

IEDERE
SUDOKU
OPLOSSEN

*Een handleiding met oefeningen voor
het oplossen van sudoku's op papier*

Marten Beck

Auteur: Marten Beck
Omslagontwerp: Marten Beck
Druk: Brave New Books
ISBN: 9789464052381
© 2020 M.J.W. Beck

Alleen de sudoku's in deze uitgave mogen worden gekopieerd en gebruikt als oefenmateriaal.

Van dezelfde auteur:
ZO los je sudoku's op (ISBN: 9789464052954)
Sudoku Oefeningen Deel 1 (ISBN: 9789403701165)
Sudoku Oefeningen Deel 2 (ISBN: 9789403701226)

Inhoudsopgave

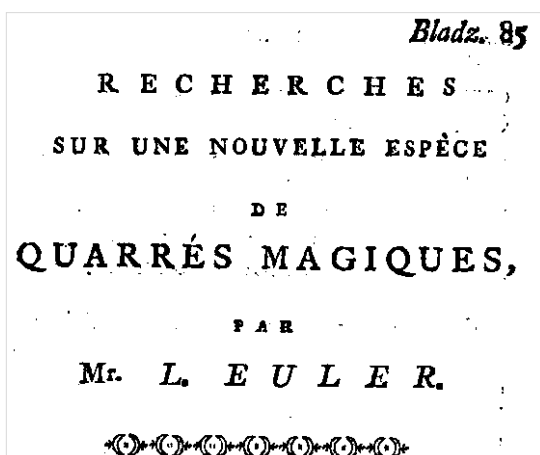
Voor wie is dit boek geschikt?.....	5
In vogelvucht: wat is een sudoku?	5
Herhalingen	6
Aanduidingen	7
Wat kun je verwachten?	8
Oplosstrategieën	18
Sudoku 1.....	20
Een alternatieve aanpak	26
Sudoku 2.....	28
Kenmerken en patronen	33
X-Wing.....	34
Zwaardvis (Swordfish)	35
Wolkenkrabber (Skyscraper)	36
Vlieger (2-String Kite).....	37
Leeg vierkant (Empty Rectangle)	38
Coloring	39
Naakt paar (Naked pair)	40
Verborgen paar (Hidden pair).....	40
Uniek rechthoek (Unique rectangle).....	41
Twee kandidaten + 1 (Bivalue Universal Grave + 1 of BUG+1)	41
W-Wing.....	42
Verborgen rechthoek (Hidden rectangle)	42
Remote pair	43
Naakt trio (Naked triple)	43
Verborgen trio (Hidden triple).....	44
XY-Wing	44
XYZ-Wing	45
Sudoku 3.....	47
Sudoku 4.....	51
Sudoku 5.....	55
Sudoku 6.....	58
Sudoku 7.....	62
Sudoku 8.....	65
Sudoku 9.....	68
Sudoku 10	72
Te moeilijke sudoku?	75
Oefeningen.....	79
Uitwerkingen	80
Oplossingen van de oefeningen	115
Sudokuprogramma's	118
De moeilijkheidsgraad van sudoku's	118
Afsluiting	120
Printversie sudoku 1 t/m 10.....	121
Printversie oefening 1 t/m 20.....	126

Voor wie is dit boek geschikt?

Dit boek is een handleiding voor het oplossen van sudoku's op papier. Deze handleiding is vooral geschikt voor iedereen die wel eens in een krant, tijdschrift of een puzzelboekje een sudoku probeert op te lossen, maar hierin vastloopt of er moeite mee heeft. Het is ook een werkboek, want je zult met gum, potlood en eventueel een pen zelf aan de slag moeten gaan. Maar ook na het doorwerken van deze handleiding zal het oplossen van een sudoku niet altijd 'een eitje' zijn. De wat moeilijkere sudoku's kosten gewoon veel tijd om op te lossen. Als het vinden van bepaalde kenmerken en patronen geen enkele moeite zou kosten, is de uitdaging verdwenen.

In vogelvlucht: wat is een sudoku?

Hoewel de naam sudoku uit het Japans komt, gaat de oorsprong van de mogelijkheden van een 9×9 -vierkant terug naar 1782. Het jaar waarin een verhandeling over magische vierkanten door de wiskundige Leonard Euler gepubliceerd werd in *Verhandelingen uitgegeven door het Zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen te Vlissingen, negende deel*.



In het artikel van Euler gaat het helemaal niet over een spel of puzzel. Dat werd het pas ongeveer twee eeuwen later. Eerst onopvallend in Amerika. Later, via Japan, werd de sudoku wereldwijd bekend. Sudoku is een verkorte vorm van sūji wa dokushin ni kagiru.

Hieronder staat een voorbeeld van een sudoku en de oplossing:

1								6
		6		2		7		
7	8	9	4	5		1		3
			8		7			4
				3				
	9				4	2		1
3	1	2	9	7			4	
	4			1	2		7	8
9		8						

1	2	3	7	8	9	4	5	6
4	5	6	1	2	3	7	8	9
7	8	9	4	5	6	1	2	3
2	3	1	8	9	7	5	6	4
5	6	4	2	3	1	8	9	7
8	9	7	5	6	4	2	3	1
3	1	2	9	7	8	6	4	5
6	4	5	3	1	2	9	7	8
9	7	8	6	4	5	3	1	2

Zoals uit de oplossing blijkt, moeten in iedere rij, kolom en 3×3-vierkant de cijfers 1 t/m 9 komen te staan (en dat mogen ook andere symbolen of zelfs kleuren zijn). De kunst is om door logisch nadenken de lege vakjes in de sudoku in te vullen. Wiskundige kennis is niet nodig.

De meeste sudoku's zijn symmetrisch, maar dat is niet per se nodig. Sudoku's worden meestal door computerprogramma's gegenereerd en dan is het een kleine moeite om ze symmetrisch te krijgen. Vaak staan er dan wel meer gegeven cijfers dan per se nodig is.

De moeilijkheid van een sudoku hangt niet zonder meer af van de hoeveelheid gegeven cijfers. Om een eenduidige oplossing te hebben, moeten minstens 17 cijfers gegeven worden. Een niet-eenduidige sudoku (dus met meerdere oplossingen) wordt niet als een echte sudoku beschouwd, omdat je deze niet kunt oplossen door uitsluitend logisch te redeneren.

Sudoku's oplossen is goed voor de hersenen en het IQ. Dit blijkt uit diverse studies, onder andere die van de Ierse neurowetenschapper dr. Ian Robertson.

Herhalingen

In deze handleiding zul je veel herhalingen tegenkomen. De kracht van het leren zit namelijk in de herhaling.

Er worden voorbeeldsudoku's stap voor stap doorgenomen. Het zijn keer op keer dezelfde strategieën die je toepast. Door ze steeds te herhalen, slijten ze er vanzelf in en is je vermogen om sudoku's op te lossen na het doornemen van deze handleiding flink toegenomen.

Aanduidingen

In een sudoku wordt gebruik gemaakt van rijen, kolommen en vierkanten van 9 vakjes (3×3). De rijen en kolommen kunnen eenvoudig genummerd worden van eerste t/m negende rij/kolom. Uiteraard bij de rijen van boven naar beneden en bij de kolommen van links naar rechts.

De aanduiding van een vakje gaat via rij en kolom in een korte notatie. Zo betekent bijvoorbeeld r3k6 een vakje in de derde rij en zesde kolom. Een vakje in de zevende kolom en negende rij wordt aangegeven met r9k7. Dus altijd eerst het rijnummer en dan het kolomnummer. De rijen en kolommen worden in de tekst ook kort aangeduid met r1, r2 etc. voor de rijen en k1, k2 etc. voor de kolommen.

De 3×3 -vierkanten worden in deze handleiding aangegeven met v1 (links boven) tot en met v9 (rechts beneden).

	k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9
r1									
r2		v1			v2			v3	
r3						r3k6			
r4									
r5		v4			v5			v6	
r6									
r7									
r8		v7			v8			v9	
r9							r9k7		

Met de hierboven beschreven aanduidingen worden in deze handleiding ruim 10 sudoku's doorgenomen en volgen er 20 oefeningen met uitwerkingen. Het is het meest leerzaam als je zelf meeschrijft in een uitgeprinte sudoku. Alle sudoku's en oefeningen staan achterin deze handleiding als printversie.

Wat kun je verwachten?

Stel je komt in een krant, tijdschrift of sudokuboekje de volgende sudoku tegen:

		9		4				
8			6			9	1	
		5					4	6
	7				4	5		
			1	3	8			
		3	7				2	
4	8					2		
	5	7			3			1
				7		6		

Als je al vaker sudoku's hebt opgelost, weet je wat er moet gebeuren. Om te bepalen welk cijfer in welk vakje past, wordt meestal gebruik gemaakt van *eliminieren*.

Dat betekent dat je binnen een 3×3-vierkant kijkt waar het cijfer *niet* kan staan. Als er dan maar één vakje overblijft, heb je de oplossing voor dat cijfer gevonden. In sommige gevallen kun je deze techniek ook toepassen bij rijen en kolommen.

Met de basistechniek *eliminieren* kun je in de sudoku een 1 vinden in v6. In deze handleiding worden grijstinten en pijlen gebruikt om dat aan te geven. Voor de 1 in v6 wordt dat getoond in de figuur op de volgende bladzijde. De 1-en uit v3, v5 en v9 elimineren vakjes in v6. De pijlen geven de kijkrichting aan. Donkere arcering is verboden gebied. Alleen het licht gearceerde vakje linksonder in v6, dus r6k7, blijft over. Daar komt met 100% zekerheid de 1 te staan.

		9		4				
8			6			9	1	
		5					4	6
	7				4	5		
			1	3	8			
		3	7			1	2	
4	8					2		
	5	7			3			1
				7		6		

Erg eenvoudige sudoku's kun je vrijwel geheel op deze manier oplossen. Ook kan er na invullen van cijfers in een rij, kolom of vierkant nog maar één leeg vakje overblijven. Die kun je dan ook meteen invullen. Er is dan sprake van een 'Full House'. Voor dit soort eenvoudige sudoku's is deze handleiding overbodig.

Waar het in eerste instantie om gaat is hoe je verder kunt komen als je op de bovenstaande manier cijfers hebt ingevuld en er nog een hoop lege vakjes overblijven.

We gaan dus eerst de sudoku zo ver mogelijk invullen (en het is een goede oefening om dat zelf te proberen voordat je verder leest). Om de oplosstappen te laten zien wordt vaak een kleiner formaat sudoku als figuur gebruikt.

		9		4				
8			6			9	1	
		5					4	6
	7	8			4	5		
			1	3	8			
		3	7			1	2	8
4	8					2		
	5	7			3			1
				7		6		

Hiernaast zie je hoe je een 8 kunt vinden in vakje r4k3 in v4 en vervolgens in vakje r6k9 in v6. Daarbij maak je gebruik van de zojuist gevonden 8 in vakje r4k3.

Maar hoe zit het met de overige 1-en en de 2-en tot en met de 7-s? Moeten die worden overgeslagen? In deze sudoku lukt het niet om voor alle cijfers een directe oplossing te vinden. Bovendien hoeft je niet per se de cijfers van 1 tot en met 9 te doorlopen. Die volgorde is volkomen willekeurig.

Bedenk wel dat ingevulde cijfers je verder kunnen brengen naar nieuwe oplossingen. Blijf dus steeds alle cijfers langslopen, totdat je niet meer verder kunt.

Het invullen van de 8 in v4 heeft gevolgen voor de 1 in dat vierkant. Zie volgende figuur.

		9		4				
8			6			9	1	
		5					4	6
1	7	8			4	5		
			1	3	8			
			3	7			1	2
4	8					2		
	5	7			3			1
				7		6		

We maken gebruik van de gevonden 1 in v6 en de 8 in v4. Hierdoor blijft er precies één vakje over voor de 1 in v4: r4k1.

Het vinden van oplossingen op deze manier gaat via eenvoudige technieken. In deze sudoku zijn we echter vastgelopen. De oogst is vrij gering: twee keer een 1 en twee keer een 8.

Om verder te kunnen, gaan we het begrip *kandidaten* invoeren. Een kandidaat is een *mogelijke* oplossing. Een manier om een sudoku op te lossen is om in de lege vakjes *alle* kandidaten in te vullen en dan te kijken in welk vakje nog maar één kandidaat overblijft. Die kun je dan invullen. Maar dan moet je ook in de betreffende rij, kolom en het vierkant de kandidaten voor dat cijfer weer uitgummen. De sudoku wordt dan vaak erg rommelig, dus deze methode wordt niet in de handleiding beschreven.

Met behulp van kandidaten kun je wel oplossingen vinden. Zeker als in een vierkant de kandidaten uitsluitend op één lijn (rij of kolom) liggen. In de volgende figuur zie je hoe je met behulp van kandidaten een 5 kunt vinden in v4.

		9		4				
8			6			9	1	
		5					4	6
1	7	8			4	5		
5			1	3	8			
			3	7			1	2
4	8					2		
	5	7			3			1
				7		6		

De 5 in v6 laat nog twee mogelijkheden voor de 5 over in v5 (grijze vakjes op de zesde rij). Ongeacht in welk grijs vakje een 5 komt te staan, zal op de zesde rij geen 5 kunnen staan in v4. Samen met de 5-en uit v1 en v7 wordt er in vakje r5k1 in v4 een oplossing voor de 5 gevonden.

De kandidaten worden meestal linksboven in het vakje genoteerd. Om de kandidaten op deze manier aan te geven wordt een groot formaat sudoku als figuur gebruikt.

In feite is hier ook sprake van eliminatie. Het vereist iets meer speurwerk, maar met deze manier van elimineren komen we weer een stukje verder. Je kunt bijvoorbeeld in v6 twee kandidaten op één lijn voor de 4 vinden. Hiermee komt een oplossing voor de 4 in v4 tevoorschijn. En deze 4 helpt weer bij het vinden van een oplossing voor de 4 in v1. In de volgende figuur staat het uitgewerkt.

		9		4				
8		4	6			9	1	
		5				(4)	6	
1	7	8		(4)	5			
5			1	3	8			
	4	3	7			1	2	8
(4)	8					2		
	5	7			3			1
				7		6		

Begin bij de omcirkelde 4-en in v3 en v5. In de lichtgrijze vakjes op de vijfde rij in v6 zou een 4 kunnen staan. Maar dan kan er op die rij geen 4 staan in v4. Met de 4 in v7 wordt een oplossing voor de 4 in v4 gevonden (r6k2) en vervolgens in v1 (r2k3). We hebben met deze kleine uitbreiding nog drie nieuwe cijfers kunnen toevoegen aan de sudoku.

Helaas zijn we opnieuw vastgelopen. Vanaf dit punt gaat het vooral om het elimineren van zoveel mogelijk kandidaten, zonder dat er meteen een oplossing uit volgt. Dit betekent dat er kandidaten in het klein linksboven in een vakje moeten worden ingevuld. Om te voorkomen dat de sudoku onduidelijk wordt, leggen we ons twee belangrijke beperkingen op:

- Noteer kandidaten alleen binnen een 3×3-vierkant
- Noteer uitsluitend *twee* mogelijke kandidaten per cijfer

De tweede beperking betekent dat als er in een vierkant drie of meer kandidaten van een cijfer zijn, je *géén* kandidaten noteert. De twee mogelijke kandidaten in een vierkant worden 'dubbele kandidaten' genoemd.

Onthoud dat kandidaten op één lijn in een vierkant de kandidaten voor dat cijfer in een ander vierkant kunnen uitsluiten. Dat is ook wat we hierboven bij de 5 en de 4 hebben gezien.

Dit is één van de redenen dat we maar twee kandidaten noteren. Bij drie kunnen ze ook in een hoek staan en dan wordt er niets uitgesloten in andere vierkanten. Juist dat uitsluiten is erg belangrijk. Een andere reden is dat als één van de twee kandidaten komt te vervallen (bijvoorbeeld omdat daar een ander cijfer komt te staan), je direct de andere kandidaat kunt invullen.

Alle sudoku's in deze handleiding zijn zodanig uitdagend dat je altijd dubbele kandidaten zult moeten noteren. Dat gaan we dan ook doen.

In de figuur hieronder zijn voor de 1 en 2 aangegeven hoe je de dubbele kandidaten kunt vinden. De kandidaten worden linksboven in een vakje opgeschreven. De eerder gevonden dubbele kandidaten voor 4 en 5 zijn al ingevuld.

	¹	9		4				²
8		4	6			9	①	
	¹	5					4	6
①	7	8	²	²	4	5		
5	²	²	1	3	8	⁴		⁴
	4	3	7	⁵	⁵	1	②	8
4	8	¹					②	
	5	7			3			1
		¹		7		6		

Merk op dat beide kandidaten voor de 1-en in v1 er voor zorgen dat er in r9k2 geen 1 meer mag staan. Voor de overzichtelijkheid worden nu geen donker gearceerde vakjes gebruikt om aan te geven dat daar geen kandidaat kan staan.

Voor de 3 vind je nog wat dubbele kandidaten. Zie de figuur op de volgende bladzijde. In v6 en v9 wordt een bijzonder patroon zichtbaar. De kandidaten voor de 3 in v6 en v9 maken een 3 in v3 in k8 en k9 onmogelijk. Er zijn voor v6 en v9 slechts twee mogelijkheden voor de 3: in r4k8 en r7k9 of in r4k9 en r7k8. Dus altijd in k8 of k9.

	¹	9	³	4				²
8		4	6			9	1	²
	¹	5	³				4	6
1	7	8	²	²	4	5	³	³
5	²	²	1	3	8			⁴
	4	3	7	⁵	⁵	1	2	8
4	8	¹				2	³	³
	5	7			3			1
³	³	¹		7		6		

In v3 kunnen dus alleen 3-en in k7 staan. Dan krijg je eenzelfde patroon bij v2 en v3. Uiteindelijk leidt dit tot een oplossing in v1 en daarmee ook in v7. Het patroon staat hieronder. Handig om te onthouden dat hiermee nieuwe dubbele kandidaten of zelfs oplossingen gevonden kunnen worden.

	¹	9	³	4		³		²
8	3	4	6			9	1	²
	¹	5	³			³	4	6
1	7	8	²	²	4	5	³	³
5	²	²	1	3	8	⁴		⁴
	4	3	7	⁵	⁵	1	2	8
4	8	¹				2	³	³
	5	7			3			1
³	³	¹		7		6		

In de figuur blijft in v1 nog maar één vakje voor de 3 over: r2k2. En daarmee ligt ook de 3 vast in v7 (r9k1) volgens de bekende techniek van het elimineren.

6	16	9	3	(4)	3	2	
8	3	4	6		9	1	2
←	1	5	3		3	(4)	(6)
1	7	8	2	2	(4)	5	36
5	2	2	1	3	8	4	6
	4	3	7	5	5	1	2
(4)	8	16			2	3	3
6	5	7	4		3		1
3	3	1	4	7	(6)		4

In de figuur hierboven gaan we verder met de 4 en de 6. De kandidaten voor de 4 in v9 en voor de 6 in v7 liggen *niet* op één lijn. Ze sluiten dus geen kandidaten uit in andere vierkanten. Je ziet in r1k2, r4k8 en r7k3 dat er meerdere kandidaten in één vakje komen te staan. Dat is geen probleem. We schrijven ze er gewoon bij. Tot slot de 7 en de 9 in de figuur hieronder.

67	16	(9)	3	4	3	2	
8	3	4	6		9	1	2
7	1	5	3		3	4	6
1	(7)	8	2	2	4	5	36
5	29	2	1	3	8	4	6
9	4	3	7	5	5	1	2
4	8	16			2	37.	37.
69	5	(7)	4		3	4	1
3	39	1	4	(7)	6		4