De wereld is al wat kleurig is

Henk Korbee

18 februari 2021

x

Uitspraak

op de omslag is een variant op Wittgenstein's aanvang van zijn 'Tractus'. Ik houd het op kleurig-zijn. 'Je moet niet denken, je moet zeker weten.', is wat ik te horen kreeg van iemand op zijn vraag of ik vanavond net zo gelukkig was als hij, onderwijl lurkend aan een fles bier. Luistert men goed, hoort men op straat allerlei kenmerken omtrent denken en weten. Een andere uitspraak namelijk 'Een held zonder lijden, is geen held' hoorde ik eens een Catalaan uitspreken. Het toont op een mooie manier aan dat een geclassificeerd subject wordt geïntroduceerd waaraan een zeker begrip, attribuut, moet kleven wil het ook 'echt' onder die classificatie vallen. Feitelijk zegt men: men kan geen held zijn als men niet geleden heeft. 'Het lijden' is dan een nodige voorwaarde.

Een herziening van het begrip 'Betrekking' zoals ik dat geleerd gehad, kwam op het juiste moment uit de lucht vallen. Het bleek een goede bodem te zijn om de beginselen van modale logica eens 'anders' op te schrijven.

De zogeheten paradox van Russell levert nogal wat vragen op. De gedachte komt op dat die paradox helemaal geen paradox is, omdat men vastloopt in een wirwar aan afspraken en regels. Een verbod in-stellen door het begrip 'reguliere verzameling' te introduceren geeft aan dat er geen gedachte is ontwikkeld rondom het begrip 'verzameling'. Weliswaar kunstig in elkaar gezet, maar het is en blijft kunstig.

Op zich zie ik weinig verschil met het tekenen of schilderen van de wereld om mij heen. In het laatste geval is alleen sprake van, bijvoorbeeld, olieverf in plaats van 'stoffige inktdeeltjes' als medium om, wat men ziet, te verbeelden en niet te verwoorden. Ik eindig wederom met: Het is allemaal onbegrijpelijk.

Datum 14-02-2021. Bij de herziening bleek het nodig te zijn zo hier en daar de tekst te wijzigen, of iets eraan toe te voegen. In het laatste geval betreft het gebruik van Parkinson (1966) als subleiboek. Het was nu een openbaring. Vele gedachten op het gebied van denkregels, die bij mij ontstonden naar aanleiding van het bestuderen van boeken, waren al eeuwen eerder opgeschreven door Leibniz. Weliswaar anders verwoord, aangepast aan de tijd waarin men leeft, werkt het verhelderend en relativerend.

Inhoud

Hoofdstuk 1

Tja, wat nu?

In Korbee (2017) deel II bladzijden 302 en 303 is betoogd dat het principe Tertium non datur neerkomt op uitsluiting van toeval. Neem de regel p $\rightarrow$ [p $\vee$ q], waaruit dan volgt dat p $\rightarrow$ [p$\vee \sim$ p], zodat uit een uitspraak p men de conclusie trekt dat toeval is uitgesloten en dat is te gek voor woorden. A priori is het principe dat toeval is uitgeschakeld en daarop zijn dit type redeneringen gebaseerd. Het Tertium non datur kort ik af met TND. De redenering is TND $\rightarrow$ [p $\rightarrow$ [p $\vee$ q]], hetgeen equivalent is aan TND $\wedge$ p $\rightarrow$ [p $\vee$ q]. A priori heeft men dus vast gesteld p of niet p. Gezien de schrijfwijze heeft men voor p gekozen en dan is verruiming van de conclusie toegestaan in deze opzet. Nergens heb ik de logische redenering $\exists$x $\because$ P(x) $\rightarrow$ $\forall$x $\because$ P(x) gezien, noch een redenering als $\exists$x $\because$ P(x) $\rightarrow\sim$ $\forall$x $\because$ P(x). In het eerste geval kapt men de redenering af bij $\sim$ $\forall$x $\because$ P(x) en in het tweede geval bij $\forall$x $\because$ P(x). Maar hoe weet men dat men een redenering mag afkappen?

Neem Lakoff and Johnson (2003) erbij vanwege het gebruik van metaforen om kennis te vergaren, dan wel bij te werken. Een eerste voorbeeld is het overbekende in de westerse cultuur 'tijd is geld'. Het werd oorspronkelijk gebruikt bij het gelijkstellen van chronometers aan boord van schepen waarbij op een toren een referentie klok de juiste tijd aangaf. Het gelijkzetten van klokken was arbeid, waarvoor betaald moest worden. Opmerkelijk. Een metafoor zoals 'Tijd is geld' is opgevat als referent waarvan 'Je verspilt mijn tijd' een voorbeeld is. De metafoor is dan opgevat als een eigenschap. Een andere metafoor, tegenwoordig vaak gehoord, is dat bijvoorbeeld centrale banken tijd kopen om de financiële crisis, uitgebroken in het jaar tweeduizend en zeven, die in feite is of was een sociale crisis, te laten uitzieken. De idee van tijd is dan tot object verworden. Neem de volgende complexe metaforen:

metafoor: Ideeën zijn objecten.

metafoor: Taalkundige uitdrukkingen zijn containers.

metafoor: Communicatie is overdracht.

Men drukt gedachten uit in woorden, die gelezen worden door een lezer. Achtereenvolgens gebruikt men de eerste metafoor, gevolgd door de tweede metafoor en eindigend met de derde metafoor. Opmerkelijk. Het was mij al eerder opgevallen dat mensen vaak gedachten uitdrukken in handelingszinnen naast een indeling in categoriën. Oriënterende metaforen zijn in feite ruimtelijke uitdrukkingen, zoals: ik voel me in de zevende hemel of het hebben van een hoge status, hoge energie deeltjes. Het begint veel te lijken op wat ik ontwikkelde aan analytische zinnen. Een huidig, veel toegepaste, principe is dat een complex idee uiteen te rafelen is in atomaire basisgedachten. De lego steentjes van onze gedachten? Of moet ik zeggen gezichtspunt? Een belangrijke opmerking betreft dat een mens niet in verzameling theoretische categoriën denkt, maar in termen van prototypen en familie overeenkomsten. Het gegeven (singuliere)voorbeeld neem ik over: kleine vliegende vogeltjes, zoals koolvinken, roodborstjes. Deze vogels zijn prototypisch voorbeelden, terwijl kippen en pinguïns non-prototypisch zijn, wel op basis van familieovereenkomsten als vogel herkend worden. Een (singulier)voorbeeld van een prototypische causaal redeneren is Agent A heeft een plan om dat programma uit te voeren. Een ander (singulier)voorbeeld is een papieren vliegtuig bouwen. De zinswending 'papieren vliegtuig bouwen' is dan de naam voor het gehele proces dat men moet uitvoeren om van een bepaald papier formaat, te komen tot een papieren vliegtuig. [1]De metafoor 'Tijd is Geld' geeft aan dat een aspect van de tijd te verstaan is in termen van geld. Nu is tijd de duur van een handeling en als aan de handeling een waardering met geld is toe te kennen, kan men de metafoor gebruiken. Neem de metafoor 'Argument is War'. Het lijkt me dat hier met Argument 'redetwisten' bedoeld wordt en dat drukt onmiddellijk uit wat men doet en dan is een metafoor als 'A is B' niet nodig. Laat 'A is B' de vorm zijn van een metafoor en 'C is B' een ander, dan ligt het voor de hand om A en C te associëren met elkaar mits B is begrepen. De metafoor 'ik zit in de problemen' drukt uit dat men 'problemen' als een put opvat, los van het individu bestaand, waarin men is gevallen, terwijl het meestal gaat over gevolgen van eigen handelingen. Overduidelijk is het een verkeerd gekozen metafoor. Neem een andere metafoor, namelijk IEMAND OP EEN MISLEIDENDE ROUTE ZETTEN. Deze metafoor sluit nauw aan bij LIFE IS A JOURNEY. Voorbeelden van eerste genoemde metafoor kan men overal in de natuur tegen komen; het is eigen aan dieren om door middel van misleiding voedsel te verkrijgen.

het is fake Interactionele eigenschappen. Het gebruikte voorbeeld betreft het concept 'geweer'. Het begrip 'concept' is mijns inziens hier goed gebruikt. Immers, men maakt een geweer. Gegeven: dit is een zwart geweer, derhalve is het een geweer. Echter, een speelgoed geweer is geen geweer maar lijkt erop. Mijn kleinzoon weet wat een hijskraan is in de zin dat hij er meerdere gezien heeft. De vorm en functie herkent hij en speelt het na met een speelgoed hijskraan. Zowel het speelgoed geweer als de speelgoed hijskraan functioneren niet als een geweer dan wel hijskraan; bovendien, worden zij anders gemaakt dan de echte voorwerpen. Hoe men met een voorwerp omgaat is vastgelegd door de zogeheten interactionele eigenschappen, althans zo begrijp ik het.

Een metaforische waarheid wordt, als ik het goed lees, gezien als iets dat dichtbij de waarheid staat, zoals in de vraag waar het dichtstbijzijnde benzinestation is. Aan dit gegeven kan men het begrip 'waarheid' koppelen, daar men, op basis van ervaring, welk station dat is. De label 'waar' is dan eerder een boekhoudkundig iets om het onthouden te vergemakkelijken. Een ander voorbeeld: Dat huis daar, dat voor de berg staat. Het standpunt is dan dat het zichtbare gedeelte van de berg de voorkant van de berg wordt genoemd, dienende een oriëntatie in de ruimte. Men kan hieraan moeilijk een label met 'waar' aan vast knopen. Metaforen zijn dan ook in gebruik om te verduidelijken waaraan men denkt. Ook in de rekenkunde maakt men gebruik van metaforen zoals bij $1+1=2$ door de opdrachten: doe een appel in een zak, doe daarbij nog een appel, dan hebben we uiteindelijk een zak met twee appels.

categorizatie Ik lees dat in categoriën onderbrengen plaatsvindt door bepaalde eigenschappen te benadrukken, hetzij van een object hetzij van een gebeurtenis. Anderzijds gebruikt men de term 'aspecten' en dat lijkt me iets anders te zijn dan een categorie. Misschien heb ik een statisch begrip van categorie ontwikkeld? Verder lezend blijkt dat zo te zijn, want, zoals ik het gedefinieerd heb, zijn het eigenschappen van objecten in zichzelf en niet ontstaan uit interactie met de wereld om ons heen. Dit heb ik bij het onderwerp 'analytische zinnen' ondergebracht bij vaste eigenschappen en variabele eigenschappen.

mythes Men kan moeilijk staande houden dat de wereld uit objecten bestaat door alleen maar te denken aan je *warme* bed. Dat men objecten in de wereld aan elkaar verbindt, is alleen maar makkelijk, want daardoor zijn er onveranderlijke zaken in het leven die als oriënteringspunt te gebruiken is. Er is wel een objectieve realiteit die gekoppeld is aan mensen, anders is communiceren met elkaar wat lastig, maar die objectiviteit is niet absoluut, in de betekenis van eeuwig waar. Hiermee is objectief zijn anders dan rationeel zijn. De claim van het subjectivisme dat intuïtie te vertrouwen is, kan men als richtlijn nemen, onder voorwaarde dat het voldoende getraind is wat dat ook moge zijn. Ik ben schilder maar ik kan moeilijk onderschrijven dat esthetische zaken tot de belangrijkste zaken in het leven behoren en evenmin dat het boven rationaliteit uitstijgt. In tegendeel, het gehoorzaamt exacte wetten die naar mijn gevoel nogal subtiel zijn en daarbij gebruik ik toch echt mijn verstand. Het moet gezegd worden, mijn verbeelding laat me vaak in de steek, in de zin dat een volledig uitgewerkt schilderij in gedachten voorstellen onmogelijk is.

1.1 Een keuze doen of maken?

Neem de uitdrukking x $\leq$ 5. Vaak las en lees ik dat dit als volgt gelezen moet worden: x $<$ 5 $\vee$ x $=$ 5. Men zou 'x $<$ 5 waar' en 'x=5 waar' kunnen nemen wat duidelijk niet de bedoeling is. Moet men dan, als men propositielogica wil gebruiken, voortdurend in de gaten houden welke waarde toekenningen toegestaan zijn, of niet? Bedoeld is te zeggen dat x kleiner dan 5 kan zijn en ook gelijk aan 5 kan zijn.

Probeer maar eens formeel te bewijzen dat

$$[\forall \mathrm{x} \because P(\mathrm{x}) \vee Q(\mathrm{x})] \rightarrow [\forall \mathrm{x} \because P(\mathrm{x}) \vee \forall \mathrm{x} \because Q(\mathrm{x})]$$

niet juist is, zonder gebruikmaking van het Tertium non datur. Interpreteer het symbool '$\vee$' als *een keus doen uit*, wordt het onmiddellijk duidelijk. Men heeft a priori vier mogelijkheden waarvan de mogelijkheid dat iedere x zowel Q kan hebben, mits P uitgesloten is; anders zou men het over $P(\mathrm{x}) \wedge Q(\mathrm{x})$ moeten hebben. Iedere andere mogelijkheid is toegestaan. Om het overzichtelijk te houden wordt ieder van de mogelijkheden apart genoteerd. [2]Makkelijk te bewijzen is het volgende:

1 $\forall \mathrm{x} \because [P(\mathrm{x}) \vee Q(\mathrm{x})]$\{Premise\}

2 $P(\mathrm{a}) \vee Q(\mathrm{a})$ \{U Spec,1\}

3 $\sim P(\mathrm{a}) \rightarrow Q(\mathrm{a})$ \{Imply-Or, 2\}

4 $\sim P(\mathrm{a})$ \{Premise\}

5 $Q(\mathrm{a})$\{Detach, 3, 4\}

6 $\exists \mathrm{x} \because Q(\mathrm{x})$ \{E Gen,5\}

7 $\exists \mathrm{x} \because \sim P(\mathrm{x})$\{E Gen, 4\}

8 $\exists x \because \sim P(x) \wedge \exists x\colon Q(x)$\{Join, 7, 6\}

9 $\sim [\forall x \because P(x) \vee \forall x \because \sim Q(x)]$\{na enig logisch rekenwerk op 8\}

Dit bewijs ondersteunt de logische gedachte dat uit de eerste premisse men niet de gedachte kan hebben dat alle x-en eigenschap P hebben of alle x-en hebben geen eigenschap Q òf andersom. Want in het andere geval is de allereerste premisse verkeerd gesteld. Dat laatste vereist dan weer de extra regel dat de volgorde in een disjunctie van geen belang is. De logische conclusie is dan dat er de mogelijkheid is dat al deze x-en P hebben en er is een x dat Q heeft. Rest op te merken dat in item[9] een uitwendige ontkenning staat vermeld waarvan men ook kan zeggen dat het een uitspraak is over de kennisruimte. Wat men in feite doet, is het volgende:

$$\forall x \because [x < 5 \vee x = 5] \to [\forall x \because x < 5 \vee \exists x \because x = 5].$$

Voer de volgende definitie in $x \leq 5 \overset{\text{def}}{=} x < 5 \vee x = 5$, waardoor men $\forall x \because x \leq 5 \to \forall x \because x < 5 \vee \exists x \because x = 5$ verkrijgt en ook het volgende $\forall x \because x \leq 5 \to \exists x \because x < 5 \vee \forall x \because x = 5$. Gedefinieerd is $p \to q \overset{\text{def}}{=} \sim p \vee q$ en pas dit eens toe op beide formules naast de eigenschap $\exists x \because [P(x) \vee Q(x)] \leftrightarrow \exists x \because P(x) \vee \exists x \because Q(x)$. Dit geeft voor de eerste formule $\exists x \because x > 5 \vee \forall x \because x < 5 \vee \exists x \because x = 5$ wat resulteert in $\exists x \because x \geq 5 \vee \forall x \because x < 5$ en $\sim \forall x \because x < 5 \vee \forall x \because x < 5$. De weg terug is ook te bewandelen. Deze afleiding betekent dat men steunt op het principe dat vast te stellen is of een getal kleiner is dan een gegeven getal of niet. De laatste formule leidt naar

$$\exists x \because x > 5 \vee \exists x \because x < 5 \vee \forall x \because x = 5.$$

Deze afleiding steunt op trichotomiewet en komt neer op de constatering dat er geen grootste getal noch kleinste getal is.

Echter, in het laatste geval geldt dat bij iedere keus van x die links voorkomt van $\rightarrow$, linker-x genaamd, zijn er keuzes voor x die rechts voorkomt van $\rightarrow$, rechter x-en genaamd zó, dat de linker-x deel uitmaakt van de rechter x-en. Andersom geldt dat niet, want keuzes voor de rechter x-en leggen niet vast wat de keuzes voor de linker x-en zijn. De keuzes zijn niet wederzijds afhankelijk te noemen. De andere formule

$$\forall \mathrm{x} \because \mathrm{x} \leq 5 \rightarrow \forall \mathrm{x} \because \mathrm{x} < 5 \vee \exists \mathrm{x} \because \mathrm{x} = 5$$

geeft dat de keuzes van de linker-x en rechter x-en wederzijds afhankelijk zijn. In dit geval treedt er geen verlies in informatie op en in het andere geval wel. Men kan het ook als volgt onder woorden brengen: Een predikaat formule is een sjabloonzin die overeenkomstige situaties vastlegt. Een eis aan een afleiding uit zo een predikaat formule is de invariantie van overeenkomstige situaties zó dat de oorspronkelijke overeenkomstige situaties te reconstrueren zijn. Deze eis is niet te coderen, wat de vraag 'Waar gaan onvolledigheidsstellingen van Gödel over?' uitroept, want kennelijk is aan deze eis niet altijd voldaan bij een predikaatlogische opzet. Beter is het aan te geven dat men twee keuzes heeft: x $<$ 5 òf x=5.

Deze moeilijkheid doet zich ook voor bij het conclusies trekken uit gegevens, daarbij de propositie logica volgend. De propositie logica is zo opgezet dat men een formule kan waarderen door de samenstellende delen ervan blindelings te waarderen, waardoor de weg vrijgemaakt is de waarheid van dit type formules te berekenen. De theorie is zo opgezet dat men a priori de beschikking heeft over alle proposities waarvan bekend is dat zij waar òf onwaar zijn. Deze proposities zijn onderling te combineren middels de bekende logische operatoren '$\wedge$' en '$\vee$' tot 'nieuwe' proposities waarbij de Modus Ponens een productie regel is om uit een gegeven dus-bewering en een gegeven redenering te besluiten tot een andere bewering. Echter de labeling met 'waar' of 'niet waar' geeft aan dat men per propositie een keus maakt, en bij een complexe propositie deze keuzes aaneenschakelt om vast te stellen welke label voor het geheel te gebruiken is. Vaststellen of een redenering correct is, is dan gebaseerd op het kiezen van welke label bij wat hoort.

Bovendien moet men rekening houden met de gedachte dat labeling met 'waar' of 'niet waar' men doet alsof waar en niet-waar onafhankelijk staan van elkaar. Echter, de labeling is wederzijds afhankelijk, labelt men met waar, is labeling met 'niet waar' uitgesloten. Gegeven twee proposities p en q, zegt men in feite dat beide proposities onafhankelijk zijn van elkaar. Het labelen van beide proposities is dan ook onafhankelijk van elkaar. Aangezien in p $\rightarrow$ q de proposities p en q niet onafhankelijk van elkaar zijn, moet dit tot moeilijkheden leiden Het onafhankelijk waarderen van beide proposities moet tot tegenstrijdigheden leiden en dat is nu juist wat in de opzet van de logica F^S, zie Korbee (2017) deel II hoofdstuk 9, vermeden is. Neem Parkinson (1966) bladzijde xv. Hobbes view that truth arises 'from the human will, and from names and symbols'. Even verderop. *Hobbes' conclusion does not follow; for although symbols are arbitrary, there use and connexion has something which is not arbitrary, namely a certain symmetry between symbols and things' and 'it is always true, without any decision on our part, that on the assumption of such and such symbols such and such reasoning will be valid.'* Naar mijn mening sluit de 'human will' niet in dat men wat aan rommelt. De keus van symbolen is niet willekeurig, maar moet het geheugen ondersteunen om gedachten makkelijk te kunnen vasthouden en uit te kunnen spreken. Dat staat los van wat 'truth' is. Het gebruik van 'waar', 'niet waar' en 'onwaar is af en toe erg handig in gebruik.

1.1.1 wat impliceert dat?

Neem de regel $p \to q$ uit de propositielogica met verwoording 'als p, dan q'. Gedefinieerd is $p \to q \stackrel{\text{def}}{=} \sim p \vee q$, als het symbool $\vee$ tot primitief symbool is verheven. De waarheidstabellen volgend kan men $\sim p$ en q uitkiezen waarbij de redenering $p \to q$ geaccepteerd wordt. [3] De uitdrukking $p \,\overline{\wedge}\, q$ betekent dat men zowel p als q neemt, $\sim p$ geeft aan dat men p niet neemt en $p \veebar q$ geeft aan dat men 'eén van de twee neemt. Beter is het om $p \overline{\wedge} \sim q$ uit te schakelen wat neerkomt op het aanvaarden van $\sim p \veebar q$. Het is dan voor de hand liggend om $p \therefore q \stackrel{\text{def}}{=} \sim p \veebar q$ in te voeren met verwoording 'p daarom q' met als 'eigenschap' dat dan ook $\sim q \therefore \sim p$ geldt.

Bekijk de Modus Ponens $p \wedge [p \to q] \vdash q$ nog eens en neem

$$\sim [p \wedge [p \to q]] \leftrightarrow \sim p \vee [p \wedge \sim q] \leftrightarrow p \to \sim q.$$

Mijns inziens betekent de ontkenning van de regel Modus Ponens dat men die regel niet mag toepassen en dat men redenen moet aangeven waarom men die regel niet mag toepassen. Terwijl men in deze afleiding ook terecht komt op de redenering dat, als p gegeven is, men niet op het gewenste resultaat q uitkomt maar juist het tegendeel verkrijgt. De afleiding laat zien dat er de mogelijkheid is dat men p niet als gegeven heeft en dan is uiteindelijk zo een resultaat vruchteloos, òf als p wel gegeven is, kan men niet tot q besluiten. De mogelijkheid dat er sprake is van een tegenspraak geeft aan dat er vooronderstellingen zijn geïntroduceerd. Wat men dan wel moet doen is, dunkt me, een vraagteken plaatsen ten teken dat men niet weet wat men in dat geval zou moeten doen. Ik opteer dan ook voor de denkhandeling $p \barwedge [p \therefore q] \vdash q$ waarmee dan ook het gebruik van het symbool $\vdash$ is vastgelegd, kortweg:

Definitie 1.1 (logisch gevolg)**.** $p \vdash q \stackrel{\text{def}}{=} [[p \therefore q]@p] \vdash q$.

tertium datur? Dit onderwerp associeert aan opvattingen over de werking van het immuunsysteem. Kan dit systeem volledig bescherming bieden tegen, bijvoorbeeld, een virus? Het biedt volledige bescherming of niet? Is dat correct geformuleerd? Op zich is het een merkwaardige verwoording. Stel dat volledige bescherming mogelijk is, dan zou het bescherming bieden tegen welk nieuw virus dan ook. Met betrekking tot keuzes doen uit twee mogelijkheden zijn vier standpunten in te nemen

1 Men mag slechts één van de twee kiezen. Dit is $p \veebar q$.

2 [4][1] plus de mogelijkheid dat niets kiezen toegestaan is: $p|q$

3 Item[1] plus de mogelijkheid dat men allebei mag kiezen: $p \sqcup q$

4 Item[2] en item[3] zijn allebei toegestaan. Dit is $p \vee q$

Met bijbehorende ordening in diagram gezet

$$
\begin{tikzcd}
 & p \vee q & \\
p|q \arrow[ur] & & p \sqcup q \arrow[ul] \\
 & p \veebar q \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

De definitie $p \to q \stackrel{\text{def}}{=} \sim p \vee q$ geeft aan dat men het redeneren baseert op het doen van bepaalde keuzes waarbij item[4] de ruimst mogelijke interpretatie is van een keuze uit twee voorwerpen. Ik kies $p|q$ uit voor een korte analyse. De formule $[p \mid q] \mid r$ drukt uit dat men tenhoogste één voorwerp uit drie voorwerpen mag kiezen wat nadelig is bij toepassingen ervan. Neem $p \sqcup q$, dan verkrijgen we voor $(p \sqcup q) \sqcup r$ de betekenis dat er zeker één voorwerp van de drie gekozen kan worden en hooguit drie voorwerpen van de drie. Uit het diagram is nog het volgende te peuren:

$$p \veebar q \ll p \sqcup q \ll p \vee q \text{ en } p \veebar q \ll p|q \ll p \vee q.$$

Voor toepassingen heeft definitie 1.1 voordelen boven die van $p|q$.

De MP regel wordt geschreven als

$$[p \to q]@p \vdash q \stackrel{\text{def}}{=} [[p \therefore q]@p \vdash q] \veebar [p \barwedge [p \barwedge \sim q]].$$

Dit resulteert dan in $[p \barwedge q] \veebar [p \barwedge \sim q]$. Wordt $p \barwedge \sim q$ gekozen was de Modus Ponens kennelijk niet toe te passen. Enerzijds kan men zeggen dat de redenering incorrect is, anderzijds kan men zich op het standpunt stellen dat men uit de gevolgde redenering de juiste conclusie trekt dat de gemaakte veronderstellingen niet juist waren zodat men kan overgaan tot het aanvaarden van $p \barwedge \sim q$ wat informatief is, òf informatief kan zijn bij een vervolg in de redenering.

Ik stap over op een onderzoek naar 'dus' in samenhang met 'daarom'. De gebruikelijke disjunctie is als volgt te definiëren:

$$p \vee q \stackrel{\text{def}}{=} [p \mid q] \veebar [\sim p \barwedge \sim q]$$

wat aanleiding is om 'p daarom q' te herdefiniëren $p \therefore q \stackrel{\text{def}}{=} \sim p \sqcup q$ waarmee de definitie van $p \to q$ te noteren is als

Definitie 1.2. $\mathrm{p} \to \mathrm{q} \overset{\mathrm{def}}{=} [\mathrm{p} \therefore \mathrm{q}] \veebar [\mathrm{p}\overline{\wedge} \sim \mathrm{q}]$.

In deze definitie is $\mathrm{p}\overline{\wedge} \sim \mathrm{q}$ goed te lezen is als 'p zonder q'. De verwoording van de redenering 'p, dus q' is goed te lezen als: 'p, daarom q, òf anders, p zonder q'.

De formule $\sim [\mathrm{p} \to \mathrm{q}]$ komt neer op $\sim [\mathrm{p} \therefore \mathrm{q}]\overline{\wedge} \sim [\mathrm{p}\overline{\wedge} \sim \mathrm{q}]$ wat $[\mathrm{p}\overline{\wedge} \sim \mathrm{q}]\overline{\wedge} \sim [\mathrm{p}\overline{\wedge} \sim \mathrm{q}]$ is, en dat er dan een crash plaatsvindt:

Definitie 1.3. $©(\mathrm{p}) \overset{\mathrm{def}}{=} \sim [\mathrm{p} \to \mathrm{q}]$. Men kan ook zeggen dat indien p een crash oplevert, men p verwerpt. Dit lijkt me goed aan te sluiten bij wat ik mij veel later realiseerde dat de redenering $\mathrm{p} \to \mathrm{q}$ gelijkwaardig is aan $\mathrm{p} \leftrightarrow \mathrm{p} \overline{\wedge} \mathrm{q}$. Anders gezegd: een propositie omvat een andere propositie. Zich er bewust van zijn is iets anders dan het gebruiken in een afleiding.

De notie 'verwerpen' is eerder gedefinieerd als $\mathrm{X} \to \Box_W{\downarrow}\sim \mathrm{X}$ wat overgaat in $\mathrm{X} \to \sim \mathrm{X}$ als men $\Box_W \mathrm{X} \equiv \mathrm{X}$ accepteert.

Definitie 1.4. $\otimes(\mathrm{p}) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{p}\overline{\wedge} \sim \mathrm{p}$ dus dan $\otimes(p) \equiv \sim (\mathrm{p} \to \mathrm{p})$. Men heeft dan de bedenkregel $©(\mathrm{p}) \to \otimes(\mathrm{p})$ die afgebroken wordt als er wel een crash is maar niet verworpen wordt. Toegepast: Ga na of men uitspraak p moet verwerpen en doe dat dan ook als het verwerpelijk is, want dan is het aannemelijk dat er geen crash kan plaats vinden.

In het bijzonder geldt natuurlijk $\mathrm{p} \to \mathrm{p} \equiv [\mathrm{p} \therefore \mathrm{p}] \veebar [\mathrm{p}\overline{\wedge} \sim \mathrm{p}]$. Op zich levert zo een redenering niets op maar in afleidingen binnen de formele logica is het misschien goed te gebruiken. Neem $\mathrm{p} \to \sim \mathrm{p}$ wat equivalent is aan $[\mathrm{p} \therefore \sim \mathrm{p}] \veebar [\mathrm{p} \overline{\wedge} \mathrm{p}]$. Bij gegeven p heeft men dan $\mathrm{p}\overline{\wedge} \sim \mathrm{p}$ wat verwerpelijk is en bovendien breekt men de redenering af als p. Het is dus een merkwaardige propositie te noemen.

Bekijk nu $\sim \mathrm{p} \to \mathrm{p}$. Definitie 1.2 geeft $[\mathrm{p} \sqcup \mathrm{p}] \veebar [\sim \mathrm{p}\overline{\wedge} \sim \mathrm{p}]$. Men heeft dus p of anders kapt men het af bij $\sim \mathrm{p}$. Een bijzondere redenering. Zo is $\mathrm{p} \rightarrow\sim \mathrm{p}$ wezenlijk niet anders dan de vorige redenering: men heeft $\sim \mathrm{p}$ of anders breekt men het af bij p. Maakt men gebruik van de gebruikelijke definities vindt men bijvoorbeeld $\sim \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} \equiv \mathrm{p} \vee \mathrm{p}$ wat contingentie uitdrukt. Het levert niet op hoe te vervolgen. Dit alles bij elkaar genomen, zijn het redenen om twijfel aan p vast te leggen.

Definitie 1.5. $\mathcal{D}(\mathrm{p}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{p} \rightarrow\sim \mathrm{p}$

't Axioma $(\sim \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p}) \rightarrow \mathrm{p}$ uit de propositielogica is als volgt te verwoorden: $\mathcal{D}(\sim \mathrm{p}) \rightarrow \mathrm{p}$.

Uit het tijdelijke leiboek Parkinson (1966) bladzijde 55. A en B duiden termen of proposities. A is B, dat wil zeggen B is in A, of, B kan in de plaats komen van A. B is in A vat het leiboek op als A correspondeert met B. Voor deze proposities geldt: A correspondeert met B, òf, A correspondeert niet met B. In het laatste geval is uit te spreken dat het vals is dat A met B correspondeert. Duidelijk is dat definitie 1.2 een andere verwoording is van deze gedachtegang.

Productie maken. Bovendien zijn nog de volgende redeneringen op te nemen

Lemma 1.1. $p \rightarrow [q \rightarrow r] \equiv [p \barwedge q] \rightarrow r$. *De redenering afkappen bij* $\sim [q \rightarrow r]$ *dus als q een op zich staande propositie is maar geen propositie r. Dat betekent dus dat men uitgekomen is op het afkappen van* $[p \barwedge q] \rightarrow r$.

Lemma 1.2. $p \rightarrow q \vdash [q \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow r]$. *Immers, als r nodig is voor q, is r ook nodig voor p.*

Lemma 1.3. $[[p \veebar q] \sqcup [r \veebar s]] \vdash [p \sqcup r] \veebar [q \sqcup s]$

Bewijs. De volgende mogelijkheid is te construeren: $\mathrm{p} \veebar \mathrm{r} \veebar [\mathrm{p} \barwedge \mathrm{r}] \equiv \mathrm{p} \sqcup \mathrm{r}$ en dan natuurlijk ook $\mathrm{q} \sqcup \mathrm{s}$. Uit één van de twee is dan de keus te maken. □

Lemma 1.4. $[[p \barwedge q] \sqcup [r \barwedge s]] \vdash [p \sqcup r] \barwedge [q \sqcup s]$

Bewijs. De volgende mogelijkheid is te construeren: $\mathrm{p} \veebar \mathrm{r} \veebar [\mathrm{p} \barwedge \mathrm{r}] \equiv \mathrm{p} \sqcup \mathrm{r}$ en natuurlijk ook $\mathrm{q} \sqcup \mathrm{s}$. □

coda Neem de propositielogica met het stelsel axioma's van Lukasewicz over uit Korbee (2017) hoofdstuk 7 deel I.

Axioma 1 (LUK1)**.** $(\sim p \to p) \to p$. *Dit axioma[LUK1] 1 is als volgt te vertalen:* $\mathcal{D} \sim p \to p$. *Anders gezegd: twijfelen is uitgesloten. Het afkappen van de redenering is uitgedrukt door* $\mathcal{D}(\sim p) \barwedge \sim p$ *wat te lezen is als dat men zeker twijfelt aan* $\sim p$.

Axioma 2 (LUK2)**.** $p \to (q \to p)$. *Dit axioma drukt uit dat iedere Claim een voldoende grondslag heeft, dus* $\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n \vDash \mathit{Claim}$. *Het afkappen van redenering is vastgelegd door het afkappen* $q \to p$. *Ook is als bijzonder geval op te nemen dat* $p \to \mathcal{D} \sim p$.

Axioma 3 (LUK3)**.** $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$. *Dit is als volgt onder woorden te brengen: Als de redenering* $p \to q$ *bekend is, is het zo dat als* r *nodig is voor* q, r *ook nodig is voor* p.

Men kan moeilijk staande houden dat propositie logica alleen draait om beweringen die waar of niet waar zijn. Men kan wel doen alsof. Het stelsel axioma's is gegrondvest en volledig terwijl de axioma's onderling ook onafhankelijk zijn. De onafhankelijkheid ervan is op basis van de verwoording te begrijpen. Welke interpretatie men ook neemt, het is niet in te zien dat bijvoorbeeld axioma[LUK1] 1 iets te maken heeft met axioma[LUK2] 2. Dat het stelsel gegrondvest is, is als volgt in te zien. Twijfel is uitgesloten. Er zijn voldoende grondslagen aan te reiken voor Claims, en als men vindt dat aan een Claim nog de nodige eisen zijn te stellen, worden deze eisen ook aan de grondslagen gesteld. Duidelijk is dat het stelsel gegrondvest is. Dat het stelsel volledig is, is ook in te zien. Veronderstel dat men een redenering heeft opgesteld waarbij aan axioma's is voldaan. Als men niet kan reconstrueren hoe de Claim ontstaan is, stuit men of op twijfel, wat principieel niet kan, òf er ontbreekt een document wat de voldoende grondslag onderuit haalt en dat is tegen de veronderstelling, òf de nodige eisen aan de Claim zijn verkeerd gesteld. Neem aan dat de redenering $\mathcal{D}\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{q} \,\&\, \mathrm{p} \parallel \mathrm{q}$ gegeven is. Deze redenering is te lezen als: bij twijfel aan p, kiest men voor q. Als volgt formeler te schrijven:

Definitie 1.6. $keus(q) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{D}\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{q} \,\&\, p \parallel q$

wat aangeeft dat men deze redenering afkapt als men aan p twijfelt zonder q te hebben. Ook is het mogelijk dat men zowel twijfelt aan p als aan het tegendeel van p. In beide gevallen kiest men uiteindelijk voor q in de hoop dat dit een goede keus is:

Definitie 1.7. $\mathfrak{H}(q) \stackrel{\mathrm{def}}{=} [\mathcal{D}\mathrm{p} \,\overline{\wedge}\, \mathcal{D}\!\sim \mathrm{p}] \rightarrow \mathrm{q}.$

Uit axioma[LUK3] 3 volgt dat gegeven $\mathcal{D}p$, men kan besluiten tot $(\sim \mathrm{p} \rightarrow r) \rightarrow (\mathrm{p} \rightarrow r)$ wat uitdrukt dat men op r hoopt.

1.1.2 op onderzoek

Bestaan neemt twijfel weg schreef ik in het vorige boek. Bestaan van iets is gemotiveerd door $\mathcal{E}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sim (\mathrm{x} \parallel \mathrm{x})$. In Wessel (2003) staat dat op bladzijde 401; daar komt het naar voren bij bespreking van het verschillend zijn van objecten. Dat heb ik vergeten te vermelden in Korbee (2017). Mij staat alleen bij dat ik op dat idee kwam door na te denken over verschillend zijn en te reflecteren hoe men tot het afzonderen van een voorwerp van zijn omgeving kan komen. Ik heb verder geen gebruik gemaakt van geciteerd boek op dat terrein. Als axioma op te nemen is $\sim \neg\mathcal{E}(\mathrm{x})$ want men kan moeilijk het bestaan op intrinsieke wijze ontkennen? Ik ga door op het ontwerp van kennisruimte. Overeenkomstig de geponeerde principes kan men stellen dat er zeker twee uitspraken zijn en dat er een betrekking verschillend-zijn-van bestaat tussen deze uitspraken. Er zijn zeker twee verschillende uitspraken. Een redenering van de vorm 'p, dus q'. Deze redenering afbreken betekent dat men p èn niet q onder ogen neemt; p èn niet q moet wel zin vol zijn. Het beste is dat te illustreren met het stoppen van een machine. Stopt de machine, mag de machine niet uit elkaar vallen. Of met een softwareprogramma: Stopt het programma, mag het niet blijven hangen in een bewering, noch mag er een crash aan de hand zijn. Aan het stoppen is een duidelijke betekenis toe te kennen. Het verschillend zijn noteer ik met de letter 'V'. Vanwege de opmaak van de tekst gebruik kleine letters zoals 'p' voor uitspraken. Het vermelden van het gebruik maken van het principe TND laat ik voortaan achterwege, tenzij het een bewijs verhelderd. Als eerste axioma zou op te nemen zijn $\mathrm{p} \vdash \mathrm{p}$ dat men afkapt als $\mathrm{p} \vdash\sim \mathrm{p}$ wat twijfel aan p uitdrukt. Een op zich staande twijfel is uitgesloten van deelname aan het spel van logisch redeneren. Een weinig zinvol axioma. Het hergebruik van p is te omschrijven met $\mathrm{Xerox(p)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{p} \vdash \mathrm{p}$. De vooronderstelling hierbij is dat propositie p overeind blijft staan. Een nuttig regel, samenhangend met Xerox is

Regel 1. *Xerox.*

$$\frac{\mathrm{p} \qquad \mathrm{p}}{\mathrm{p} \dashv\vdash \mathrm{p} \,\overline{\wedge}\, \mathrm{p}} \text{ Xerox DenkR0:}$$

Een goed standpunt is dat een uitspraak naar believen hergebruikt kan worden waar nodig zoals een getal ook steeds weer te hergebruiken is. Een principe is dat een uitspraak niet geïsoleerd optreedt, dat wil zeggen dat bij iedere bestaande uitspraak is er een daarvan verschillende uitspraak ofook een uitspraak, die er totaal verschillend van is. Het bestaan van zo een uitspraak q is in ieder geval een bestaan als term: $\mathfrak{B}q$. Alleen waar nodig is zal ik het expliciet opschrijven alsook $(T)V\,\mathrm{p}\,\mathrm{q}$. Als axioma voer ik in $\forall^e\mathrm{p}: \mathfrak{B}q \because V\,\mathrm{p}\,\mathrm{q} \,\overline{\wedge}\, \mathrm{p} \vdash \mathrm{q}$ om uit te drukken dat een uitspraak om een vervolg vraagt. De redenering wordt afgebroken bij $\mathrm{p} \vdash\sim \mathrm{q}$, wanneer q niet ter zake doend is. Nu komt MP regel van pas, want als q ter zake doend is, heeft q ook een vervolg r.

Regel 2. *Modus Ponens.*

$$\frac{\mathrm{p} \vdash \mathrm{q} \qquad \mathrm{q} \vdash r}{\mathrm{p} \vdash r} \text{ MP DenkR1:}$$

Deze regel komt overeen met de redenering 'conditionel ex toto' doordat $\mathrm{p} \vdash \mathrm{q}$ als gelijkwaardig te nemen is aan $\mathrm{p} \to \mathrm{q}@\mathrm{p} \vdash \mathrm{q}$.

Vanwege Xerox(q) en $\mathrm{p} \vdash \mathrm{q}$ heeft men $\mathrm{p} \,\overline{\wedge}\, \mathrm{q} \to \mathrm{q}$. Het afkappen vindt plaats bij $\mathrm{p} \,\overline{\wedge}\, \mathrm{q}\overline{\wedge} \sim \mathrm{q}$, dus bij $\otimes(\mathrm{q})$. Verwerpen drukt ook uit dat men q niet kan hergebruiken. De contractie regel

Regel 3. *Contractie.*

$$\frac{\mathrm{p} \vdash \mathrm{q} \qquad \mathrm{p} \vdash \mathrm{r}}{\mathrm{p} \vdash \mathrm{q} \,\overline{\wedge}\, \mathrm{r}} \text{ Contractie DenkR2:}$$

is te gebruiken. Eveneens heeft men vanwege Xerox(p) en $\mathrm{p} \vdash \mathrm{q}$ gegeven p, de keus uit één van de twee p en q wat in de regels

Regel 4. *Introductie van een rechter-disjunct.*

$$\frac{\mathrm{p} \vdash \mathrm{q}}{\mathrm{p} \vdash \mathrm{q} \sqcup \mathrm{p}} \text{ DenkR3:}$$

Regel 5. *Introductie van een linker-disjunct.*

$$\frac{\mathrm{p} \vdash \mathrm{q}}{\mathrm{p} \vdash \mathrm{p} \sqcup \mathrm{q}} \text{ DenkR4:}$$

staat uit gedrukt.

Een andere regel is dat vervanging van een uitspraak door een gelijkwaardige uitspraak toegestaan is. De wijze waarop geredeneerd wordt zal hierdoor niet veranderen. Wel kan de inhoud van de redenering zich wijzigen.

Regel 6. *Substitutie R3.*

$$\frac{\mathrm{p} \vdash \mathrm{q} \qquad \mathrm{q} \vdash \mathrm{p}}{r \vdash r(\mathrm{p} := \mathrm{q})} \text{ Substitutie DenkR5:}$$

In te voeren is $\sim \mathrm{p} \to \sim \mathrm{p}$. Echter, dan is vanwege TND uitgesloten dat p aan de orde is. Men kan dus niet vanuit een crash beredeneren dat er altijd wel iets aan de hand is. Laat gegeven zijn $\mathrm{p} \to \sim \mathrm{p}$. Omdat een op zich staande twijfel uitgesloten is, kan men denken aan een vervolg van deze redenering. Aan $\sim \mathrm{p} \to \mathrm{q}$ en $\mathrm{p} \to \mathrm{r}$ met de veronderstelling dat q en r niet verschillend hoeven te zijn, wel totaal verschillend kunnen zijn. Hoe de vervolg redenering vorm te geven? Neem $\mathcal{D}(\mathrm{p}) \to [\sim \mathrm{p} \to \mathrm{q}] \cdot \mathrm{r}$. Als extra voer ik nog in

Regel 7. *Distractie.*

$$\frac{\mathrm{p} \vdash \mathrm{r} \qquad \mathrm{q} \vdash \mathrm{r}}{\mathrm{p} \sqcup \mathrm{q} \vdash \mathrm{r}} \text{ Distractie DenkR6:}$$

Op te merken is dat gegeven $\mathrm{p} \sqcup \mathrm{q} \vdash \mathrm{r}$ en gegeven $\mathrm{p} \rightarrow [\mathrm{p} \sqcup \mathrm{q}]$, dat dan $\mathrm{p} \vdash \mathrm{r}$ en om dezelfde redenen $\mathrm{q} \vdash \mathrm{r}$. Vanwege het onthouden is deze regel niet overbodig.

Neem de axioma's van de logica F^S en bespreek ze één voor één tegen het perspectief van het onderzoek. Neem de axioma's A1 en A2 bij elkaar: $\mathrm{p} \dashv\vdash \sim\sim \mathrm{q}$. Gegeven $\mathrm{p} \vdash \mathrm{q}$ is, dankzij TND, $\mathrm{p} \vdash \sim \mathrm{q}$ uitgesloten en zijn de axioma's op te voeren vanwege het omgaan met dubbele ontkenning. Ook de axioma's A3 en A4, $\mathrm{p} \,\overline{\wedge}\, \mathrm{q} \dashv\vdash \mathrm{p}$ zijn te handhaven. Axioma A is te handhaven $\mathrm{p} \,\overline{\wedge}\, [\sim \mathrm{q} \sqcup \mathrm{q}] \vdash \mathrm{p}$ want er staat $\mathrm{p} \,\overline{\wedge}\, \mathrm{TND} \vdash\vdash \mathrm{p}$. Axioma A6 is lastiger: $\mathrm{p} \vdash \mathrm{TND} \,\overline{\wedge}\, \mathrm{p}$. Waarom TND introduceren? De axioma's A7 en A8 zijn gewoon te handhaven: $\sim [\mathrm{p} \,\overline{\wedge}\, \mathrm{q}] \dashv\vdash \sim \mathrm{p} \sqcup \sim \mathrm{q}$. En dan axioma A9 $[\mathrm{p} \sqcup \mathrm{q}] \,\overline{\wedge}\, \mathrm{r} \vdash [\mathrm{p} \,\overline{\wedge}\, \mathrm{r}] \sqcup \mathrm{q}$ en axioma A10 $[\mathrm{p} \,\overline{\wedge}\, \mathrm{r}] \sqcup [\mathrm{q} \,\overline{\wedge}\, \mathrm{r}] \vdash [\mathrm{p} \sqcup \mathrm{q}] \,\overline{\wedge}\, \mathrm{r}$. Ze regelen de distrubutie $\overline{\wedge}$ over $\sqcup$. In het volgende axioma A11 staat **T** voor tautologie: $\mathrm{p} \vdash \mathrm{p} \,\overline{\wedge}\, \mathbf{T}$. Met deze axioma's zijn allerlei bekende stellingen af te leiden en daartoe verwijs ik naar hoofdstuk 9 uit Korbee (2017) in deel II.

Voor het volgende dient Shramko (1999) als tijdelijk leidraad vanwege de uiteenzetting van de intuïtionistische propositie logica. De zogeheten mogelijke werelden semantiek in dit leiboek laat ik achterwege. Als eerste is bladzijde 15 te nemen. De zinswending 'Bewijs dat p' zal op de volgende wijze behandeld moeten worden. De bewering $\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}$ geldt alleen als bewezen als zowel p als q bewezen zijn; dat komt dan overeen met mijn $\mathrm{p} \,\overline{\wedge}\, \mathrm{q}$. De bewering $\mathrm{p} \vee \mathrm{q}$ geldt alleen als zekere een van de twee bewezen is; dat komt overeen met mijn $\mathrm{p} \sqcup \mathrm{q}$. Dan, $\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{q}$ geldt alleen als een bewijs van p ook die q geeft, anders gezegd: zonder een bewijs van q is uitgesloten; dat komt overeen met $\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{q} \stackrel{\mathrm{def}}{=} [\mathrm{p} \therefore \mathrm{q}] \veebar [\mathrm{p}\barwedge \sim \mathrm{q}]$. De bewering $\sim \mathrm{p}$ geldt alleen als er een bewijs is van de weerlegging van p. Een bewijs van weerlegging drukt hetzelfde uit als verificatie van een falsificatie en dat is merkwaardig te noemen. Een weerlegging gebeurt altijd binnen een theorie en gemotiveerd. De weerlegging drukt ook uit dat men een redenering afbreekt en kijkt wat er dan te zeggen valt en dat laatste moet ook zinvol zijn. Weerleggen van p betekent hier ook dat de ontkenning van p niet intrinsiek is. Het is ook te lezen als dat het afbreken van een bewering ook zinvol moet zijn. Dan komt de bewering $\exists \mathrm{x} \because F(\mathrm{x})$ komt neer op het hebben van $\mathrm{X}[F] \neq \varnothing$ en $\forall \mathrm{x} \because F(\mathrm{x})$ komt dan overeen met het geheel $\mathrm{X}[F]$. In die zin voldoet de opbouw van een kennisruimte aan de opzet van intuïtionistische logica. In deze logica wordt in plaats van $\sim\sim \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p}$ de logische wet $\sim \mathrm{p} \rightarrow [\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{q}]$ ingevoerd en dat vraagt om een uitwerking. Het hierna volgende stelsel axioma's, waarbinnen de volgende principes zijn te hanteren: De waardering van een propositie is invariant onder verwisseling van (dis)(con)juncten in een (dis)(con)junctie èn de Modus Ponens is van toepassing.

Axioma 4. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

Axioma 5. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r))$

Axioma 6. $(p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$

Axioma 7. $(p \wedge q) \rightarrow p$

Axioma 8. $p \rightarrow (p \vee q)$

Axioma 9. $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r))$