Wiskunde van A tot D voor het vwo
helder en exact

Algebra-analyse-meetkunde-statistiek-kansrekening
vectoralgebra-grafen-matrices-rijen-reeksen
dynamische modellen-logica-perspectief-
Lorentzfactor-Poissonverdeling-complexe getallen

Over dit boek

Het boek behandelt helder en exact de wiskunde van de nieuwste A-,B-,C- en D- stroom van het moderne vwo. Het is bestemd voor studenten van het vwo die zich degelijk willen voorbereiden op hun examen, of voor een academische studie. Ook voor hen die na een eerdere opleiding op vwo- of gelijkwaardig niveau, hun wiskundekennis willen opfrissen en/of uitbreiden met nieuwe onderwerpen.
De geheel uitgewerkte opgaven en toepassingen zijn hoofdzakelijk bedoeld ter verduidelijking van de direct eraan voorafgaande theorie. Vooral daardoor kunt u zich in betrekkelijk korte tijd veel stof eigen maken en raakt u niet gedemotiveerd omdat 'het allemaal niet opschiet' vanwege de vele uitgebreide en tijdrovende opgaven zoals die, natuurlijk terecht, in alle bestaande methoden en lesboeken staan, want 'Wiskunde Leren, is wiskunde doen' volgens Carl Friedrich Gauss, het wonderkind, de Mozart van de Wiskunde.
Maar dit boek is meer 'naslagwerk en vademecum', dan 'leer- en sommenboek' en is daarom via een zeer gedetailleerde inhoudsopgave en trefwoordenregister, duidelijk gerubriceerd, zodat u gemakkelijk de onderwerpen terugvindt waarin u geïnteresseerd bent.
Daar waar bewijzen van stellingen of afleidingen van formules wat saai of triviaal zouden overkomen na de direct eraan voorafgaande, is een kleiner lettertype gebruikt, ten teken dat ze voor het begrip zelf verder van ondergeschikt belang zijn.
Aan het gebruik van de grafische rekenmachine (GR), die na de in onbruik geraakte logaritmetafel, gonio-tabellen, rekenliniaal, … , onmisbaar werd in de wiskunde, wordt in dit boek, geïntegreerd in de opgaven en toepassingen, alle nodige aandacht besteed. Wij kozen min of meer bij toeval voor de TI-83 (vrijwel identiek met de TI-84) van 'Texas Instruments'. Die van 'Casio' is overigens even goed bruikbaar.

Over de auteur

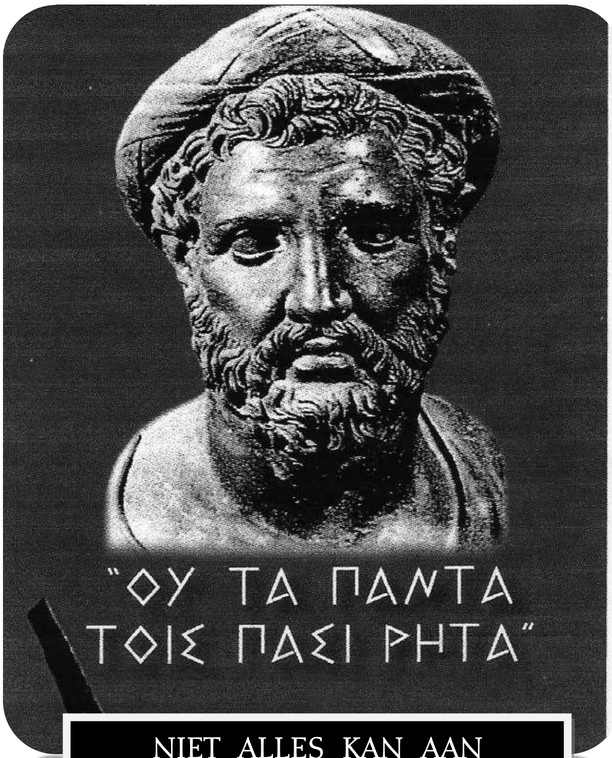
Wim Gronloh, geboren in Amsterdam, begon zijn loopbaan als scheepswerktuigkundige bij de Nederlandse Koopvaardij. Was daarna ruim 35 jaar werkzaam als leraar wis- en natuurkunde (sinds 1978 ook informatica). Schreef in 1998 de wiskunde methode 'Basislijn' voor het lbo/mavo en havo/vwo.

Bij deze nieuwe uitgave

Dit boek is een nieuwe druk en herziening van de voorgaande versie 'Wiskunde van A tot D voor het vwo, helder en exact' Behoudens enkele kleine verbeteringen in tekst en enkele figuren is deze druk geheel gelijk aan de tweede druk van deze uitgave. Hopelijk zal ook deze aan uw verwachtingen mogen voldoen.

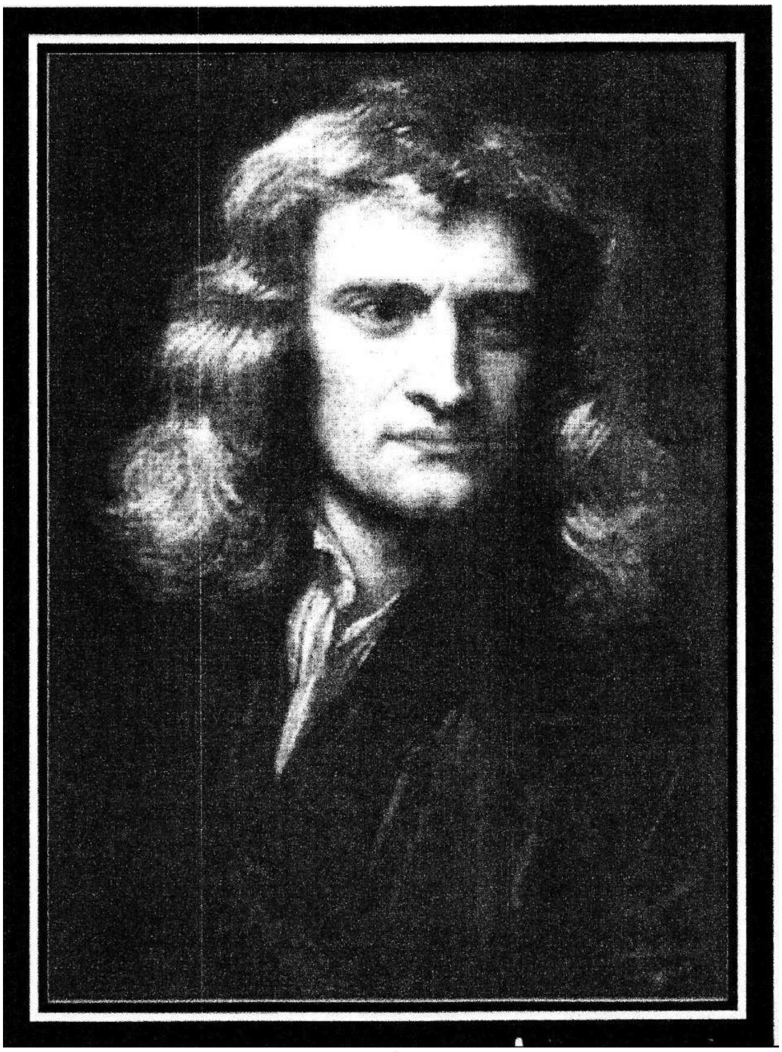
Wim Gronloh
e-mail: wimgronloh@kpnplanet.nl
Bussum, 2018

Inhoud



NIET ALLES KAN AAN
ALLEN UITGELEGD WORDEN

Pythagoras, geboren op Samos (eiland in de Egeïsche Zee) circa 572 jaar v. Chr. Richtte omstreeks 530 jr. v. Chr. in Croton de school van de Pythagoreeërs op. Zij bewezen de beroemdste stelling uit de klassieke wiskunde: In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de schuine zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de twee rechthoekszijden. De Babyloniërs kenden de eigenschap al ca. 1000 jr. v. Chr. De Egyptische 'harpedonaptai' (touwspanners) pasten de stelling ca. 3000 jr. v. Chr. toe om rechte hoeken uit te zetten via knopentouwen (knopen op afstanden 3-4-5; 5-12-13; 8-15-17,.. (de later zogenoemde 'Pythagoras-triples').

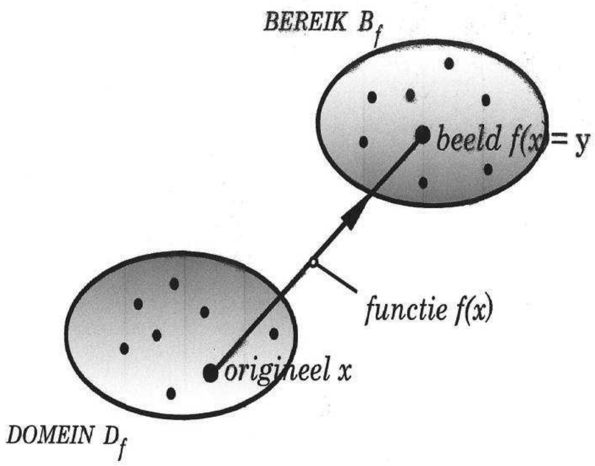


Sir Isaac Newton, geboren in 1642 te Woolsthorp, overleden in 1727 te Kensington. Engels wis- en natuurkundige, astronoom, nauurfilosoof, alchemist, officieel muntmeester en theoloog. Publiceerde de differentiaal- en integraalrekening in zijn meesterwerk 'Principia' in 1687 betreffende zwaartekracht, banen van hemellichamen, grondwetten van de dynamica, De Britse 'Royal Society' beschouwde Newton in 2005 als de grootste geleerde van de wetenschap ooit.

I. FUNCTIES, GRAFIEKEN EN FUNCTIEVERGELIJKINGEN

Als je rustig wandelend per uur 4 *km* aflegt dan is de afgelegde afstand in 2½ *uur* dus 10 *km*. De lengte van de afgelegde weg *bij die snelheid* is afhankelijk van de *tijd* ofwel: de afstand is een ***functie*** van de tijd. Zo bestaan er talrijke grootheden die afhankelijk zijn van *één of meer* andere grootheden waarbij het verband tussen die grootheden in een functie is vastgelegd via een zeker ***functievoorschrift***.
Als je in bovenstaand geval ook rekening wilt houden met een *wisselende snelheid*, dan is de lengte van de afgelegde weg een functie van *de tijd en de gemiddelde snelheid*.

1. *Het begrip functie*

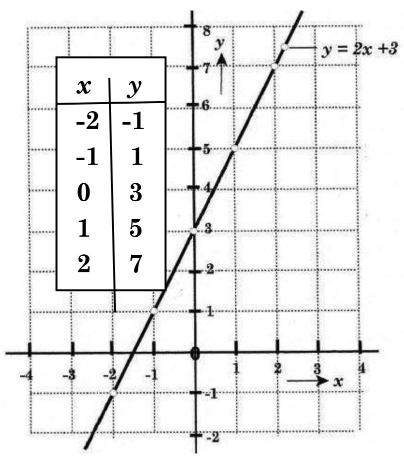


Is bijvoorbeeld een functie f *gegeven door* het functievoorschrift:
'*vermenigvuldig met drie*' dan is $f(3) = 9$, $f(-7) = -21$ en $f(a) = 3a$.
De functie zelf wordt dan geschreven als:
$\boldsymbol{f(x) = 3.\,x}$ of korter $\boldsymbol{y = 3\,x}$
De getallen 3, −7 en a in dit voorbeeld heten ***originelen*** van de functie $f(x) = 3\,x$, de getallen 9, −21 en $3a$ zijn dan de bijbehorende ***beelden*** van die functie.
De verzameling *originelen* van f heet het ***domein*** $\boldsymbol{D_f}$ van de functie, de verzameling *beelden* heet het ***bereik*** $\boldsymbol{B_f}$.

Als *geen speciaal domein of bereik is aangegeven*, wordt er van uitgegaan dat *alle originelen* (uit het domein) en *alle beelden* (uit het bereik) elementen zijn van de verzameling reële getallen ℝ.

Een functie van x is in het algemeen een zeker voorschrift f, (g, h, i, …) dat bij elke veranderlijke x uit het domein D_f, precies één element f(x) = y uit het bereik B_f bepaalt

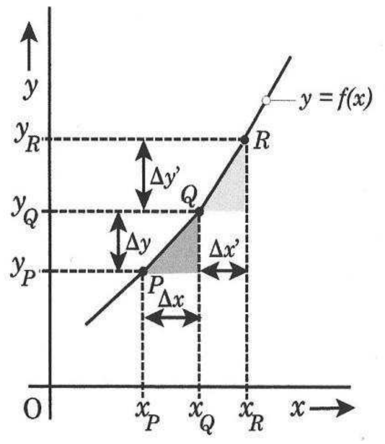
Vaak worden origineel x en beeld y van een functie getekend als punten $P(x,y)$ van een grafiek in een rechthoekig coördinatenstelsel:
Het *origineel x op de x-as*, het beeld $y = f(x)$ op de y-as.
In bijgaande figuur is vanuit de x-y -tabel de grafiek getekend van de functie: $\boldsymbol{f(x) = y = 2\,x + 3}$.



In het algemeen kunnen we met '*de functie f*(*x*)' zowel de ***grafiek van f*(*x*)** als de ***functie f*(*x*) *zelf*** *bedoelen*.

2. *Lineaire functies*

Voor *elk tweetal punten P en Q* van een *lineaire functie* geldt dat de *verhouding* tussen een zekere toename $\Delta x = x_Q - x_P$ van x en de *bijbehorende* toename $\Delta y = y_Q - y_P$ van y steeds een ***vaste waarde*** heeft.
De betekenis hiervan is als volgt:



Stel P en Q zijn twee naburige punten op de grafiek van een lineaire functie $y = f(x)$ waarbij $P = (x_P, y_P)$ en $Q = (x_Q, y_Q)$.
De *verhouding* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bepaalt de *hoek* die het *lijnstukje PQ* maakt met de *positieve x* -as, dus bepaalt de *richting van PQ*.
Stel R (x_R, y_R) is *een ander* naburig punt van Q op de grafiek met $x_R = x_Q + \Delta x'$ en $y_R = y_Q + \Delta y'$, dan wordt de richting van QR bepaald door de verhouding $\frac{\Delta y'}{\Delta x'}$

Omdat *per definitie* de verhouding $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bij een lineaire functie een vaste waarde heeft, geldt dan: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ dus zijn de *richtingen* van de lijnstukjes *gelijk* ofwel:
PQ en *QR* liggen in elkaars verlengde dus ook: ***P*, *Q* en *R* liggen op een *rechte lijn.***

Daar *P, Q* en *R* willekeurig gekozen naburig punten zijn, geldt dit voor alle punten van de grafiek. De grafiek van een ***lineaire*** functie is dus een ***rechte lijn***. (dit verklaart de naam *lineaire functie).* De *constante verhouding* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $(\Delta x \neq 0)$ bepaalt de *richting van lijn l* en noemt men daarom de ***richtingscoëfficiënt a*** van *l*.

De *vergelijking* van lijn *l*, dus de betrekking tussen de waarden *x* en *y waaraan alle punten P (x,y) van lijn l voldoen* vind je nu als volgt:

Voor de lijn *l* tussen twee willekeurige punten P (x_p,y_p) en Q (x_q,y_q) geldt volgens voorgaande dat de *richtingscoëfficiënt* $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{\Delta y}}{\boldsymbol{\Delta x}} = \frac{\boldsymbol{y_q - y_p}}{\boldsymbol{x_q - x_p}}$ . ..(1)
Ga ervan uit dat *l niet evenwijdig is met de y-as* , dus $\boldsymbol{x_q - x_p \neq 0}$ en dat P $(\boldsymbol{x_p, y_p}) = \boldsymbol{(0, b)}$ het snijpunt is van *l* met de *y*-as, dus $\boldsymbol{x_p = 0}$ en $\boldsymbol{y_p = b}$ ...(2)
Voor Q $(\boldsymbol{x_q, y_q})$ kiezen we een willekeurig punt $\boldsymbol{Q}$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, dus $\boldsymbol{x_q = x}$ **en** $\boldsymbol{y_q = y}$ ...(3)
(2) en (3) in (1) ingevuld geeft: $\boldsymbol{a} = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{y-b}{x-0} = \frac{\boldsymbol{y-b}}{\boldsymbol{x}}$, dus $\boldsymbol{ax = y - b}$ ofwel $\boldsymbol{y = ax + b}$
De betrekking $\boldsymbol{y = ax + b}$ heet nu *de vergelijking van l.*

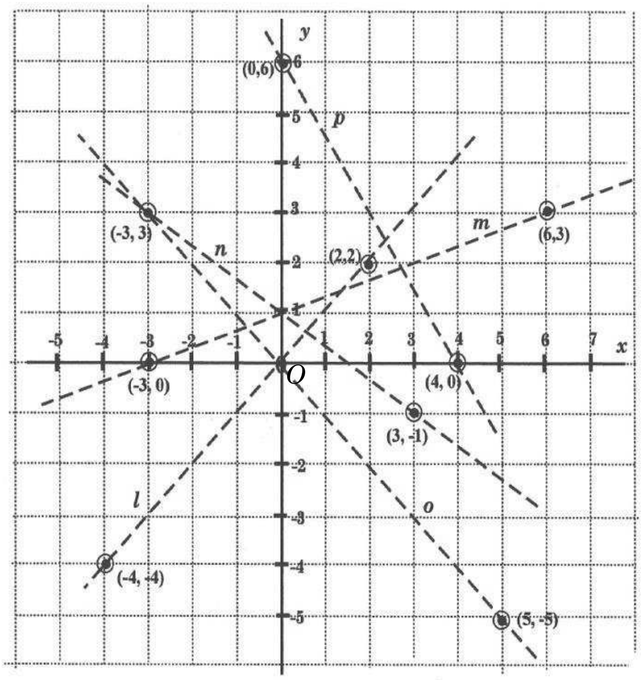
(Als *l* // *y-as dan is bij elke y :* $\boldsymbol{x_p = x_q}$ dus $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\boldsymbol{y_q - y_p}}{x_q - x_p}$ bestaat dan niet omdat $x_q - x_p = 0$
Bij elke *y* is dan $x = x_p = x_q$ dus is $\boldsymbol{x = x_p}$ $(= \boldsymbol{x_q})$ de vergelijking van *l* als *l* // *y-as*)

De grafiek van een lineaire functie is een (rechte) lijn l met vergelijking y = ax + b
waarin a de richtingscoëfficiënt is van l en b de y-coördinaat is
van het snijpunt van l met de y-as.

Toepassingen:

1. In deze figuur zijn de lijnen *l, m, n, o en p* getekend door twee gegeven punten in een *orthonormaal coördinatenstelsel xOy*. (Een orthonormaal stelsel bestaat uit twee onderling loodrechte coördinaten-assen: de *X*-as = 'abscis' en de *Y*-as = 'ordinaat', met oorsprong *O* als hun snijpunt.
De eenheden op de assen hebben daarbij de standaardlengte 1 .

a. Bepaal van elke lijn de vergelijking
b. Bepaal ook de vergelijking van de
   X-as en de Y-as.
c. Hoe lopen de lijnen q: $x = 3$ en
   r: $y = -5$?



a. De grafiek van een lineaire functie is een lijn l met vergelijking l: $y = ax + b$, waarin $\boldsymbol{a}$ de *richtingscoëfficiënt* is van *l en b* de *y*-coördinaat van het snijpunt van l met de *y*-as.
Op elke lijn zijn steeds twee *roosterpunten* (punten op het snijpunt van twee roosterlijnen) met een cirkeltje aangegeven waarmee de vergelijking is te bepalen.

- Zo is dan van lijn l: $\boldsymbol{a} = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{2-(-4)}{2-(-4)} = \mathbf{1}$ en $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$,
  dus de vergelijking is $l : y = 1.\,x + 0 \Rightarrow$ ***l:* $\boldsymbol{y = x}$.**

- Voor $\boldsymbol{m}$ geldt: $\boldsymbol{a} = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{3-0}{6-(-3)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ en $\boldsymbol{b} = \mathbf{1}$
  dus wordt de vergelijking : $\boldsymbol{m}$: $\boldsymbol{y = \frac{1}{3}x + 1}$

- Voor $\boldsymbol{n}$ geldt: $\boldsymbol{a} = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{-1-3}{3-(-3)} = \frac{-4}{6} = \frac{\mathbf{-2}}{\mathbf{3}}$ en $\boldsymbol{b} = \mathbf{1}$
dus is de vergelijking is $\boldsymbol{n}$: $\boldsymbol{y = \frac{-2}{3}x + 1}$

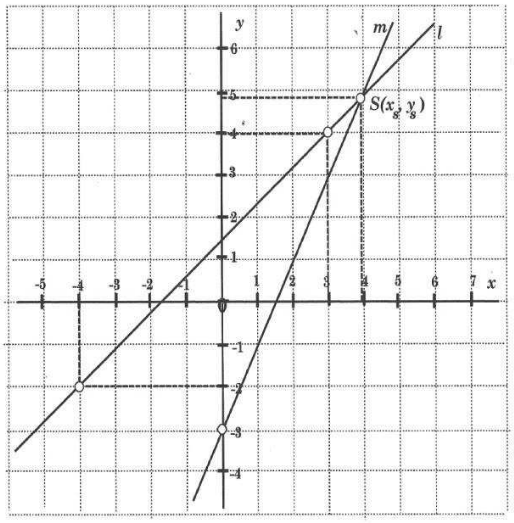
- Voor $\boldsymbol{o}$ geldt: $\boldsymbol{a} = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{-5-3)}{5-(-3)} = \frac{-8}{8} = \mathbf{-1}$ en $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$
dus de vergelijking is: $\boldsymbol{o}$: $\boldsymbol{y = -x}$

- Voor $\boldsymbol{p}$ geldt $\boldsymbol{a} = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{0-6}{4-0} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$ en $\boldsymbol{b} = \mathbf{6}$
dus de vergelijking is: $\boldsymbol{p}$: $\boldsymbol{y = -\frac{3}{2}x + 6}$

- b - Voor *alle punten op de x-as* geldt: $y = 0$, dus onafhankelijk van de waarde van x.
De vergelijking van de *x*-as is dan**:** $\boldsymbol{y = 0}$ of vollediger**:** $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$ **en** $\boldsymbol{y = 0}$
Zo geldt voor alle punten van de *y-as* $\boldsymbol{x = 0}$ **ofwel:** $\boldsymbol{x = 0}$ **en** $\boldsymbol{y \in \mathbb{R}}$

- c - Alle punten (x, y) van de lijn q met vergelijking $x = 3$, zijn van de vorm $(3, y)$.
Het is dan de (verticale) ***lijn, evenwijdig met de y-as door het punt* (3, 0)**
Zo is de lijn r: $y = -5$ de (*horizontale*) ***lijn*** *evenwijdig met de x-as* ***door het punt* (0, - 5)**

2. - a. Bepaal de vergelijking van de lijn l door de punten (3, 4) en (−4, −2)
 - b. Bepaal het snijpunt van de lijn l met de lijn m : $y = 2x - 3$



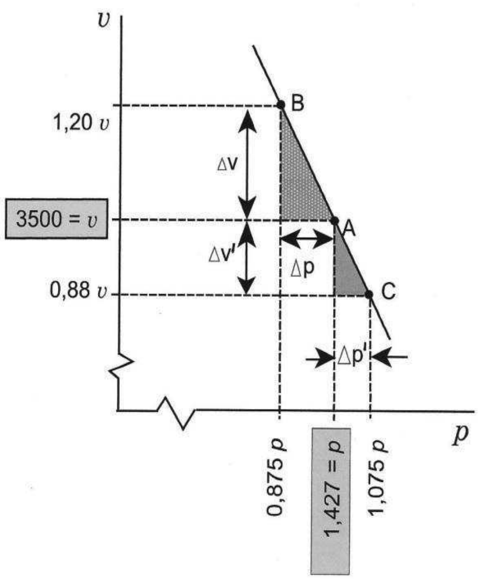
a. In $y = ax + b$ volgt de richtingscoëfficiënt van l uit: $\boldsymbol{a} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-4}{-4-3} = \frac{-6}{-7} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{7}}$

Lijn l heeft dan als vergelijking: l: $y = \frac{6}{7}x + b$.
Hierin de coördinaten van A = (3,4) (of B = (−4, −2)) ingevuld geeft $\mathbf{4} = \frac{6}{7}\,.\,\mathbf{3} + b \Rightarrow b = \frac{10}{7}$
zodat de vergelijking is $\boldsymbol{l}$: $\boldsymbol{y = \frac{6}{7}x + \frac{10}{7}}$ *)

b. Het snijpunt S (x_S, y_S) van de lijnen l en m ligt zowel op l als op m , dus voldoen de coördinaten x_s en y_s aan de vergelijking:
$\boldsymbol{l}$: $\boldsymbol{y = \frac{6}{7}x + \frac{10}{7}}$ ***en*** aan m: $\boldsymbol{y = 2x - 3}$, zodat
dan $\frac{6}{7}x_s + \frac{10}{7} = 2\,x_s - 3 \Rightarrow \frac{8}{7}x_s = \frac{31}{7} \Rightarrow \boldsymbol{x_s} = \frac{\mathbf{31}}{\mathbf{8}}$
Uit $y_s = 2\,x_s - 3 = -\frac{1}{2}x_s + \frac{9}{2}$ volgt dan $\boldsymbol{y_s} = 2.\frac{\mathbf{31}}{\mathbf{8}} - \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{8}} = \frac{\mathbf{38}}{\mathbf{8}} = \frac{\mathbf{19}}{\mathbf{4}}$

Het snijpunt van l en m is dus het punt $\boldsymbol{S}$ **(**$\frac{\mathbf{31}}{\mathbf{8}}$**,** $\frac{\mathbf{19}}{\mathbf{4}}$**) ≈ (3,9 ; 4,8)**

3. Bij een ‘witte pomp’ in Vreemdemuiden verkoopt men gemiddeld per dag 3500 liter ‘Euro-95’ benzine als hun literprijs € 1,427 bedraagt. (punt A in de grafiek).
Verlaagt men de prijs met 12,5% dan stijgt de verkoop met 20% (punt B).
Verhoogt men de prijs met 7,5% dan daalt de verkoop met 12%.(punt C).



a. Toon aan dat de punten A, B en C op een rechte lijn liggen.
b. Wat is de betekenis van de uitkomst van a voor de prijs/verkoop-verhouding bij stijgende en bij dalende prijs?

a. De richtingscoëfficiënt van AB is:
$\frac{\Delta v}{\Delta p} = \frac{v - 1{,}20\,v}{p - 0{,}875\,p} = \frac{-0{,}20\,v}{0{,}125\,p} = \mathbf{-\,1{,}6}\,.\,\frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{p}}$

De richtingscoëfficiënt van CA is $\frac{\Delta v'}{\Delta p'} = \frac{0{,}88v - v}{1{,}075p - p}$
$= \frac{-0{,}12v}{0{,}075\,p} = \mathbf{-\,1{,}6}\,.\,\frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{p}}$

De richtingen van AB en CA zijn dus gelijk ⇒
***A, B* en *C* liggen op een rechte lijn.**

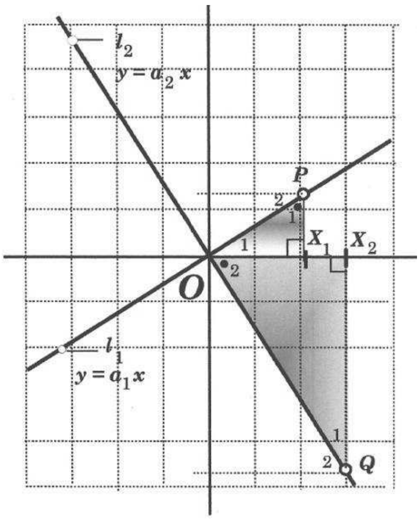
---

*) Met de grafische rekenmachine TI-83 gaat dit als volgt: Voer de *lijsten* in **{3, - 4} [STO] L1** en **{4, - 2} [STO] L2.**
Druk op **[STAT] [CALC**] en kies optie 4 [ENTER]: **LinReg (*ax* + *b*)** [ENTER]
De waarden van a en b worden direct getoond: LinReg y = ax + b: a ≈ .85714… = $\frac{6}{7}$; b ≈ 1.42857….= $\frac{10}{7}$

b. De uitkomst van a. betekent dat op het traject *BC* de verhouding prijs*stijging* : verkoop*daling* (−1,6) gelijk is aan de verhouding prijs*daling*: verkoop*stijging*. (−1,6)
Men zegt in zo'n geval dat de verkoop*daling* (bij toenemende prijs) ***evenredig** is* met de verkoop*stijging* (bij dalende prijs), want een *evenredigheid* is een gelijkheid van twee verhoudingen.

Eigenschap:

> *Als twee lijnen l_1 en l_2 loodrecht op elkaar staan dan is het product van hun richtingscoëfficiënten a_1 en a_2 gelijk aan −1, dus $a_1 \,.\, a_2 = -1$*



Bewijs: In de figuur is vanuit een punt P op l_1 een loodlijn PX_1 op de x-as neergelaten en ook een loodlijn QX_2 vanuit een punt Q van l_2 op de x-as.
De richtingscoëfficiënten van l_1 en l_2 zijn respectievelijk:
$\boldsymbol{a_1 = \frac{PX_1}{OX_1}}$; $\boldsymbol{a_2 = \frac{-QX_2}{OX_2}}$. …(1)
Van de $\Delta\Delta$ OPX_1 en OQX_2 *is* $\boldsymbol{\angle O_2 + \angle O_1 = 90°}$ (gegeven).
Ook is in Δ OPX_1 : $\boldsymbol{\angle P_1 + \angle O_1 =}$ 180° − 90° = **90°**
dus is $\boldsymbol{\angle P_1 = \angle O_2}$. (met zwarte stip) …(2)
De $\Delta\Delta$ OPX_1 en OQX_2 zijn dan gelijkvormig omdat ze rechthoekig zijn en $\angle P_1 = \angle O_2$ volgens (2) met gevolg:.
$PX_1 : OX_1 = OX_2 : QX_2$ ofwel: $\frac{PX_1}{OX_1} = \frac{OX_2}{QX_2}$ (blz.141)
$\frac{PX_1}{OX_1} \cdot \frac{QX_2}{OX_2} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{\frac{PX_1}{OX_1} \cdot \frac{-QX_2}{OX_2} = -1}$ …(3)
(1) in (3) gesubstitueerd geeft tenslotte: $\boldsymbol{a_1 . a_2} = \boldsymbol{-1}$ zoals was te bewijzen.

De stelling geldt ook omgekeerd: Als $\boldsymbol{a_1 . a_2} = \boldsymbol{-1}$ dan staan l_1 *en* l_2 *loodrecht op elkaar.*
(Lees voor het bewijs hiervan bovenstaand bewijs van achteren nar voren.)

3. *Kwadratische functies*

> *Een kwadratische, ofwel tweedegraadsfunctie, is een functie f(x) van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ waarin a, b en c reële getallen zijn en $a \neq 0$*

Voor het onderzoek naar de eigenschappen van tweedegraads- functies, herleiden we eerst de algemene vorm door middel van ***kwadraatafsplitsing***:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$$
$$= a\,(x^2 + 2.\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}) + a.(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2})$$
$$= a\,(x + \frac{b}{2a})^2 - a\,(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a}) \text{ ofwel:}$$
$$\boldsymbol{f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}} \text{ met } \boldsymbol{D = b^2 - 4ac} \quad \ldots(a)$$

Uit de onderbouw:

$(a+b)(c+d) = (a+b) \times (c+d)$
$= a.d + a.c + b.d + b.c$

$(a+b)(a+b) = (a+b) \times (a+b)$
$= a.b + a.a + b.a + b.b$
$= \boldsymbol{a^2 + 2\,a.b + b^2}$

Kies nu $\boldsymbol{x} = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}$ in: $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}$ dan ontstaat:

$$\boldsymbol{f}(-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}) = a\,(-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}} + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} = a.(0) - \frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{4a}} \Rightarrow \boldsymbol{f}(-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}) = -\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{4a}}.$$

Dit betekent dat $\boldsymbol{(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})}$ een punt is van *elke kwadratische functie* $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Noem dit punt T, dan is $\boldsymbol{T\,(x_T, y_T) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})}$ ...(b)

1^0. We bewijzen nu dat het punt $\boldsymbol{T\,(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})}$ de *uiterste waarde* is (***'maximum'*** of ***'minimum'***) van de kwadratische functie $f\,(x)$.

In (a) werd bewezen dat *voor elk willekeurig punt* (x, y) *van* $f\,(x)$ geldt: $\boldsymbol{y = a\,(x + (\frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}}$.

In (b) bleek dat voor *het punt T* geldt dat $y_T = -\frac{D}{4a}$, dus volgt de waarde van $\boldsymbol{y - y_T}$ uit:

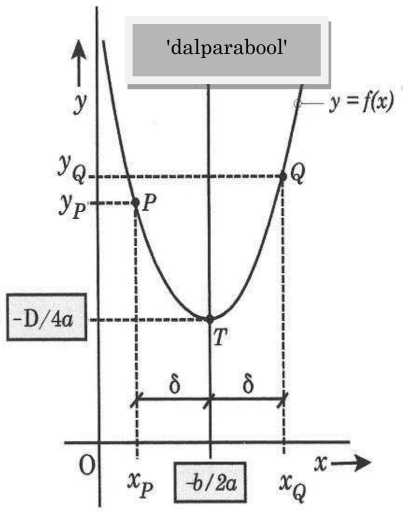
$$\boldsymbol{y - y_T} = \{\,a(x + \frac{b}{2a})^2 - \cancel{\frac{D}{4a}}\} - \cancel{\frac{-D}{4a}} = \boldsymbol{a(x + \frac{b}{2a})^2} \qquad \text{...(c)}$$

Als hierin $\boldsymbol{a > 0}$ dan is $a.\,(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$, want$(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$

Dit betekent als $\boldsymbol{a > 0}$, dat *elke reële waarde van* $\boldsymbol{y}$ in $y = ax^2 + bx + c$ groter dan of gelijk is aan $\boldsymbol{y_T}$, dus is het punt $T\,(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ een ***minimum*** van de functie $\boldsymbol{f(x)}$.

Op dezelfde manier blijkt dat **als** $\boldsymbol{a < 0}$ steeds geldt $\boldsymbol{y - y_T \leq 0}$ ofwel: $T = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ is een ***maximum*** van $y = ax^2 + bx + c$ als $\boldsymbol{a < 0}$ ...(d)

Het punt $T\,(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$, *minimum of maximum*, heet de ***top*** van de kwadratische functie.



2^0 De lijn $x = -\frac{b}{2a}$ door T is een ***symmetrieas** van* $f(x)$.

Bewijs: Voor een punt P van $f(x)$ op een positieve afstand δ *links* van de lijn $x = -\frac{b}{2a}$ geldt $\boldsymbol{x_p = -\frac{b}{2a} - \delta}$ en voor een punt Q van $f(x)$ op eenzelfde afstand *rechts* van deze lijn is $\boldsymbol{x_Q = -\frac{b}{2a} + \delta}$.

In de vorm van de kwadraatafsplitsing is: $y = a\,(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}$, dus als $\boldsymbol{x = x_p = -\frac{b}{2a}} - \delta$

dan is $\boldsymbol{y_p} = a\,(-\cancel{\frac{b}{2a}} - \delta + \cancel{\frac{b}{2a}})^2 - \frac{D}{4a} = = \boldsymbol{a}\,\delta^2 - \frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{4a}}$ ... (a)

Als $\boldsymbol{x = x_q} = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}} + \delta$ dan is $\boldsymbol{y_q} = a\,(-\cancel{\frac{b}{2a}} + \delta + \cancel{\frac{b}{2a}})^2 - \frac{D}{4a} = \boldsymbol{a}\,\delta^2 - \frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{4a}}$ ...(b)

Uit (a) en (b) volgt: $\boldsymbol{y_p} = \boldsymbol{y_q}$ dus P en Q liggen ***symmetrisch t.o.v. de lijn*** $\boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}$

De vorm van de kwadratische functie heet ***parabool***, de symmetrieas heet de ***as***, het maximum of minimum T heet de ***top*** van de parabool. Als $a > 0$ dan is de top T een *minimum* (*'dalparabool'*), als $a < 0$ dan is top T een *maximum* (*'bergparabool'*).

De grafiek van $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$ is een parabool met verticale as $x = \frac{-b}{2a}$ en een punt $T = (\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a})$ als top, waarin $D = b^2 - 4ac$. Als $a > 0$ dan is T een minimum ('dalparabool'), als $a < 0$ dan is T een maximum ('bergparabool')

a. Vierkantsvergelijking

Eventuele snijpunten van de x- as (met vergelijking $y = 0$) en de parabool $y = ax^2 + bx + c$ moeten voldoen aan $y = ax^2 + bx + c$ *en aan* $y = 0$ dus zijn de *oplossingen* (*wortels*) van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$. Ze heten ook de ***nulpunten*** van $f(x)$.
Voor een algemene oplossing van deze vergelijking wordt mestal de '***abc-formule***' gebruikt:

Gebruik de kwadraatafsplitsing: $y = a\,(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}$, dan geldt voor de nulpunten $y = 0$,
dus $y = a\,(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} = 0$, ofwel: $a\,(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{D}{4a} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{D}}{2a}$ waaruit dan volgt:
$\boldsymbol{x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}} \vee \boldsymbol{x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}}$, kortweg: $\boldsymbol{x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$

Nulpunten ('wortels') van $f(x) = ax^2 + bx + c$ zijn oplossingen x_1, x_2 van de vergelijking $y = ax^2 + bx + c = 0$ met $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ waarin $D = b^2 - 4ac$

De waarde van D hierin bepaalt het *aantal oplossingen*, dus het *aantal wortels* van $ax^2 + bx + c = 0$. Men noemt daarom D de ***discriminant*** van deze vergelijking:

1^0. Als $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac > 0}$ dan bestaat $\sqrt{D}$ heeft de vergelijking *twee wortels*:
$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ en $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$. De parabool snijdt de x-as in twee verschillende punten.
2^0. Als $\boldsymbol{D = 0}$ dan is $\boldsymbol{b^2 - 4ac = 0} \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ dus heeft de vergelijking slechts één (*tweevoudige*, is '*dubbel tellende*') wortel $x = -\frac{b}{2a}$.
Top T met $x_T = -\frac{b}{2a}$ is dan een ***raakpunt*** aan de x-as.
3^0. Als $\boldsymbol{D < 0}$ dan bestaat $\sqrt{D}$ niet in $\mathbb{R}$ dus zijn er *geen reële oplossingen.*
De parabool snijdt de x-as niet. Er zijn *geen reële nulpunten* . [*)]

b. Ontbinden van kwadratische functies

De functie $f(x) = x^2 + bx + c$ met nulpunten $x = x_1$ en $x = x_2$ is te schrijven als $f(x) = (x - x_1).(x - x_2)$

[*)] Op blz.51-52 worden imaginaire oplossingen (complexe getallen) behandeld in geval $D < 0$

De nulpunten x_1, x_2 van de vierkantsvergelijking $y = a\,x^2 + bx + c$ **met a = 1** zijn volgens de *abc-formule*: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2}$ en $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2}$ met $D = b^2 - 4c$ en $a = 1$ dus volgt het ***product* $(x - x_1).(x - x_2)$** uit:

$(x - x_1).(x - x_2) = \{x - (\frac{-b+\sqrt{D}}{2})\}\,.\,\{(x - (\frac{-b-\sqrt{D}}{2})\}$

$= (\frac{2x+b-\sqrt{D}}{2}).(\frac{2x+b+\sqrt{D}}{2}) = \frac{4x^2+4bx+b^2-D}{4}$

$= \frac{4x^2+4bx+\mathbf{4c}}{4}$ (want $b^2 - D = 4\,c$ omdat $D = b^2 - 4\,ac$ en $a = 1$) dus:

$\boldsymbol{(x - x_1).(x - x_2) = x^2 + bx + c}$ ...(1)

Hiermee is de term $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$ ***ontbonden in twee factoren*** $\boldsymbol{x - x_1}$ **en** $\boldsymbol{x - x_2}$ waarin x_1 en x_2 de *nulpunten* van $f(x)$ zijn. Met deze eigenschap kan je de wortels x_1 en x_2 van $f(x) = \mathbf{1}x^2 + bx + c = 0$ vaak snel te vinden, omdat $\boldsymbol{x_1 + x_2 = -b}$ ***en*** $\boldsymbol{x_1 . x_2 = c}$.

Bewijs: Volgens (1) is $(x - x_1).(x - x_2) = x^2 + bx + c$, dus
$(x - x_1).(x - x_2) = x^2 - (\boldsymbol{x_1 + x_2}).\,x + \boldsymbol{x_1 . x_2} = x^2 + \boldsymbol{b}.x + \boldsymbol{c}$ waaruit dan direct volgt**:**
$(\boldsymbol{x_1 + x_2}) = -\,\boldsymbol{b}$ en $\boldsymbol{x_1 . x_2 = c}$ ...(2)

Voorbeeld: In de vergelijking $x^2 - 11\,x + 28 = 0$, is $b = -11$ en $c = 28$ dus volgens (2) is dan $(x_1 + x_2) = -b = 11$ en $x_1 . x_2 = c = 28 \Rightarrow x_1 + x_2 = 11$, $x_1 . x_2 = 28$ dus $\boldsymbol{x_1 = 4}$, $\boldsymbol{x_2 = 7}$.
De wortels van $x^2 - 11\,x + 28 = 0$ zijn dus $\boldsymbol{x_1 = 4}$ en $\boldsymbol{x_2 = 7}$.

Opgaven:

1. Bereken de nulpunten van $f(x) = x^2 - x - 12$

Stel $x^2 - x - 12 = (x + p).(x + q) = 0$ dan zijn p en q de nulpunten, waarvoor geldt:
$p + q = -1$ en $p.\,q = -12$.
Hieraan voldoen $p = -4$ en $q = 3$ dus $x^2 - x - 12 = (x - 4).(x + 3) = 0$ zodat
$x - 4 = 0 \lor x + 3 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = 4 \lor x = -3}$ [*)]
De nulpunten zijn $\boldsymbol{x_1 = 4}$ **en** $\boldsymbol{x_2 = -3}$

2. Los op $x^2 + 2x - 143 = 0$

Stel $x^2 + 2x - 143 = (x + p).(x + q)$ dan is $p + q = 2$ en $p.q = -143$, dus
$p = -11$ en $q = 13$. Gevolg: $x^2 + 2x - 143 = (x - 11)(x + 13) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = 11,\ x_2 = -13}$

3. Van (de grafiek van) een parabool $f(x) = ax^2 + b\,x + c$ is de top $T = (2, -3)$
De lijn l met vergelijking $y = -4x + 1$ is een raaklijn aan de parabool.
Bepaal de vergelijking van $f(x)$.

De coördinaten van top T van de parabool volgen uit: $x_T = \frac{-b}{2a}$ en $y_T = \frac{-D}{4a}$ (blz.6).

[*)] Volgens de “Wet van het nulelement ’ geldt algemeen: Als $a \times b = 0$ dan $a = 0 \lor b = 0$ en omgekeerd.

In deze opgave geldt dan $x_T = \frac{-b}{2a} = 2$ zodat $\boldsymbol{b = -4a}$ ...(1)

$y_T = \frac{-D}{4a} = -3$ dus $\frac{-(b^2-4ac)}{4a} = -3 \Rightarrow \boldsymbol{b^2 - 4ac = 12a}$ ...(2)

De snijpunten van f en de lijn l: $y = -4x + 1$ volgen uit $ax^2 + bx + c = -4x + 1$
ofwel uit $ax^2 + (b+4)x + (c-1) = 0$.

Omdat l: $y = -4x + 1$ *raaklijn* is aan de parabool is er slechts één snijpunt van de parabool met l dus moet de *discriminant* van $ax^2 + (b+4)x + (c-1) = \mathbf{0}$ zijn. (blz.7)

Gevolg: $D = (b+4)^2 - 4a(c-1) = 0$ ofwel $\boldsymbol{b^2 + 8b + 16 - 4ac + 4a = 0}$ ...(3)

Substitueer $b^2 - 4ac = 12a$ uit (2) in (3) dan vind je $12a + 8b + 16 + 4a = 0$
Met $b = -4a$ volgens (1) is dan: $12a + -32a + 16 + 4a = 0 \Rightarrow -16a = -16$ zodat
$\boldsymbol{a = 1}$ **en** $\boldsymbol{b = -4}$. Deze waarden in (2) ingevuld geven: $b^2 - 4ac = 12a \Rightarrow 16 - 4c = 12 \Rightarrow \boldsymbol{c = 1}$
dus $\boldsymbol{f(x) = y} = ax^2 + bx + c = \boldsymbol{x^2 - 4x + 1}$ **is de gevraagde parabool** .

4. *Machtsfuncties*

De functie $y = f(x) = x^a$ is een machtsfunctie van x, waarin de exponent a een constante is en het grondtal x de variabele

Bij *samengestelde machtsfuncties* (bijvoorbeeld in *polynomen* als
$f(x) = a_0.x^0 + a_1.x^1 + a_2.x^2 + \dots + a_n.x^n$) spelen de ***machtregels*** een grote rol.
Uitgaand van de *definitieformule van een positieve gehele macht* van a:

$a^1 = a$, $a^2 = a.a$, $a^3 = a.a.a$, $a^4 = a.a.a.a$ dus algemeen: $\boldsymbol{a^p = \overbrace{a.a\dots.a}^{p \text{ keer}}}$

volgen direct de *regels*: $\boldsymbol{a^p . a^q = a^{p+q}}$, $\boldsymbol{\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}}$ en $\boldsymbol{(a^p)^q = a^{p.q}}$

Voor ***elke*** $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ geldt $\frac{a^p}{a^p} = \mathbf{1}$ en ook $\frac{a^p}{a^p} = a^{p-p} = \boldsymbol{a^0}$ dus $\boldsymbol{a^0 = 1}$

Zo ook: $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a^p}} = \frac{a^0}{a^p} = a^{0-p} = \boldsymbol{a^{-p}}$ en $\boldsymbol{\sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}}$ omdat $(a^{\frac{1}{p}})^p = a^{\frac{1}{p}\cdot p} = a^1 = a$

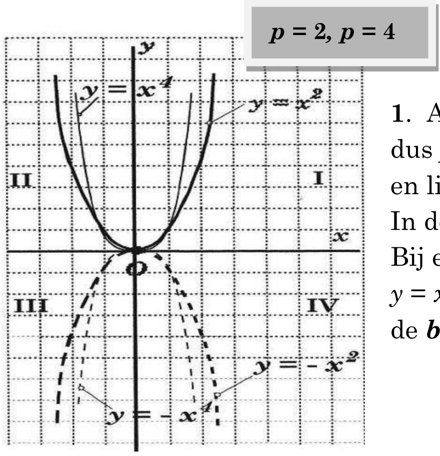
$a^p . a^q = a^{p+q}$	$(a^p)^q = a^{p.q}$	$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$	$a^0 = 1$
$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$(a.b)^p = a^p . b^p$	$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Per definitie gelden deze rekenregels voor *alle machten met reële exponenten*:
Zo is bijvoorbeeld: $3^7 . 3^{-9} = 3^{-2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3^2}} = \frac{1}{9}$, $5^{-2\frac{1}{2}} = \frac{1}{5^{2\frac{1}{2}}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5^5}}}$, $7^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{7^3}$

Machtsfuncties waarin *x hoogstens tot de macht n* voorkomen, heten *n^{de} graads machtsfuncties* . Zo is $f(x) = ax + b$ een machtsfunctie van de *eerste graad,* machtsfuncties als $f(x) = ax^2 + bx + c$ zijn van de *tweede graad,* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ van de *derde graad* et cetera.(De besproken 'lineaire functie' $f(x) = ax + b$ is dus een *eerstegraads machtsfunctie*, de 'kwadratische functie' $f(x) = ax^2 + bx + c$ is een *tweedegraads machtsfunctie*).

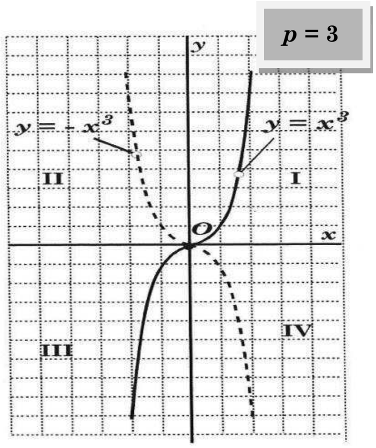
a. Grafieken

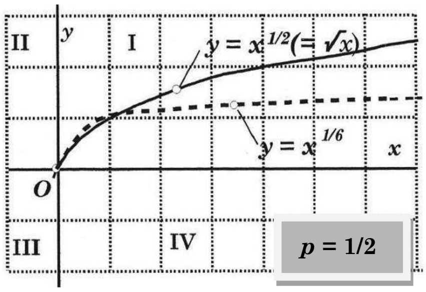
Aan de *exponent van een machtsfunctie* kun je de 'grondvorm' van hun grafieken herkennen. We onderzoeken hier de grafieken in de *vier kwadranten* I, II, III en IV van *machtsfuncties* $\boldsymbol{f(x) = y = x^p}$ bij verschillende waarden van p.



1. Als ***p in*** $\boldsymbol{y = x^p}$ ***een positief, even getal*** is, dus $p = 2, 4, 6,..$ dan zijn alle y-waarden van $\boldsymbol{y = x^p}$ positief en ligt de grafiek geheel in I en II.
In de grondvorm herken je de ***dal****parabool.*
Bij eenzelfde waarde van p is $\boldsymbol{y = -x^p}$ het spiegelbeeld van $y = x^p$ in de x-as (gestreept) en zie je daarin als grondvorm de ***berg****parabool.*

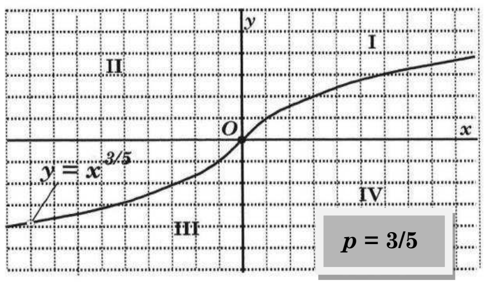
2. Is ***p in*** $\boldsymbol{y = x^p}$ ***een positief, oneven, geheel getal*** $\boldsymbol{\neq 1}$, dus $p = 3, 5, 7,\ldots$ dan bestaan er in tegenstelling tot de *even* machten van x (x^2, x^4, x^6, … die steeds ≥ 0 zijn), ook *negatieve* y waarden. Bijvoorbeeld $(-3)^3 = -27 = -(3^3)$.
Hierdoor heeft $y = x^p$ bij *oneven* p dan ook waarden in het *eerste- en derde kwadrant.*
Omdat $(-x)^p = -(x^p)$ is de grafiek van $\boldsymbol{y = -(x^p)}$ een *spiegeling in de oorsprong* van $y = x^p$.





3. Als p ***in*** $\boldsymbol{y = x^p}$ een positieve breuk is, waarvan de ***teller oneven is en de noemer even,*** zoals in $y = x^{\frac{1}{2}}$ en $x^{\frac{1}{6}}$ dan bestaan er *geen reële y waarden bij negatieve x.*
Zo is $y = x^{\frac{1}{2}}$ als $x = -1$ gelijk aan $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbf{-1}}$ en is $y = (-x)^{\frac{1}{6}}$ bij $x = -1$ gelijk aan $(-1)^{\frac{1}{6}} = ((-1)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbf{-1}}$ dus bestaan beide niet in $\mathbb{R}$.
Alle waarden van $y = x^p$ liggen dan *in I* .

4. Als p ***in*** $\boldsymbol{y = x^p}$ een positieve breuk is met ***teller en noemer oneven*** dan bestaan er ook reële y waarden bij *negatieve x,* die dan ook zelf negatief zijn, en dus in III liggen.
Zo is hier de y waarde van $x = -4$ in $y = x^{\frac{3}{5}}$:
$y = (-4)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-4)^3} = \sqrt[5]{-64} \approx -2{,}297.$
De grafiek van $y = x^{\frac{3}{5}}$ ligt nu in I en III. [*)]

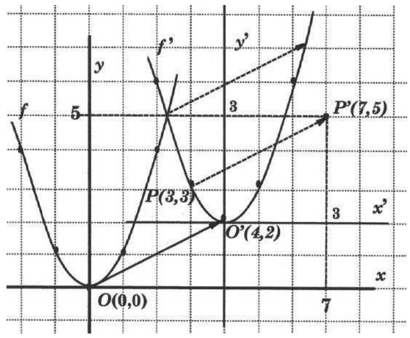


[*)] Met de GR TI-83 zijn alle grafieken direct te plotten. VB: Druk op Y1= en voer in X^(3÷5) ENTER.
Druk op WINDOW en kies Xmin = -5, Xmax= 5, Ymin = -5, Ymax =5. Kies Xscl =1 en Yscl =1 (Xres=1) ENTER
Druk op Graph en de grafiek uit 4 verschijnt op het display.

b. Transformaties

Uit de grafieken van standaardfuncties zoals $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$, kunnen via *transformaties* vaak direct formules worden afgeleid van meer gecompliceerde functies.
Bij ***congruentietransformaties*** als: *translatie* ('*evenwijdige verschuiving*' van $y = f(x)$), *rotatie* (d*raaiing* om de oorsprong *O*) en *spiegeling* (*vermenigvuldiging* t.o.v. een lijn *met de factor* −1) ontstaat van *f(x)* een beeld *f'(x)* dat congruent is met *f(x).*

- Transformaties door translatie



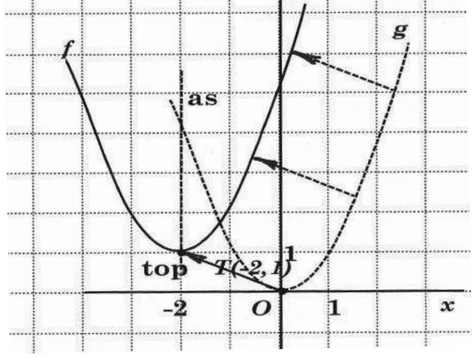
Hiernaast is in een *xOy* stelsel de grafiek getekend van de '***standaardparabool***' $y = x^2$. De top ligt in de oorsprong *O*.
Via een ***translatie T* (4,2) = (4, 2)** *verschuiven* alle punten over +4 eenheden *naar rechts* (*positieve x-richting*) en + 2 eenheden omhoog (*positieve y-richting*). De functie *f:* $y = x^2$. wordt daarbij '*afgebeeld' op de* ***met f congruente*** *grafiek f'*.
Het punt *O*(0,0) wordt door de translatie *T* **(4,2)** afgebeeld op ***O'*(4,2) ;** *P* (3,3) wordt afgebeeld op *P'*(*x',y'*) = **(7,5)** = (3 +**4**, 3 **+ 2**),
Omdat de *translatie* wordt toegepast op *alle punten van het xOy* stelsel, ontstaat ook een translatiebeeld *x'O'y* van het assenstelsel *xOy,* waaruit blijkt dat voor de coördinaten (*x*, y) van een punt *P* (*x, y*) bij de translatie *T* (4,2*)* ***T (a,b) in het verschoven assenstelsel x'O'y'*** geldt dat $\boldsymbol{x' = x - 4}$ en $\boldsymbol{y' = y - 2}$ …(1)

Vergelijk je de *vorm en ligging van* ***f*** in het originele *xOy stelsel* met die van het beeld ***f'*** in het 'verschoven' *x'O'y'* stelsel**,** dan zie je dat *ten opzichte van de verschoven coördinaatassen* de vergelijking van de nieuwe functie *f'* zal zijn: want de top *T'* van *f'* ligt in de nieuwe oorsprong *O'* dus geldt de t*opvergelijking* ten opzichte van het stelsel *x'O' y'*). …(2)
(1) in (2) gesubstitueerd geeft dan als vergelijking van het translatiebeeld van $\boldsymbol{y = x^2}$
bij *T* (4,2): $\boldsymbol{y' = (x')^2 \;\Rightarrow\; y - 2 = (x - 4)^2 \;\Rightarrow\; y = (x - 4)^2 + 2 = x^2 - 8x + 18}$

Uit dit voorbeeld blijkt dat *algemeen het beeld van een translatie T(a,b) van een functie* $y = f(x)$ volgt uit de betrekkingen $\boldsymbol{x' = x}$ $- a$ en $y' = y - b$*, dus::*

> *Bij een translatie T (a,b)* geldt *voor de coördinaten van het beeldpunt P' (x', y')*
> *van een punt P* (*x, y*) *in het verschoven assenstelsel x'O' y'* : $\boldsymbol{x' = x}$ $- a$ *en* $\boldsymbol{y' = y - b}$
> *Voor het beeld f'(x) van de functie y = f (x) geldt dan) y= f (x – a) + b*

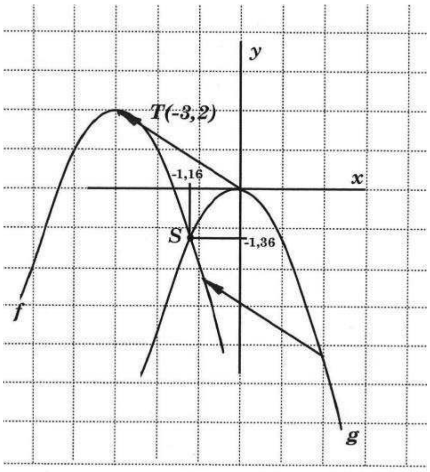
Toepassingen:
1. Schets de grafiek van de functie *f*: $y = (x + 2)^2 + 1$



Volgens de *translatietransfomatie-regel* gaat bij een translatie *T (a, b)* de grafiek *g* van $y = x^2$ over in *f*: $y = (x - a)^2 + b$. In *f*: $y = (x + 2)^2 + 1$ is dan $a = -2$ en $b = 1$ dus ontstaat de functie *f*: $y = (x + 2)^2 + 1$ uit een ***translatie*** van de standaardfunctie *g*: $y = x^2$ ***over*** *T* **(−2, 1).**In de figuur is de grafiek van *f* getekend. De **top** is het punt **(−2, 1)**, de **as** is de lijn $\boldsymbol{x = -2}$.

2. Schets de grafiek van de functie f: $y = -\ x^2\ -6\ x\ -7$ en bepaal het snijpunt van f en de parabool g: $y = -\ x^2$

Door kwadraatafsplitsing herleid je de gegeven functie
f: $y = -\ x^2\ -6\ x\ -7$ tot: f: $(-\ x^2\ -6\ x\ -9) + 2\ = -(\ x + 3)^2 + 2$.
Volgens de translatietransfomatie-regel is dit de grafiek van de functie die ontstaat door de ***translatie T* (– 3, 2)**.uit de standaardfunctie g: $y = -\ x^2$



De ***top*** van (bergparabool) f is dan het punt **(– 3, 2)**
de ***as*** *is de lijn met* $\mathbf{x} = -\ 3$.

Het ***snijpunt S (x, y)*** van de grafieken f en g volgt uit:
$y = -\ x^2\ -6\ x\ -7\ \wedge\ \ y = -\ x^2$ dus uit $-6\ x\ -7 = 0$ zodat
$\mathbf{x} = -\ \frac{7}{6}\ \approx\ -\ 1{,}16$ en $\mathbf{y} = -\ x^2 =\ -(-\ \frac{7}{6})^2\ \approx\ -1{,}36$.

Het gevraagde snijpunt is dan ***S*** **(–1,16; –1,36).**

3 Schets de grafiek van de functie f: $y = (\ x + 3)^5\ -\ 50$ en bepaal de waarden van de coördinaten van de snijpunten van f met de lijn l: $y = 25\ x$.

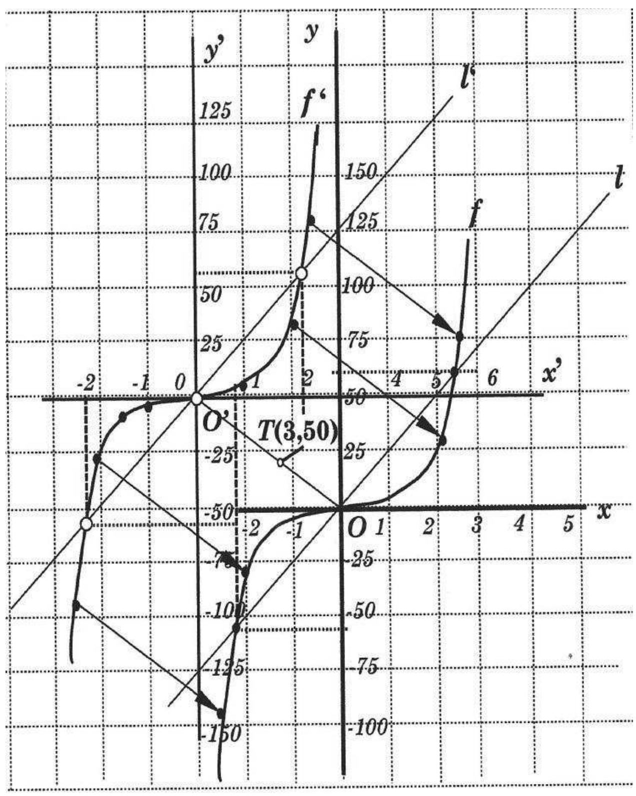
De grafiek van de functie f: $y = (\ x + 3)^5\ -\ 50$
ontstaat uit $f: y = x^5$ door de ***translatie T*** **(3, – 50)**.

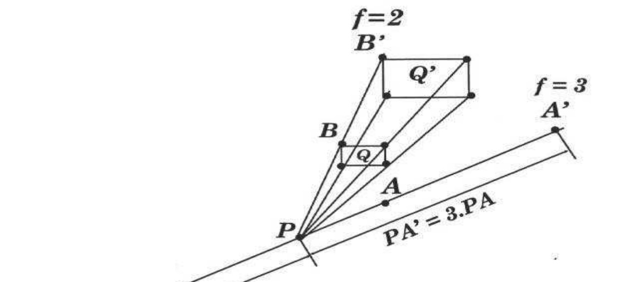
De snijpunten van de lijn l: $y = 25\ x$ met parabool f bereken je eenvoudig in het $x'\ O'\ y'$ -stelsel *omdat daarin geldt* f': $y' = (\ x'\ )^{5}$ en l' : $y' = 25\ x'$ (omdat $l'\ //\ l$ *door* O' *gaat*).

Voor de snijpunten van l' en f' geldt dan
$(\ x'\ )^5 = 25\ x'$ *dus* $\mathbf{x' = 0}\ \vee\ (\ x'\ )^{4} = 25 \Rightarrow \mathbf{x' = \pm \sqrt[4]{25}}$
Verder is $y' = 25\ x'$ dus $\mathbf{y' = 0}\ \vee\ \mathbf{y' = .\ \pm 25\ \sqrt[4]{25}}$

De snijpunten zijn dan: (witte stippen)

(0,0) - ($\sqrt[4]{25}$, 25 $\sqrt[4]{25}$) en **(–$\sqrt[4]{25}$, –25 $\sqrt[4]{25}$)** ≈
(0,0) - (2,24; 55,90) en **(–2,24;–55,90).**





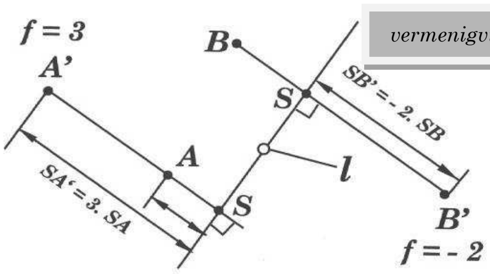
vermenigvuldiging t.o.v. punt P

Transformaties door vermenigvuldiging

Ook kennen we transformaties van functies door vermenigvuldiging.
Men onderscheidt daarbij
a - vermenigvuldiging *ten opzichte van een punt*
b - vermenigvuldiging *ten opzichte van een lijn.*

a. Per definitie is het *product* van een punt *A* ***ten opzichte van een punt P*** (*het 'centrum'*) bij een *positieve factor f* , het punt *A′* op de lijn *PA*, waarvoor geldt dat $|PA'| = f \times |PA|$.
Zo is de rechthoek ***Q′*** het beeld van ***Q*** bij vermenigvuldiging met de factor $f = +2$
Bij een *negatieve fac*tor ***f*** ligt het beeldpunt *A″* van punt *A aan de andere kant van P als A op de lijn AP* en wel zo dat $|PA''| = -f \times |PA|$.

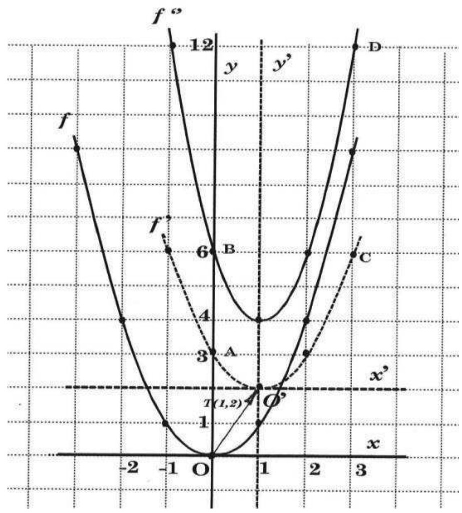
b. Bij vermenigvuldiging met een *positieve factor f* van een punt *A* ***ten opzichte van een lijn l*** ontstaat het beeldpunt *A′* door vanuit *A* een *loodlijn op l* neer te laten en vanuit het *voetpunt S* van die loodlijn een afstand *SA′* zo af te passen, dat $SA' = f \times SA$.



vermenigvuldiging t.o.v. lijn l

Bij een *negatieve* factor ***f*** ligt het beeldpunt *B′* van punt *B aan de andere kant van P als B, op de lijn BS* en wel zo dat $|SB'| = -f \times |SB|$.

Grafieken van functies als *f*: $y = ax^2 + b\,x + c$ met $\boldsymbol{a \neq 1}$ hebben niet de *standaardvorm* van $y = x^2$ zoals alle grafieken van de functies $y = \mathbf{1}\,x^2 + a\,x + b$.
Wil je de grafiek van bijvoorbeeld *f*: $y = 2x^2 - 4\,x + 6$ uit de standaardvorm van $y = x^2$ afleiden, dan gaat dit als volgt:
1^0 Pas kwadraatafsplitsing toe, dus schrijf: *f*: $y = 2x^2 - 4\,x + 6$
$\Rightarrow\ y = 2\,(x^2 - 2\,x + 3) = 2\,\{(x^2 - 2\,x + 1) + 2\,\} = \mathbf{2\,\{(x-1)^2 + 2\}}$
2^0 Pas *de* ***translatie*** $T(1,2)$ toe op de punten van de standaardgrafiek $f: y = x^2$ zodat het beeld ontstaat van de grafiek $f' = (x-1)^2 + 2$ (*translatietransformatie-regel*)
3^0 *Vermenigvuldig* dit beeld *f* ' *ten opzichte van de x-as met* + 2 (notatie *P (x –as,* 2*).* Dit geeft:
$\boldsymbol{f'' : y = 2.\,\{(x-1)^2 + 2\} = 2x^2 - 4\,x + 6}$ dus is f'' de grafiek van de functie *f*: $y = 2x^2 - 4\,x + 6$.



Algemeen geldt ***voor elke functie y = f(x)***: [*)]

Bij de vermenigvuldiging P (x -as , a) gaat een functie y = f(x) over in y = a. f (x)

[*)] Omdat ook vermenigvuldigingsbeelden van een functie de *beeldpunten* zijn van de *functie f*(*x*), is deze *vermenigvuldigingregel P (x -as , a) geldig voor elke reële functie f*(*x*).

- Transformaties van wortelvormen

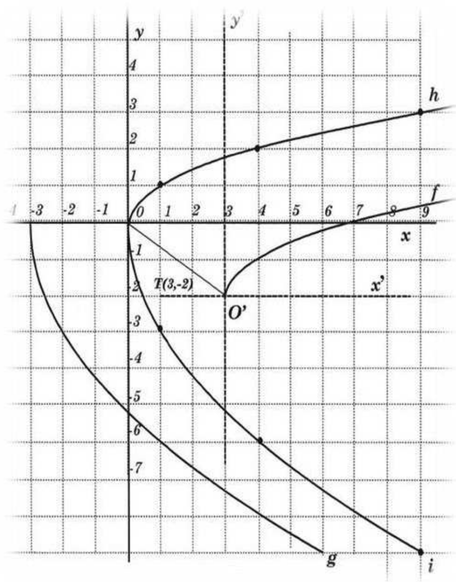
Ook de grafieken van *wortelvormen* (*machtsfuncties* met gebroken exponent) kunnen via translatie en/of vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as, afgeleid worden van hun standaardvorm $y = \sqrt{x} = \boldsymbol{x}^{\mathbf{0,5}}$

Voorbeelden:

a. Schets de grafieken van de functies *f:* $y = \sqrt{x-3} - 2$ en *g:* $y = -3\sqrt{x+3}$

b. Geef de coördinaten van het beginpunt van elk.

c. Geef domein en bereik aan van beide functies.



a. Teken de standaardgrafiek *h:* $y = \sqrt{x}$.
Deze heeft als startpunt het punt (0,0) en gaat verder door de roosterpunten (1,1), (4,2), (9,3),…
- Pas nu op h de translatie T (3,−2) toe dan ontstaat volgens de transformatieregel de gevraagde grafiek ***f:*** $\boldsymbol{y = \sqrt{x-3} - 2}$

- Uitgaande van de standaardgrafiek *h:* $y = \sqrt{x}$ *vermenigvuldig* je deze *t.o.v. de x-as* met de factor $\mathbf{-3}$, waaruit de grafiek ***i:*** $\boldsymbol{y = -3\sqrt{x}}$ ontstaat.
Pas hierop de translatie T (0,−3) toe, dan vind je de grafiek van ***g:*** $\boldsymbol{y = -3\sqrt{x+3}}$ welke werd gevraagd.

b. Uit de figuur is direct af te leiden dat het startpunt van *f:* $y = \sqrt{x-3} - 2$ het ***beeldpunt (3,−2)*** is van het origineel (0,0) van *h:* $y = \sqrt{x}$ (bij de translatie $T(3, -2)$)
Zo is het beeldpunt $(\mathbf{-3}, 0)$ van P(x-as, −3) het startpunt van *g:* $y = -3\sqrt{x+3}$.

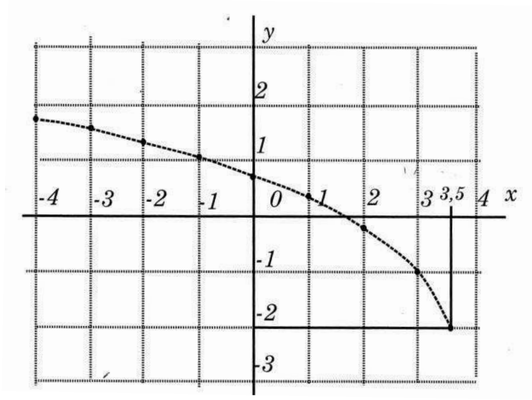
c. - Linkergrens van het *domein* van de standaardgrafiek ***h:*** $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$ is de oorsprong O(0,0), de rechtergrens is ∞, dus $\boldsymbol{D_h} = \mathbf{[\,0, \rightarrow \rangle}$. Het domein van f is dan $\boldsymbol{D_f} = \mathbf{[3\,, \rightarrow \rangle}$.
Linkergrens van het bereik van h *is* O(0,0), de rechtergrens is ∞, dus $\boldsymbol{B_h} = \mathbf{[\,0, \rightarrow \rangle}$.
Het bereik van g is dan $\boldsymbol{B_f} = [\mathbf{-2}\,, \rightarrow \rangle$
- Linkergrens van het *domein* van ***i:*** $\boldsymbol{y = -3\sqrt{x}}$ is O(0,0), de rechtergrens is ∞, dus $\boldsymbol{D_i} = [\,0, \rightarrow \rangle$. Het domein van g is dan $\boldsymbol{D_g} = [\mathbf{-3}\,, \rightarrow \rangle$.
Linkergrens van het *bereik* van ***i:*** is O(0,0), de rechtergrens is ∞, dus $\boldsymbol{D_i} = [\,0, \rightarrow \rangle$.
Het bereik van g is dan: $\boldsymbol{Bg} = \langle \leftarrow, \mathbf{0}\,]$.

NB: Het is in het algemeen *niet direct* mogelijk om *wortelvormen* betrouwbaar *te 'plotten' in de GR*. Als voorbeeld de functie $f(x) = y = -2 + \sqrt{7-2x}$:

- Voer in $y = -2 + \sqrt{7-2x}$ en kies via [WINDOW] $X_{min} = -4$; $X_{max} = 4$; $Y_{min} = -2$; $Y_{max} = 2$ (andere waarden onveranderd laten)
De tabel van de grafiek geeft *vanaf* $\boldsymbol{X = 4}$ 'ERROR' omdat daarvoor dan $\sqrt{7-2x}$ niet bestaat. Verander je via [TBLSET] Δ Tbl in 0.1 dan geeft de GR 'ERROR' *vanaf* $\boldsymbol{X = 3{,}6}$
Een eenduidig 'beginpunt' van de grafiek,vindt de GR dus niet omdat de *'trace-cursor'* met een vaste stapgrootte werkt.

Een beginpunt moet dus handmatig worden bepaald: $7 - 2x \geq 0$, dus $2x \leq 7 \Rightarrow x \leq 3{,}5$, dus is *van het startpunt* $\boldsymbol{x = 3{,}5}$ waarbij dan $\boldsymbol{y} = -2 + \sqrt{7-2x} = \mathbf{-2}$.

***Beginpunt van f**: $y = -2 + \sqrt{7-2x}$ is dus het punt* $\boldsymbol{S\,(3{,}5\,;\,-2)}$



Het domein van de functie is $\langle \leftarrow;\ 3{,}5\,]$,
het bereik is dan $[-2\ ,\rightarrow\rangle$
Verdere punten van de grafiek volgen uit onderstaande tabel:

x	3,5	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4
y	−2, 00	−1, 00	−0,27	0,24	0,65	1,00	1,32	1,61	1,87

Bereken van de volgende functies het domein, bereik en de coördinaten van het beginpunt:
$f(x) = 3 + \sqrt{8-4x}$, $g(x) = -2\sqrt{x+3}$ en $h(x) = 5 - \sqrt{2x+6}$

1. $\boldsymbol{f(x) = 3 + \sqrt{8-4x}}$
Er moet gelden: $8 - 4x \geq 0$ dus $-4x \geq -8 \Rightarrow \boldsymbol{x \leq 2}$.
Van het beginpunt is dan $x = 2$ dus $y = 3 \Rightarrow$ beginpunt is het ***punt*** **(2, 3).**
Domein $D_f = \langle \leftarrow, 2\,]$, bereik $B_f = [3\ , \rightarrow\rangle$

2. $\boldsymbol{g(x) = 3 + \sqrt{4x-8}}$
Hier moet gelden: $4x - 8 \geq 0$ dus $4x \geq 8 \Rightarrow x \geq 2$.
Van het beginpunt is dan $x = 2$ dus $y = 3 \Rightarrow$ beginpunt is het *punt* **(2, 3)**
Domein $D_f = [2\ , \rightarrow\rangle$, bereik $B_f = [3\ , \rightarrow\rangle$

3. $\boldsymbol{h(x) = 5 - \sqrt{2x+6}}$
$2x + 6 \geq 0$ dus $\boldsymbol{x \geq -3}$ Van het beginpunt is dan $x = -3$ dus $y = 5 - \sqrt{2,(-3)+6} = 5 \Rightarrow$ beginpunt is dus het *punt* **(−3, 5)**
Domein $D_f = [-\mathbf{3}, \rightarrow\rangle$, bereik $B_f = [\leftarrow, 5]$.

5. *Exponentiële functies*

Na de *machtsfunctie* $f(x) = x^a$ met *vaste exponent a en variabel grondtal x*, bestaat 'omgekeerd' een ***exponentiële functie*** $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ met *vast grondtal a en variabele exponent x.*

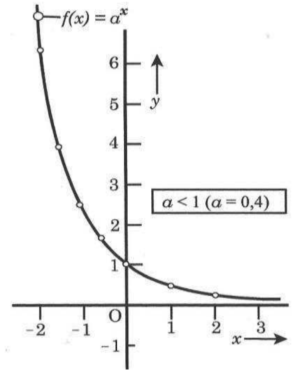
> *Functies waarvan de exponent x de variabele is en een positief grondtal een constante heten exponentiële functies. Algemene vergelijking*: $y = f(x) = a^x \quad (a > 0)$

Voor $\boldsymbol{a \leq 0}$ is de functie *niet gedefinieerd*.
Immers als $a = 0$ dan is $a^x = 0$ voor elke x, dus is a^x *geen functie*. Als $\boldsymbol{a < 0}$ dan *bestaat* a^x *niet* voor *alle waarden van x*. Zo zijn: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; $a^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{a})^3$; $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$; …. *ongedefinieerd* als *a negatief* is.

Bij elke exponent x, is de waarde van a^x (**a > 0**) steeds positief want:
- als $x > 0$ dan $a^x > 0$ want per definitie is a^x = a.a.a.a..a.(x-maal)
- als $x < 0$ dan $a^x = 1 / a^{-x}$ dus zeker positief omdat a^{-x} dan positief is.

Alle grafieken $y = f(x) = a^x$ liggen dus *in het eerste en derde kwadrant.*
Omdat $a^0 = 1$ voor iedere a gaan *alle* grafieken *door het punt* (0,1).
Beschouw nu de *functie* **$f(x) = a^x$** voor waarden van a, met **$0 < a < 1$** en **$a > 1$**:

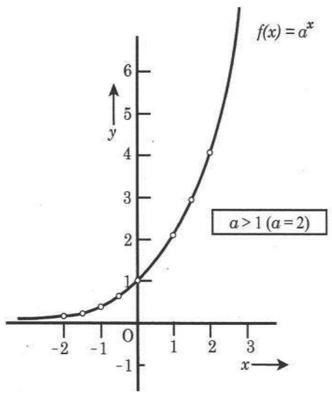
1. $f(x) = a^x$ ($0 < a < 1$)



Voor $0 < a < 1$ is de functie ***monotoon dalend***, dus bij *toenemende x* neemt *y af*. Immers als $f(x) = a^x$ dan is $f(x+1) = a^{x+1} = a.\,a^x$ en daar $a < 1$ is $a.\,a^x < a^x$ dus $\boldsymbol{a^{x+1} < a^x}$ zodat $f(x) = a^x$ *monotoon daalt.*

Bij *onbepaald grote toename van x,* dus '*als x tot oneindig nadert'*, notatie $x \to \infty$, dan nadert a^x onbepaald tot nul omdat **$0 < a < 1$** dus de waarde van a^x bij toenemende x steeds verder afneemt.
De waarde nul wordt nooit bereikt, want er bestaat geen x waarvoor a^x gelijk is aan nul, zodat bij toenemende x de grafiek steeds dichter tot de *positieve x-as* (rechts van O) nadert *zonder hem ooit te raken*:
De x-as heet dan een (horizontale) ***asymptoot*** van de grafiek van $f(x) = a^x$. ($0 < a < 1$)

2. $f(x) = a^x$ ($a > 1$)



Als $a > 1$ dan is de functie ***monotoon stijgend***, want: als $f(x) = a^x$ dan is $f(x+1) = a^{x+1} = a.\,a^x$ en daar $a > 1$ is dan $a.\,a^x > a^x$ dus $\boldsymbol{a^{x+1} > a^x} \Rightarrow \boldsymbol{f(x) = a^x}$ is dan *monotoon stijgend.*
Bij *afnemende waarden* van x wordt de waarde van a^x steeds kleiner want $a^{x-1} = \frac{a^x}{a} < a^x$ omdat $a > 1$.
Bij onbepaald grote afname van x nadert a^x dan onbepaald dicht tot nul. De waarde nul wordt nooit bereikt, omdat er geen x bestaat met $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = 0$ dus hier zal bij afnemende x de grafiek steeds dichter tot de *negatieve x-as* (links van O) naderen: De x-as is hier een *horizontale asymptoot.*

- Exponentiële groei

In onderstaande tabel wordt de groei weergegeven van de bevolking van Latijns-Amerika in de vierjaarlijkse perioden tussen 1950 en.1970

jaar	1950	1954	1958	1962	1966	1970
aantal $\times 10^6$	164	183	203	227	254	282

Elke periode blijkt de bevolking met een *factor* van *circa 1*,11 te zijn toegenomen, want:
$\frac{183}{164} \approx \frac{203}{183} \approx \frac{227}{203} \approx \frac{254}{227} \approx \frac{282}{254} \approx 1{,}11.$
De factor 1,11 heet in zo'n geval de ***groeifactor***.

Werk je hiermee de onderste rij van de tabel uit, dan vind je:

aantal $\times 10^6$	**164**	**183** = 1,11 × 164	**203** = 1,11 × 1,11 × 164	**227** = 1,11 × 1,11 × 1,11 × 164	**254** = 1,11 × 1,11 × 1,11 × 1,11 × 164	**282** ....
	$1{,}11^0 \times 164$	$1{,}11^1 \times 164$	$1{,}11^2 \times 164$	$1{,}11^3 \times 164$	$1{,}11^4 \times 164$	$1{,}11^5 \times 164$

Je ziet dan dat bij de *groeifactor* 1,11 *na* $\boldsymbol{t}$ *perioden van* 4 *jaar* (t = 0, 1, 2, 3, 4) de *beginwaarde* 164 (dus na t = 0 perioden) met een factor $1{,}11^{\mathbf{1}}$ **,** $1{,}11^{\mathbf{2}}$ **,** $1{,}11^{\mathbf{3}}$**,** $1{,}11^4$ $1{,}11^{\mathbf{5}}$ *is toegenomen*. Dus $\boldsymbol{t}$ *perioden na de startwaarde* 160 is die waarde toegenomen tot $\mathbf{1,11^{\boldsymbol{t}}\ .\ 164.}$

Deze toename wordt *exponentiële groei* genoemd.
Noemen we de ***startwaarde*** 164 = $\boldsymbol{N}$ **(0)** en de ***groeifactor per periode*** 1,11 **=** $\boldsymbol{g}$ dan is na t perioden: $\boldsymbol{N(t) = N(0)\ .\ g^t}$. $N(t)$ is dus een *exponentiële functie van t.*

> *Bij exponentiële groei waarbij de groeifactor g in gelijke perioden constant is,*
> *is na t perioden:* $N(t) = N(0)\ .\ g^t$ ($N(0)$ = *startwaarde*)

***Toepassingen*:**

1. Een zekere hoeveelheid neemt *elk kwartier* met 12% toe. Bereken:
a. de groei*factor* per kwartier
b. de groeifactor en het groei*percentage* per uur
c. het groeipercentage per *vijf minuten*

a. Na een kwartier is de hoeveelheid gegroeid tot 1,12 × de startwaarde (= 1).
De *groeifactor per kwartier* is dan 1,12 : 1 = **1,12.**
b. De *groeifactor per uur* is $1{,}12^{\,4}$ = $\mathbf{1,574}$; het *groeipercentage* is dan **57,4%**
c. De groeifactor in vijf minuten (= 1/3 kwartier) is $1{,}12^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1{,}12} \approx 1{,}0385$
dus het groeipercentage per vijf minuten is dan ≈ **3,85%**

2. Een bacteriecultuur groeit exponentieel.
Op t = 4 zijn er 50.000 bacteriën, op t = 8 zijn er 130.000 bacteriën als t de tijd is in uren.
Bereken groeifactor en groeipercentage per uur en de groeifactor per dag.

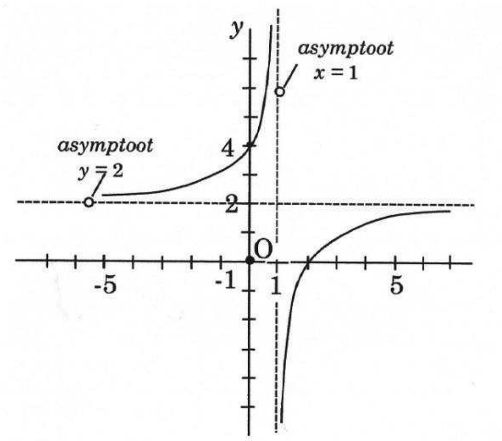
De *groeifactor g* is in *vier* uur $\frac{130.000}{50.000} = 2{,}6$, dus *per uur* $(2{,}6)^{\frac{1}{4}} \approx$ **1,269.**
Het *groeipercentage* per uur is dan ≈ **26,9%**
Per dag is dan de groeifactor $1{,}269^{\,24} \approx \mathbf{304.}$

6. *Gebroken rationale functies*

Gebroken rationale functies zijn functies van de vorm $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$
waarin $g(x)$ en $h(x)$ machtsfuncties zijn met reële coëfficiënten.

De grafieken van deze functies kunnen verschillende *hyperbolische* vormen aannemen. Hiervan twee voorbeelden:

1. $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x-4}{x-1}}$



De functie is niet gedefinieerd in het punt met $x = 1$, omdat voor die waarde de *noemer gelijk aan nul* wordt en dus de bijbehorende functiewaarde onbepaald is. Verder volgt uit $\boldsymbol{x = 0} \Rightarrow \boldsymbol{y = 4}$ en uit $\boldsymbol{y = 0} \Rightarrow 2x - 4 = 0$ dus $\boldsymbol{x = 2}$ zodat de grafiek de x-as snijdt in het punt (2,0) en de y-as in (0,4).

Plot je de functie in de GR, dan blijkt de grafiek te bestaan uit twee krommen die je (na kegelsneden op blz.168) zult herkennen als de *twee takken* van *een hyperbool.*
Jeziet dat *bij toenemende* $|x|$ (dus x naar rechts of naar links toenemend)*, rechter- en linkertak naderen tot de lijn* $y = 2$ en dat *bij toenemende* $|y|$ beide takken *naderen tot de lijn* $x = 1$. De functie heeft dus een *horizontale asymptoot* $y = 2$ en een *verticale asymptoot* $x = 1$. (Gr .'symptootos' = samenvallend). De functie heet ***discontinu i***n het punt met $x = 1$.
*)

Toelichting asymptoten:

- Hoe dichter x tot de waarde 1 nadert (van links of van rechts), hoe dichter de noemer $x - 1$ *tot nul nadert* en hoe dichter $f(x)$ tot de limiet $\pm\infty$ nadert, want hoe kleiner de noemer, hoe groter de waarde van $y = \frac{2x-4}{x-1}$. De lijn $x = 1$ heet *verticale asymptoot* van $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x-4}{x-1}}$.

- Kies je voor *x:* $x = \pm 10^{100}$ (= 1 googol , grootst benoemde getal in de wiskunde dat binnen het vwo vaak als benadering voor oneindig = ∞ wordt gebruikt.), dan is:

$$y = \frac{2x-4}{x-1} = \frac{2.\pm 10^{100} - 4}{\pm 10^{100} - 1} \approx \frac{2 \,.\, \cancel{\pm 10^{100}}}{\cancel{\pm 10^{100}}} \approx 2.$$

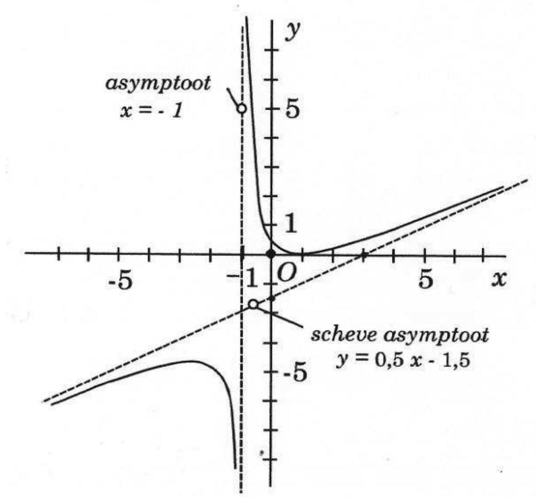
Als dus x nadert tot $\pm\infty$ dan nadert de functiewaarde van $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x-4}{x-1}}$ onbepaald dicht tot 2.
De lijn $y = 2$ heet dan een *horizontale asymptoot* van $f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$.

---

*) Na *limieten en continuïteit* aan het einde van dit hoofdstuk, (blz.37) zal het begrip asymptoot exact worden omschreven. In opgave 2 hierna wordt ook een 'scheve asymptoot' behandeld.

2. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1}}$

Omdat de noemer van de breuk bij $x = -1$ de waarde nul aanneemt, is de functie voor dat punt niet gedefinieerd. Je ziet dan ook dat de grafiek van $f(x)$ in $x = -1$ onderbroken is: De functie is dus ***discontinu*** in $x = -1$.



- Het *snijpunt met de y-as* is het punt met $x = 0$
en $y = \dfrac{0{,}5\,(0-1)^2}{0+1} = 0{,}5$, dus het punt (0; 0,5)**.**

- Een *snijpunt met de x-as* is het punt met
$y = 0$, dus als $\dfrac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1} = 0$ ofwel:
$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0$ met twee *samenvallende wortels*: $\boldsymbol{x = 1}$.
Punt (1, 0) is dan *raakpunt* van $f(x)$ aan de x-as.

- De grafiek heeft een verticale asymptoot in het punt met $x = -1$. Bewijs:

Als x *van links* nadert tot -1 ($x < -1$), dan nadert de noemer van $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1}}$ tot
$(-1-\delta) + 1 = -\,\boldsymbol{\delta}$ dus **vanaf links t**ot 0.
De waarde van $f(x) = \dfrac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1}$ nadert dan tot $-\infty \Rightarrow x = -1$ *is een (verticale) asymptoot van de linkertak van de hyperbool.*
- Ook van de rechtertak is de lijn $x = 1$ een asymptoot want als x van rechts nadert tot -1
($x > -1$) dan nadert de noemer van $f(x) = \dfrac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1}$ tot $(-1 + \delta) + 1 = \delta$ dus tot 0. *)
De waarde van $f(x) = \dfrac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1}$ nadert dan **van rechts tot +** $\boldsymbol{\infty}$ dus $x = -1$ *is tevens asymptoot van de rechtertak van de hyperbool.*

- Omdat een eventuele limiet van $f(x) = \frac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1}$ als x *tot plus of min oneindig nadert* niet direct is te bepalen herleiden we de functie: door een *staartdeling* uit te voeren:

$x + 1 \;/\; 0{,}5\,x^2 - x + 0{,}5 \;\backslash\; 0{,}5\,x - 1{,}5$
$\quad 0{,}5\,x^2 + 0{,}5\,x$
$\quad \underline{\phantom{0{,}5\,x^2 + 0{,}5\,x}}$
$\quad\quad -1{,}5\,x \;\; -1{,}5$
$\quad\quad \underline{\phantom{-1{,}5\,x \;\; -1{,}5}}$
$\quad\quad\quad \boldsymbol{2}$

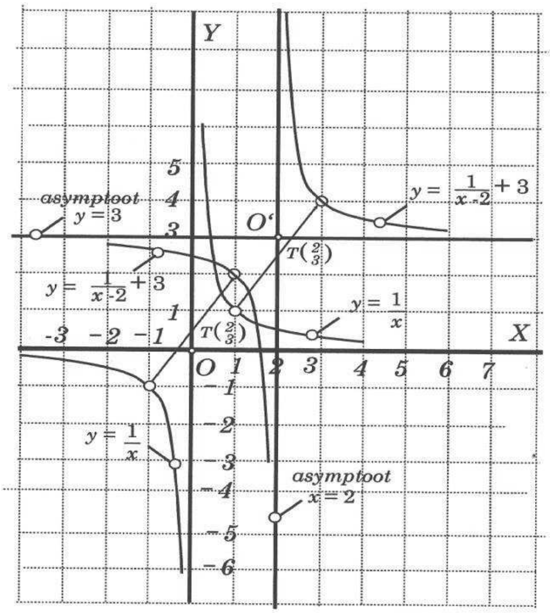
dus is de gegeven functie gelijkwaardig met:
$\boldsymbol{y = 0{,}5\,x - 1{,}5 + \dfrac{2}{x+1}}$.

De limiet hiervan als x tot oneindig nadert is dan $y = 0{,}5\,x - 1{,}5$ omdat $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{x-1} = 0$
De lijn met vergelijking $\boldsymbol{y = 0{,}5\,x - 1{,}5}$ heet nu *een **scheve asymptoot*** van de gegeven functie.

---

* Het getal δ (delta) wordt algemeen gebruikt om een zeer kleine, tot nul naderende positieve waarde, aan te geven .

3. $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x-2} + 3}$



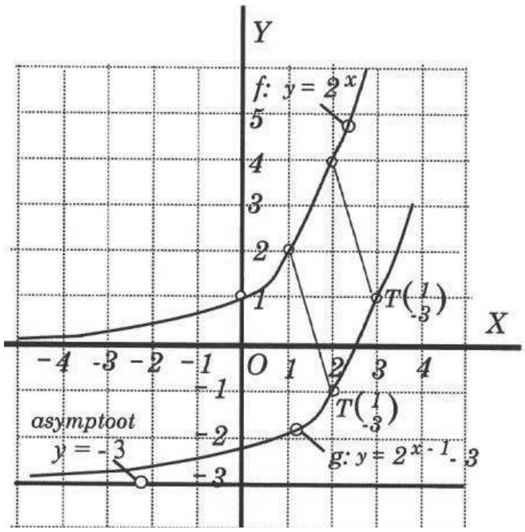
De grafiek van deze gebroken functie (dus een hyperbool) ontstaat door de translatie ***T* (2,3)** toe te passen op de *standaardhyperbool g:* $\boldsymbol{y = \frac{1}{x}}$ volgens de translatietransformatie-regel. (blz.11)

De horizontale asymptoot van *g:* $y = \frac{1}{x}$ is de x-as met vergelijking $\boldsymbol{y = 0}$, de verticale asymptoot is de y-as met vergelijking $\boldsymbol{x = 0}$.
Bij de translatie $T(2,3)$ gaat de oorsprong O over in O' dus de vergelijking $\boldsymbol{y} = 0$ over in $y = 0 + 3 = \boldsymbol{3}$ en de vergelijking $x = 0$ in $\boldsymbol{x} = 0 + 2 = \boldsymbol{2}$
De lijn $\boldsymbol{y = 3}$ is dus *horizontale asymptoot,* $\boldsymbol{x = 2}$ is de *verticale asymptoot van f:* $y = \frac{1}{x-2} + 3$.

7. *Grafieken van exponentiële functies*

1. $\boldsymbol{f(x) = 2^{x-1} - 3}$

De grafiek van deze exponentiële functie ontstaat uit de standaard-grafiek *g:* $y = 2^x$ via de translatie ***T*(1,−3).**



Horizontale asymptoot van *f:* $y = 2^x$ is de x-as, dus de lijn $y = 0$. De *horizontale asymptoot* van *g*: $y = 2^{x-1} - 3$ is dan: $\boldsymbol{y} = 0 - 3 = \boldsymbol{-3}$.
Er is geen verticale asymptoot want $\lim_{x\to\infty} 2^x$ bestaat niet.

Het *domein* van *f* (alle waarden van x waarvoor de functie 2^x is gedefinieerd) is ℝ , dus is ℝ het *domein van g.*
Het bereik van *f* (alle functiewaarden die 2^x kan aannemen) is (0,→), dus ⟨**−3**, → ⟩ is het *bereik* ***van g.***

2. $\boldsymbol{f(x) = 2^{x+3} - 4}$

a. Hoe ontstaat de grafiek van *f* uit de standaardgrafiek van een exponentiële functie ?
b. Bepaal het domein en bereik van *f*

a. De exponentiële functie $f(x) = 2^{x+3} - 4$ ontstaat uit de grafiek van $g(x) = 2^x$ via de translatie ***T*** **(−3,−4)** (blz.11)
b. Het domein van $g(x) = 2^x$ = ℝ dus is ook ℝ **het *domein van f* :** $y = 2^{x+3} - 4$
Het bereik van $g(x) = 2^x$ is ⟨ 0 , → ⟩, dus van *f* : $y = 2^{x+3} - 4$ is het ***bereik*** **⟨− 4,→⟩.**

8 . *Logaritmische functies*

a. Logaritme van een getal

Exponentiële vergelijkingen als bij voorbeeld $17^{x} = 500$ kan je na voorgaande theorie nog niet exact oplossen. Alleen door 'proberen' met een rekenmachine is een *benadering* mogelijk.

Men heeft daarom het begrip *logaritme van een getal* ingevoerd.
De Engelse wiskundige Henry Briggs (1561-1630) besloot alle *positieve getallen* als een ***macht van tien*** te schrijven. De *exponenten* van deze machten noemde hij ***logaritmen,*** dus de logaritme van een getal a is het *getal p waarvoor* $10^{p} = a$.
Definitie: $\boldsymbol{\log a = p}$ **als** $\boldsymbol{10^{p} = a}$.

Zo is bijvoorbeeld $100 = 10^{2}$ dus de logaritme van 100 = 2. Notatie: $\log 100 = 2$.
$1000 = 10^{3}$ dus $\log 1000 = 3$; $1 = 10^{0} \Rightarrow \log 1 = 0$; $0{,}001 = 10^{-3} \Rightarrow \log 0{,}001 = -3$
De logaritmen van getallen a met $\boldsymbol{a \leq 0}$ ***bestaan niet*** want er is geen getal p waarvoor $10^{p} = a$ als $a \leq 0$.
Briggs berekende de logaritmen van alle viercijferige getallen en verzamelde ze in 'logaritmetafels'. Zo ontstonden de ***Briggse logaritmen***, met als ***grondtal*** het getal **10** [*)]

Niet alleen het getal tien kan als *grondtal g* voor logaritmen dienen, maar in feite *elk **positief reëel** getal.*
Omdat bijvoorbeeld $9 = 3^{2}$ kan men met *als grondtal* 3 zeggen: $\log 9 = 2$.
Om verwarring te voorkomen schrijft men dan ${}^{3}\log 9 = 2$.
Zo is ${}^{5}\log 125 = 3$ want $5^{3} = 125$; ${}^{1/3}\log \frac{1}{27} = 3$, want $(1/3)^{3} = \frac{1}{27}$, etc.
Men definieert dan: $\boldsymbol{{}^{g}\log a = x}$ ***als*** $\boldsymbol{g^{x} = a}$ ($g > 0$ als grondtal van een exponentiële functie volgens blz.15). Omdat $g > 0$ is dan ook $a > 0$ dus **als** $\boldsymbol{a \leq 0}$ ***dan bestaat*** $\boldsymbol{{}^{g}\log a}$ ***niet***

Algemeen geldt:

> *De ^{g} logaritme van een getal a is gedefinieerd door*: $\boldsymbol{{}^{g}\log a = x}$ ***als*** $\boldsymbol{g^{x} = a}$ (a en $g > 0$)

De wiskundige John Napier (1707-1783)(voerde veel later het '***Getal van Euler***' $\boldsymbol{= e}$ in voor het grondtal ***g*** van de logaritmen. ($e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n} \approx 2,718281828\ldots$)
Logaritmen met dit grondtal noemt men Neperiaanse- of *natuurlijke logaritmen* omdat de waarde ervan een grote rol speelt in veel natuurprocessen.
Notatie voor logaritmen *met grondtal e* is $\boldsymbol{\ln x}$, zodat dus $\boldsymbol{\ln x = {}^{e}\log x}$.

> *Log x is de Briggse-logaritme van x met* 10 *als grondtal, dus* $\log x = {}^{10}\log x$
> *ln x is de natuurlijke logaritme met grondtal e, dus* $\ln x = {}^{e}\log x$
> *Als* $\log x = p$ *dan is* $10^{p} = x$, *als* $\ln x = p$ *dan is* $e^{p} = x$

[*)] Zo berekende Briggs handmatig de wortel uit 10 daarna de wortel uit de uitkomst daarvan en daaruit weer de wortel et cetera. Alles in zestien decimalen nauwkeurig!. Omdat $\sqrt{10} = 10^{0,5} = 3{,}16227766\ldots$, is $\log 3{,}16227766\ldots = 0{,}5$; $\sqrt{3{,}16227766} = \sqrt{\sqrt{10}} = 10^{0,25} = 1{,}77827941\ldots$ dus $\log 1{,}77827941\ldots = 0{,}25$ enz..
En dit was nog maar een begin…

b. Eigenschappen van logaritmen

Voor elk positief grondtal g en alle positieve waarden voor a en b gelden de regels:

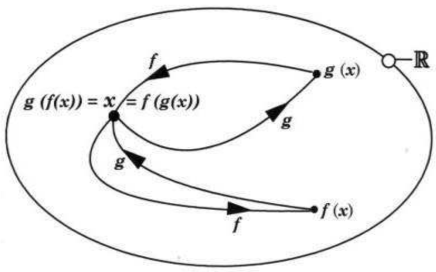
1. ${}^{g}\log ab \quad = {}^{g}\log a + {}^{g}\log b$
2. ${}^{g}\log \frac{a}{b} \quad = {}^{g}\log a - {}^{g}\log b$
3 - ${}^{g}\log(a^{n}) \quad = n.\,{}^{g}\log a$
4 - *a:* ${}^{g}\log(\mathrm{g}^{x}) = x$ *en* *b-:* $g^{\,{}^{g}\log x} = x$

Bewijs:

1. Noem ${}^{g}\log a = p$ en ${}^{g}\log b = q$ dan is per definitie $\mathrm{g}^{p} = a$ en $\mathrm{g}^{q} = b$ met gevolg:
$\boldsymbol{ab} = \mathrm{g}^{p}.\,\mathrm{g}^{q} = \mathbf{g^{p+q}}$, odat ${}^{g}\log ab = p + q$ dus: $\boldsymbol{{}^{g}\log ab = {}^{g}\log a + {}^{g}\log b}$.
2. Noem ${}^{g}\log a = p$ *en* ${}^{g}\log b = q$ dan is $\mathrm{g}^{p} = a$, $\mathrm{g}^{q} = b$ dus $\frac{a}{b} = \frac{\mathrm{g}^{p}}{\mathrm{g}^{q}} = \mathrm{g}^{\,p-q}$ zodat
${}^{g}\log \frac{a}{b} = p - q \Rightarrow$ $\boldsymbol{{}^{g}\log \frac{a}{b} = {}^{g}\log a - {}^{g}\log b}$.
3. Als ${}^{g}\log a = p$ dan $\mathrm{g}^{p} = a$ en $a^{n} = (\mathrm{g}^{p})^{n} = \mathrm{g}^{n.p} \Rightarrow {}^{g}\log(a^{n}) = n.\,p = n.\,{}^{g}\log a$ dus
$\boldsymbol{{}^{g}\log(a^{n}) = n.\,{}^{g}\log a}$.
4 - *a:* ${}^{g}\log(\mathrm{g}^{x}) = x\,.\,{}^{g}\log \mathrm{g}$ (volgens 3) $= x\,.\,1 = x$ (want ${}^{g}\log \mathrm{g} = 1$ omdat $\mathbf{g^{1} = g}$)
$\Rightarrow$ $\boldsymbol{{}^{g}\log(\mathrm{g}^{x}) = x}$.
- *b*: Noem ${}^{g}\log x = p$ dus $\mathrm{g}^{p} = x$ dan is $\mathrm{g}^{\,{}^{g}\log x} = \mathrm{g}^{\,p} = x \Rightarrow$ $\boldsymbol{g^{\,{}^{g}\log x} = x}$.

c. *Inverse functies*

Het *argument x* van een functie *f*(*x*) kan zelf een functie *g*(*x*) *van x* zijn zodat *f* (*x*) = *f* (*g*(*x*)). Voorbeeld:
Noem *g*(*x*) = *z* en *f*(*z*) = *y*, dan is ***f* (*g*(*x*)) = *f*(*z*) = *y* .**
Stel nu dat het *g*-beeld *g*(*x*) *van een origineel x*, door de functie *f* wordt 'terug' afgebeeld *op het origineel x* ,
dan is dus ***f* (*g*(*x*)) = *x***.
Als dan 'omgekeerd' het *f-beeld* *f*(*x*) van *x* *door de functie g* wordt 'terug' afgebeeld op *x* , is ook
***g* (*f*(*x*)) = *x*.**



Als dit geldt voor *elk element uit het domein* van *f* en *g* dus als:
f* (*g*(*x*)) = *x* en *g* (*f*(*x*)) = *x dan heten *f* en *g* elkaars ***inverse functies.***

Zijn f en g twee functies in ℝ waarbij voor elk element x geldt dat
f (*g*(*x*)) **=** *x en g* (*f*(*x*)) = *x* *dan zijn f en g elkaars inverse functies*

Populair uitgedrukt: As *f*(*x*) en *g*(*x*) elkaars inverse functies zijn, dan betekent *f*(*a*) = *b* dat (omgekeerd) *g*(*b*) = *a en als f*(*b*) = *a*, dan *g*(*a*) = *b*.
Voorbeeld: De functies $f(x) = x^{p}$ en $g(x) = \sqrt[p]{x}$ zijn elkaars inversen, want:
$f\,(g(x)) = f\,(\sqrt[p]{x}) = (\sqrt[p]{x})^{p} = \boldsymbol{x}$ en ook is: $g\,(f(x)) = g\,(x^{p}) = \sqrt[p]{x^{p}} = \boldsymbol{x}$ dus zijn $f(x) = x^{p}$ ('machtsverheffen') en $g(x)\ \sqrt[p]{x}$ ('worteltrekken') elkaars inverse functies, dus betekent. $3^{2} = 9$ dat $\sqrt{9} = 3$)

Zo geldt ook:

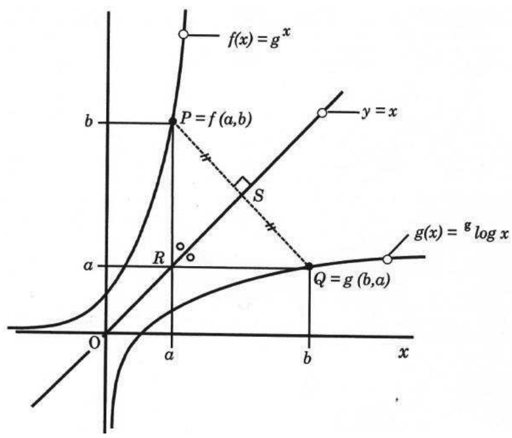
De logaritmische functie $f(x) = {}^g\log x$ en de exponentiële functie $h(x) = g^x$ zijn elkaars inverse functies

Bewijs:

Noem $f(x) = {}^g\log x$ en $h(x) = g^x$ dan is: $\boldsymbol{f(h(x))} = f(g^x) = {}^g\log(g^x) = \boldsymbol{x}$ (eig. 4-a) ...(1)
Ook is $\boldsymbol{h(f(x))} = h({}^g\log x) = \mathbf{g}^{{}^g\log x} = \boldsymbol{x}$ (eigenschap 4-b) ...(2)
Uit (1) en (2) volgt dan $\boldsymbol{f(h(x)) = h(f(x)) = x}$ dus zijn $f(x) = {}^g\log x$ en $h(x) = g^x$ per definitie elkaars ***inverse functies.***

Als f en g elkaars inverse functies zijn, dan zijn de grafieken van f en g elkaars spiegelbeeld in de lijn y = x

Bewijs:



Als voorbeeld zijn de grafieken getekend van de functies $f(x) = g^x$ en zijn inverse $g(x) = {}^g\log x$.
$P(a,b)$ is een *willekeurig punt* van $f(x)$ met $\boldsymbol{f(a) = b}$.
Omdat $g(x)$ *de inverse functie* is van $f(x)$ ligt er dan een punt $Q = (b,a)$ op $g(x)$ dus met $\mathbf{g}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$.
Verder geldt:
$PR = QR = |b - a|$, dus $\Delta\, PRQ$ is gelijkbenig.
De lijn $y = x$ gaat door R, want R is het punt (a,a).
RS (langs $y = x$) is dan in $\Delta\, PRQ$ de *bissectrice* van $\angle R$ omdat de lijn $y = x$ gelijke hoeken (45°) maakt met de x-as en y–as dus ook met de lijnen $y = a$ en $x = b$, met gevolg:
De bissectrice RS van de gelijkbenige $\Delta\, PRQ$ is de middelloodlijn van PQ omdat $\Delta\, PRS \cong \Delta\, QRS$ (ZHZ blz.141) dus P en Q zijn *elkaars spiegelbeeld* in de lijn $y = x$.
Omdat $P(a,b)$ een willekeurig punt is op $f(x)$ geldt dit voor alle punten van f en g, ofwel:
f en g zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn y = x.

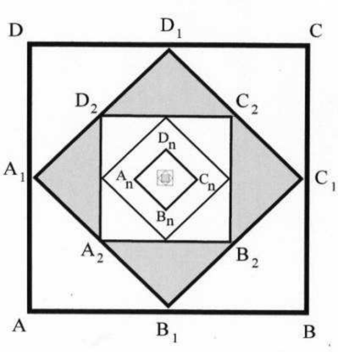
Opgaven:

1. Bewijs dat algemeen geldt: ${}^g\log x = \dfrac{\log x}{\log g}$. *(eigenschap 5)*

Noem ${}^g\log x = p$ dan is $\boldsymbol{x} = \mathbf{g}^{\boldsymbol{p}}$. Noem $\log x = q$ dan is $\boldsymbol{x} = \mathbf{10}^{\boldsymbol{q}}$ zodat $g^p = 10^q = x$ ...(1)
Noem $\log g = r$, dan $g = 10^r$ zodat $g^p = (10^r)^p = 10^q$ volgens (1)
dus $r.\,p = q \Rightarrow p = \dfrac{q}{r}$ ofwel $\boldsymbol{{}^g\log x = \dfrac{\log x}{\log g}}$

Met deze eigenschap kunnen logaritmen met *elk willekeurig grondtal g* met de GR TI-83, via Briggse logaritmen (grondtal = 10) berekend worden.
Bij voorbeeld: ${}^3\log 17 = \dfrac{\log 17}{\log 3} = \mathbf{2{,}5789}$; ${}^{1/3}\log 37 = \dfrac{\log 37}{\log 1/3} = \mathbf{-3,\ 2868}$

2. De middens van de zijden van een vierkant *ABCD* zijn de hoekpunten van vierkant $A_1B_1C_1D_1$. De middens van $A_1B_1C_1D_1$ zijn weer de hoekpunten van vierkant $A_2B_2C_2D_2$ en zo verder volgens onderstaande tekening. De zijde van *ABCD* = 8.
Bij welke index *n* zal de oppervlakte van vierkant $A_nB_nC_nD_n$ kleiner zijn dan 0,001?

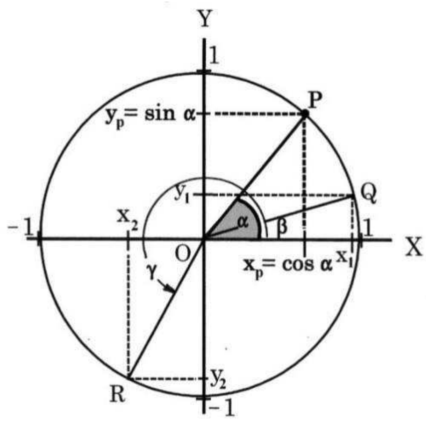


De oppervlakte van *ABCD* = 8^2 = 64. De oppervlakte van elk volgend vierkant is steeds de helft van het vorige vierkant.
Van $A_nB_nC_nD_n$ is dan $O = 64 \times (½)^n$. (n = 1, 2, 3 ,…)
Je berekent nu wanneer $\boldsymbol{O = 64 \times (½)^n = 0{,}001}$: …(a)
Uit $64 \times (½)^n = 0{,}001$ volgt *log* $(64 \times (½)^n)$ = *log* 0,001.
Volgens eigenschap 1 en 3 van logaritmen geldt
log ab = log a + log b en log a^n = n. log a dus uit (a) volgt:
log $(64 \times (½)^n)$ = log 0,001 ⇒
log 64 + n. log ½ = – 3 ⇒ 1,80168 + n. – 0,30103 = –3
dus $\boldsymbol{n = 15{,}95}$ met gevolg:
De oppervlakte van $A_nB_nC_nD_n$ is **kleiner dan 0,001** *vanaf de index* $\boldsymbol{n = 16}$.

9. *Goniometrische functies*

a. Definities in de eenheidscirkel

Uitgaande van de definities (blz.142) *in een rechthoekige driehoek* geldt: ***sinus*** α =
$= \frac{overstaande\ zijde}{schuine\ zijde}$, ***cosinus*** α = $\frac{aanliggende\ zijde}{schuine\ zijde}$, ***tangens*** α = $\frac{overstaande\ rechthoekszijde}{aanliggende\ rechthoekszijde}$
worden nu sinus en cosinus gedefinieerd voor *elke willekeurige hoek* α + *k*. 360°($k \in \mathbb{Z}$).
Daartoe is de ***eenheidscirkel*** ingevoerd, een cirkel met ***straal R* = 1** en als middelpunt *O* = de oorsprong van het orthonormale coördinatenstelsel *XOY*.
Elk hoek α wordt daarin voorgesteld door de hoek *XOP* die het ***'vaste been'*** *OX* maakt met de '***voerstraal'*** *OP*.
Zo is dan α = 0 als de voerstraal *OP samenvalt met OX.*
Als α **> 0** dan wordt *OP* vanuit *OX* om *O over de hoek* α *geroteerd* ***in tegenwijzerzin***, als α**< 0**, dan wordt *OP* vanuit *OX* om *O over de hoek* α *geroteerd* ***in wijzerzin.***
Voor de coördinaten van het eindpunt $P(x_p, y_p)$ van de voerstraal *OP* geldt dan: $\boldsymbol{x_p} = \frac{x_p}{1} = \frac{x_p}{OP}$ = **cos** α en $\boldsymbol{y_p} = \frac{y_p}{1} = \frac{y_p}{OP}$ = **sin** α.
Omdat nu α *elke reële waarde* kan aannemen is het *domein* van sin α en cos α = ℝ ,het *bereik* van sin α en cos α is [−1,1]



Voor elke hoek α zijn sinus α en cosinus α gedefinieerd als de coördinaten van het eindpunt P van de voerstraal OP van hoek α in de eenheidscirkel, waarbij sinus α = de y-coördinaat y_p van P, cosinus α = de x-coördinaat x_p van P

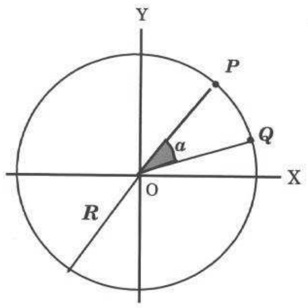
Voorbeelden: Van ∠*XO*P = α zijn in de eenheidscirkel **sin** α = $\boldsymbol{y_p}$ en **cos** α = $\boldsymbol{x_p}$ getekend.
Zo is **cos** ∠***XOQ*** = cos β = $\boldsymbol{x_1}$, **sin** ∠***XOQ*** = sin β = $\boldsymbol{y_1}$; **cos**∠***XOR*** = cos ɣ = $\boldsymbol{x_2}$, **sin** ∠***XOR*** = sin ɣ = $\boldsymbol{y_2}$. Verder is sin 90° = 1; cos 90° = 0; cos 180° = –1; sin 270° = –1 ; sin 270° = –1.

In een rechthoekige driehoek wordt de ***tangens*** van hoek α gedefinieerd als de verhouding $\frac{overstaande\ rechthoekszijde}{aanliggende\ rechthoekszijde}$. Naar analogie hiervan geldt per definitie in de eenheidscirkel: $\tan\alpha = \frac{y_p}{x_p}$ **(**$x_p \neq 0$) zodat voor *elke reële hoek* α geldt: $\mathbf{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ ($\alpha \neq 90° + k.\ 180°$**).**
Het bereik van tan α= ℝ .

Na de definities in de eenheidscirkel zijn sinus, cosinus en tangens *functies van een reële variabele x,* dus moeten genoteerd worden als **sin (*x*), cos (*x*)** en ***tan*(*x*)** In dit boek zullen wij deze exacte notatie slechts dan gebruiken als *x* een *samengestelde variabele* is zoals: sin (2*x*), sin ($x^2 - 5$), cos($\frac{3}{5}$ *x*), …, maar sin(*x*), cos(*x*) en tan(x) noteren we gemakshalve als sin *x* , cos *x* en tan (*x*).

b. De radiaal

Een hoek van 1 *radiaal is de grootte van de middelpuntshoek die een cirkelboog onderspant waarvan de lengte gelijk is aan de straal van de cirkel*



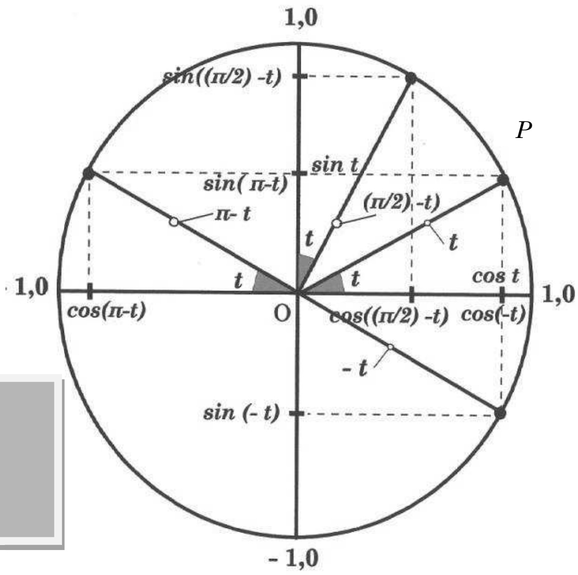
De grootte van een (middelpunts) hoek in radialen is dus gelijk is aan de verhouding $\frac{lengte \text{ van de bijbehorende cirkelboog}}{lengte \text{ van de straal } R \text{ van die cirkel}}$.
De ***standaardeenheid*** van hoekgrootte is in de wiskunde: **1 *radiaal.*** De ***dimensie*** van de radiaal is $\frac{m}{m}$ **= 1.** *)
De *cirkel (straal* = *R*) heeft een booglengte (= omtrek) van = 2π.*R*, dus hoort hierbij een middelpuntshoek in radialen van $\frac{2\pi.R}{R} = 2\pi$ met gevolg: **360° = 2π.** Als $PQ = \frac{3}{4}R$ dan is $\angle$ ***POQ*** = α = $\frac{\frac{3}{4}R}{R} = \mathbf{\frac{3}{4}}$**.**

Zo ook:

hoek ∝ *in radialen*	2 π	3 π/2	π	π/2	1	π / 180
hoek ∝ *in graden*	360 °	270 °	180 °	90 °	180 / π °	1°

c. Herleidingformules

Vaak worden in de *goniometrie* ('hoekmeetkunde') *herleidingformules* gebruikt, zoals die
Voor het ***complement*** van een hoek (aanvulling tot 90° = π /2 radialen), voor het ***supplement*** van een hoek (aanvulling tot 180° = π radialen), voor *dubbele- en halve* hoeken en voor *som of verschil* van twee hoeken.
Uit de getekende eenheidscirkel kan je direct aflezen:



sin − t	= *− sin*	*cos − t*	= *cos t*
sin ($\frac{\pi}{2}$ *− t)*	= *cos t*	*cos* ($\frac{\pi}{2}$ *− t)*	= *sin t*
sin (π *− t)*	= *sin t*	*cos* (π *− t)*	= *− cos t*

*) Hierdoor is ook de standaardeenheid van hoeken in de GR-TI83 ingesteld in *radialen (Radians).* Via de knop MODE kun je dit zo nodig direct veranderen in graden (*Degrees*).

Ook volgt direct uit de definitie van sin t en cos t in de eenheidscirkel de eigenschap: *)

$$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$$

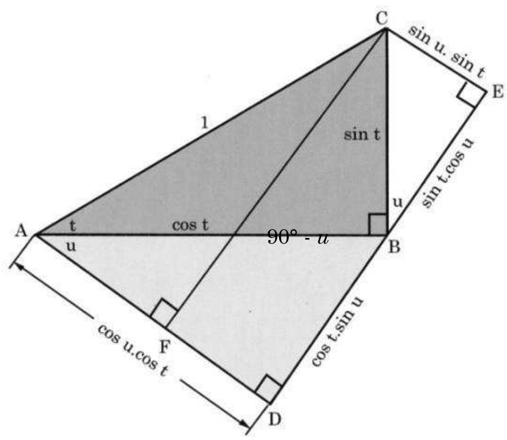
Immers:
Volgens *Pythagoras* geldt voor de coördinaten x_p, y_p van punt P van de voerstraal $OP = R$ in de eenheidscirkel, dat: $x_p^2 + y_p^2 = OP^2 = R^2 = 1$, zodat $\mathbf{\sin^2 t + \cos^2 t = 1}$

- *Sinus en cosinus van som en verschil*

1. $\sin(t+u) = \sin t \,.\, \cos u + \cos t \,.\, \sin u$
2. $\cos(t+u) = \cos t \,.\, \cos u - \sin t \,.\, \sin u$
3. $\sin(t-u) = \sin t \,.\, \cos u - \cos t \,.\, \sin u$
4. $\cos(t-u) = \cos t \,.\, \cos u + \sin t \,.\, \sin u$
5. $\tan(t+u) = \dfrac{\tan t + \tan u}{1 - \tan t . \tan u}$

Bewijs:

1. In de rechthoekige driehoeken ABC en ADB zijn $\angle BAC = t$ en $\angle BAD = u$ aangegeven.
Zijde DB van ΔADB is verlengd met BE zodat een rechthoekige ΔBEC ontstaat.
Omdat in ΔADB: $\angle ABD = 90° - u$ geldt in ΔBEC dat $\angle CBE = 180° - (90° - u) - 90° = u$.
$CF \perp AD$ is een hulplijn.
De lengten van alle lijnstukken zijn aangegeven en uitgedrukt in de lengte van zijde $AC = 1$.



Zo is ***BE = sin t. cos u*** want in ΔBEC is $BE = BC$. *cos u* en uit ΔABC volgt dat
$BC = \sin t.\ 1 = \sin t$ zodat ***BE = sin t. cos u***. …(a)
Zo zijn ook de lengten van de lijnstukken CE, AD en BD herleid, waaruit dan volgt dat ***BD = cos t. sin u.*** …(b)
Uit ΔAFC, *met CF loodrecht op AD*, volgt dat $\sin \angle CAD = \sin(t+u) = CF/1 = DE = BE + BD$
dus volgens (a) en (b): $\mathbf{\sin(t+u) = \sin t \,.\, \cos u + \cos t \,.\, \sin u}$

2. In ΔAFC geldt $\cos \angle CAF = \cos(t+u) = AF/AC = AF/1 = AF$.
Ook is: $AF = AD - DF = AD - CE$ zodat $AF = \mathbf{\cos(t+u) = \cos u \,.\, \cos t - \sin u \,.\, \sin t}$.

3. Vervang je u door $-u$ in eigenschap 1. dan ontstaat
$\sin(t + (-u)) = \sin t \,.\, \cos(-u) + \cos t \,.\, \sin(-u)$ waarin $\cos(-u) = \cos u$ en $\sin(-u) = -\sin(u)$,
dus $\mathbf{\sin(t-u) = \sin t \,.\, \cos u - \cos t \,.\, \sin u}$.

4) Zo volgt uit eigenschap 2.: $\cos(t-u) = \cos(t + (-u)) = \cos t \,.\, \cos(-u) - \sin t \,.\, \sin(-u)$
dus: $\mathbf{\cos(t-u) = \cos t \,.\, \cos u + \sin t \,.\, \sin u}$.

5) $\tan(t+u) = \dfrac{\tan t + \tan u}{\tan t \,.\, \tan u}$ bewijs op blz.28, opgave 2.

---

*) $\sin^2(t)$ is een verkorte schrijfwijze voor $(\sin(t))^2$, niet te verwarren met $\sin(t^2)$, Dit geldt ook voor $\cos^2(t)$ en $\tan^2(t)$.