunctie	70
b. Afgeleide Goniometrische functies	71
- afgeleide van sinus x en cosinus x	72
- afgeleide van tangens x	72

c. Afgeleiden van e -machten	73
d. De kettingregel	73
e. Afgeleiden van exponentiële- en logaritmische functies	74
- exponentiële functies	74
- logaritmische functies	75
f. Afgeleiden van samengestelde functies	76
7. Praktische toepassingen	77
IV. INTEGREREN EN PRIMITIEVE FUNCTIES	79- 96
1. Oppervlakte en integraal	79
2. Integreren en stamprimitieven	81
a. Integreren	81
b. Stamprimitieven	82
c. Rekenregels bij het integreren	83
d. Bepaalde- en onbepaalde integralen	86
3. Substitutiemethode en partieel integreren	86
a. Substitutiemethode	86
b.. Partiële integratie	87
4. Toepassingen in de meetkunde	88
a. Lengte van een kromme	88
b. Oppervlakte tussen twee krommen	89
c. Inhoud van een omwentelingslichaam	89
- inhoud van een cilinder	90
- inhoud van een kegel	90
- inhoud van een bol	90
- inhoud van een omwentelingsellipsoïde	91
d. Oppervlakte van een omwentelingslichaam	93
- oppervlakte van een bol	94
- oppervlakte van een paraboloid	95
V. COMBINATORIEK EN KANSREKENING	97- 114
1. Driehoek van Pascal	97
- Binomium van Newton	99
- Routes in een rooster	100
2. Kansexperimenten	101
a. Somregel	101
b. Productregel	101
c. Complementregel	102
3. Permutaties, variaties en combinaties	103
a. Permutaties	103
b. Variaties	103
c. Combinaties	104

VI

4. Onderscheid bij kansproblemen	105
a. Trekkingen zonder terugleggen	105
b. Trekkingen met terugleggen	106
c. Binomiale kansverdelingen	107
5. Verwachtingswaarden	110
- Somregel voor verwachtingswaarden	113
VI. STATISTIEK EN KANSREKENING	115- 138
1. Centrummaten	115
a. Gemiddelde	115
b. Modus	115
c. Mediaan	115
d. Kwartielsafstand, spreidingsbreedte en boxplot	116
2. Klassenindelingen	116
a. Klassenmidden	116
b. Modale klasse en klassenmediaan	117
3. Frequentiepolygonen	117
a. Cumulatieve frequenties	117
b. Relatieve cumulatieve frequenties	118
4. Beelddiagrammen	119
- geclusterd staafdiagram	119
- histogram	121
- reepdiagram	121
- gecombineerd beelddiagram	122
5. Spreidingsmaten	123
a. Standaardafwijking	124
- berekening van de standaardafwijking	124
- betekenis van de standaardafwijking	124
- standaardafwijking van een frequentieverdeling	125
b. Spreidingsmaten van binomiale kansverdelingen	127
- verwachtingswaarde	127
- variantie	128
- standaardafwijking	128
- de wortel- n wet	129
6. Normale verdelingen	132
Eigenschappen van de normaalkromme	133
a. Berekening van standaardscores	134
b. Standaardiseren	135
VII . PLANIMETRIE	139-172
1. Driehoeken	139
a. Stelling van Pythagoras	140
b. Goniometrische verhoudingen	140

VII

- Bijzondere lijnstukken in een driehoek	141
1. Zwaartelijnen	141
2. Bissectrices	142
3. Hoogtelijnen	143
4. Middelloodlijnen	143
5. Rechte van Euler	143
2. Vierhoeken	144
- koordenvierhoek	145
3. Regelmatige veelhoeken	145
a. De ‘Guldensnede’ en het getal phi	146
b. Regelmatige tienhoek	147
c. Regelmatige vijfhoek	148
d.. Rij van Fibonacci	149
4. De cirkel	149
a. Hoeken in een cirkel	150
- middelpuntshoek	150
- omtrekshoek	151
- binnenhoek van een cirkel	151
- buitenhoek van een cirkel	151
- hoek tussen een koorde en een raaklijn	151
b. Cirkels om, in, en aan een driehoek	152
- omgeschreven cirkel	152
- ingeschreven cirkel	153
- aangeschreven cirkels	153
c. Omtrek van een cirkel	154
- Getal van Archimedes en pi	155
d. Oppervlakte van een cirkel	156
e. Vraagstukken	157
5. Kegelsneden	160
a. De cirkel	161
b. De ellips	161
c. De parabool	162
d. De hyperbool	164
6. Transformaties	165
a. Assentransformaties	166
- transformatie door assentranslatie	166
- transformatie door assenrotatie	166
b. Transformaties door vermenigvuldiging	167
- vermenigvuldiging ten opzichte van een punt	167
- vermenigvuldiging ten opzichte van een lijn	168
- oppervlakte en omtrek van een ellips	169
c. Poolcoördinaten	170
- Spiraal van Archimedes	171
- De Cardioïde	172

VIII

VIII. STEREOMETRIE	173- 192
1. Meetkundige lichamen	173
a. Het prisma	173
b. De piramide	173
c. De cilinder	174
d. De kegel	174
e. De bol	174
2. Oppervlakte en inhoud van lichamen	174
a. Oppervlakte van prisma en piramide	174
b. Inhoud van een prisma	174
c. Inhoud en oppervlakte van een cilinder	175
d. Inhoud van een piramide	176
e. Inhoud en oppervlakte van een kegel	176
- oppervlakte van een afgeknotte kegel	177
f. Inhoud van een bol naar Archimedes	178
3. Oppervlakte en inhoud van boldelen	179
a. Bolsegment	179
b. Bolschijf	180
c. Bolsector	181
4. Regelmatige vlakvullingen	183
a. regelmatige patronen	183
b. halfregelmatige patronen	184
5. Veelvlakken	184
a. Platonische veelvlakken	185
- dualiteit van veelvlakken	186
- dualiteit van kubus en octaëder	187
b. Archimedische veelvlakken	187
- mogelijke configuraties	187
- knooppunten van de derde orde	188
- knooppunten van de vierde orde	189
- knooppunten van de vijfde orde	189
c. Onregelmatige veelvlakken	190
- antiprisma	190
- rombische triacontaëder	190
- Vraagstukken	191
IX. VECTORALGEBRA	193- 220
1. Het begrip vector	193
2. Basisbewerkingen van vectoren	194
a. Meetkundige som en verschil van twee vectoren	194
b. Meetkundig scalair product	194
3. Vectorcoördinaten en kentallen	195
a. Vectoren in het platte vlak	195

IX

b. Vectoren in de driedimensionale ruimte	196
4. Algebraïsche bewerkingen van vectoren	196
a. De lengte van een vector	197
b. Algebraïsche som van twee vectoren	197
c. Algebraïsch scalair product	198
5. Inwendig product van twee vectoren	199
6. Meetkunde met vectoren	201
7. Vectorvoorstellingen en vectorvergelijkingen	203
a. Vectorvoorstelling van een punt	203
b. Vectorvergelijking van een lijn	203
c. Normaalvergelijking van een lijn	204
d. Vectorvergelijking van een vlak	205
e. Normaalvergelijking van een vlak	205
8. Hoeken en afstanden	207
a. Vectorrotaties over 90°	207
b. Hoek tussen twee lijnen	207
c. Afstanden van punten en lijnen	208
9. Vectorproducten en determinanten	208
a. Uitwendig product en blokproduct	208
- eigenschappen van het uitproduct	209
- kentallen van het uitproduct	210
b. Determinanten	212
- Regel van Sarrus	213
- rekenregels voor vierkante determinanten	213
- eigenwaarden en eigenvectoren	215
c. Uitproduct en blokproduct als determinanten	217
- het uitproduct	217
- het blokproduct	217
X. ANALYTISCHE MEETKUNDE MET VECTOREN	221-230
1. Afstanden in vectorruimten	221
a. Afstand van een punt tot een lijn	221
b. Afstand tussen twee evenwijdige lijnen	222
c. Afstand tussen twee elkaar kruisende lijnen	222
d. Afstand van een punt tot een vlak	223
2. Hoeken tussen lijnen en vlakken	224
a. Hoek tussen twee lijnen	224
b. Hoek tussen een lijn en een vlak	225
c. Hoek tussen twee elkaar snijdende vlakken	225
- snijlijn van twee vlakken	227
XI. GRAFEN EN MATRICES	231- 252
1. Werken met grafen en matrices	231
a. Voorstellingen van een graaf	231

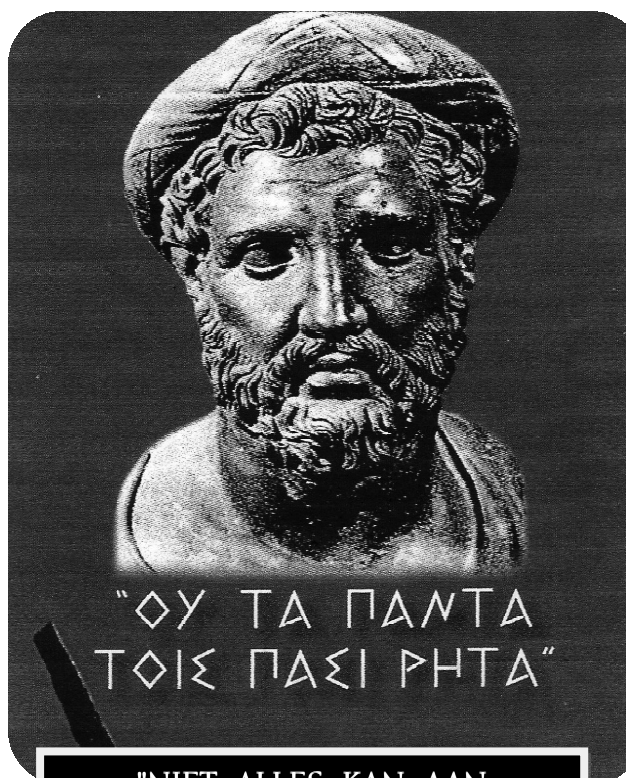
b. Gelijkwaardige grafen	231
c. Graaf en matrix	232
d. Het 'Handelsreizigersprobleem'	233
2. Maximale en minimale verbondenheid van een graaf	234
3. Bewerkingen met matrices	235
a. Som en verschil van twee matrices	235
b. Scalair product van een matrix en een reëel getal	236
c. Product van twee matrices	236
4. Overgangsmatrices	240
a. Toepassingen op diverse deelgebieden	240
b. Groei van populaties	242
c. Markowketens	243
d. Stabilisatie	244
5. Populatievoorspellingen volgens Leslie	246
a. Voorbeelden van de betekenis	246
- leeftijdsopbouw en totale populatie	247
b. Exponentiële groei	248
c. Bijzondere populatiegroei	248
d. Bevolkingsgroei in China	249
6. De zeven bruggen van Koningsbergen	252
XII. RIJEN EN REEKSEN	253- 278
1. Getallenrijen	253
2. Bijzondere rijen	254
a. Rekenkundige rij	254
b. Meetkundige rij	255
c. Rij van Fibonacci	257
3. Convergentie en divergentie van rijen	258
4. Reeksen	259
- Convergentie en divergentie van reeksen	259
- Quotiëntencriterium van d' Alembert	260
- Regel van Leibniz	261
5. Convergentie van standaardreeksen	262
a. Rekenkundige reeks	262
b. Meetkundige reeks	262
c. Harmonische reeks	263
d. Alternerende harmonische reeks	264
6. Machtreeksen	264
a. Eigenschappen van machtreeksen	265
b. Convergentie van machtreeksen	266
- meetkundige reeks	267
- alternerende machtreeks	267

7. Machtreeksontwikkelingen volgens Taylor en MacLaurin	269
a. de functie $f(x) = e^x$	270
b. $f(x) = \sin x$	271
c. $f(x) = \cos x$	271
d. $f(x) = \tan^{-1}(x)$	272
e. $f(x) = \ln x$	273
8. Resttermen	275
- Resttermformule van Taylor	275
- Formule van Lagrange	275
9. Het Getal van Euler en het getal pi	276
a. Het Getal e van Euler	276
- definitieformule van e	276
b. Het getal pi	277
XIII. DYNAMISCHE MODELLEN EN DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN	279-290
1. Differentiaalvergelijkingen	279
a. Voorbeelden	279
b. Lijnelementenvelden	280
c. Methode van Euler	283
d. Continu dynamische modellen	285
XIV SPECIFIEKE ONDERWERPEN NAAR NIVEAU EN PROFIEL	291- 362
A. Perspectief	291
1. Beelden via een glasplaat	291
2. Perspectiefbeelden van objecten	292
a. Perspectiefbeeld van een lijn	292
b. Beeld van evenwijdige lijnen in het grondvlak	293
c. Beeld van lijnen evenwijdig met het tafereel	294
d. Beeld van een punt in het grondvlak	294
e. Beeld van een tegelpatroon	295
3. Ware gedaante van het perspectiefbeeld	295
- ware perspectiefbeeld van tegelvloeren	297
4. Eenpuntperspectief	297
a. Kubus en vierkante balk	298
b. Tegelpaden van vierkante tegels	302
5. Tweepuntperspectief	303
B. Exacte logica	309
1. Conjunctie, disjunctie, implicatie	309
2. Waarheidstabellen	310
a. Waarheidstabellen van $p \Rightarrow q$, $p \wedge q$ en $p \vee q$	310
b. De ontkenning niet A ($\neg A$)	311

XII

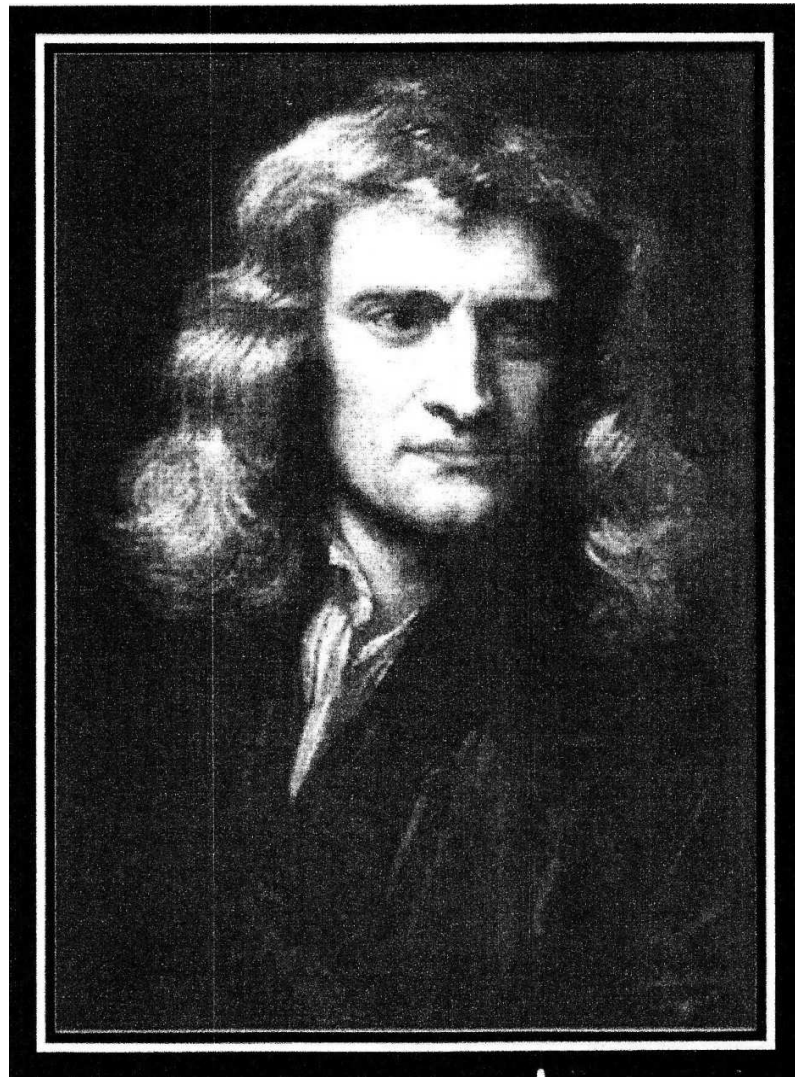
c. Equivalenties	312
- De Prinses en de tijger	314
3. Bijzondere proposities	316
a. Bewerkingsvolgorden	316
b. Modus ponens, modus tollens, 'modus nonsens'	316,317
c. Tautologieën, contradicties en paradoxen	318
4. Logische puzzels	319
a. De vier tegels	319
b. Het inslikken van olifanten	320
c. De vijf slavinnen van de kalief	321
d. De zeven bordjes	322
5. Algebra van Boole	323
a. Eigenschappen van de logische operatoren	323
- distributieve eigenschap	323
b. Speciale eigenschappen	323
C. Projectieve meetkunde	325
Kegelsneden in projectie	325
a. De ellips	326
- ware gedaante van de doorsnede	327
b. De parabool	328
- ware gedaante van de doorsnede	329
c. De hyperbool	329
- gelijkzijdige en ongelijkzijdige hyperbool	329,330
D. De Lorentzfactor	331
E. Beslissingen na steekproeven	333
a. Normale toetsen	333
- onderzoek naar de werking van een vulmachine	333
- toetsing van beweringen	337
b. Binomiale toetsen	338
c. Tekentoetsen	340
F. Poisson-verdeling	343
G. Complexe getallen	347
a. Rekenen met complexe getallen	347
- Som, product en quotiënt	347
- Het complexe vlak	348
- Absolute waarde van een complex getal	348
- Complexe getallen en poolcoördinaten	348
- Complexe getallen als vectoren	349
b. Meetkunde in de complexe vectorruimte	349
- De cirkel	349
- De eenheidscirkel met sinus z en cosinus z	351
- product van twee getallen op de eenheidscirkel	351
- Formules van Euler	351
- De polaire of (r,φ) - notatie	352

c. De complexe functie e^z	356
- de complexe functies cosinus z en sinus z	357
d. Wortels en polynomen	357
- n^{de} machtswortels en n^{de} graadspolynomen	358
e. Hoofdstelling van de Algebra	359
- 'Grafiek' van een complexe functie	360
f. Reële polynomen	361
Gebruikte symbolen en uitdrukkingen	363,364
Trefwoordenregister	365-368



"NIET ALLES KAN AAN ALLEN UITGELEGD WORDEN"

Pythagoras, geboren op Samos (eiland in de Egeïsche Zee) circa 572 jaar v. Chr. Richtte omstreeks 530 jr. v. Chr. in Croton de school van de Pythagoreeërs op. Zij bewezen de beroemdste stelling uit de klassieke wiskunde: In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de schuine zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de twee rechthoekszijden. De Babyloniërs kenden de eigenschap al ca. 1000 jr. v. Chr. De Egyptische 'harpedonaptai' (touwspanners) pasten de stelling ca. 3000 jr. v. Chr. toe om rechte hoeken uit te zetten via knopentouwen (knopen op afstanden 3-4-5; 5-12-13; 8-15-17,.. (de later zogenoemde 'Pythagoras-triples').



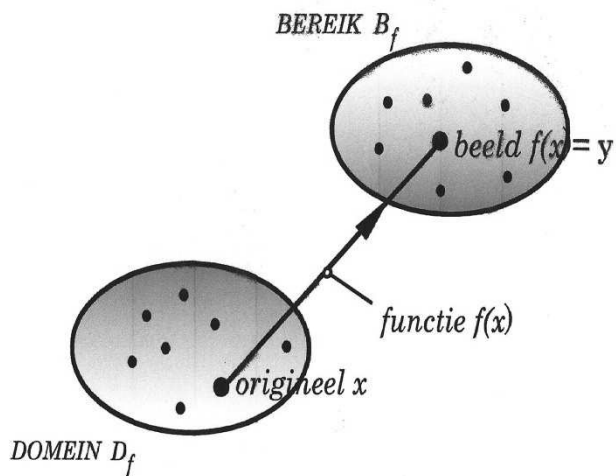
Sir Isaac Newton, geboren in 1642 te Woolsthorp, overleden in 1727 Kensington. Engels wis- en natuurkundige, astronoom, natuurfilosoof, alchemist, officieel muntmeester en theoloog. Publiceerde de differentiaal- en integraalrekening in zijn meesterwerk 'Principia' in 1687 betreffende zwaartekracht, banen van hemellichamen, grondwetten van de dynamica, .. De Britse 'Royal Society' beschouwde Newton in 2005 als de grootste geleerde van de wetenschap ooit.

I. FUNCTIES, GRAFIEKEN EN FUNCTIEVERGELIJKINGEN

Als je rustig wandelend per uur 4 km aflegt dan is de afgelegde afstand in 2½ uur dus 10 km. De lengte van de afgelegde weg *bij die snelheid* is afhankelijk van de *tijd* ofwel: de afstand is een **functie** van de tijd. Zo bestaan er talrijke grootheden die afhankelijk zijn van *één of meer* andere grootheden waarbij het verband tussen die grootheden in een functie is vastgelegd via een zeker **functievoorschrift**.

Als je in bovenstaand geval ook rekening wilt houden met een *wisselende snelheid*, dan is de lengte van de afgelegde weg een functie van *de tijd en de gemiddelde snelheid*.

1. Het begrip functie



Is bijvoorbeeld een functie f gegeven door het functievoorschrift:

‘vermenigvuldig met drie’ dan is $f(3) = 9$,

$f(-7) = -21$ en $f(a) = 3a$.

De functie wordt dan geschreven als:

$f(x) = 3 \cdot x$ of korter $y = 3x$

De getallen 3, -7 en a heten de **originelen** van de functie $f(x) = 3x$, de getallen 9, -21 en $3a$ zijn de bijbehorende **beelden** ofwel **functiewaarden**.

De verzameling **originelen** van f heet het **domein** D_f van de functie, de verzameling **beelden** heet het **bereik** B_f .

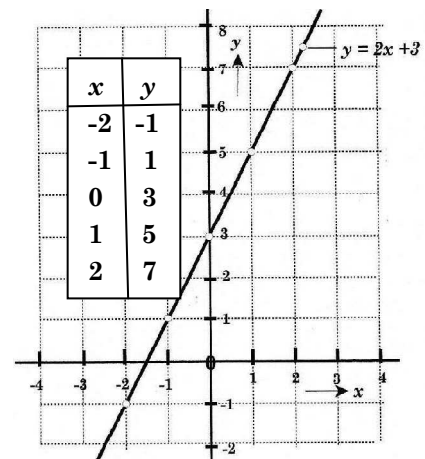
Als *geen speciaal domein of bereik is aangegeven*, wordt er van uitgegaan dat *alle originelen* en *alle beelden* elementen zijn van de **verzameling reële getallen** \mathbb{R} .

Een functie van x is een zeker voorschrift f , (g, h, i, \dots) dat bij elk origineel x uit het domein D_f , precies één beeld $f(x) = y$ uit het bereik B_f bepaalt

Vaak worden origineel x en beeld y van een functie getekend als punten $P(x,y)$ van een grafiek in een rechthoekig coördinatenstelsel: het *origineel* x op een horizontale x -as, het beeld $y = f(x)$ op de verticale y -as. Hun snijpunt is de **oorsprong** O .

In bijgaande figuur is vanuit de x - y -tabel de **grafiek** getekend van de functie: $f(x) = y = 2x + 3$.

Maak steeds goed onderscheid tussen een **functie** $f(x)$ en de **grafiek van de functie** $f(x)$.



2. Lineaire functies

Voor elk tweetal punten P en Q van een lineaire functie geldt dat de **verhouding** tussen een zekere toename $\Delta x = x_Q - x_P$ van x en de *bijbehorende* toename $\Delta y = y_Q - y_P$ van y steeds een **vaste waarde** heeft.

De betekenis hiervan is als volgt:

Stel P en Q zijn twee naburige punten op de grafiek van een lineaire functie $y = f(x)$ waarbij

$$P = (x_P, y_P) \text{ en } Q = (x_Q, y_Q).$$

De *verhouding* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bepaalt de *hoek* die het *lijnstukje* PQ maakt met de *positieve* x -as, dus bepaalt de *richting* van PQ .

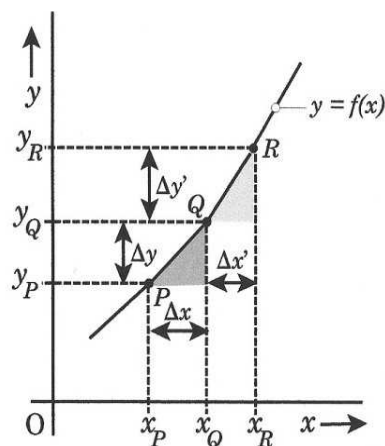
Stel $R(x_R, y_R)$ is een *ander* naburig punt van Q op de grafiek met $x_R = x_Q + \Delta x'$ en $y_R = y_Q + \Delta y'$, dan wordt

de richting van QR bepaald door de verhouding $\frac{\Delta y'}{\Delta x'}$

Omdat *per definitie* de verhouding $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bij een lineaire functie een vaste waarde heeft, geldt

dan: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ dus zijn de *richtingen* van de lijnstukjes PQ en QR *gelijk* ofwel:

PQ en QR liggen in elkaars verlengde dus **P, Q en R liggen op een rechte lijn**



Daar P, Q en R willekeurig gekozen naburig punten zijn, geldt dit voor alle punten van de grafiek. De grafiek van een **lineaire** functie is dus een **rechte lijn**. (dit verklaart de naam *lineaire functie*).

De *constante verhouding* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ($\Delta x \neq 0$) bepaalt de *richting* van lijn l en noemt men daarom de **richtingscoëfficiënt** a van l .

Voor de *vergelijking* van lijn l , dus de betrekking tussen de waarden x en y waaraan alle punten $P(x, y)$ van lijn l voldoen geldt dan als l niet evenwijdig is met de y -as :

De grafiek van een lineaire functie is een (rechte) lijn l met vergelijking $y = ax + b$ waarin a de richtingscoëfficiënt is van l en b de y -coördinaat is van het snijpunt van l met de y -as.

Als $l \parallel y$ -as dan is bij elke y : $x_P = x_Q$ dus $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$ bestaat dan niet omdat $x_Q - x_P = 0$

Bij elke y is dan $x = x_P = x_Q$ dus is $x = x_P$ ($= x_Q$) de vergelijking van l .

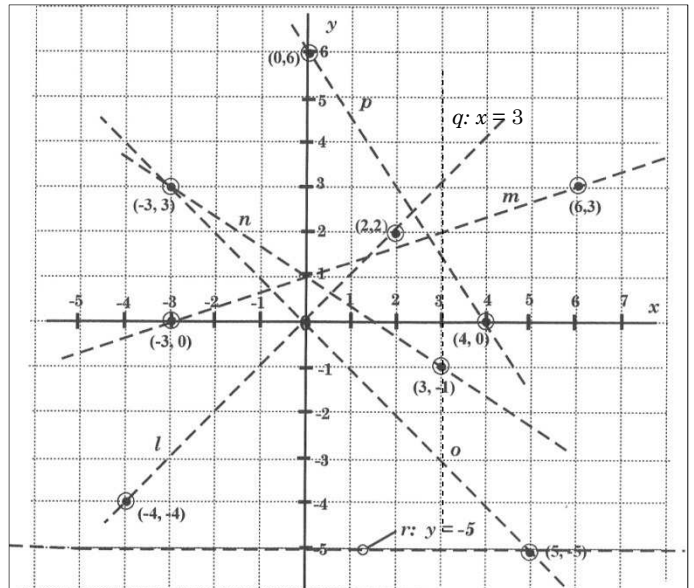
Omdat we een *lineaire functie* dus kunnen aangeven met $f(x) = y = ax + b$ noemen we een *lineaire functie* meestal een **eerstegraads functie** (want de variabele x komt hierin hoogstens tot de eerste graad voor).

Toepassingen

1. In deze figuur zijn de lijnen l , m , n , o en p getekend door twee gegeven punten (omcirkeld) in een *orthonormaal coördinatenstelsel* XOY .

Een orthonormaal stelsel bestaat uit twee onderling loodrechte coördinaatassen. De eenheden op de assen hebben daarbij de standaardlengte 1.

- Bepaal van elke lijn de vergelijking
- Bepaal de vergelijking van de X-as en de Y-as.
- Hoe lopen de lijnen $q: x = 3$ en $r: y = -5$?



a. De grafiek van een eerstegraads functie $y = f(x) = ax + b$, is een rechte lijn l waarin a de *richtingscoëfficiënt* is van l en b de *y-coördinaat* van het *snijpunt* van l met de *y-as*. Op elke lijn zijn steeds twee *roosterpunten* (punten in het snijpunt van twee roosterlijnen) met een cirkeltje aangegeven waarmee de vergelijking is te bepalen.

- Zo is van lijn l : $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{2 - (-4)}{2 - (-4)} = 1$ en $b = 0$ want ook O (0,0) ligt op lijnstuk $(-4, 4)$. $(2, 2)$.

dus de vergelijking is $l: y = 1 \cdot x + 0 \Rightarrow l: y = x$.

- Voor m geldt $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{3 - 0}{6 - (-3)} = \frac{1}{3}$ en $b = 1$

dus wordt de vergelijking: $m: y = \frac{1}{3}x + 1$

- Voor n geldt $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{-1 - 3}{3 - (-3)} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$ en $b = 1$

dus is de vergelijking is $n: y = \frac{-2}{3}x + 1$

- Voor o geldt $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{-5 - 3}{5 - (-3)} = \frac{-8}{8} = -1$ en $b = 0$

dus de vergelijking is: $o: y = -x$

- Voor p geldt $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{0 - 6}{4 - 0} = -\frac{3}{2}$ en $b = 6$

dus de vergelijking is: $p: y = -\frac{3}{2}x + 6$

- b - Voor *alle punten op de x-as* geldt: $y = 0$.

De vergelijking van de *x-as* is dan: $y = 0$.

Zo geldt voor alle punten van de *y-as* $x = 0$ dus is de vergelijking van de *y-as* $x = 0$

- c - Alle punten (x, y) van de lijn q met vergelijking $x = 3$, zijn van de vorm $(3, y)$.

Het is dan de **lijn, evenwijdig met de y-as door het punt (3, 0)**

Zo is de lijn $r: y = -5$ de **lijn evenwijdig met de x-as door het punt (0, -5)**

2. - a. Bepaal de vergelijking van de lijn l door de punten $A = (3, 4)$ en $B = (-4, -2)$
 - b. Bepaal het snijpunt van de lijn l met de lijn $m: y = 2x - 3$

a. In $l: y = ax + b$ volgt de richtingscoëfficiënt

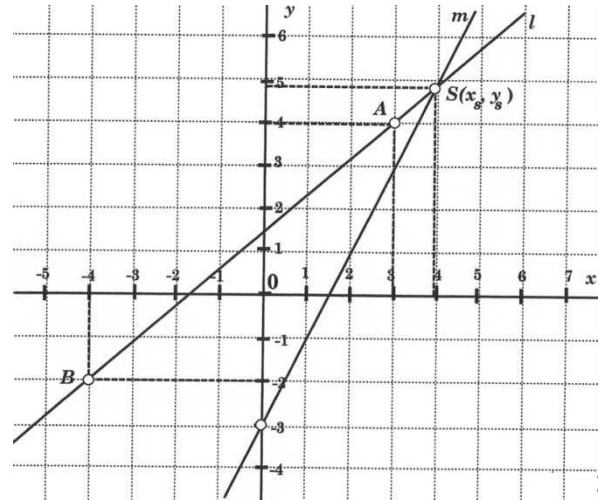
van l uit: $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 4}{-4 - 3} = \frac{-6}{-7} = \frac{6}{7}$

Lijn l heeft dan als vergelijking: $l: y = \frac{6}{7}x + b$.

Hierin de coördinaten van $A = (3, 4)$ (of $B = (-4, -2)$)

ingevuld geeft $4 = \frac{6}{7} \cdot 3 + b \Rightarrow b = \frac{10}{7}$ zodat de

vergelijking is $l: y = \frac{6}{7}x + \frac{10}{7}$ *)



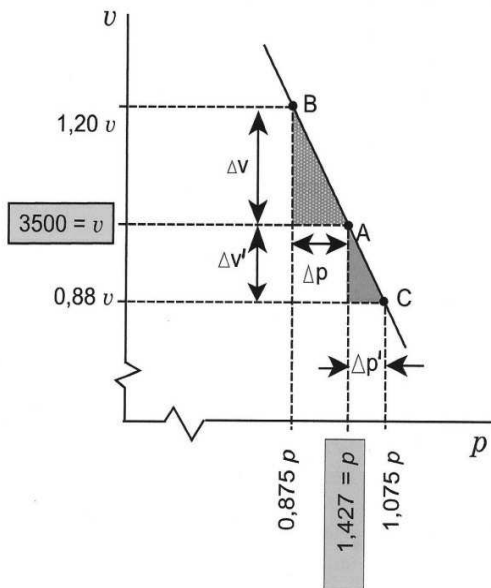
b. Het snijpunt $S(x_s, y_s)$ van de lijnen l en m ligt zowel op l als op m , dus voldoen de coördinaten x_s en y_s aan de vergelijking:

$$l: y = \frac{6}{7}x + \frac{10}{7} \text{ en aan } m: y = 2x - 3, \text{ zodat dan } \frac{6}{7}x_s + \frac{10}{7} = 2x_s - 3 \Rightarrow \frac{8}{7}x_s = \frac{31}{7} \Rightarrow x_s = \frac{31}{8}$$

$$\text{Uit } y_s = 2x_s - 3 = -\frac{1}{2}x_s + \frac{9}{2} \text{ volgt dan } y_s = 2 \cdot \frac{31}{8} - \frac{24}{8} = \frac{38}{8} = \frac{19}{4}$$

Het snijpunt van l en m is dus het punt $S\left(\frac{31}{8}, \frac{19}{4}\right)$.

3. Bij een 'witte pomp' in Vreemdeuiden verkoopt men gemiddeld per dag 3500 liter 'Euro-95' benzine als hun literprijs € 1,427 bedraagt. (punt A in de grafiek).
 Verlaagt men de prijs met 12,5% dan stijgt de verkoop met 20% (punt B).
 Verhoogt men de prijs met 7,5% dan daalt de verkoop met 12%. (punt C).



- a. Bewijs dat de punten A, B en C op een rechte lijn liggen.
 b. Toon aan dat op het traject BC de toename van de verkoop bij prijsdaling evenredig is met de afname van de verkoop bij prijsstijging.

a. De richtingscoëfficiënt van AB is:

$$\frac{\Delta v}{\Delta p} = \frac{v - 1,20v}{p - 0,875p} = \frac{-0,20v}{0,125p} = -1,6 \cdot \frac{v}{p}$$

De richtingscoëfficiënt van CA is $\frac{\Delta v'}{\Delta p'} = \frac{0,88v - v}{1,075p - p}$

$$= \frac{-0,12v}{0,075p} = -1,6 \cdot \frac{v}{p}$$

De richtingen van AB en CA zijn dus gelijk \Rightarrow

A, B en C liggen op een rechte lijn.

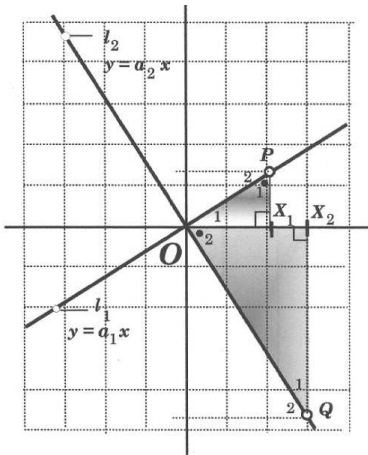
*) Met de grafische rekenmachine TI-83 gaat dit als volgt: Voer de *lijsten* in {3, -4} [STO] L1 en {4, -2} [STO] L2. Druk op [STAT] [CALC] en kies optie 4 [ENTER]: LinReg ($ax + b$) [ENTER]

De waarden van a en b worden direct getoond: LinReg $y = ax + b: a \approx .85714... = \frac{6}{7}; b \approx 1.42857... = \frac{10}{7}$

b. De uitkomst van a. betekent dat op het traject *BC* de *verhouding* prijsstijging : verkoopdaling (-1,6) gelijk is aan de verhouding prijsdaling : verkoopstijging. (-1,6). De verkoopdaling bij toenemende prijs is dus **evenredig** met de verkoopstijging bij dalende prijs, want een *evenredigheid* is een *gelijkheid van twee verhoudingen*.

Eigenschap:

Als twee lijnen l_1 en l_2 loodrecht op elkaar staan dan is het product van hun richtingscoëfficiënten a_1 en a_2 gelijk aan -1 , dus $a_1 \cdot a_2 = -1$ en ook omgekeerd



Bewijs: In de figuur is vanuit een punt P op l_1 een loodlijn PX_1 op de x -as neergelaten en ook een loodlijn QX_2 vanuit een punt Q van l_2 op de x -as.

De richtingscoëfficiënten van l_1 en l_2 zijn respectievelijk:

$$a_1 = \frac{PX_1}{OX_1}; a_2 = \frac{-QX_2}{OX_2}, \text{ dus } a_1 \cdot a_2 = - \frac{PX_1}{OX_1} \cdot \frac{QX_2}{OX_2} \quad \dots(1)$$

Van de $\Delta \Delta OPX_1$ en OQX_2 is $\angle O_2 + \angle O_1 = 90^\circ$ (gegeven).

Ook is in ΔOPX_1 : $\angle P_1 + \angle O_1 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

dus is $\angle P_1 = \angle O_2$. (met zwarte stip)

De $\Delta \Delta OPX_1$ en OQX_2 zijn gelijkvormig omdat ze rechthoekig zijn en $\angle P_1 = \angle O_2 \Rightarrow PX_1 : OX_1 = OX_2 : QX_2$ ofwel $-PX_1 : OX_1 = -OX_2 : QX_2$. (2)

(2) in (1) gesubstitueerd geeft dan $a_1 \cdot a_2 = - \frac{OX_2}{QX_2} \cdot \frac{QX_2}{OX_2} = -1$ zoals was te bewijzen.

De stelling geldt ook omgekeerd: Als $a_1 \cdot a_2 = -1$ dan staan l_1 en l_2 loodrecht op elkaar. Lees voor het bewijs hiervan bovenstaand bewijs van achteren naar voren.

3. Kwadratische functies

Een kwadratische- ofwel tweedegraadsfunctie, is een functie $f(x)$ van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ waarin a , b en c reële getallen zijn en $a \neq 0$

Voor het onderzoek naar de eigenschappen van tweedegraadsfuncties, herleiden we eerst de algemene vorm door middel van '**kwadraatplitsing**': ^{*)}

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) \\ &= a(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}) + a \cdot (\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}) \\ &= a(x + \frac{b}{2a})^2 - a(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a}) \end{aligned}$$

ofwel: $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}$ waarin $D = b^2 - 4ac$.

Uit de onderbouw:
'Papegaaimethode' voor producten

^{*)} In deze kwadraatplitsing is gewerkt naar de vorm $(x + \frac{b}{2a})^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}$, een toepassing van het 'merkwaardig product' $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Hiernaast is dit met de 'papegaaimethode' gedemonstreerd evenals het merkwaardig product: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

De tweedegraadsfunctie $f(x) = ax^2 + bx + c \equiv f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$ met $D = b^2 - 4ac$

Kies je nu $x = -\frac{b}{2a}$ in: $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$ dan krijg je:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} = a \cdot 0 - \frac{D}{4a} \text{ dus } f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{D}{4a}.$$

Dit betekent dat $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$ een punt is van *elke kwadratische functie* $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Noem je dit punt T , dan is dus $T(x_T, y_T) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$... (a)

1^o. We bewijzen nu dat het punt $T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$ een *uiterste waarde* is ('**maximum**' of '**minimum**') van $f(x)$.

Omdat voor *elk willekeurig punt* (x, y) van $f(x) = y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$

geldt voor $T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$ dat $y_T = -\frac{D}{4a}$, dus volgt de waarde van $y - y_T$ uit:

$$y - y_T = \left\{ a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} \right\} - \frac{-D}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow y - y_T = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \dots (b)$$

Als $a > 0$ dan is $a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, want ook $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$.

Dit betekent dat $y - y_T > 0$ *zodat elke waarde van y in $y = ax^2 + bx + c$ groter dan of gelijk is aan y_T* , dus is het punt $T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$ een

minimum van de grafiek van de functie $f(x)$ (c)

Op dezelfde manier blijkt uit (c) dat **als $a < 0$** steeds geldt

$y - y_T < 0$ ofwel: $T = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$ is een **maximum** van de grafiek

van $y = ax^2 + bx + c$

Het punt $T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$, *minimum of maximum, afhankelijk van a* ,

heet de **top** van de kwadratische functie $f(x)$.

2^o De lijn $x = -\frac{b}{2a}$ door T is een **symmetrieas** van $f(x)$, want:

Voor een punt P van $f(x)$ op een positieve afstand δ links van de lijn

$x = -\frac{b}{2a}$ geldt $x_p = -\frac{b}{2a} - \delta$ en voor een punt Q van $f(x)$ op eenzelfde

afstand δ rechts van deze lijn is $x_q = -\frac{b}{2a} + \delta$.

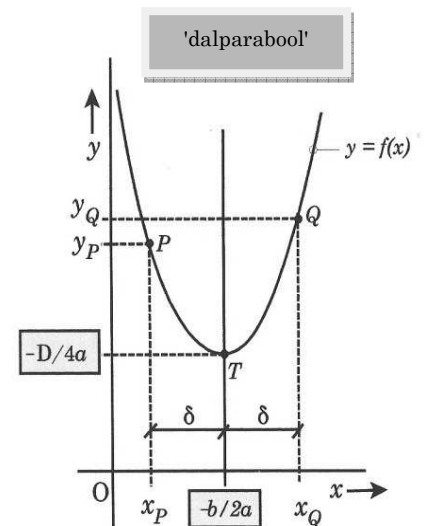
In de vorm van de kwadraatafsplitsing is $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$ dus als $x = x_p = -\frac{b}{2a} - \delta$ dan is

$$y_p = a\left(-\frac{b}{2a} - \delta + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} = a \cdot \delta^2 - \frac{D}{4a} \dots (d)$$

$$\text{Als } x = x_q = -\frac{b}{2a} + \delta \text{ dan is } y_q = a\left(-\frac{b}{2a} + \delta + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} = a \cdot \delta^2 - \frac{D}{4a} \dots (e)$$

Uit (d) en (e) volgt $y_p = y_q$ dus P en Q liggen **symmetrisch t.o.v. de lijn $x = -\frac{b}{2a}$** \Rightarrow

De grafiek van $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$ is een parabool met verticale as $x = -\frac{b}{2a}$ en een punt $T = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$ als top, waarin $D = b^2 - 4ac$. Als $a > 0$ dan is T een minimum ('dalparabool'), als $a < 0$ dan is T een maximum ('bergparabool')



a. Nulpunten van een kwadratische functie

Eventuele snijpunten van de parabool $y = ax^2 + bx + c$ met de x -as ($y = 0$) moeten voldoen aan de vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ en aan $y = 0$ dus zijn de **oplossingen** = **wortels** van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$. Ze worden ook **nulpunten** van $f(x)$ genoemd..

Voor een algemene oplossing van deze vergelijking wordt meestal de '**abc-formule**' gebruikt:

Afleiding van de abc-formule

Schrijf je de oplossingsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ in de vorm van de *kwadraat-afsplitsing*, dan ontstaat: $a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} = 0$.

De nulpunten x volgen dan uit: $a(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{D}{4a} \Rightarrow \frac{1}{a} \cdot a(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{1}{a} \cdot \frac{D}{4a} \Rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{D}{4a^2}$

met gevolg: $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

Nulpunten van $f(x) = ax^2 + bx + c$ zijn oplossingen van de vergelijking
$$y = ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad (D = b^2 - 4ac)$$

De waarde van D hierin bepaalt het *aantal oplossingen*, dus het *aantal wortels* van $ax^2 + bx + c = 0$. Men noemt daarom D de **discriminant** van deze vergelijking:

1^o. Als $D = b^2 - 4ac > 0$ dan bestaat \sqrt{D} en heeft de vergelijking *twee verschillende wortels*:

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ en $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$. De parabool snijdt dan de x -as in de punten x_1 en x_2 .

2^o. Als $D = 0$ dan is $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ dus heeft de vergelijking slechts één ('*dubbel tellende*') wortel $x = -\frac{b}{2a}$.

Top T met $x_T = -\frac{b}{2a}$ is dan een **raakpunt** ('twee samenvallende punten') op de x -as.

3^o. Als $D < 0$ dan bestaat \sqrt{D} niet in \mathbb{R} dus zijn er *geen reële oplossingen*.

De parabool snijdt de x -as niet. Er zijn *geen reële nulpunten*. *)

b. Ontbinden van kwadratische functies

*De functie $f(x) = x^2 + bx + c$ met nulpunten $x = x_1$ en $x = x_2$
is te schrijven als $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$*

Bewijs::

De nulpunten x_1, x_2 van de vierkantsvergelijking $y = ax^2 + bx + c$ met $a = 1$ zijn volgens de *abc-formule*: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2}$ en $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2}$ met $D = b^2 - 4c$ en $a = 1$ dus volgt dan het **product**

uit: $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = \{x - (\frac{-b + \sqrt{D}}{2})\} \cdot \{x - (\frac{-b - \sqrt{D}}{2})\}$ met gevolg:

*) In het volgende hoofdstuk worden imaginaire oplossingen van vierkantsvergelijkingen besproken in geval $D < 0$. In Hoofdstuk XIV worden expliciet voor wiskunde D de complexe getallen uitgebreid behandeld.

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = \left(\frac{2x + b - \sqrt{D}}{2} \right) \cdot \left(\frac{2x + b + \sqrt{D}}{2} \right) = \frac{4x^2 + 4bx + b^2 - D}{4} = \frac{4x^2 + 4bx + 4c}{4} \text{ want } \\ D = b^2 - 4ac \text{ en } a = 1 \text{ dus } b^2 - D = 4c \text{ zodat } (x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 + bx + c \quad \dots(1)$$

Met de gelijkheid $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$ is de term $x^2 + bx + c$ volgens (1) **ontbonden in twee factoren** $(x - x_1)$ en $(x - x_2)$ als x_1 en x_2 de *nulpunten* van $f(x)$ zijn.

Uitgewerkt geeft dit: $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2$
waarin dus $(x_1 + x_2) = -b$ en $x_1 \cdot x_2 = c$ (2)

Op deze eigenschap berust een methode om de wortels x_1 en x_2 van $f(x) = 1x^2 + bx + c = 0$ snel te kunnen vinden:

Voorbeeld: Bepaal de wortels van de vergelijking $x^2 - 11x + 28 = 0$,

Ontbind het linkerlid in factoren, dus schrijf $x^2 - 11x + 28 = (x - p)(x - q) = x^2 - (p+q)x + p \cdot q$. (Steeds mogelijk als $D \geq 0$ is, omdat er dan één of twee nulpunten p, q zijn, dus regel (1) van toepassing is.)

Hiervoor geldt dan $p + q = 11$ en $p \cdot q = 28$, waaruit direct volgt $p = 4$ en $q = 7$ zodat

$$x^2 - 11x + 28 = (x - 4) \cdot (x - 7) \text{ dus vind je de nulpunten uit:}$$

$$x^2 - 11x + 28 = 0 \Rightarrow (x - 4) \cdot (x - 7) = 0 \Rightarrow x = 4 \vee x = 7.$$

Als $a \cdot b = 0$ dan $a = 0 \vee b = 0$.

De wortels van $x^2 - 11x + 28 = 0$ zijn $x = 4 \vee x = 7$

Opgaven: 1. Bereken de nulpunten van $f(x) = x^2 - x - 12$

Schrijf $x^2 - x - 12 = (x - p) \cdot (x - q) = x^2 - (p+q)x + p \cdot q$, dan is $p + q = 1$ en $p \cdot q = -12$.

Hieraan voldoen $p = 4$ en $q = -3$ dus als $x^2 - x - 12 = 0$, dan is $(x - p) \cdot (x - q) =$

$$(x - 4) \cdot (x + 3) = 0 \text{ zodat } x - 4 = 0 \vee x + 3 = 0 \Rightarrow x = 4 \vee x = -3$$

De nulpunten zijn dan $x = 4$ en $x = -3$.

2. Los op: $x^2 + 2x - 143 = 0$

Stel $x^2 + 2x - 143 = (x - p) \cdot (x - q) = x^2 - (p+q)x + p \cdot q$, dan is

$p + q = -2$ en $p \cdot q = -143$ dus $p = -13$ en $q = 11$. Gevolg: Als $x^2 + 2x - 143 = 0$, dan is

$$(x - (-13)) \cdot (x - 11) = 0 \text{ zodat } x + 13 = 0 \vee x - 11 = 0 \Rightarrow x = 11 \vee x = -13$$

3. Gegeven is de parabool $f(x) = x^2 - 4x + 1 = 0$

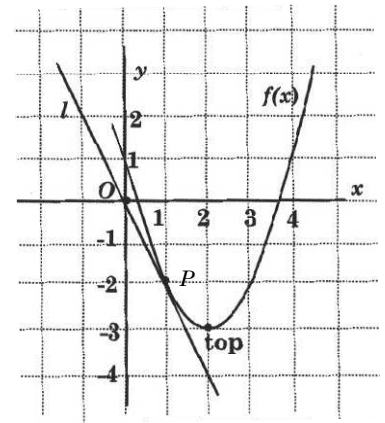
a. Bepaal de top van de parabool.

Uit kwadraatplitsing volgt dat voor de parabool geldt: $y = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3$.

Omdat voor elke $x : (x - 2)^2 \geq 0$ is steeds $y \geq -3$ dus geldt voor de coördinaten van top T (minimum van de dalparabool omdat $a > 0$): $y_T = -3$ en $y_T = (x_T - 2)^2 - 3 \Rightarrow x_T = 2$.

De top is dus het punt $T(2, -3)$. (Volgt ook direct uit $x_T = -\frac{b}{2a}$, $y_T = \frac{-D}{4a}$).

b. Bepaal de raaklijn in het punt $(1, -2)$ van de parabool.



(Het punt $P(1, -2)$ ligt op de parabool $y = x^2 - 4x + 1$ want $-2 = 1^2 - 4 \cdot 1 + 1$ dus voldoet aan de vergelijking).

Noem de raaklijn $l: y = ax + b$, dan geldt voor het raakpunt op l

$$P(1, -2) = a \cdot 1 + b \Rightarrow a + b = -2 \Rightarrow a = -2 - b. \quad \dots(1)$$

Omdat het raakpunt zowel op de parabool als op de raaklijn l ligt geldt:

$$y = x^2 - 4x + 1 = (-2 - b)x + b \Rightarrow$$

$$x^2 - 4x + 1 = -2x - bx + b \Rightarrow x^2 - 2x + bx + 1 - b = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + (b - 2)x + (1 - b) = 0$$

De discriminant D van deze tweedegraadsvergelijking moet nul zijn omdat de vergelijking

$$\text{één wortel heeft, dus is } b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (b - 2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - b) = 0 \Rightarrow$$

$$b^2 - 4b + 4 - 4 + 4b = 0 \Rightarrow b = 0 \quad \dots(2)$$

Volgens (1) en (2) is dan : $b = 0$ en $a = -2$, dus is de raaklijn $l: y = ax + b \Rightarrow y = -2x$.

4. Machtsfuncties

De functie $y = f(x) = x^n$ is een machtsfunctie van x , waarin de exponent n een constante is en het grondtal x een variabele

Enkelvoudige machtsfuncties zijn van het type $y = f(x) = x^n$ met $n \in \mathbb{R}$; samengestelde machtsfuncties zijn van de vorm $y = f(x) = ax^p + bx^q + cx^r + \dots$ (a, b, c en $p, q, r \in \mathbb{R}$) en worden ook **polynomen** genoemd.

Uitgaand van de *definitie van een natuurlijke macht* van x :

$x^1 = x$, $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x \cdot x \cdot x$, $x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$ of algemeen: $x^n = \overbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}^{n \text{ keer}}$ volgen direct de regels: $x^p \cdot x^q = x^{p+q}$, $\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$ en $(x^p)^q = x^{p \cdot q}$. Hieruit volgen dan de regels: $\frac{x^p}{x^p} = x^{p-p} = x^0$ en ook $\frac{x^p}{x^p} = 1$, dus $x^0 = 1$ en $\frac{1}{x^p} = \frac{x^0}{x^p} = x^{0-p} = x^{-p}$ en $\sqrt[p]{x} = x^{\frac{1}{p}}$ omdat $(x^{\frac{1}{p}})^p = x^{\frac{1}{p} \cdot p} = x^1 = x$. Zo ook: $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad (a^p)^q = a^{p \cdot q} \quad a^{-p} = \frac{1}{a^p} \quad a^0 = 1$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \quad (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p \quad \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}} \quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Per definitie gelden deze rekenregels ook voor *machten met reële exponenten*:

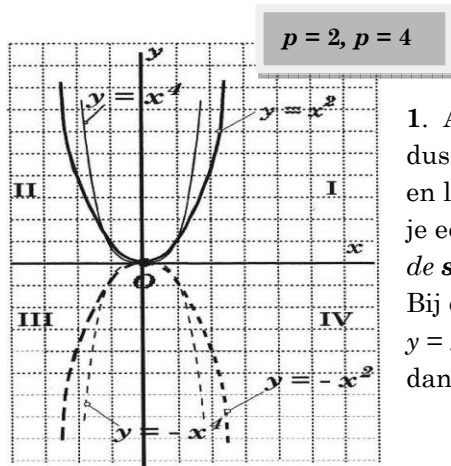
Voorbeelden: $3^7 \cdot 3^{-9} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, $5^{-2\frac{1}{2}} = \frac{1}{5^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5^5}}$, $7^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{7^3}$, $12^{-0,38} \approx 0,389$ (GR)

Machtsfuncties waarin x hoogstens tot de macht n voorkomen, heten n^{de} graads machtsfuncties.

Zo is het *polynoom* $f(x) = ax + b$ een machtsfunctie van de *eerste graad*, polynomen als $f(x) = ax^2 + bx + c$ zijn van de *tweede graad*, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ van de *derde graad* et cetera. De eerdere 'lineaire functie' $f(x) = ax + b$ is dus een *eerstegraads machtsfunctie*, de 'kwadratische functie' $f(x) = ax^2 + bx + c$ is een *tweedegraads machtsfunctie*.

a. Grafieken van machtsfuncties

Aan de graad van enkelvoudige machtsfunctie kun je de (globale) grondvorm van hun grafieken herkennen. We onderzoeken hier de grafieken in de vier kwadranten I, II, III en IV van machtsfuncties $f(x) = y = x^p$ bij verschillende waarden van p .

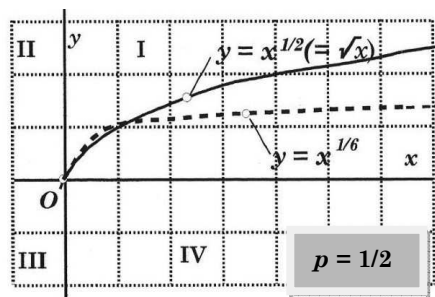
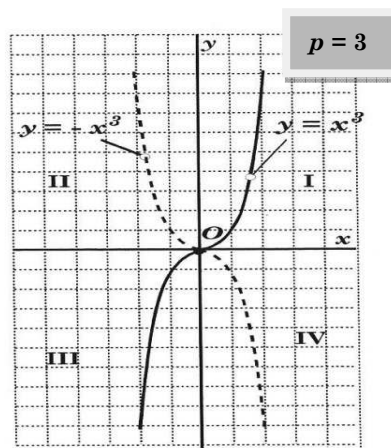


1. Als p in $y = x^p$ een positief, even getal is, dus $p = 2, 4, 6, \dots$ dan zijn alle y -waarden van $y = x^p$ positief en ligt de grafiek geheel in I en II. In de grondvorm herken je een **dalparaboloïde**, die als $p = 4, 6, 8, \dots$ 'puntiger' is dan de **standaard dalparabool** $y = x^2$ dus waarin $p = 2$. Bij eenzelfde waarde van p is $y = -x^p$ het spiegelbeeld van $y = x^p$ in de x -as (gestreept) en zie je daarin als grondvorm dan ook de **bergparaboloïden**.

2. Is p in $y = x^p$ een positief, oneven, geheel getal $\neq 1$, dus $p = 3, 5, 7, \dots$ dan bestaan er in tegenstelling tot de even machten van x (x^2, x^4, x^6, \dots die steeds ≥ 0 zijn), ook **negatieve** y waarden. Bijvoorbeeld $(-3)^3 = -27 = -(3^3)$.

Hierdoor heeft $y = x^p$ bij **oneven** p dan ook waarden in het eerste- en derde kwadrant.

Omdat $(-x)^p = -(x^p)$ is de grafiek van $y = -(x^p)$ een **spiegeling in de oorsprong** van $y = x^p$.



3. Als p in $y = x^p$ een positieve breuk is, waarvan de **teller oneven is en de noemer even**, zoals in $y = x^{\frac{1}{2}}$ en $x^{\frac{1}{6}}$ dan bestaan er **geen reële** y waarden **bij negatieve** x . Zo is bij $y = x^{\frac{1}{2}}$ als $x = -1$ gelijk aan $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ en is $y = (-x)^{\frac{1}{6}}$ bij $x = -1$ gelijk aan $(-1)^{\frac{1}{6}} = ((-1)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ dus bestaan niet in \mathbb{R} .

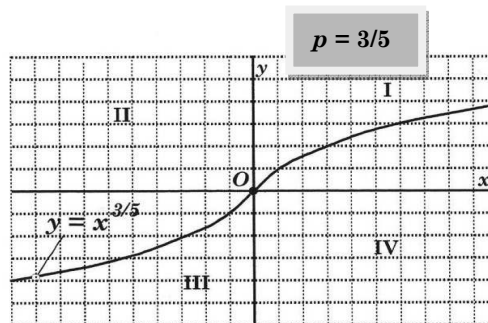
Omdat bij een **positieve waarde van x** ook alle alle machten van x positief zijn, liggen alle waarden van $y = x^p$ dan in I.

4. Als p in $y = x^p$ een positieve breuk is, met **teller en noemer oneven** dan bestaan er ook reële y waarden bij **negatieve** x , die dan ook zelf negatief zijn, en dus in III liggen.

Zo is hier de y waarde van $x = -4$ in $y = x^{\frac{3}{5}}$:

$$y = (-4)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-4)^3} = \sqrt[5]{-64} \approx -2,297.$$

De grafiek van $y = x^{\frac{3}{5}}$ ligt nu in I en III. *)



*) Met de GR TI-83/84 zijn alle grafieken direct te 'plotten'. VB: Voer in: $Y1 = X^{(3 \div 5)}$ ENTER.

Druk op WINDOW en kies Xmin = -5, Xmax = 5, Ymin = -5, Ymax = 5. Kies Xscl = 1 en Yscl = 1 ENTER

Druk op Graph en de grafiek uit voorbeeld 4 verschijnt op het display.

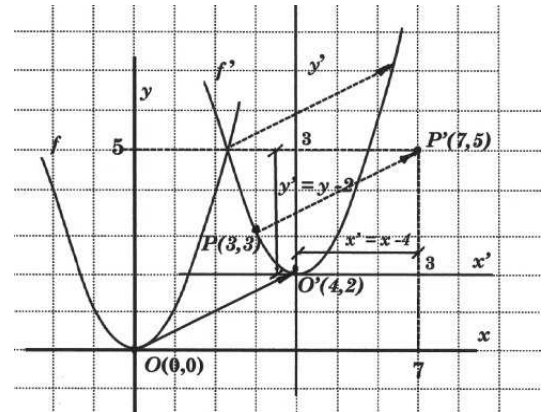
b. Transformaties

Uit de grafieken van standaardfuncties zoals $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$ kan je via *transformaties* vaak gemakkelijk formules afleiden van meer gecompliceerde functies.

Bij **congruentietransformaties** als: *translatie* ('evenwijdige verschuiving' van $y = f(x)$), *rotatie* (draaiing om de oorsprong O) en *spiegeling* (vermenigvuldiging t.o.v. een lijn met de factor -1) ontstaat uit $f(x)$ een *beeld* $f'(x)$ dat *congruent* is met $f(x)$. Voorbeelden:

- Transformaties door translatie

Hiernaast is in een XOY stelsel de grafiek f getekend van de 'standaardparabool' $y = x^2$. De top ligt in de oorsprong O . Via een **translatie** $T(4,2)$ verschuiven alle punten over +4 eenheden naar rechts (positieve x -richting) en +2 eenheden omhoog (positieve y -richting), waardoor een **met f congruente** grafiek f' ontstaat. De oorsprong $O(0,0)$ = top van f , wordt nu afgebeeld op het punt $O'(4,2)$, de oorsprong van het verschoven assenstelsel $x'O'y'$.



Een willekeurig punt $P(x,y)$, (in de figuur $P(3,3)$), wordt door de translatie $T(4,2)$ afgebeeld op het punt

$P'(x + 4, y + 2)$, (in de figuur $P'(7,5)$).

Ten opzichte van het $x'O'y'$ -stelsel geldt dan dat $x' = x - 4$ en $y' = y - 2$... (1)

De vergelijking van de verschoven parabool f' is $f': y' = (x')^2$ want de top van f' ligt in de oorsprong O' dus geldt hier de *topvergelijking* ten opzichte van het stelsel $x'O'y'$.

Substitutie hierin van de waarden $x' = x - 4$ en $y' = y - 2$ uit (1) geeft als vergelijking van de parabool f' : $y' = x'^2$: $y - 2 = (x - 4)^2 \Rightarrow y = (x - 4)^2 + 2$ (2)

Noem je de *translatie* $T(4,2)$ nu algemeen $T(a, b)$, dan volgt direct uit (2):

$$f: y = x^2 \Rightarrow T(a, b) \Rightarrow f': y = (x - a)^2 + b \quad \dots (3)$$

Deze transformatieregel werd voor het gemak afgeleid via de functie $f(x) = y = x^2$ door op het translatiebeeld $y' = x'^2$ de *algemeen geldende betrekkingen bij translaties* volgens regel (1) toe te passen. De regel geldt ook onvoorwaardelijk voor elke andere functie $y = f(x)$ zoals $y = \sqrt{x}$, $y = \ln(x)$, $y = \sin(x)$, ... We definiëren daarom

Bij de translatie $T(a,b)$ geldt voor het beeld $f'(x)$: $y = f(x - a) + b$

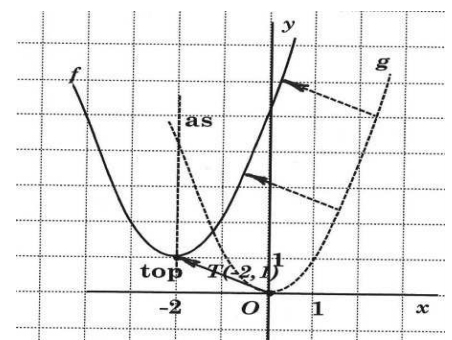
Voorbeeld:

1) Schets de grafiek van de functie $f: y = (x + 2)^2 + 1$

Volgens de definitie gaat bij een translatie $T(a, b)$ de grafiek g van $y = f(x) = x^2$ over in $f: y = (x - a)^2 + b$. In $f: y = (x + 2)^2 + 1$ is dan $a = -2$ en $b = 1$ dus ontstaat de functie $f: y = (x + 2)^2 + 1$ uit de translatie $T(-2, 1)$ van de standaardfunctie $g: y = x^2$

In de figuur is de grafiek van f getekend.

De **top** is dan het punt $(-2, 1)$, de **as** is de lijn $x = -2$.

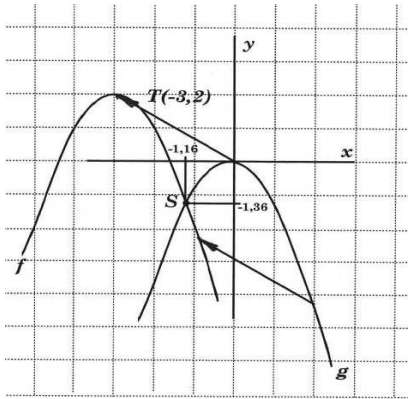


2. Schets de grafiek van de functie $f: y = -x^2 - 6x - 7$ en bepaal het snijpunt van f en de parabool $g: y = -x^2$

Door kwadraatplitsing herleid je eerst de gegeven functie $f: y = -x^2 - 6x - 7$ tot:

$$f: (-x^2 - 6x - 9) + 2 = -(x + 3)^2 + 2.$$

Volgens de translatietransformatie-regel is dit de grafiek van de functie die ontstaat uit de standaardfunctie $g: y = -x^2$ door de **translatie** $T(-3, 2)$.



De **top** van (bergparabool) f is dan het punt $(-3, 2)$ de **as** is de lijn met $x = -3$.

Het **snijpunt** $S(x, y)$ van de grafieken f en g volgt uit:

$$y = -x^2 - 6x - 7 \wedge y = -x^2 \text{ dus uit } -6x - 7 = 0 \text{ zodat}$$

$$x = -\frac{7}{6} \approx -1,16 \text{ en } y = -x^2 = -\left(-\frac{7}{6}\right)^2 \approx -1,36.$$

Het gevraagde snijpunt is dan $S(-1,16; -1,36)$.

3. Schets de grafiek van de functie $f: y = (x - 3)^5 - 50$ en bepaal de coördinaten van de snijpunten van f met de lijn $l: y = 25x$.

De grafiek van de functie $f: y = (x - 3)^5 - 50$ ontstaat uit $f: y = x^5$ door de **translatie** $T(3, -50)$.

De snijpunten van de lijn $l: y = 25x$ met de grafiek van f bereken je in het $x' O' y'$ -stelsel omdat daarin geldt $f': y' = (x')^5$ en $l': y' = \frac{50}{2} x' = 25x'$, want $l' \parallel l$ gaat door O .

Voor de snijpunten van l' en f' geldt dan $(x')^5 = 25x'$ dus $x' = 0 \vee (x')^4 = 25 \Rightarrow x' = \pm \sqrt[4]{25} = \pm \sqrt{5}$ Uit $y' = 25x'$ volgt dan $y' = 0 \vee y' \approx \pm 25 \cdot \sqrt{5}$

De snijpunten van $f': y = (x - 3)^5 - 50$ en $l: y = 25x$ zijn S_1', S_2' en S_3' (witte stippen in de figuur), met: $S_1' = (\sqrt{5}, 25\sqrt{5})$; $S_2' = (0, 0)$; $S_3' = (-\sqrt{5}, -25\sqrt{5})$

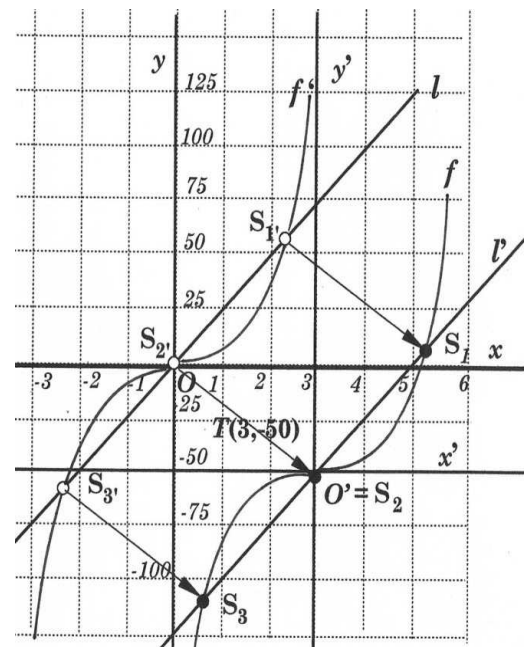
De gevraagde snijpunten S_1, S_2 en S_3 (zwarte stippen in de figuur), van l' en f zijn dan:

$$S_1 = (\sqrt{5}; 25\sqrt{5}) + T(3, -50) = (\sqrt{5} + 3, 25\sqrt{5} - 50)$$

$$S_2 = (0, 0) + T(3, -50) = (3, -50)$$

$$S_3 = (-\sqrt{5}, -25\sqrt{5}) + T(3, -50) = (3 - \sqrt{5}, -25\sqrt{5} - 50)$$

NB: Hiermee zijn de snijpunten van $f: y = (x - 3)^5 - 50$ en $l: y = 25x$ exact bepaald, via de translatietransformatie $T(3, -50)$, waarmee de vijfdegraadsvergelijking: $(x - 3)^5 - 25x = 50$ exact is opgelost. De betekenis van transformaties van functies blijkt duidelijk uit dit voorbeeld.

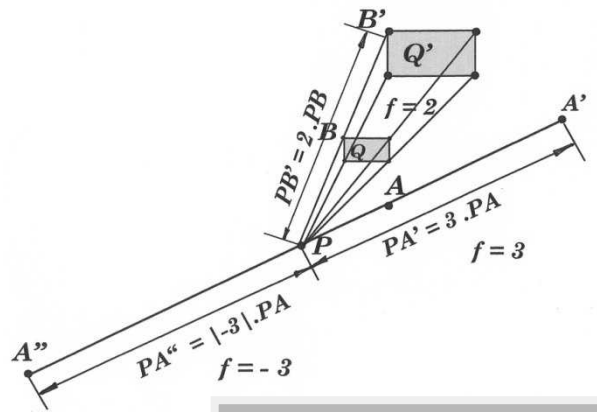


Transformaties door vermenigvuldiging

Ook bestaan transformaties van functies door *vermenigvuldiging van figuren*.

Men onderscheidt daarbij:

- a - vermenigvuldiging ten opzichte van een punt
- b - vermenigvuldiging ten opzichte van een lijn



vermenigvuldiging t.o.v. punt P

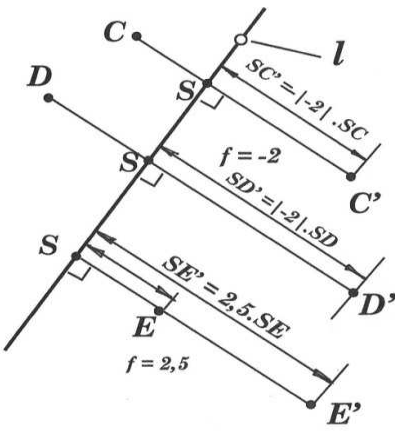
a. Per definitie is het *product* van een punt A

ten opzichte van een punt P (= het 'centrum')

bij een *positieve factor f*, het punt A' op de lijn PA, waarvoor geldt dat $PA' = f \times PA$.

Zo is ook de rechthoek Q' het beeld van Q bij vermenigvuldiging t.o.v. P met de factor $f = +2$

Bij een *negatieve factor f* ligt het beeldpunt A'' van punt A op de lijn AP aan de andere kant van P als A en wel zo dat $PA'' = |f| \times PA$, hier $PA'' = |-3| \times PA$



vermenigvuldiging t.o.v. lijn l

b. Bij vermenigvuldiging van een punt E ten opzichte van een

lijn l met een *positieve factor f* ontstaat het beeldpunt E' door vanuit E een loodlijn op l neer te laten en vanuit het voetpunt S van die loodlijn een afstand SE' zo af te passen, dat $SE' = f \times SE$, in de figuur is $f = 2,5$ dus $SE' = 2,5 \times SE$

Bij een *negatieve factor f* ligt het beeldpunt D' van punt D op de lijn DS aan de andere kant van S als D, en wel zo dat

$SD' = |f| \times SD$, dus in de figuur met $f = -2$: $SD' = |-2| \times SD$

Zo is ook C' het beeldpunt van C bij vermenigvuldiging van C t.o.v. l met de factor $f = -2$, zodat $SC' = |-2| \times SC$

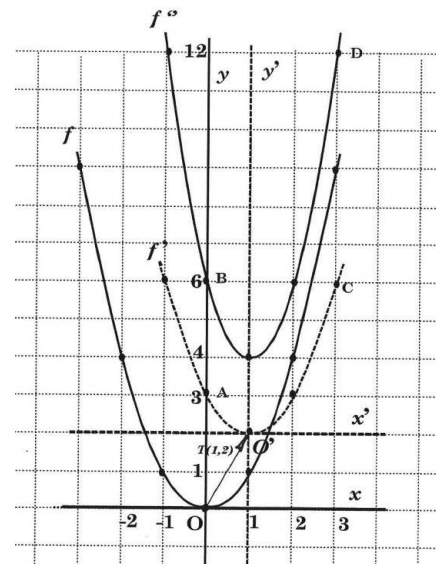
Toepassing:

Teken de grafiek van de functie g: $y = 2x^2 - 4x + 6$.

Omdat de *coëfficiënt van x² ≠ 1* heeft g niet de vorm van de *standaardparabool y = x²* zoals alle grafieken van de functies $y = 1x^2 + bx + c$. Met alleen de *translatietransformatie* kan je deze opgave dus niet oplossen. Ga daarom als volgt te werk:

1⁰ Pas kwadraatafsplitsing toe, dus schrijf: $g: y = 2x^2 - 4x + 6$
 $\Rightarrow y = 2(x^2 - 2x + 3) = 2\{(x^2 - 2x + 1) + 2\} = 2(x - 1)^2 + 4$

2⁰ Pas de **translatie** T(1,2) toe op de punten van de standaardgrafiek $f: y = x^2$ zodat het beeld ontstaat van de grafiek $f' = (x - 1)^2 + 2$ (volgens de *translatietransformatie-regel*).



3⁰ *Vermenigvuldig* dit beeld f' ten opzichte van de x-as met +2 (notatie P(x-as, 2)).

Dit geeft: $f'' : y = 2 \cdot (x - 1)^2 + 4 = 2x^2 - 4x + 6$, de gevraagde parabool g, want uit de definitie van vermenigvuldiging t.o.v. een lijn (hier de x-as) volgt direct de eigenschap:

Bij de vermenigvuldiging P(x-as, a) gaat een functie $y = f(x)$ over in $y = a \cdot f(x)$

- Transformaties van wortelvormen

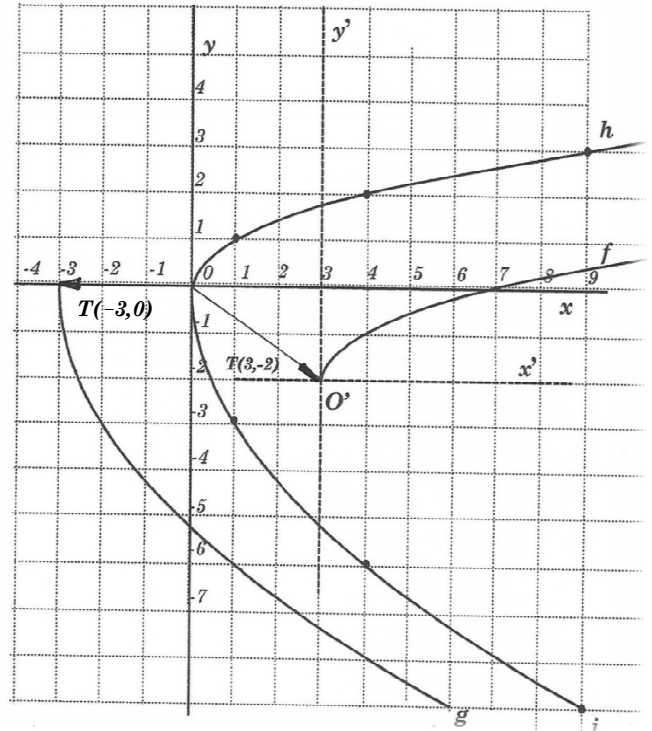
Ook de grafieken van *wortelvormen* (*machtsfuncties* met gebroken exponent) kunnen via translatie en/of vermenigvuldiging ten opzichte van de *x*-as, afgeleid worden uit hun standaardvorm $y = \sqrt{x} = x^{0,5}$

Voorbeelden:

- a. Schets de grafieken van de functies
 $f: y = \sqrt{x-3} - 2$ en $g: y = -3\sqrt{x+3}$
- b. Geef de coördinaten van het beginpunt van elk..
- c. Geef domein en bereik aan van beide functies.

- a. Teken de standaardgrafiek $h: y = \sqrt{x}$.
 Deze heeft als startpunt het punt (0,0) en gaat verder door de roosterpunten (1,1), (4,2), (9,3),...
 - Pas nu op h de translatie $T(3,-2)$ toe dan ontstaat volgens de translatietransformatie-regel de gevraagde grafiek $f: y = \sqrt{x-3} - 2$

- Uitgaande van de standaardgrafiek $h: y = \sqrt{x}$ *vermenigvuldig* je deze *t.o.v.* de *x*-as met de factor -3 , waaruit de grafiek $i: y = -3\sqrt{x}$ ontstaat.
 Pas hierop de translatie $T(0,-3)$ toe, dan vind je de grafiek van $g: y = -3\sqrt{x+3}$ welke werd gevraagd.



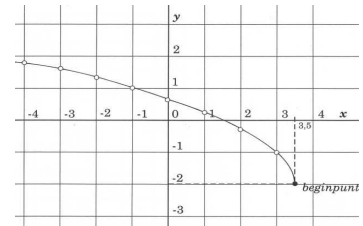
- b. In de figuur zie je direct dat het *beginpunt* van $f: y = \sqrt{x-3} - 2$ het *beeldpunt* $O'(3,-2)$ is van het origineel (0,0) van $h: y = \sqrt{x}$ bij de translatie $T(3, -2)$.
 Zo is het beeldpunt $(-3,0)$ het *beginpunt* van $g: y = -3\sqrt{x+3}$.

- c. De linkergrens van het *domein* van de *standaardgrafiek* $h: y = \sqrt{x}$ is $x = 0$ in het punt $O(0,0)$, de rechtergrens is ∞ , dus $D_h = [0, \rightarrow)$ De linkergrens van het *bereik* van h is de waarde $y = 0$, de rechtergrens is $y = +\infty$ dus $B_h = [0, \rightarrow)$. Daaruit volgt dan:
 De linkergrens van het *domein* van f is $x = 3$ de rechtergrens is $x = +\infty$, dus $D_f = [3, \rightarrow \mathbb{Q}$
 linkergrens van het *bereik* van f is $y = -2$ de rechtergrens is $y = +\infty$, dus $B_f = [-2, \rightarrow \mathbb{Q}$
 De linkergrens van het *domein* van g is $x = -3$, de rechtergrens is $x = +\infty$, dus $D_g = [-3, \rightarrow \mathbb{Q}$
 linkergrens van het *bereik* van g is $y = 0$, de rechtergrens is $y = -\infty$, dus $B_g = \langle \leftarrow, 0]$.

Het is in het algemeen *niet direct* mogelijk om *wortelvormen* betrouwbaar te 'plotten' in de GR. Als voorbeeld de functie $f(x) = y = -2 + \sqrt{7-2x}$:

- Voer in $y = -2 + \sqrt{7-2x}$ en kies via [WINDOW] $X_{min} = -4$; $X_{max} = 4$; $Y_{min} = -2$; $Y_{max} = 2$.
 Andere waarden in WINDOW 1 laten, en in TBLSET TblStart en Δ Tbl op 1 instellen..
 De *tabel* [TABLE] van de grafiek geeft *vanaf* $X = 4$ 'ERROR' omdat daarvoor dan $\sqrt{7-2x} = \sqrt{-1}$ niet bestaat.
 Verander je via [TBLSET] Δ Tbl in 0.1 dan geeft de GR 'ERROR' *vanaf* $X = 3,6$
 Een eenduidig 'beginpunt' van de grafiek, vindt de GR dus niet omdat de 'trace-cursor' met een vaste stapgrootte werkt.

Een beginpunt moet dus handmatig worden bepaald: $7 - 2x \geq 0$, dus $2x \leq 7 \Rightarrow x \leq 3,5$, dus is van het **startpunt** $x = 3,5$ waarbij dan $y = -2 + \sqrt{7 - 2x} = -2$.



Beginpunt van f: $y = -2 + \sqrt{7 - 2x}$ is dus het punt $S(3,5; -2)$. Het domein van de functie is $\langle \leftarrow; 3,5 \right]$, het bereik is dan $[-2, \rightarrow \infty)$

Verdere punten van de grafiek volgen uit onderstaande tabel

x	3,5	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
y	-2,00	-1,00	-0,27	0,24	0,65	1,00	1,32	1,61	1,87

Overzicht van de meest gebruikte transformaties

Bij de *translatie* $(0, a)$ tel je a op bij de functiewaarde y (x blijft onveranderd)

$$y = 2^{x+1} - 3 \xrightarrow{\text{translatie } (0,5)} = 2^{x+1} + 2$$

Bij de *translatie* $(b, 0)$ vervang je x door $x - b$ (y blijft onveranderd)

$$y = x^2 - 3x \xrightarrow{\text{translatie } (2,0)} y = (x - 2)^2 - 3(x - 2) = x^2 - 7x + 10$$

Bij de *vermenigvuldiging* met c t.o.v. de x -as vermenigvuldig je (alleen) y met c

$$y = \frac{x-1}{2x-3} \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } 4} y = 4 \cdot \frac{x-1}{2x-3} = \frac{4x-4}{2x-3}$$

Bij de *vermenigvuldiging* met d t.o.v. de y -as vervang je (alleen) x door $\frac{1}{d} \cdot x$

$$y = 4 + \sqrt{2x-1} \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } 3} y = 4 + \sqrt{2 \cdot \frac{1}{3}x - 1} = 4 + \sqrt{\frac{2}{3}x - 1}$$

Bij *spiegeling in de lijn* $y = x$ vervang je x door y en y door x

$$2x - 3y = 4 \xrightarrow{\text{spiegeling in } y=x} 2y - 3x = 4$$

$$y = 3 \ln(x) \xrightarrow{\text{spiegeling in } y=x} x = 3 \ln(y) \text{ ofwel } \ln(y) = \frac{1}{3}x \Rightarrow y = e^{\frac{1}{3}x}$$

5. Exponentiële functies

Naast de *machtsfunctie* $f(x) = x^a$ met vaste exponent a en variabel grondtal x , bestaat 'omgekeerd' een **exponentiële functie** $f(x) = a^x$ met vast grondtal a en variabele exponent x .

Functies waarvan de exponent x de variabele is en een positief grondtal een constante heten exponentiële functies. Algemene vergelijking: $y = f(x) = a^x$ ($a > 0$ en $a \neq 1$)

Voor $a \leq 0$ is de functie *niet gedefinieerd*.

Immers als $a = 0$ dan is $a^x = 0$ voor elke $x \neq 0$ dus is a^x *geen functie*.

Als $a < 0$ dan *bestaat* a^x *niet voor elke waarde van* x .

Zo zijn: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; $a^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{a})^3$; $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$;*ongedefinieerd als* a *negatief is.*

Bij elke exponent x , is de waarde van a^x ($a > 0$) steeds positief want:

- als $x > 0$ dan $a^x > 0$ omdat per definitie $a^x = a.a.a.a...$ (x -keer) dus weer positief.
- als $x < 0$ dan $a^x = 1 / a^{-x}$ dus zeker positief omdat a^{-x} dan positief is.

Alle grafieken van $y = f(x) = a^x$ liggen dus *in het eerste en tweede kwadrant*.

Omdat $a^0 = 1$ voor iedere a gaan *alle grafieken door het punt (0,1)*.

Beschouw nu de *functie* $f(x) = a^x$ voor waarden van a , met $0 < a < 1$ en die als $a > 1$.

1. $f(x) = a^x \wedge 0 < a < 1$

Voor $0 < a < 1$ is de functie **monotoon dalend**, dus bij

toenemende x neemt y *af*. Immers als $f(x) = a^x$ dan is

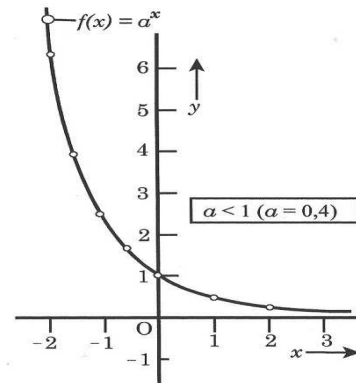
$f(x+1) = a^{x+1} = a \cdot a^x$ en daar $a < 1$ is $a \cdot a^x < a^x$ dus

$a^{x+1} < a^x$ zodat $f(x) = a^x$ *monotoon daalt*.

Bij *onbepaald grote toename* van x , dus als x tot *oneindig*

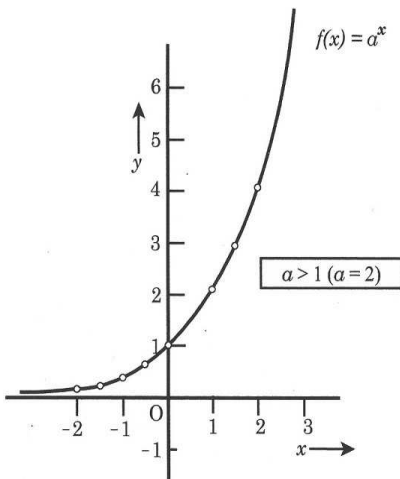
nadert, notatie $x \rightarrow \infty$, dan daalt a^x onbepaald dicht tot nul

omdat $0 < a < 1$. De waarde nul wordt nooit bereikt, want er bestaat geen reële x waarvoor a^x ($a \neq 0$) gelijk is aan nul, zodat bij toenemende x de grafiek steeds dichtter tot de *positieve x-as* (rechts van O) nadert *zonder hem ooit te raken*:



De x -as heet dan een (*horizontale*) **asymptoot** van de grafiek van $f(x) = a^x$. ($0 < a < 1$)

2. $f(x) = a^x \wedge a > 1$



Als $a > 1$ dan is de functie **monotoon stijgend**, want: als

$f(x) = a^x$ dan is $f(x+1) = a^{x+1} = a \cdot a^x$ en daar $a > 1$ is dan

$a \cdot a^x > a^x$ dus $a^{x+1} > a^x \Rightarrow f(x) = a^x$ is dan *monotoon stijgend*.

Bij *afname* van de waarde van x wordt de waarde van a^x steeds kleiner want $a^{x-1} = \frac{a^x}{a} < a^x$ omdat $a > 1$.

Bij onbepaald grote afname van x , als x tot $-\infty$ nadert, dan

nadert a^x onbepaald dicht tot nul. De waarde nul wordt nooit

bereikt, omdat er geen reële x bestaat met $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = 0$ dus hier zal bij afnemende x de grafiek steeds dichtter tot de *negatieve x-as* naderen:

De x -as is dus ook hier een **horizontale asymptoot**.

- Exponentiële groei

In onderstaande tabel wordt de groei weergegeven van de bevolking van Latijns-Amerika in de vierjaarlijkse perioden tussen 1950 en 1970

jaar	1950	1954	1958	1962	1966	1970
aantal $\times 10^6$	164	183	203	227	254	282

Elke periode blijkt de bevolking met een *factor* van *circa* 1,11 te zijn toegenomen, want:

$$\frac{183}{164} \approx \frac{203}{183} \approx \frac{227}{203} \approx \frac{254}{227} \approx \frac{282}{254} \approx 1,11.$$

De factor 1,11 heet in zo'n geval de **groefactor**. Het **groeipercentage** is dan 11%.

Werk je met de groeifactor de bevolkingsaantallen in de onderste rij uit, dan vind je:

<i>aantal</i> $\times 10^6$	164	183 $= 1,11 \times$ 164	203 $= 1,11$ $\times 1,11 \times$ 164	227 $= 1,11$ $\times 1,11$ $\times 1,11 \times$ 164	254 $= 1,11$ $\times 1,11$ $\times 1,11$ $\times 1,11 \times$ 164	282 $= 1,11$ $\times 1,11$ $\times \dots$ $\times \dots$ 164
	$1,11^0 \times 164$	$1,11^1 \times 164$	$1,11^2 \times 164$	$1,11^3 \times 164$	$1,11^4 \times 164$	$1,11^5 \times 164$

Je ziet dan dat bij de *groeifactor* 1,11 na t perioden van 4 jaar ($t = 0, 1, 2, 3, 4$) de *beginwaarde* 164 (dus het inwonertal na $t = 0$ perioden) met een factor $1,11^1, 1,11^2, 1,11^3, 1,11^4, 1,11^5$ is toegenomen, dus t perioden na de startwaarde 160 is die waarde toegenomen tot $1,11^t \times 164$.

Deze toename wordt **exponentiële groei** genoemd.

Noemen we de **startwaarde** $164 = N(0)$ en de *groeifactor per periode* $1,11 = g$ dan is na t perioden: $N(t) = N(0) \cdot g^t$. $N(t)$ is dus een *exponentiële functie van t*.

Bij exponentiële groei waarbij de groeifactor g in gelijke perioden constant is, is na t perioden: $N(t) = N(0) \cdot g^t$ ($N(0) = \text{startwaarde}$)

Toepassingen:

1. Een zekere hoeveelheid neemt *elk kwartier* met 12% toe. Bereken:

- a. de *groeifactor* per kwartier
- b. de *groeifactor* en het *groeipercentage* per uur
- c. het *groeipercentage* per *vijf minuten*

a. Na een kwartier is de hoeveelheid gegroeid tot $1,12 \times$ de startwaarde (= 1).

De *groeifactor per kwartier* is dan $1,12 : 1 = 1,12$.

b. De *groeifactor per uur* (4×1 kwartier) is $1,12^4 = 1,574$; het *groeipercentage* is **57,4%**

c. De *groeifactor* in vijf minuten (= $1/3$ kwartier) is $1,12^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1,12} \approx 1,0385$
dus het *groeipercentage* per vijf minuten is $\approx 3,85\%$

2. Een bacteriecultuur groeit exponentieel.

Op $t = 4$ zijn er 50.000 bacteriën, op $t = 8$ zijn er 130.000 bacteriën als t de tijd is in uren.

Bereken *groeifactor* en *groeipercentage* per uur en de *groeifactor* per dag.

De *groeifactor* g is in vier uur $\frac{130.000}{50.000} = 2,6$, dus *per uur* $(2,6)^{\frac{1}{4}} \approx 1,270$.

Het *groeipercentage* per uur is $\approx 27\%$

Per dag is de *groeifactor* $1,270^{24} \approx 310$.

6. Gebroken rationale functies

Gebroken rationale functies zijn functies van de vorm $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ waarin $g(x)$ en $h(x)$ polynomen zijn met reële coëfficiënten.

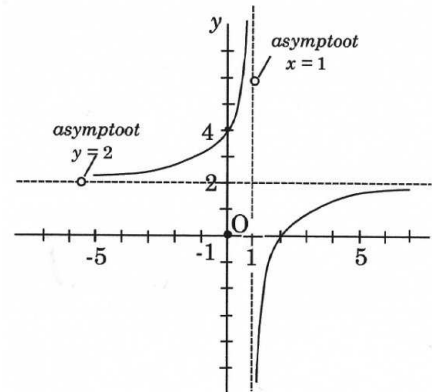
De grafieken van deze functies kunnen verschillende *hyperbolische* vormen aannemen. Hiervan een voorbeeld

$$f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$$

De functie is niet gedefinieerd in het punt met $x = 1$, omdat voor die waarde de *noemer gelijk aan nul* wordt en dus de bijbehorende functiewaarde onbepaald is.

De functie heet dan **discontinu** in het punt met $x = 1$.

Verder volgt uit $x = 0 \Rightarrow y = 4$ en uit $y = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0$ dus $x = 2$ zodat de grafiek de x -as snijdt in het punt $(2,0)$ en de y -as in $(0,4)$.



Plot je de functie in de GR, dan blijkt de grafiek te bestaan uit twee krommen die je (na *kegelsneden*) zult herkennen als de *twee takken van een gelijkzijdige hyperbool*.

Je ziet dat *bij toenemende* $|x|$ (dus x naar rechts of naar links toenemend), *rechter- en linkertak naderen tot de lijn* $y = 2$ hetgeen als volgt is te bewijzen:

Deel je teller en noemer van $f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$ door x , dan ontstaat $f(x) = \frac{\frac{1}{x}(2x-4)}{\frac{1}{x}(x-1)} = \frac{2-\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}}$... (1)

Als x in (1) tot oneindig nadert, dan naderen $\frac{4}{x}$ en $\frac{1}{x}$ tot nul zodat (1) overgaat in

$$f(x) = \frac{2-\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{2-0}{1-0} = 2. \text{ In wiskundige termen: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-4}{x-1} = 2 \text{ (Volgt op blz. 37).}$$

De lijn $y = 2$ heet nu een **horizontale asymptoot** van de functie $y = f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$

Zo is ook aan te tonen dat *bij toenemende* $|y|$ beide takken *naderen tot de lijn* $x = 1$.

De functie heeft dus ook een **verticale asymptoot** $x = 1$. Gr.'symptootos' = samenvallend).

Voorbeelden van asymptoten:

Een *asymptoot van een functie* is in het algemeen een *lijn* $y = ax + b$ waartoe de kromme $y = f(x)$ steeds dichter nadert, zonder hem ooit te raken. We onderscheiden **horizontale, verticale en scheve asymptoten**. Hoe dichter x en of y tot *oneindig naderen*, hoe dichter de (grafiek van) $y = f(x)$ tot de *lijn* $y = ax + b$ nadert.

In het geval hierboven zijn dus de *horizontale asymptoot* $y = 2$ en de *verticale asymptoot* $x = 1$ twee asymptoten van de functie $y = f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$.

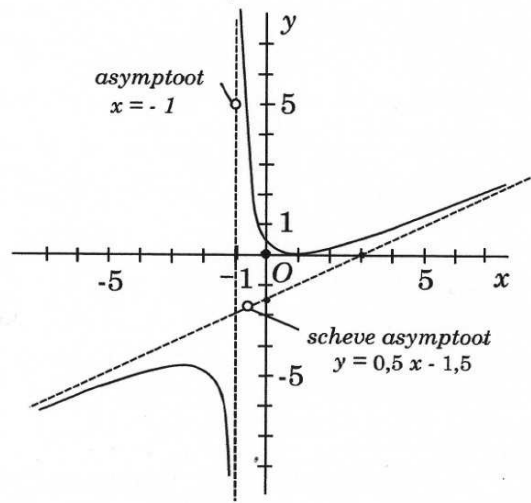
In de volgende opgave wordt een *scheve asymptoot* berekend.

1. $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$

Omdat de noemer van de breuk bij $x = -1$ de waarde nul aanneemt, is de functie voor dat punt niet gedefinieerd. Je ziet dan ook dat de grafiek van $f(x)$ **niet bestaat** in $x = -1$. De functie heet daarom *discontinu* in $x = -1$.

- Het *snijpunt met de y-as* is het punt met $x = 0$
en $y = \frac{0,5(0-1)^2}{0+1} = 0,5$, dus het punt $(0; 0,5)$.

- Een *snijpunt met de x-as* is het punt met
 $y = 0$, dus als $\frac{0,5(x-1)^2}{x+1} = 0$ ofwel:
 $0,5(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ (dubbeltellend)
twee *samenvallende wortels*: $x = 1$.
Punt $(1, 0)$ is dan *raakpunt* van $f(x)$ aan de x-as.



1^o. De grafiek heeft een verticale asymptoot in het punt met $x = -1$. Bewijs:

Als x van links nadert tot -1 dan nadert de noemer van $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$ tot 0 waarbij dan de waarde van $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$ tot $-\infty$ nadert.
 $x = -1$ is dus een (verticale) asymptoot van de linkertak van de hyperbool.

2^o. Ook van de rechtertak is de lijn $x = 1$ een asymptoot want als x van rechts nadert tot -1 dan nadert de noemer van $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$ tot 0 dus tot 0 . *)

De waarde van $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$ nadert dan **van rechts** tot $+\infty$ dus $x = -1$ is tevens asymptoot van de rechtertak van de hyperbool.

- Omdat een eventuele limiet van $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$ als x tot plus of min oneindig nadert niet direct is te berekenen, herleiden we de functie: door een *staartdeling* uit te voeren:

$$\begin{array}{r} x + 1 \overline{) 0,5x^2 - x + 0,5} \\ \underline{0,5x^2 + 0,5x} \\ -1,5x + 0,5 \\ \underline{-1,5x - 1,5} \\ 2 \end{array}$$

dus is de gegeven functie gelijkwaardig met:

$$y = 0,5x - 1,5 + \frac{2}{x+1}$$

De limiet hiervan als x tot oneindig nadert is dan $y = 0,5x - 1,5$ omdat $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x+1} = 0$

De lijn met vergelijking $y = 0,5x - 1,5$ is dan een **scheve asymptoot** van de gegeven functie.

* Het getal δ wordt in de wiskunde gebruikt om een kleine, tot nul naderende, positieve waarde, aan te geven.

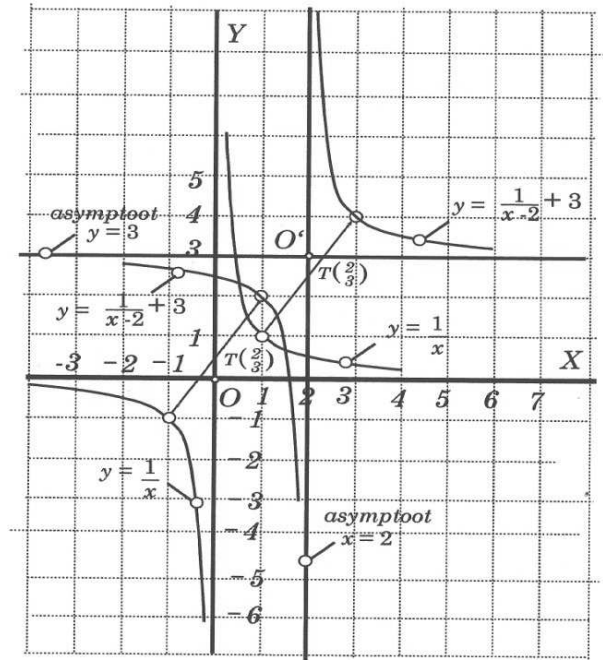
2. $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$

De grafiek van deze gebroken rationale functie (dus een hyperbool) ontstaat door de translatie $T(2,3)$ toe te passen op de *standaardhyperbool* $g: y = \frac{1}{x}$ volgens de translatietransformatie-regel.

Horizontale asymptoot van $g: y = \frac{1}{x}$ is de x -as met vergelijking $y = 0$, verticale asymptoot is de y -as met vergelijking $x = 0$.

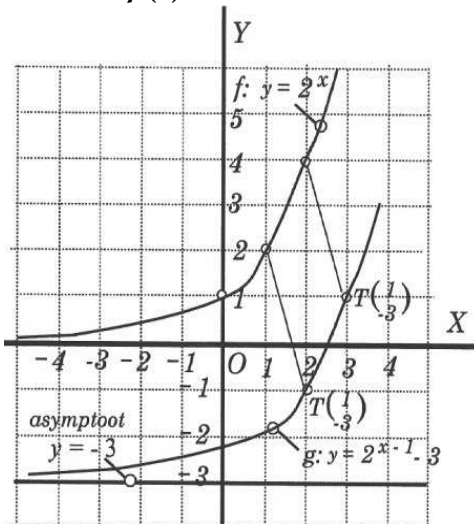
Bij de translatie $T(2,3)$ gaat de oorsprong O over in O' dus de vergelijking $y = 0$ over in $y = 0 + 3 = 3$ en de vergelijking $x = 0$ in $x = 0 + 2 = 2$

Van $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$ is de lijn $y = 2$ dan *horizontale asymptoot* en $x = 2$ de *verticale asymptoot*.



7. Grafieken van exponentiële functies

1. $f(x) = 2^{x-1} - 3$



Deze exponentiële functie ontstaat uit de standaardfunctie $g: y = 2^x$ via de translatie $T(1, -3)$.

Horizontale asymptoot van $f: y = 2^x$ is de x -as, dus de lijn $y = 0$, de *horizontale asymptoot* van $g: y = 2^{x-1} - 3$ is dan: $y = 0 - 3 = -3$.

Er is geen verticale asymptoot want $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x$ bestaat niet.

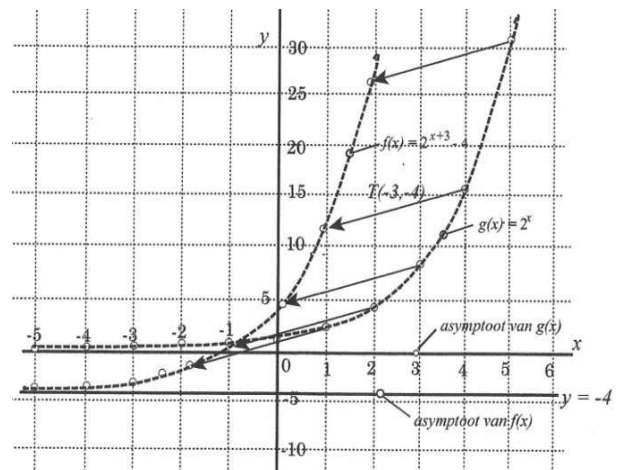
Het *domein* van f (alle waarden van x waarvoor de functie 2^x is gedefinieerd) is \mathbb{R} , dus is \mathbb{R} ook het *domein* van g .

Het bereik van f (alle functiewaarden die 2^x kan aannemen) is $(0, \infty)$, dus is $\langle -3, \infty \rangle$ het *bereik* van g .

2. $f(x) = 2^{x+3} - 4$

- a. Hoe ontstaat de grafiek van f uit de standaardgrafiek van een exponentiële functie?
- b. Bepaal het domein en het bereik van f .

De exponentiële functie $f(x) = 2^{x+3} - 4$ ontstaat uit de standaardfunctie $g(x) = 2^x$ via de translatie $T(-3, -4)$. Volgens voorgaande opgave is het domein van $g(x) = 2^x = \mathbb{R}$ dus is ook \mathbb{R} het *domein* van $f: y = 2^{x+3} - 4$. Het bereik van $g(x) = 2^x$ is $\langle 0, \infty \rangle$, dus van $f: y = 2^{x+3} - 4$ is het *bereik* $\langle -4, \infty \rangle$



Logaritmische functies

a. Logaritme van een getal

Exponentiële vergelijkingen zoals bij voorbeeld $17^x = 500$ kan je na voorgaande theorie nog niet exact oplossen. Alleen door 'proberen' met je GR is een *grove benadering* mogelijk.

Men heeft daarom de *logaritme van een getal* ingevoerd.

De Engelse wiskundige Henry Briggs (1561-1630) besloot alle *positieve getallen* als een **macht van tien** te schrijven. De *exponenten* van deze machten noemde hij **logaritmen**, dus de *logaritme* van een getal a is de *exponent p waarvoor $10^p = a$* .

Definitie: **$\log a = p$ als $10^p = a$** .

Zo is bijvoorbeeld $100 = 10^2$ dus de *logaritme van $100 = 2$* . Notatie: $\log 100 = 2$.

$1000 = 10^3$ dus $\log 1000 = 3$; $1 = 10^0 \Rightarrow \log 1 = 0$; $0,001 = 10^{-3} \Rightarrow \log 0,001 = -3$

De logaritmen van getallen a met $a \leq 0$ **bestaan niet** want er is *geen getal p waarvoor $10^p = a$ als $a \leq 0$* . (Immers: Elke positieve of negatieve macht van 10 is groter dan 0)

Briggs berekende de logaritmen van alle viercijferige getallen en verzamelde ze in 'logaritmetafels'. Zo ontstonden de **Briggse logaritmen**, met als **grondtal** het getal 10 ^{*)}

Niet alleen het getal tien kan als *grondtal g* voor logaritmen dienen, maar in feite **elk positief reëel getal mits $\neq 1$** .

Omdat bijvoorbeeld $9 = 3^2$ kan men met *als grondtal 3* zeggen ${}^3 \log 9 = 2$.

Zo is ${}^5 \log 125 = 3$ omdat $5^3 = 125$; ${}^{1/3} \log \frac{1}{27} = 3$, want $(1/3)^3 = \frac{1}{27}$, etc.

Men definieert dan: **${}^g \log a = x$ als $g^x = a$** ($g > 0$ als grondtal van een exponentiële functie.

Omdat $g > 0$ is dan ook $a > 0$ dus **als $a \leq 0$ dan bestaat ${}^g \log a$ niet**

Definitie:

*De g logaritme van een getal a is gedefinieerd door: **${}^g \log a = x$ als $g^x = a$** (a en $g > 0$, $g \neq 1$)*

De wiskundige John Napier (1707-1783) voerde veel later voor *het grondtal g* van de logaritmen het '**Getal van Euler**' = e in. ($e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2,718281828\dots$)

Logaritmen met dit grondtal noemt men **natuurlijke logaritmen** omdat de waarde ervan een grote rol speelt in veel natuurprocessen.

Notatie voor logaritmen *met grondtal e* is **$\ln x$** , dus **$\ln x = {}^e \log x$** .

*Log x is de Briggse logaritme van x met 10 als grondtal, dus $\log x = {}^{10} \log x$,
 $\ln(x)$ is de natuurlijke logaritme van x met e als grondtal dus $\ln x = {}^e \log x$.
Als $\log x = p$, dan is $10^p = x$, als $\ln x = p$ dan is $e^p = x$.*

De waarde van een logaritme met grondtal g is dus in feite de exponent van een g -macht

^{*)} Zo berekende Briggs handmatig 27 wortels uit 10: De wortel uit 10 daarna de wortel uit de uitkomst daarvan en daaruit weer de wortel et cetera. Alles in zestien decimalen nauwkeurig!. Omdat $\sqrt{10} = 10^{0,5} = 3,16227766\dots$, is $\log 3,16227766\dots = 0,5$; $\sqrt{3,16227766} = \sqrt{\sqrt{10}} = 10^{0,25} = 1,77827941\dots$ dus $\log 1,77827941\dots = 0,25$ enz.. En dat was maar een begin...

b. Eigenschappen van logaritmen

Voor elk positief grondtal g en alle positieve waarden voor a en b gelden de regels:

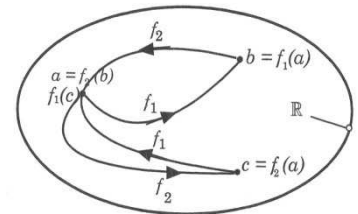
$$\begin{aligned}
 1. \quad & {}^g \log ab = {}^g \log a + {}^g \log b \\
 2. \quad & {}^g \log \frac{a}{b} = {}^g \log a - {}^g \log b \\
 3. \quad & {}^g \log(a^n) = n \cdot {}^g \log a \\
 4a \quad & {}^g \log(g^x) = x \text{ en } 4b: g^{{}^g \log x} = x
 \end{aligned}$$

Bewijs:

1. Noem ${}^g \log a = p$ en ${}^g \log b = q$ dan is per definitie $g^p = a$ en $g^q = b$ met gevolg: $ab = g^p \cdot g^q = g^{p+q}$, zodat ${}^g \log ab = p + q$ dus: ${}^g \log ab = {}^g \log a + {}^g \log b$.
2. Noem ${}^g \log a = p$ en ${}^g \log b = q$ dan is $g^p = a$, $g^q = b$ dus $\frac{a}{b} = \frac{g^p}{g^q} = g^{p-q}$ zodat ${}^g \log \frac{a}{b} = p - q \Rightarrow {}^g \log \frac{a}{b} = {}^g \log a - {}^g \log b$.
3. Als ${}^g \log a = p$ dan $g^p = a$ en $a^n = (g^p)^n = g^{n \cdot p} \Rightarrow {}^g \log(a^n) = n \cdot p = n \cdot {}^g \log a$ dus ${}^g \log(a^n) = n \cdot {}^g \log a$
- 4a. ${}^g \log(g^x) = x \cdot {}^g \log g$ (volgens 3) $= x \cdot 1 = x$ (want ${}^g \log g = 1$ omdat $g^1 = g$) $\Rightarrow {}^g \log(g^x) = x$.
- 4b. Noem ${}^g \log x = p$ dan $g^p = x$ zodat $g^{g^{\log x}} = g^p = x \Rightarrow g^{{}^g \log x} = x$.

c. Inverse functies

Het argument x van een functie $f(x)$ kan zelf een functie $g(x)$ van x zijn zodat $f(x) = f(g(x))$. Punt a wordt in de figuur door de functie f_1 afgebeeld op het punt b dus $b = f_1(a)$.



Stel nu dat het f_1 beeld b van a , dus $b = f_1(a)$ door de functie f_2 wordt 'terug' afgebeeld op a , dan is $a = f_2(b) = f_2(f_1(a))$... (1)

Door de functie f_2 wordt het punt a afgebeeld op c , zodat $c = f_2(a)$.

Stel nu dat ook dit f_2 -beeld c van a door de functie f_1 weer wordt 'terug' afgebeeld op a , dan is dus $a = f_1(c) = f_1(f_2(a))$... (2)

Volgens (1) en (2) geldt dan voor de functies f_1 en f_2 dat $f_2(f_1(a)) = f_1(f_2(a)) = a$.

Als dit geldt voor alle punten $x = a$ binnen het domein van f_1 en f_2 dan zijn f_1 en f_2 elkaars inverse functies.

Zijn f en g twee functies in \mathbb{R} waarbij voor elk element x geldt dat $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ dan zijn f en g elkaars inverse functies

Zo zijn machtsverheffen $f(x) = x^p$ en worteltrekken $g(x) = \sqrt[p]{x}$ elkaars inverse functies, want voor elk getal x is $f(g(x)) = f(\sqrt[p]{x}) = (\sqrt[p]{x})^p = x$ en $g(f(x)) = g(x^p) = \sqrt[p]{x^p} = x$. Hierbij geldt dan ook steeds als $f(b) = a$ dan is $g(a) = b$ dus als $f(x) = f(4) = 4^p$ dan is $g(x) = g(4^p) = \sqrt[p]{4^p} = 4$.

Eigenschap: De logaritmische functie $f(x) = {}^g \log x$ en de exponentiële functie $h(x) = g^x$ zijn elkaars inverse functies

Bewijs:

Noem $f(x) = {}^g \log x$ en $h(x) = g^x$ dan is: $f(h(x)) = f(g^x) = {}^g \log (g^x) = x$... (1)

Ook is $h(f(x)) = h({}^g \log x) = g^{{}^g \log x} = x$... (2)

Uit (1) en (2) volgt dan $f(h(x)) = h(f(x)) = x$ dus zijn $f(x) = {}^g \log x$ en $h(x) = g^x$ per definitie elkaars **inverse functies**.

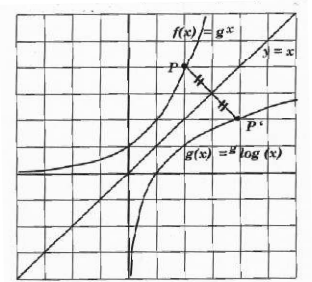
Algemene eigenschap van inverse functies

Twee functies f en g waarvan de grafieken elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn $y = x$ zijn elkaars inverse functies.

Bewijs:

Neem $f: y = e^x$ dan is daarvan volgens eerdere regel *het spiegelbeeld in de lijn $y = x$* $g: x = e^y$ (x en y omwisselen).

Uit $g: x = e^y$ volgt $g: {}^e \log x = y$, zodat nu de voorwaarde geldt:
 $f(g(x)) = e^{e \log x} = x$ en $g(f(x)) = e^{\log e^x} = x$: Conclusie **f en g zijn elkaars inverse functies en elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.**



Voorbeeld (Uit examenopgave vwo-B)

Toon aan dat $f(x) = 5 - \frac{6}{x+2}$ en $g(x) = \frac{2x-4}{5-x}$ elkaars inverse functies zijn:

a. Ga uit van $y = 5 - \frac{6}{x+2}$ en *verwissel x en y*

Je krijgt dan dat $x = 5 - \frac{6}{y+2}$ *het spiegelbeeld is van $y = 5 - \frac{6}{x+2}$ in de lijn $y = x$.*

b. *Maak y vrij in $x = 5 - \frac{6}{y+2}$*

Er komt dan $\frac{6}{y+2} = 5 - x \Rightarrow y + 2 = \frac{6}{5-x} \Rightarrow y = \frac{6}{5-x} - 2$

Dus $f^{inv}(x) = \frac{6}{5-x} - 2 = \frac{6-2(5-x)}{(5-x)} = \frac{6-10+2x}{(5-x)} = \frac{2x-4}{5-x} = g(x)$

Hiermee is aangetoond dat f en g elkaars inverse functies zijn.

Opgaven

1. *Bewijs dat algemeen geldt: ${}^g \log x = \frac{\log x}{\log g}$. (eigenschap 5)*

Noem ${}^g \log x = p$ dan is $x = g^p$. Noem $\log x = q$ dan is $x = 10^q$ zodat $g^p = 10^q = x$... (1)

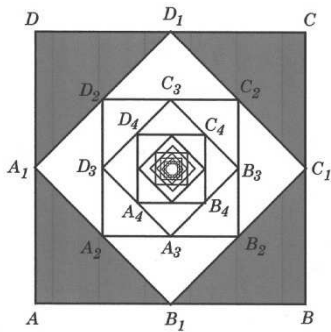
Noem $\log g = r$, dan $g = 10^r \Rightarrow x = g^p = (10^r)^p = 10^{r \cdot p} = 10^q$ volgens (1)

dus $r \cdot p = q \Rightarrow p = \frac{q}{r}$ ofwel ${}^g \log x = \frac{\log x}{\log g}$.

Dankzij deze eigenschap kunnen logaritmen met *elk willekeurig grondtal g* met de GR via Briggse logaritmen (grondtal = 10) berekend worden.

Voorbeelden: ${}^3 \log 17 = \frac{\log 17}{\log 3} \approx 2,5789$; ${}^{1/3} \log 52 = \frac{\log 52}{\log 1/3} \approx -3,5966$

2. De middens van de zijden van een vierkant $ABCD$ zijn de hoekpunten van vierkant $A_1B_1C_1D_1$. De middens van $A_1B_1C_1D_1$ zijn weer de hoekpunten van vierkant $A_2B_2C_2D_2$ en zo verder volgens onderstaande figuur. De zijde van $ABCD = 8$.
Bij welke index n zal de oppervlakte van vierkant $A_nB_nC_nD_n$ kleiner zijn dan 0,001?



De oppervlakte van $ABCD = 8^2 = 64$, de oppervlakte van $A'B'C'D' = \frac{1}{2} \times O_{ABCD} = \frac{1}{2} \times 64$ en ook van *elk volgend vierkant* is de oppervlakte steeds de helft van die van het vorige vierkant. van $A_nB_nC_nD_n$ is dan $O = 64 \times (\frac{1}{2})^n$.

Je berekent nu wanneer $O = 64 \times (\frac{1}{2})^n = 0,001$ uit de vergelijking **$\log (64 \times (\frac{1}{2})^n) = \log 0,001 = -3$** . (1)

Omdat $\log ab = \log a + \log b$ en $\log a^n = n \cdot \log a$ volgt uit (1):

$$\log 64 + n \cdot \log \frac{1}{2} = -3 \Rightarrow 1,80617 + n \cdot -0,30103 = -3 \Rightarrow 4,80617 = 0,30103 n \Rightarrow n = 15,9658 \Rightarrow$$

De oppervlakte van $A_{16}B_{16}C_{16}D_{16}$. De gevraagde **index n** is dus **16**.

Controle: $64 \times (\frac{1}{2})^{16} = 0,000976 (< 0,001)$ en $64 \times (\frac{1}{2})^{15} = 0,001953 (> 0,001)$.

9. Goniometrische functies

a. Definities in de eenheidscirkel

In de driehoeksmmeetkunde worden *sinus*, *cosinus* en *tangens* van **hoeken** $< 90^\circ$ gedefinieerd als de *verhoudingen van twee zijden in een rechthoekige driehoek*.

sinus α ($\sin \alpha$) = $\frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$, **cosinus** α ($\cos \alpha$) = $\frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$

en **tangens** α ($\tan \alpha$) = $\frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$.

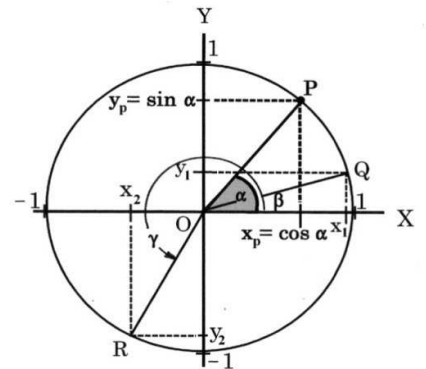
Om sinus en cosinus te definiëren voor elke **willekeurige hoek α** heeft men de '**eenheidscirkel**' ingevoerd: een cirkel met **straal $R = 1$** en middelpunt O in de oorsprong van het XOY stelsel.

Elke hoek α wordt voorgesteld door de hoek XOP die het '**vaste been**'

OX maakt met de '**voerstraal**' OP van $\angle XOP$. Zo is dan $\alpha = 0$ als voerstraal OP *samenvalt met OX* . Als $\alpha > 0$ dan wordt OP vanuit OX om O over de hoek α *geroteerd in tegenwijzerzin*; als $\alpha < 0$, dan wordt OP vanuit OX om O over de hoek α *geroteerd in wijzerzin*.

Sin α en cos α zijn nu gedefinieerd als de *coördinaten van het eindpunt $P(x_p, y_p)$* van de voerstraal OP en wel zo dat **$x_p = \cos \alpha$ en $y_p = \sin \alpha$**

Omdat nu α *elke reële waarde $\alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)* kan aannemen is het domein van $\sin \alpha$ en $\cos \alpha = \mathbb{R}$, het bereik is $[-1, 1]$



Sinus α en cosinus α zijn gedefinieerd als de coördinaten van het eindpunt P van de voerstraal OP van de hoek α in de eenheidscirkel. ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Er geldt: sinus α = de 'ordinaat' y_p , cosinus α = de 'abscis' x_p

Voorbeelden: Van $\angle XOP = \alpha$ zijn **$\sin \alpha = y_p$ en $\cos \alpha = x_p$** getekend: **$\cos \angle XOQ = \cos \beta = x_1$** ,

$\sin \angle XOQ = \sin \beta = y_1$; **$\cos \angle XOR = \cos \gamma = x_2$** , **$\sin \angle XOR = \sin \gamma = y_2$** . Lees ook af: $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\sin 270^\circ = \sin(-90^\circ) = -1$, $\cos 270^\circ = \cos(-90^\circ) = 0$, $\sin(360^\circ) = \sin 0^\circ = 0$, $\cos 360^\circ = \cos 0^\circ = 1$.

De **tangens** van hoek α in een rechthoekige driehoek werd gedefinieerd als de verhouding overstaande rechthoekszijde van α . Overeenkomstig hiermee geldt per definitie in de eenheidscirkel: $\tan \alpha = \frac{y_p}{x_p}$ ($x_p \neq 0$) dus voor *elk reëel getal* is

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0, \text{ dus } \alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ). \text{ Het bereik van } \tan \alpha = \mathbb{R}.$$

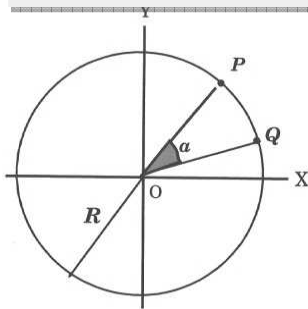
Pas op: De functies $\sin x$ en $\cos x$ zijn geen '1-1 afbeeldingen', dat wil zeggen: $\sin 30^\circ = 0,5$ betekent **niet: Als** $\sin x = 0,5$ **dan is** $x = 30^\circ$. Immers als $\sin x = 0,5$ dan maakt de voerstraal een hoek van 30° met de positieve X, as, maar dat is ook zo nadat de voerstraal over $k \times 360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$) om O gedraaid is, en ook is $\sin x = 0,5$ als $x = 150^\circ$.

Zo is $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$ maar ook $\cos(30^\circ + k \times 360^\circ)$ en $\cos(-30^\circ) = \sqrt{3}/2$.

b. De eenheid radiaal

De **standaardeenheid** van hoekgrootte in de wiskunde is de **radiaal**.

Een hoek van 1 radiaal is de grootte van de middelpuntshoek die een cirkelboog onderspant waarvan de lengte gelijk is aan de straal van de cirkel



De grootte van een hoek in radialen is dus gelijk aan de verhouding $\frac{\text{lengte van de bijbehorende cirkelboog van een middelpuntshoek}}{\text{lengte van de straal } R \text{ van de cirkel}}$

De **dimensie** van de radiaal is dan $\frac{[m]}{[m]} = 1$. *)

De **cirkel** (straal = R) heeft een booglengte (= omtrek) van $= 2\pi \cdot R$, dus hoort hierbij een middelpuntshoek in radialen van $\frac{2\pi \cdot R}{R} = 2\pi$

met gevolg: $360^\circ = 2\pi$. Als $PQ = \frac{3}{4} R$ dan is $\angle POQ = \alpha = \frac{\frac{3}{4} R}{R} = \frac{3}{4}$.

hoek α in radialen	2π	$3\pi/2$	π	$\pi/2$	1	$\pi/180$
hoek α in graden	360°	270°	180°	90°	$180/\pi^\circ$	1°

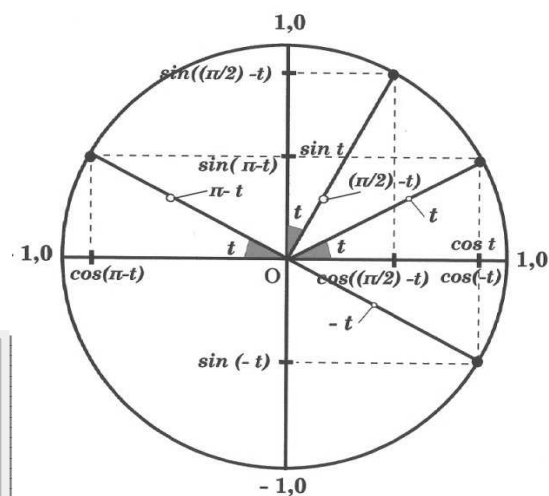
c. Herleidingformules

Vaak moeten in de **goniometrie herleidingformules** gebruikt zoals die

- voor het **complement** van een hoek (aanvulling tot $90^\circ = \pi/2$ radialen), voor het **supplement** van een hoek (aanvulling tot $180^\circ = \pi$ radialen), voor **dubbele- en halve** hoeken en voor **som of verschil** van twee hoeken.

In de getekende eenheidscirkel kan je al direct aflezen:

$$\begin{aligned} \sin(-t) &= -\sin t & \cos(-t) &= \cos t \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= \cos t & \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= \sin t \\ \sin(\pi - t) &= \sin t & \cos(\pi - t) &= -\cos t \end{aligned}$$



*) Omdat de dimensie van radialen = 1 benoem je bijvoorbeeld een hoek φ van 5 radialen, kortweg als $\varphi = 5$. In je GR kan je de eenheid van hoeken via MODE instellen op graden (Degrees) of radialen (Radians).