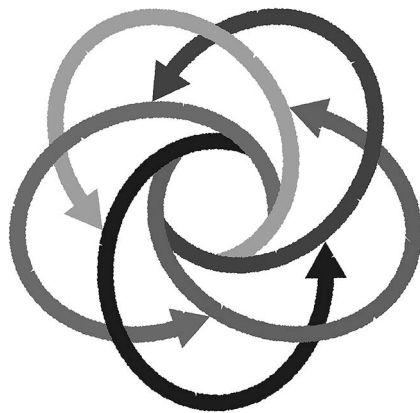


M N E M O M A T I C A

Automatische begripsvorming en
de bedrieglijkheid van geheugen



DEEL 2: UITWERKING

Aldemar Verstolen

Auteur: Aldemar Verstolen
Omslagontwerp: Textcetera, Den Haag

Mnemomatica: automatische begripsvorming en de bedrieglijkheid van geheugen
ISBN 978-94-6301-200-3 (versie 1)

Deel 1: Grondslagen ISBN 978-94-6301-182-2
Deel 2: Uitwerking ISBN 978-94-6301-196-9

NUR 984

Trefwoorden: kunstmatige intelligentie; semiotiek; abstractie; geheugen; filosofie.

Uitgeverij Eburon
info@eburon.nl
www.eburon.nl

Eerste druk 2018

© 2018 Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enig andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de rechthebbende.

Verantwoording

Dit boek is getiteld *Mnemomatica* en bestaat uit vier delen. Deel 1 heet *Grondslagen* en omvat slechts één bladzijde. Deel 2, *Uitwerking*, is een uitleg daarvan en bevat een inleiding tot het hele boek. Deel 3, *Aanvulling*, dat meer technische zaken behandelt, is in voorbereiding. Voor deel 4, *Achtergrond*, dat de bronvermeldingen, noten en dergelijke levert, moet het materiaal nog verwerkt worden.

Inhoudsopgave

Verantwoording	v
1 Inleiding	1
2 Toelichting	5
2.1 Verbanden	7
2.1.1 Relatie binnen een verzameling	7
2.1.2 Gericht verbonden component	9
2.1.3 Gelijkheid	11
2.1.4 Verzameling	13
2.1.5 Opdeling	14
2.2 Noties	15
2.2.1 Verwijzer	15
2.2.2 Verwezene	17
2.2.3 Drager	19
2.2.4 Waarde	21
2.2.5 Context	23
2.3 Ervaring	30
2.3.1 Geheugen	30
2.3.2 Substitutie	39
2.3.3 Log	45
2.3.4 Waarnemer	47
2.3.5 Aandacht	48
2.4 Voortbrenging	50
2.4.1 Factorisatie	50
2.4.2 Abstractie	58
2.4.3 Kosten	61
2.4.4 Kostenvermindering	63
2.4.5 Dienstverlening	68

3	Waarneming	75
3.1	Oordeel	75
3.2	Betekenis	78
3.3	Oneigenlijk gebruik	81
4	Geloof	89
4.1	Bewust geloof	90
4.2	Onbewust geloof	91
4.3	Geloof in bestaan	93
5	Waardering	99
5.1	Voordeel	99
5.2	Overleven	101
6	Onredelijkheid	107
6.1	Wensdenken	108
6.2	Onvoorziene neveneffecten	115
6.3	Averechtse tegenmaatregelen	126
7	Onoprechtheid	129
7.1	Leugen	129
7.2	Indekking	137
7.3	Beïnvloeding	147
8	Samenvatting	151
8.1	Begripsvorming	151
8.1.1	Informatica	152
8.1.2	Wiskunde	152
8.1.3	Filosofie	153
8.2	Bedrieglijkheid	153
8.2.1	Verhulling van inhoud	153
8.2.2	Oneigenlijk gebruik	154
8.2.3	Psychologie	154
8.2.4	Taalkunde	154
8.2.5	Sociologie	155
9	Conclusie	157
	Begrippenlijst	159
	Register	164

Hoofdstuk 1

Inleiding

Dit boek beschrijft hoe begrippen gevormd worden en hoe de namen van begrippen de illusie wekken nog de oorspronkelijke inhoud of betekenis te bezitten.

We vormen begrippen door zogeheten abstractie, dat wil zeggen, door constanten te herkennen en één constante af te zonderen om er vervolgens naar te verwijzen. Een computer zou dit ook kunnen doen, zoals in dit boek uiteengezet wordt. Een voorbeeld is als volgt. Bij een aantal patiënten wordt de lymfeklier uit de bovenlaag van de oksel gesneden. Hieruit vormen we het begrip van ‘oppervlakkige okselklierverwijdering’. In dit boek bekijken we eigenlijk geen tastbare zaken, maar beperken we ons tot tekst en uitdrukkingen, omdat alle theorie uiteindelijk door een computer verwerkt moet worden. Daarom buigen we het voorbeeld iets om. Namelijk, in de dossiers van een aantal patiënten wordt de behandelingsnaam ‘oppervlakkige okselklierverwijdering’ meermalen genoemd. De computer vervangt deze tekst door een willekeurige behandelcode 40.2 (voor dit voorbeeld gelijk aan de gebruikelijke code) en maakt een legenda die code 40.2 als ‘oppervlakkige okselklierverwijdering’ verklaart. Deze tekst staat nu op één plaats, wat niet alleen ruimte scheelt, maar vooral tijd. Dat laatste blijkt als de tekst ‘okselklierverwijdering’ verbeterd moet worden tot ‘okselklierdissectomie’, want die tekst hoeft nu niet op allerlei plaatsen te worden veranderd – zo men die plaatsen al kent.

De code 40.2 in de legenda heet een geheugen omdat ernaar verwezen wordt vanuit de dossiers. Elk teken dat voor iemand een betekenis draagt, is een geheugen, inbegrepen objecten, zoals een auto die een teken van succes is. Geheugen is bovendien een krachtig middel om de aandacht voor andere zaken vrij te maken. Dit boek laat geheugen een centrale plaats innemen en heeft dan ook als titel ‘mnemomatica’, wat Oudgrieks is voor leer der verwerking tot of van geheugen, dat wil zeggen, de verwerking van gegevens door abstractie die leidt tot een geheugen of de verdere verwerking van dat geheugen. In dit boek is geheugen voornamelijk een opslagmedium; het menselijk geheugen komt nauwelijks aan de orde.

Het geheugen 40.2 bezit enerzijds een zogeheten inhoud, namelijk de verzameling dossiers. Anderzijds heeft 40.2 de tekst ‘oppervlakkige okselklierverwijdering’ als betekenis in termen van de computer. Die uitdrukking is op zijn beurt weer geheugen van, uiteraard, de tastbare betekenis ‘oppervlakkige okselklierverwijdering’, alleen: de uitdrukking is al snel bedrieglijk, en wel op drie manieren. Ten eerste verhuult de uitdrukking haar oorspronkelijke inhoud omdat voor de bepaling van die inhoud alle kandidaten moeten worden afgelopen. In dit voorbeeld bestaat de inhoud uit de patiënten met behandelcode 40.2, die echter niet worden opgehaald omdat het hele patiëntenbestand dan moet worden bekeken. Het bestaan van 40.2 veronderstelt dat er nog patiënten met code 40.2 zijn, maar daarin kunnen we bedrogen uitkomen: niet in dit geval, maar wel bij de code voor de pokken, want die ziekte is uitgeroeid. De tweede bedrieglijkheid bestaat uit het oneigenlijk gebruik van de uitdrukking, dat wil zeggen, in een andere context dan de oorspronkelijke. Om een voorbeeld te noemen: de code 40.5 betekent niet alleen een diepgaande (in plaats van oppervlakkige) okselklierverwijdering, maar ook een hogere vergoeding dan code 40.2. Dat is ook de reden dat 40.5 in plaats van 40.2 soms valselijk wordt opgegeven aan de verzekeraars. Ten derde kan elke waarneming, bijvoorbeeld uit een centrale opslag, al het volgende ogenblik achterhaald zijn. Dat is nu eenmaal een eigenschap van de werkelijkheid (als er al zoiets is) waar we weinig aan kunnen veranderen. Die bedrieglijkheid is dus van ondergeschikt belang en wordt daarom pas in deel 3 behandeld. Bijvoorbeeld, een beeldschermprogramma (een waarnemer) heeft ‘okselklierverwijdering’ opgehaald, maar in de centrale legenda was deze naam inmiddels naar ‘okselklierdissectomie’ veranderd. Ten slotte: in deze voorbeelden kan elke bedrieglijke uitdrukking niet alleen een geheugen zijn, maar ook een zogeheten verwijzer of, meer algemeen, middenterm. Deze begrippen worden verderop gedefinieerd. Overigens, onder bedrieglijkheid van geheugen verstaan we niet de onbetrouwbaarheid ervan.

De toepassing (substitutie) van de automatisch gevormde begrippen is een vorm van redeneren. Een voorbeeld: bij een patiënt met ziektecode C50 voor borstkanker wordt de behandelcode 40.2 uit een tabel opgehaald en daarbij weer de tekst ‘oppervlakkige okselklierverwijdering’. Naast dergelijke concrete begrippen zouden ook formules, ervaringen enzovoort onderwerp kunnen zijn van abstractie en substitutie. Stel nu dat dit leidt tot een kunstmatig intelligente computer die werkelijk redelijk advies geeft, voor welke raad het overigens de hoogste tijd is: zouden we dat advies dan ter harte nemen en ook als zodanig gebruiken? Niet als het ons onwelgevallig is. Ook nu weer zou een uitdrukking, in dit geval een advies, haar eigen inhoud verhullen of oneigenlijk gebruikt worden. Dit boek bevat echter ook een systeem van begrippen dat een aantal psychologische, organisatorische en sociale verschijnselen verklaart, al zijn er vaak verscheidene verklaringen voor een enkel fenomeen. (De samenvatting aan het eind van dit boek somt enige verschijnselen op.) Dankzij dit systeem van begrippen zou een computer rekening kunnen houden met de bedrieglijke werking van een uitdrukking. Daarmee zouden de automatisch gegenereerde

adviezen idealiter genuanceerder en meer maatschappelijk relevant kunnen uitvallen. Het uiteindelijke doel, haalbaar of niet, is om een dergelijk verfijnd abstractiemechanisme daadwerkelijk te bouwen.

Dit boek is in de eerste plaats bedoeld voor wiskundigen, computerprogrammeurs, filosofen, met name in de traditie van de klassieke Griekse en Indiase wijsbegeerte, wellicht ook taalkundigen en zelfs theologen voor zover die zich bezighouden met de grondslagen van bestaan, dat wil zeggen, met metafysica, ook wel ontologie geheten. (De samenvatting noemt bij elk vakgebied de behandelde onderwerpen.) Nu zijn de problemen in deze wereld grotendeels door onszelf veroorzaakt. We zullen geen gehoor geven aan een vlammend betoog voor een oplossing en hoogstens luisteren naar genuanceerde adviezen zoals verstrekt door het voorgestelde abstractiemechanisme, als dat tenminste algemeen ingang vindt. Het zou dus een goede zaak zijn als de experts de haalbaarheid van deze onderneming vaststellen, althans na de conclusie te hebben gelezen. Verder is dit boek gericht tot iedereen die wil weten waarom de mens vaak handelt tegen alle redelijkheid in. Om die vraag te beantwoorden worden allerlei sociale, organisatorische en psychologische mechanismen gedefinieerd en wel operationeel, met andere woorden, op een manier die door een computer gehanteerd kan worden. De lezer of lezeres moet daarom wel gevoel hebben voor formeel denken (dat wil zeggen, manipulatie van uitdrukkingen) en bestand zijn tegen een gedrongen stijl.

Tot slot volgen hier een aantal aanverwante vakgebieden, te weten informatica, filosofie en wiskunde, nog aangevuld met recente maatschappelijke ontwikkelingen waarop dit boek inhaakt.

Ten eerste is de onderhavige theorie, *mnemomatica*, een formalisering van de dagelijkse automatiseringspraktijk; programmeurs abstraheren namelijk herhaalde gegevens tot tabellen en herhaalde programmatuur tot modules. In het bijzonder is de notie van context een veralgemening van Barkers notatie in *entity relationship modeling*. Verder huldigt dit boek een zogeheten pansemiotische opvatting waarin de database model staat voor de werkelijkheid, zoals waargenomen door beeldschermen, computersessies of andere databases. Eén onderwerp is niet ingebed in een bestaande ontwikkeling, want we treffen voor het eerst een definitie aan van het begrip waar alles in de informatica om draait, te weten: geheugen.

Wat wijsbegeerte betreft, grijpt de theorie in wezen terug op de logica van Aristoteles, zo niet zijn voorgangers. Volgens die filosofie, althans in latere interpretaties, wordt een begrip uit waarnemingen geabstraheerd, maar behoudt het zijn relatie tot de werkelijkheid: dit is precies de verwijzing van verschillende gegevens naar een universele. Verder valt vermenigvuldiging van bepaalde tabellen met het syllogisme samen, terwijl klassieke logica in feite de eerste aanzet is tot gegevensmodellering, zoals met de boom van Porphyrius in deel 3. De bedrieglijkheid van geheugen doet denken aan de illusie van het woord in de Madhyamaka-filosofie en aan Maya, de waan van werkelijkheid. Aan de orde komen ook begrippen uit andere takken van de wijsbegeerte, bijvoorbeeld ver-

vreemding en verdinglijking, die hun weg vonden via de marxistische filosofie. Het valt nog te bezien of de vijf noties uit dit boek overeenkomen met die uit de katholieke drievuldigheidsleer.

Verder is veel terminologie ontleend aan de wiskunde, zoals canonieke factorisatie van functies, waar een functie ook weer een wiskundig begrip is.

Ten slotte komen allerlei maatschappelijke verschijnselen aan de orde in voorbeelden van begrippen en mechanismen, niet om die verschijnselen geheel te verklaren, laat staan vanuit ethisch oogpunt, maar slechts om de werking van de definities aan te tonen. Een eerste voorbeeld van zo'n verschijnsel is het gebruik van geld: dat bevrijdt ons weliswaar van de verplichting tot wederkerigheid, maar verder spiegelt het slechts een toekomstige waarde (zoals geluk) voor, terwijl het ondertussen aanzet tot zinloze en vernietigende bedrijvigheid. Andere verschijnselen zijn de verbetering van mensen en organisaties, maar bovenal de gestage vernietiging van onze leefomgeving in velerlei opzicht.

Mochten we erin slagen een abstractiemechanisme in stelling te brengen dat zodanig verfijnd en krachtig is, dat we ons er geheel op kunnen verlaten, dan nog zou de bouw te laat komen: de vernietiging van de leefomgeving is onomkeerbaar, vooral de bevolkingsgroei en de opwarming van de atmosfeer zijn onherroepelijk in gang gezet. Het heeft dus geen zin meer om aan de volgende pagina, waar dit boek echt begint, nog de nodige aandacht te schenken.

Hoofdstuk 2

Toelichting

Dit hoofdstuk is een toelichting op deel 1, de *Grondslagen*. We richten ons in deze toelichting zoveel mogelijk op de inhoud van deze beginselen. In de volgende hoofdstukken behandelen we het oneigenlijk (ook wel: oninhoudelijk) gebruik van de begrippen, zoals de vorming van een bijbetekenis.

Het is niet de bedoeling dat we voor de beoogde computerarchitectuur zelf programma's gaan schrijven: een grote hoeveelheid programmatuur, voor zover al toereikend, is niet onderhoudbaar. In plaats daarvan hebben we grondslagen nodig met een beperkt aantal basisbegrippen die omwille van grote toepasbaarheid zo theoretisch (of abstract) mogelijk moeten zijn. Daaruit leidt de computer dan zelf de overige begrippen af. Laten we nu kijken naar de opbouw van de grondslagen en wel door van achteren naar voren te werken.

De grondslagen zijn in de eerste plaats een antwoord op de vraag: hoe kan een computer geheel zelfstandig begrippen vormen uit gegevens? Een kind herkent uit eigen beweging een konijn, maar een hedendaags computerprogramma doet zoiets niet uit zichzelf: als het vijf keer hetzelfde plaatje van een konijn aangeboden krijgt, dan zal het dit plaatje zonder verdere instructies domweg vijf keer opslaan. Het zou beter zijn als de computer dit plaatje herkent, slechts één exemplaar (het "algemene konijn") opslaat en er vijf keer naar verwijst. Het proces dat we hier voor ogen hebben, is factorisatie of iets ruimer: abstractie, dat wil zeggen, de afzondering van het algemene uit het bijzondere. Niet alleen dingen, maar ook handelingen kunnen geabstraheerd worden. Zo is een dienblad een abstractie van het telkens met een glas van de keuken naar de kamer lopen, dus het is in zekere zin een automatisering van deze handeling. Met abstractie zouden weer hogere begrippen gevormd kunnen worden, zoals het getal vijf, of meer algemene manieren om gegevens bondig op te slaan.

Een andere vraag is: wat zijn geheugen en aandacht? Geheugen is hier bijvoorbeeld een vel papier. Dit is een machtig middel omdat het ons toestaat de aandacht op iets anders te vestigen. Een praktische definitie van geheugen en aandacht is als volgt. Geheugen is een drager waarnaar wordt verwezen en

waarvan de waarde via die verwijzing is op te halen; de aandacht is dan de plaats waarnaar dit opgehaald wordt, maar waar zich ook een waarde van buiten kan bevinden, dat wil zeggen, binnen een andere context. In het vervolg zullen we begrippen zoals geheugen en aandacht, ook al zijn die niet gedefinieerd als een menselijk vermogen, vrijelijk op de mens toepassen, niet zozeer als model van psychologische functies, maar meer om de terminologie te illustreren en te beproeven.

Geheugen en aandacht zijn in dit boek geen elementaire begrippen. Ze worden daarentegen gedefinieerd in termen van vijf noties, die we nu nader bekijken. Twee noties zijn drager en waarde van de drager. Bijvoorbeeld, de inktvlek 'B' (de drager) verbeeldt de klank 'bee' (de waarde ervan). De derde en vierde notie zijn verwijzer en het verwezene. Een boeknummer verwijst bijvoorbeeld naar een plank in een bibliotheek, en daarmee naar het verwezene, namelijk het boek. De vijfde notie is context, die toestaat om een lange uitdrukking te vervangen door een kortere binnen die context. Zo is het boek met nummer 123 gedefinieerd in de context van de centrale bibliotheek van New York en niet in die van een andere stad. Geen van deze noties staat op zichzelf aan de basis: elk is telkens impliciet gedefinieerd, dat wil zeggen, in termen van de andere noties, die tijdelijk als gegeven worden verondersteld. Deze definitie lijkt dus op een woordenboek van een taal met vijf woorden. Een voorbeeld: verwijzer is gedefinieerd in termen van waarde, terwijl waarde nog moet worden gedefinieerd; we vertrouwen erop dat deze term ergens naar verwijst, vormen ons een beeld van de betekenis en geloven daarin. (Geloof zal worden gedefinieerd als het gebruik van een term voor een notie zonder die notie gesubstitueerd te hebben.) Wel moeten een paar noties concrete vorm aannemen. De meest aangewezen kandidaten daarvoor zijn: drager, zoals digitale geheugenruimte op een harde schijf; waarde, bijvoorbeeld de nul die ergens op de harde schijf staat; en context, te zien als datgene wat een aantal zaken bijeenhoudt, zoals een titel, bakje of de uiteinden van een magnetische band.

De definitie van de vijf noties steunt op de begrippen gelijkheid en deel van een verdeling. Evenals sommige noties is gelijkheid te zien als een fysisch gegeven: een computer herkent een nul of één. Net zo concreet is een deel, of iets ruimer, een zogeheten gericht verbonden component, dat wil zeggen, een aantal dragers die onderling verbonden zijn. Om het geheel hecht te doortimmeren, is gelijkheid uitgespeld in termen van wederom andere verbanden. Een eerste verband is de relatie binnen een verzameling. Net als de impliciete definitie van de noties leunt die definitie op andere begrippen, zoals verzameling en drager, die nog gedefinieerd moeten worden. De keuze om met relatie binnen een verzameling te beginnen, is dan ook vrij willekeurig.

Deel 1 opent met de aankondiging dat elke daaropvolgende definitie opgevat moet worden binnen een zekere context. Dat wil zeggen dat de ene definitie binnen de ene context geldt en de andere definitie binnen de andere, maar we laten steeds in het midden welke context dat precies is. Dit geldt dus ook voor de notie van context zelf, maar om zo niet oneindig door te gaan is er

wel een alles overkoepelende context. Bij het onderwerp tellen gebruiken we de overkoepelende context ‘ding’, maar een echt werkend mechanisme zou het versienummer 1 van dit boek nemen en dat nummer indien nodig substitueren.

We gaan nu de elementen van de grondslagen dichterbij bekijken. Veel voorbeelden betreffen tabellen, maar de theorie geldt net zo goed voor programmatuur, en vaak ook voor de fysieke werkelijkheid: uiteindelijk draait alles om gegevens.

2.1 Verbanden

In deze paragraaf voeren we een aantal verbanden tussen zaken in, waarbij ‘verband’ een overkoepelende term is die niet afzonderlijk gedefinieerd wordt. In vogelvlucht komen de volgende verbanden aan bod. Het meest wezenlijke verband is gelijkheid. Immers, een ding bestaat omdat iets ervan gelijk blijft onder wijziging van iets anders, hetzij een standpunt van waaruit dat ding wordt bekeken, hetzij een kenmerk van dat ding zelf. De veranderingen van een ding worden gemodelleerd door een zogeheten relatie binnen een verzameling, dat wil zeggen, een samenstel van verbindingen tussen elementen van die verzameling. De elementen die onderling verbonden zijn, heten een gericht verbonden component, zoals huizen in een stad onderling bereikbaar zijn via straten met soms één richting. De gericht verbonden elementen daarin noemen we gelijkwaardig. Als we de richting weglaten en elke samenstelling van verbindingen als een enkele nieuwe verbinding toevoegen, dan worden de elementen gelijkwaardig. We vatten de elementen nu als drager van een waarde op, reden waarom we de elementen alvast ‘drager’ noemden. Als alle dragers gelijke waarden hebben, dan is eenvoudig in te zien dat die dragers gelijkwaardig zijn. Omgekeerd kunnen dragers om een bepaalde reden gelijkwaardig zijn en toch verschillende waarden hebben, dus we kunnen gelijkheid niet definiëren met gelijkwaardigheid, maar dat kan wel als volgt. Twee waarden van dragers in een gericht verbonden component heten gelijk als elk van beide waarden gedragen wordt door net zo veel dragers als die in de component. Tot slot van dit overzicht: een component waarbij het niet uitmaakt hoe we van het ene element naar het andere komen, heet een verzameling. Een samenstel van componenten is dus op te vatten als een stel van elkaar afgescheiden verzamelingen; zo’n samenstelsel heet een verdeling in delen.

In het navolgende gaan we op deze verbanden dieper in. Die verbanden bestaan weliswaar tussen zaken die in termen van elkaar worden gedefinieerd, maar het geheel zweeft niet in het luchtledige, omdat we sommige zaken of verbanden (zoals drager of gelijkheid) als een fysisch gegeven kunnen zien.

2.1.1 Relatie binnen een verzameling

“Binnen een verzameling dragers is een *relatie* een verzameling paren, in verschil- EDRL

lende contexten, van dragers uit die verzameling, waarbij een *paar* is gedefinieerd als een drager met zijn waarde, in dit geval een drager.” Dit geldt binnen zekere context.

Een relatie binnen een verzameling heet ook wel *endorelatie*. Hier is met het woord ‘relatie’ steeds de tweelaatsige relatie bedoeld. Een drager is een nog nader te bepalen ding dat een zogenaamde waarde kan hebben. Een voorbeeld van een drager is een wit vel papier waarop een letter ‘B’ geschreven kan worden, maar dat ook leeg kan blijven. Bij een relatie binnen een verzameling is de waarde steeds een andere drager of desnoods dezelfde drager. Het woord ‘paar’ is tijdelijk een ander woord voor een drager met waarde, in dit geval een drager. Het is ingevoerd om verwarring met drager en waarde in een andere context te voorkomen. Hier bestaat een paar dus steeds uit twee dragers.

Bijvoorbeeld, de vier paren

A B
A C
B C
D D

vormen een relatie binnen de verzameling $\{A,B,C,D,E\}$.

Als paren dubbel voorkomen, onderscheiden door een context, dan heet de relatie *meervoudig*, anders *enkelvoudig*. Een *paar als zodanig* of *mogelijk meervoudig paar* tussen dragers is een verzameling van die paren, al is dit een nogal theoretische definitie.

Voegen we aan het voorgaande voorbeeld het paar (A,B) toe, dan is (A,B) als zodanig gelijk aan de verzameling bestaande uit de ene (A,B) en de andere (A,B). Anders gezegd: er zijn twee routes om van A naar B te komen.

ITR

Een *toegangspad* of kortweg *pad* van de ene drager (de *begindrager*) naar de andere (de *eindrager*) is een aaneengesloten reeks paren, dat wil zeggen: er bestaat een paar tussen de begindrager en een volgende drager, tussen deze volgende drager en een daaropvolgende drager, enzovoort, tot en met de einddrager. Een *pad als zodanig* is een pad dat bestaat uit paren als zodanig. Zo'n pad is *enkelvoudig* als elk paar als zodanig dat is en anders *meervoudig*.

In het voorgaande voorbeeld is er een pad van A naar C. Het is meervoudig als (A,B) twee keer voorkomt en dan is A,B,C het pad als zodanig: we geven niet aan via welke route we van A naar B gaan. ¶ Een ander voorbeeld is als volgt. (Het teken ‘¶’ zal steeds een nieuw voorbeeld binnen een alinea inluiden.) In een streek zijn korte en lange boswandelingen uitgezet. Op de splitsingen van de paden in elk bos staan paaltjes met groene pijlen in de context van een korte wandeling en paaltjes met rode pijlen in de context van een lange wandeling. Op een splitsing van twee paden staan een paaltje met een rode pijl wijzend naar het ene pad en een paaltje met een groene pijl die naar het andere pad wijst. Als beide paden op een volgende splitsing weer samenkomen, dan is de relatie tussen de paaltjes meervoudig.

De *symmetrische afsluiting* van een relatie binnen een verzameling is die relatie uitgebreid met alle omkeringen van de paren, dat wil zeggen, elk paar (X,Y) wordt aangevuld met het paar (Y,X) . De *transitieve afsluiting* ontstaat door toevoeging van de paren tussen alle begin- en eindpunten die door een pad zijn verbonden, met andere woorden, de paren (X,Y) en (Y,Z) leveren het paar (X,Z) . De *reflexieve afsluiting* ontstaat door elke drager die deel van een paar uitmaakt met zichzelf gepaard te laten zijn; dus het paar (X,Y) leidt tot het paar (X,X) en tot het paar (Y,Y) . Het is eenvoudig in te zien dat een symmetrische en transitieve afsluiting ook een reflexieve afsluiting is.

2.1.2 Gericht verbonden component

“Een *gericht verbonden component* binnen een relatie is een grootst mogelijke WCCP verzameling dragers waarvan elk tweetal dragers via een reeks paren verbonden is.” Dit geldt binnen zekere context.

Een gericht verbonden component heet ook wel *zwak verbonden component*. Draggers binnen een gericht verbonden component heten *gelijkwaardig* of *equivalabel*. Met ‘verbonden’ bedoelen we dat in de symmetrische afsluiting van de relatie (dat wil zeggen, door de richting te negeren) een pad bestaat van elke drager naar elke andere drager. Onder ‘gericht’ verstaan we dat de richting in de verbonden component er nog wel toe doet. De toevoeging ‘grootst mogelijke’ wil zeggen dat als drie dragers verbonden zijn, we niet twee ervan nemen. Een *sterk verbonden component* is een component waarvan elke drager een pad naar elke andere drager heeft, dat wil zeggen, alle dragers zijn onderling bereikbaar. Het vinden van componenten heet *decompositie*. Een gericht verbonden component heet kortweg ook wel *component* als er geen verwarring met andere types componenten kan ontstaan. Componenten hebben geen drager gemeen, want anders zouden ze verbonden zijn tot een grotere component.

In het voorbeeld van een relatie bestaat één component uit A, B en C; en één uit D. ¶ Om het voorbeeld met de boswandelingen uit te breiden: in een streek zijn bossen van elkaar afgescheiden door landerijen. In de bossen zijn wandelingen uitgezet met gekleurde paaltjes op de splitsingen. Het geheel van paden is een relatie binnen de verzameling paaltjes. De componenten hiervan zijn de paaltjes die met een pad verbonden zijn, dus de paaltjes in een bepaald bos. Ook het paaltje bij het huis van de boze heks, vanwaar geen ontsnappen mogelijk is, behoort tot een component, maar niet tot een sterk verbonden component.

Een *gelijkwaardigheidsrelatie* of *equivalentierelatie* binnen een verzameling EQVR is een relatie binnen die verzameling die voor elk paar ook het paar in de omgekeerde richting bevat (*symmetrie*) en waarbij het paar bestaande uit de uiteinden van een pad ook tot de relatie behoort (*transitiviteit*) terwijl elk element van de verzameling een paar met zichzelf vormt (*totale reflexiviteit*). Met ‘totaal’ wordt bedoeld dat elk element van de verzameling aan zichzelf gerelateerd is. Twee dragers die deelnemen aan een gelijkwaardigheidsrelatie heten *gelijkwaardig* of

equivalent. Anders dan deze naam doet vermoeden, zijn de waarden van gelijkwaardige dragers niet noodzakelijkerwijs gelijk, ze zijn slechts *gelijk gewaardeerd* of *equivalaat*, wat dus eigenlijk duidelijker termen zijn.

Ter illustratie bekijken we een computersysteem dat de tijd tussen gebruikers verdeelt. Als de computer een seconde ten behoeve van Piet heeft gewerkt, dan is de volgende aan de beurt, namelijk Marie, daarna Klaas enzovoort, totdat Piet weer aan de beurt is. Klaas is dus een opvolger van Piet, maar ook omgekeerd, en Klaas is tevens een opvolger van zichzelf. Piet en Klaas zijn gelijk gewaardeerd, maar ze zijn niet dezelfde gebruikers, alleen de naam van de computer is voor allen hetzelfde. ¶ Om een eerder voorbeeld op te pakken: een streek bestaat uit verscheidene bossen. In elk bos zijn wandelingen uitgezet met paaltjes op de splitsingen. Elke wandeling heeft een richting. Mogelijk zijn twee paaltjes door verscheidene paden verbonden. Op een wandelkaart van de streek tekenen we elk pad ook nog eens in de omgekeerde richting. Bovendien voorzien we alle samengestelde paden van een enkel pad dat het begin- met het eindpunt van het samengestelde pad verbindt. Een pad van X naar Y en een pad van Y naar Z wordt dus een pad van X naar Z. Hierbij kan Z gelijk aan X zijn en dus moeten we voor elk paaltje dat met een pad is verbonden, een pijl naar zichzelf op de kaart tekenen. Ook een eenzaam paaltje dat op een inmiddels dichtgegroeid pad staat, moet naar zichzelf verwijzen. Het lijnenpatroon op de aldus dichtgetekende kaart is een gelijkwaardigheidsrelatie. ¶ Een ander voorbeeld is de gelijkstelling van origineel en kopieën. Op een beeldscherm is het elektronisch dossier van patiënt Jansen opgehaald uit een centrale database. De ziektecode B74 in de kopie verwijst naar een centrale legenda waar deze code als ‘Elefantiasse’ wordt verklaard. Die ziektenaam is op het scherm gekopieerd. De centrale database heeft omgekeerd een verwijzing naar alle beeldschermprogramma’s die de ziektenaam ‘Elefantiasse’ in gebruik hebben. Mocht de spelling naar ‘Elephantiasse’ (met ‘ph’) veranderd worden, dan kan het dus alle kopieën bijwerken. Het zou zelfs zo kunnen zijn dat een gebruiker van de kopie afdwingt dat de spelling veranderd wordt: dan zou deze gebruiker een verwijzing naar alle andere gebruikers en de centrale database moeten hebben. Hetzelfde geldt voor andere gebruikers en uiteindelijk zou iedereen naar iedereen moeten verwijzen. Opdat een verwijzing bestaat van elke gebruiker naar elke gebruiker verwijzen alle gebruikers ook naar zichzelf, zelfs als ze even geen beeldscherm gebruiken. Het resultaat is een gelijkwaardigheidsrelatie. Dit is uiteraard niet praktisch en gelijkwaardigheidsrelaties bestaan dan ook in de meeste gevallen alleen maar in gedachten.

EQVC Een component van een gelijkwaardigheidsrelatie heet een *gelijkwaardigheidsklasse* of *equivalentieklasse*.

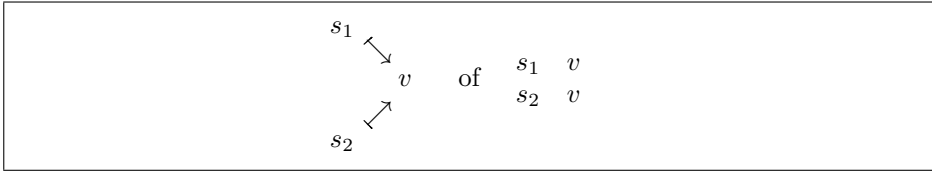
Bekijken we weer het voorbeeld van de boswandelingen waar alle paaltjes op een kaart zijn verbonden, dan is de verzameling paaltjes in een bos een gelijkwaardigheidsklasse. Voorwaarde is wel dat alle paaltjes in een bos tot een wandeling behoren, dat wil zeggen, niet eenzaam zijn; ook moet men binnen een bos van de ene wandeling op de andere kunnen overstappen.

2.1.3 Gelijkheid

“Waarden samen met dragers uit een gericht verbonden component heten *gelijk* EQL als elke waarde net zo veel dragers met die waarde heeft als de component; een dergelijke waarde met willekeurige drager wordt een *constante* genoemd.” Dit geldt binnen zekere context.

Het herkennen van gelijke waarden heet *groeperen*. (Gelijkheid is een speciaal geval van invariantie: zie deel 3.) De waarden bevinden zich hier typisch in een andere context dan de context waarbinnen de ene drager de waarde van een andere is. We lopen hier dus weer vooruit op het feit dat dragers een waarde kunnen bezitten. Hierbij geldt ook dat twee dragers verschillen zodra ze worden opgeschreven, dat wil zeggen, een drager is uniek. Voor gelijkheid tussen drager-waarde-paren gebruiken we hier het speciale symbool ‘ \equiv ’. Als de dragers zich bevinden in een te veronachtzamen context (typisch het papier) dan zijn de waarden zogeheten waarden als zodanig, zoals later gedefinieerd, en gebruiken we het *gelijkheidsteken* ‘=’ tussen de waarden als zodanig. De definitie van gelijkheid grijpt niet expliciet terug op het begrip gelijkheid, al speelt het heimelijk wel een rol, zoals een voorbeeld duidelijk zal maken. Misschien moeten we ons echter niet te veel zorgen maken over deze definitie, omdat gelijkheid van elementaire waarden in de regel een fysisch feit is, zoals een computer de cijfers nul en één kan herkennen. Bij identiteit vinden we straks nog een ander soort gelijkheid en bij substitutie zullen we diepe van ondiepe gelijkheid onderscheiden.

Een voorbeeld: een component heeft alleen het paar (3, 4). De drager 3 heeft dus als waarde 4, maar dit soort waarde is hier nu niet aan de orde. Drager 3 heeft waarde ‘Piet’ (steeds als zodanig) en drager 4 heeft waarde ‘Klaas’. (Met ‘als zodanig’ bedoelen we los gezien van de genoemde dragers, hoewel later verduidelijkt zal worden dat er toch altijd een drager is.) We nemen aan dat een methode gegeven is om de dragers van een waarde vast te stellen en dat we die methode zonder meer kunnen gebruiken. Die methode levert het feit dat de verzameling dragers van ‘Piet’ slechts bestaat uit 3. Deze verzameling van één element wordt als {3} genoteerd. (Die methode is in dit geval: neem de drager 3, stel vast dat de waarde ‘Piet’ is en dat deze gelijk is aan de waarde ‘Piet’ als zodanig; neem de volgende en tevens laatste drager 4, constateer dat de waarde ‘Klaas’ is en concludeer dat deze waarde niet gelijk aan ‘Piet’ als zodanig is. Twee keer gebruiken we het woord ‘gelijk’ terwijl we gelijkheid nog aan het definiëren zijn, maar dit woord is verhuld door het begrip van verzameling dragers van een waarde.) We vergelijken de verzameling {3} met de verzameling dragers {3, 4} in de component, strepen 3 weg tegen, zeg, 4 en dan blijft 3 over. (Hier gebruiken we niet het begrip gelijkheid.) Er zijn dus niet evenveel elementen in beide verzamelingen. Daarmee zijn de paren (3, Piet) en (4, Klaas) ongelijk. Merk op dat we de naam ‘Piet’ niet expliciet met ‘Klaas’ hebben vergeleken: dankzij het begrip van verzameling dragers van een waarde stellen we slechts vast dat er een waarde anders dan ‘Piet’ moet zijn, dus niet alle



Figuur 2.1: de verzameling dragers s_1 en s_2 die elk een exemplaar van de waarde v hebben binnen dezelfde context. Rechts is dit uitgedrukt met een tabel, links met pijlen, waarbij de waarde v voor het gemak maar één keer wordt genoemd, ook al treedt die waarde twee keer op.

waarden zijn gelijk. \mathbb{Q} Stel nu als variatie op dit voorbeeld dat 4 de waarde ‘Piet’ heeft. We spreken dus over de paren (3, Piet) en (4, Piet). De dragers met als waarde de eerste ‘Piet’ vormen de verzameling $\{3, 4\}$. Die met als waarde de tweede ‘Piet’ vormen de verzameling $\{4, 3\}$ omdat we eerst vaststellen dat 4 de drager van de tweede ‘Piet’ is en vervolgens 3 als alternatieve drager van de tweede ‘Piet’ vinden. (Nogmaals: het vinden van zo’n alternatieve drager berust heimelijk wel degelijk op het begrip gelijkheid, maar het volstaat om het woord ‘gelijkheid’ niet in de definitie te noemen.) We beschikken niet over het begrip gelijkheid van dragers, maar we onderscheiden die dragers wel. Dus strepen we 3 uit $\{3, 4\}$ weg tegen 4 uit $\{4, 3\}$ en ten slotte 4 tegen 3. De verzamelingen dragers bevatten dus evenveel elementen. Vandaar $(3, \text{Piet}) \equiv (4, \text{Piet})$ en al zijn deze twee paren ongelijk, toch noemen we ze gelijk zodra we de dragers als bijzaak beschouwen. Dit wordt ook wel uitgedrukt als ‘Piet’=‘Piet’. De constante is in dit geval ‘Piet’, waarbij het uiteraard niet uitmaakt of we de eerste of de tweede nemen. \mathbb{Q} Vervangen we ‘Piet’ door de variabele v en ‘Klaas’ door w (die gelijk aan ‘Piet’ kan zijn) dan kunnen we weer spreken over $(3, v) \equiv (4, w)$. Als we de dragers 3 en 4 veronachtzamen, dan schrijven we hiervoor dus $v = w$. Deze notatie is gerechtvaardigd omdat ze samenvalt met de huis-tuin-en-keuken-gelijkheid van de waarden v en w als zodanig.

Verder zijn de dragers van gelijke drager-waarde-paren *uitwisselbaar* of *verwisselbaar*, dat wil zeggen, verwisseling van de dragers verandert de verzameling dragers met gelijke waarden niet. De ene drager is dan *nevendrager* van de andere. Ten opzichte van de waarde als zodanig (een nog te definiëren begrip) heten uitwisselbare dragers ook wel *synoniem*, *nevendragend* of, om nog een germanisme te gebruiken, *evenwaardig*. (De term ‘gelijkwaardig’ moet vermeden worden, want de dragers zijn niet bij voorbaat gelijkwaardig, al kunnen ze dat wel gemaakt worden met betrekking tot gelijkheid van waarde.)

Om het vorige voorbeeld te vervolgen: als we 3 en 4 verwisselen in de verzameling gedragen waarden (3, Piet) en (4, Piet) dan verandert deze verzameling niet, dus 3 en 4 zijn uitwisselbaar. De dragers 3 en 4 zijn vooralsnog niet gelijkwaardig. Ze zijn wel evenwaardig ten opzichte van hun gezamenlijke waarde ‘Piet’ als zodanig, dat wil zeggen, alsof die geen drager heeft. De dragers 3 en 4 zijn alsnog te zien als gelijkwaardig doordat ze dezelfde naam hebben.

2.1.4 Verzameling

“De dragers van een constante vormen een zogeheten *verzameling*.” Dit geldt CLCT binnen zekere context.

Een verzameling heet ook wel *collectie* of *klasse*. Zie figuur 2.1 voor een schematische voorstelling, die we nader bekijken bij het begrip waarde. Een verzameling kan ook uit één drager bestaan. Zodra de dragers van de constante worden genoteerd, ontstaat een gericht verbonden component. De definitie van de verzameling is niet afhankelijk van die component, net zomin als van de constante. Een verzameling is dus een gericht verbonden component waarbij de verbindingen er niet toe doen. Als de constante één van de gegeven dragers is, dan heet deze *vertegenwoordiger* of *representant* van de verzameling. Typisch is de constante ook weer een drager, de samenhoudingsdrager, die de naam van de verzameling kan dragen, waarover later meer. De constante kan ook een herhaalde context zijn.

Een voorbeeld: gegeven zijn de dragers 1, 2, 3 met elk de waarde X, die dus herhaald is. Zo opgeschreven, vormen de dragers de gericht verbonden component met de paren (1,2) en (2,3) dus het rijtje 1, 2, 3 maar dan met de verbanden aangegeven. Anders gezegd: 1 heeft de waarde 2 en 2 heeft de waarde 3 binnen de context van gepaard zijn; die context verschilt van de context waarin de waarde X wordt aangenomen. Andere dragers, zoals 4, hebben weer een andere waarde dan X. Daarmee vormen 1, 2 en 3 een verzameling. Deze had net zo goed in de volgorde 1, 3, 2 opgeschreven kunnen worden. Ook als we X door Y vervangen of als Y de waarde van 1, 2 en 3 is in weer een andere context, dan is de verzameling hetzelfde. ¶ Een ander voorbeeld ontstaat als we X vervangen door 2, één van de dragers. Dus 2 heeft zichzelf als waarde. Hiermee is 2 representant van de verzameling bestaande uit 1, 2 en 3. ¶ Een tastbaar voorbeeld: de aanvoerder van een voetbalelftal die zelf meespeelt, vertegenwoordigt het elftal.

Een meer gebruikelijke term voor drager is *element* van een verzameling; net als dragers zijn geen twee elementen hetzelfde.

Bijvoorbeeld: een kast met schelpen is een verzameling met als elementen de individuele schelpen. De kast bevat twee kauri's: elke kauri is een exemplaar of drager van de kauri als soort schelp. ¶ Een schelpenboek is een verzameling schelpen als soort. Het heeft geen zin daarin de kauri als zodanig twee keer te beschrijven: doen we dit wel, dan is het boek geen verzameling van dragers meer, maar een waardenverzameling, waarover later meer.

Een *naam van een verzameling* dragers is een unieke waarde gedragen door een constante van de verzameling, opgevat in de context van de dragers. In het bijzonder is deze constante dezelfde als die waarmee de verzameling is gedefinieerd. De naam van een verzameling zal blijken een uniek verwezene te zijn; een centraal opgeslagen naam is vergelijkbaar met een *platonische vorm* of *platonisch idee*. Verschillende namen van eenzelfde verzameling zijn dus synoniem. De synoniemen behoren niet noodzakelijkerwijs via dezelfde constante

tot de verzameling. Zoals we later zullen zien, wordt de naam een verwezene, gedragen door de constante in de rol van samenhoudingsdrager; na zogeheten substitutie is de constante samenhoudingsdrager vervangen door de constante naam van de verzameling.

Ter illustratie: patiënten 123 en 456 hebben als enigen ziektecode B74, die in een legenda de ziektenaam ‘Elefantiase’ draagt. Die ziektenaam is tevens de naam van de verzameling bestaande uit 123 en 456. We vatten het woord ‘Elefantiase’ op in de context van de patiënten en spreken daarom over elefantiasepatiënten. De naam ‘Elefantiase’ (met een letter ‘f’) heeft nog het synoniem ‘Elephantiase’ (met ‘ph’) voor de code B74. ¶ Deze patiënten hebben bovendien als enigen in hun dossier de letter M als geslachtscode, die in een andere legenda als ‘Man’ verklaard wordt. Daarmee is ‘Man’ de naam voor de verzameling mannelijke patiënten die vooralsnog samenvalt met de elefantiasepatiënten. Het is dus een synoniem hoewel de code M verschilt van de code B74. ¶ Een tegenvoorbeeld: de ene groep patiënten heeft de code BRD voor het land van herkomst en een andere groep de code DDR. De namen van hun verzamelingen zijn dan respectievelijk ‘Bundesrepublik Deutschland’ en ‘Deutsche Demokratische Republik’. In de legenda staan bij dezelfde code onder het kopje ‘Nederlandse naam’ de respectievelijke synoniemen ‘West-Duitsland’ en ‘Oost-Duitsland’. Na de hereniging van Duitsland worden beide Duitstalige landnamen veranderd in ‘Deutschland’, een waarde die nu niet meer uniek in de legenda is, en dus geen naam is. Inderdaad levert de waarde ‘Deutschland’ met drager BRD alleen patiënten uit West-Duitsland en die met drager DDR slechts Oost-Duitse patiënten. ¶ Een tastbaar voorbeeld: een herenvoetbalelftal heeft een trainer, die dus niet meespeelt. Zijn naam is moeilijk als naam van het elftal op te vatten, maar ‘Ajax’ is een goede naam, totdat een speler toevallig Ajax heet. In dat geval moet vermeld worden of ‘Ajax’ de naam van een elftal is of de drager van een speler, dat wil zeggen, zijn naam.

De elementen van een verzameling met een naam worden vaak naar die verzameling vernoemd. Daardoor is het niet nodig om een nieuwe term in te voeren.

Zo kan de uitdrukking ‘het paard’ twee dingen betekenen: het paard als zodanig, dus als soort; en een bepaald paard waarover eerder gesproken is.

¶ Hetzelfde geldt voor de meer abstracte uitdrukking ‘de rij’. Deze uitdrukking betekent namelijk een bepaalde rij of het begrip ‘rij’ in het algemeen.

2.1.5 Opdeling

PRTT “Een *opdeling* op basis van een relatie binnen een verzameling dragers bestaat uit de gericht verbonden componenten binnen die relatie die worden opgevat als verzamelingen, de zogeheten *delen*.” Dit geldt binnen zekere context.

Een opdeling heet ook wel *partitie*. De delen zijn dus componenten opgevat als verzamelingen. Net als componenten overlappen deze elkaar niet. Een opdeling waaraan nog de losse, met zichzelf gepaarde elementen zijn toegevoegd,