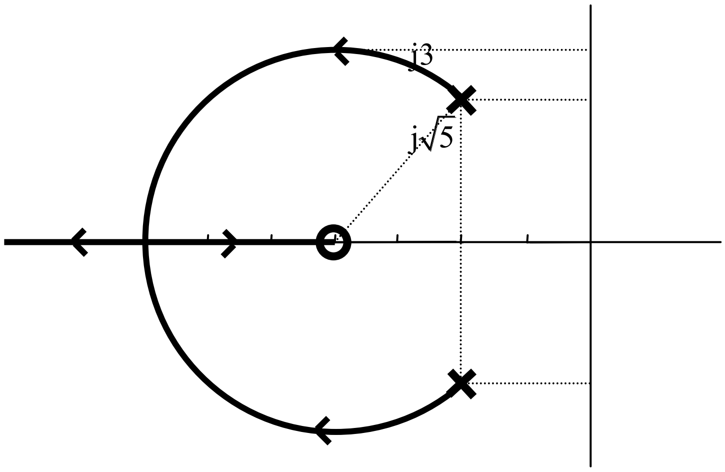
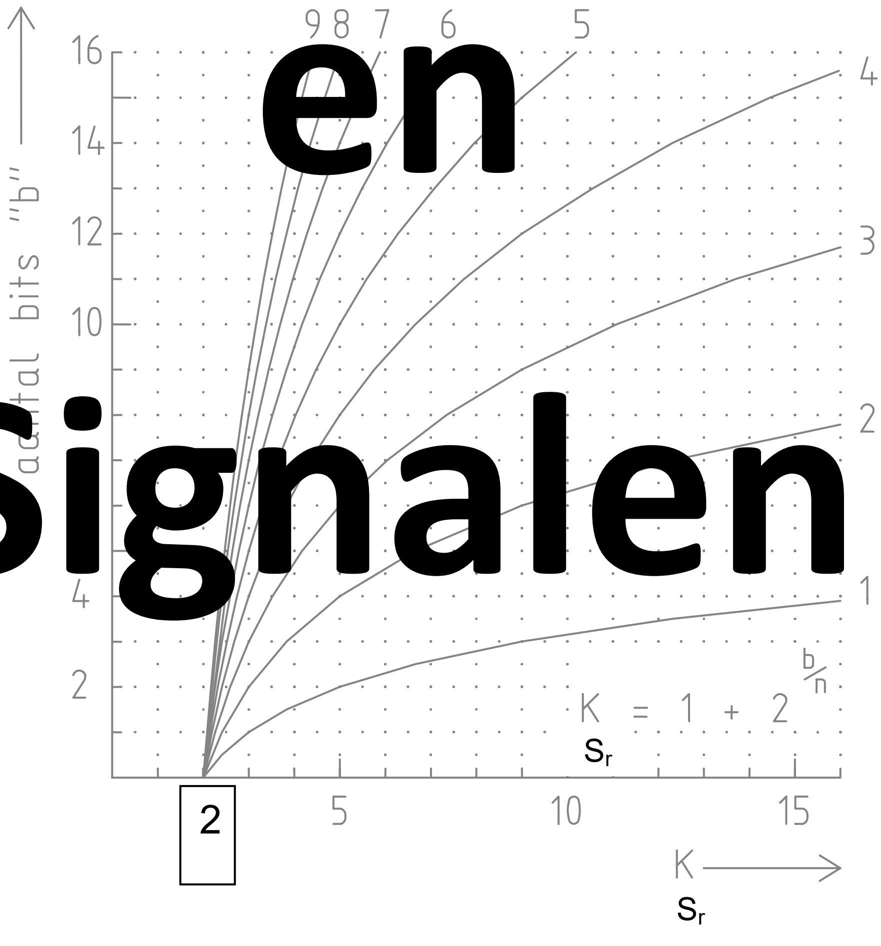


Systemen en Signalen



Na zijn opleiding Elektrotechniek is Toon Geerts enkele jaren actief geweest als ontwerper van digitale bouwstenen bij het laboratorium voor “Samengestelde Onderdelen“ van Philips.
Het betrof, in de jaren zestig, de 20 kHz serie en de 100 kHz reeks.
Het waren wereldwijd de eerste reeksen Digitale standaard bouwstenen en componenten.
Toen nog opgebouwd uit afzonderlijke hybride RTL – componenten.

Vervolgens heeft hij, als medewerker van de Franse onderneming “Telemecanique Electrique“, ruim 16 jaar elektrische - en elektronische besturingen ontworpen voor een uitgebreid scala van problemen in de Industriële Automatisering.

In die periode heeft hij zich alle ins en outs van zowel analoge als digitale en hybride regelsystemen eigen gemaakt en is de liefde en zijn grote belangstelling voor het vakgebied “Systemen en Signalen“ gewekt.

Daarna heeft hij in Eindhoven zijn carrière voortgezet als docent tertiair onderwijs voor de vakken “Digitaal IC-Ontwerpen”, “Regeltheorie” en “Systemen en Signalen”

Als voorzitter van de PICO – werkgroep (Project IC Ontwerpen in Nederland) was hij nauw betrokken bij het introduceren van het Nederlandse IC–ontwerp onderwijs voor de Technische Universiteiten en Hogescholen. Vanuit die verantwoordelijkheid heeft hij de studieboeken “Digitaal Ontwerpen volgens de Top – Down aanpak“ geschreven.
(Academic Service ISBN 90 395 0183 1 en Academic Service ISBN 90 395 1024 5)

Voor de vakken “Regeltheorie” en “Systemen en Signalen” bestonden voor het tertiaire onderwijs geen adequate Nederlandstalige studieboeken.
Daarom heeft hij voor zijn studenten dictaten geschreven waarin alle wiskundige aspecten en alle essentiële vakkennis van het vakgebied uitgebreid aan de orde komen.
Alle basale berekeningen worden daarin aangereikt, de benodigde wiskundige aanpak wordt uitgebreid uitgelegd en aan de hand van voorbeelden uit de praktijk uiteengezet.

Het boek is de complete weergave van alle dictaten en daarmee een volledig naslagwerk van alle aspecten van de vakgebieden “Regeltheorie” en “Systemen en Signalen” geworden.

Toon geniet nu van zijn pensioen.

In de overvloed aan vrije tijd heeft hij de dictaten opnieuw gerangschikt en herschreven en er vervolgens dit leermiddel “Systemen en Signalen” van gemaakt.

Toon hoopt van ganser harte dat het boek zijn weg zal vinden bij de veelal jonge mensen die zich dit prachtige vakgebied willen eigen maken en bij de ontwerpers van systemen die het boek als naslagwerk willen gebruiken. Hij is blij dat hij, als ervaren, wat oudere technicus, een rol in de verdere uitbouw van dit mooie vakgebied heeft mogen spelen.

A.H.Geerts

Voor mijn echtgenote Laura,

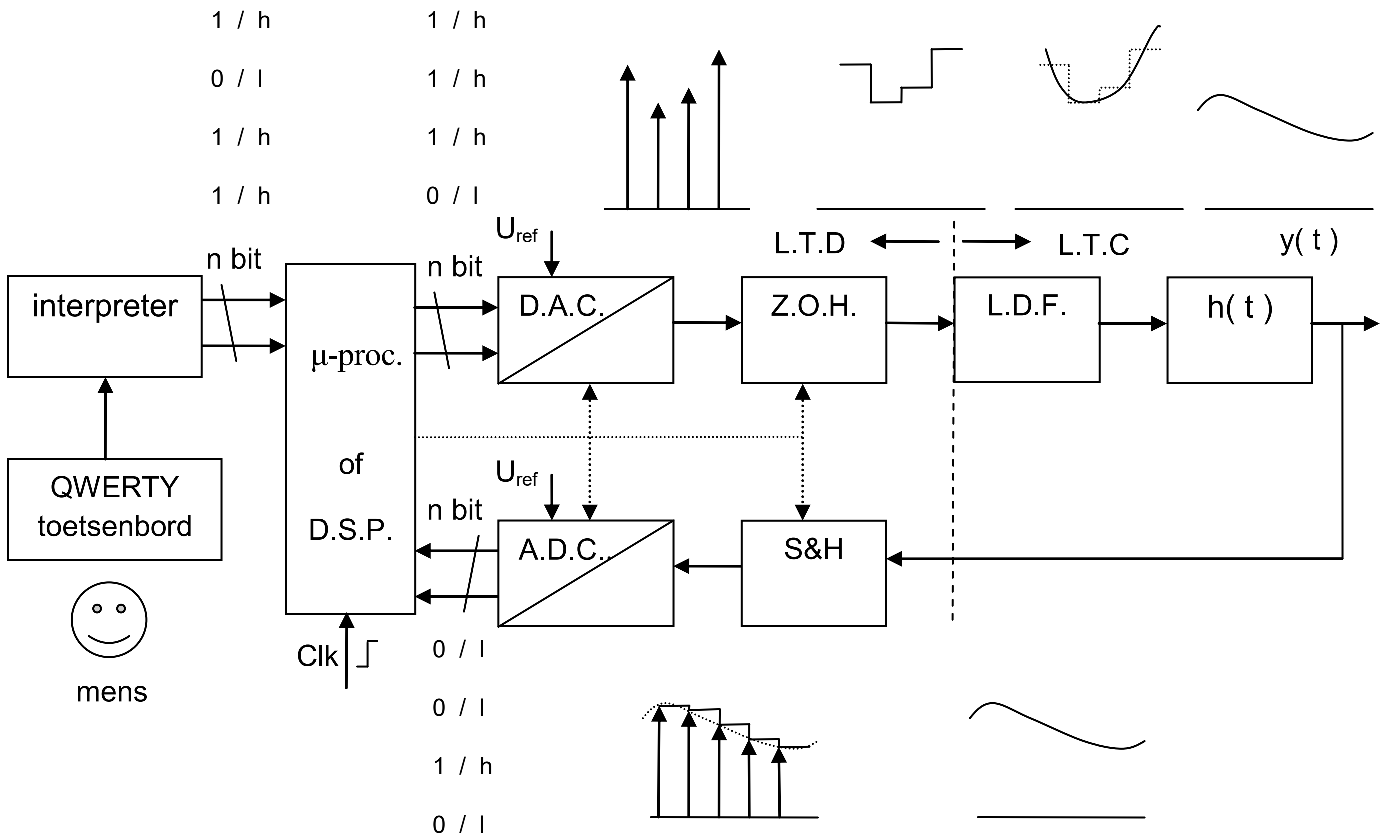
mijn kinderen Maarten en Marieke en voor

mijn Kleinkinderen Floor, Linde, Fenne en Mannes

Ze zijn mijn “ alles ”

De inspiratiebron om alles uit het leven te blijven halen!

Najaar 2020, Antoon H. Geerts



1 / h
0 / l
1 / h
1 / h
1 / h
1 / h
1 / h
0 / l
n bit
n bit
U_{ref}
L.T.D
L.T.C
y(t)
interpreter
μ-proc.
of
D.S.P.
D.A.C.
Z.O.H.
L.D.F.
h(t)
QWERTY
toetsenbord
mens
U_{ref}
n bit
A.D.C..
S&H
Clk
0 / l
0 / l
1 / h
0 / l

Inleidend hoofdstuk met het definiëren van Systemen en Signalen

Voor u ligt een boek dat u inzicht verschaft in het ontwerpen van **systemen** die processen en grootheden moeten regelen.
Die systemen moeten de processen en grootheden zodanig beïnvloeden dat ze, met eindfout “ 0 “ en met een inschakelverschijnsel zoals u dat verlangt, nauwkeurig als functie van de tijd exact zo verlopen zoals u dat heeft gepland. Het is een boek dat technici en ontwerpers schoolt op het niveau van tertiair onderwijs.

In dit Inleidende hoofdstuk voor het boek “ Systemen en Signalen ” zullen we als kader voor het omschrijven van de te behandelen problematiek gebruik maken van het beschrijven van “ zintuigen ”. De zintuigen zijn namelijk telkens de **systemen** met behulp waarvan we de waarnemingen verrichten omtrent hetgeen er in de wereld om ons heen gebeurt. Als we op enig moment **signalen** ontvangen dat er processen niet geheel naar onze wens verlopen willen we de **systemen** in de leefomgeving zodanig met **signalen** kunnen beïnvloeden dat we uiteindelijk wél tevreden zijn over het verloop van de gedane waarneming.

Wij mensen doen waarnemingen met onze zintuigen. Het zijn waarnemingen omtrent de situatie waarin we ons bevinden en over hetgeen er in de wereld om ons heen gebeurt.
Dat waarnemen doen we onder andere met de vijf klassieke zintuigen zoals die in de oudheid al door Aristoteles zijn geclassificeerd:

> we zien met onze ogen, we horen met onze oren, we proeven met de tong,
> we ruiken met de neus en we voelen met de huid.

Bij die classificatie worden binnen elk zintuig dan bovendien nog de nodige onderverdelingen aangebracht.
Zo proef je bijvoorbeeld zoet vooral op het puntje van de tong, zout aan de rand van de voorste helft van de tong, zuur aan de randen achter op de tong en bitter achter op de tong. Dat doe je met telkens aparte typen smaakpapillen. Midden op de tong proef je niets; daar zitten namelijk geen smaakpapillen.
Op onze scholen wordt er tot op heden aan de jeugd onderwezen dat dit de vijf zintuigen zijn. Mogelijk wordt er nog wel eens gesproken over “ het zesde zintuig ”, maar daar blijft het dan bij. De benaming “ zesde zintuig ” geeft overigens al meteen aan dat men in eerste instantie uitgaat van de genoemde vijf klassieke zintuigen. Het laat bovendien zien dat er getwijfeld wordt aan de volledigheid van de classificatie van Aristoteles.

> Het zesde zintuig is overigens nog steeds niet aangetoond maar er wordt gesuggereerd dat er via een speciale sensor signalen worden ontvangen waardoor dit zintuig de intuïtie prikkelt of dat er telepathische of paragnostische waarnemingen mee kunnen worden gedaan.
> De aard en de fysieke opbouw van deze sensor zijn tot op heden in ieder geval nog onbekend.
> Binnen sommige ideologieën en religies, zoals het Boeddhisme, wordt het concept van het 6^{e} zintuig wél standaard beschreven en krijgt het geen volgnummer maar heeft het een eigen naam. (Salayatana)

Welke de menselijke zintuigen zijn en hoe je ze classificeert hangt daarmee af van de **definitie** die je voor het begrip “ zintuig ” hanteert.

Een bruikbare definitie zou als volgt kunnen luiden:

> Een menselijk zintuig is een **systeem** waarbij sensorische cellen reageren op specifieke fysische **signalen**. Die signalen worden getransformeerd naar zenuwprikkels en vervolgens via zenuwbanen verzonden naar een bepaalde regio van de hersenen en daar na aankomst verwerkt tot een voor de mens bewuste waarneming.

Door het hanteren van deze definitie onderscheiden we dan om te beginnen de groep van de “ speciale zintuigen ”: gezichtsvermogen, gehoor, reukzin en smaakzin.
De volgende groep is die van de “ somatische zintuigen ”. (op het lichaam werkend)

Het betreft de tastzin die je weer kunt onderverdelen in drie aparte zintuigen. Ze zijn vooral in de huid gelegen. Denk daarbij aan de vingertoppen, de lippen, de tong en de slokdarm.
Het zijn pressieperceptie (druk), Thermoceptie (warmte) en Nociceptie (pijn).
Daarnaast onderscheiden we overeenkomstig de definitie nóg een tweetal menselijke zintuigen, namelijk de evenwichtzin en de zelfwaarneming of proprioceptie *.

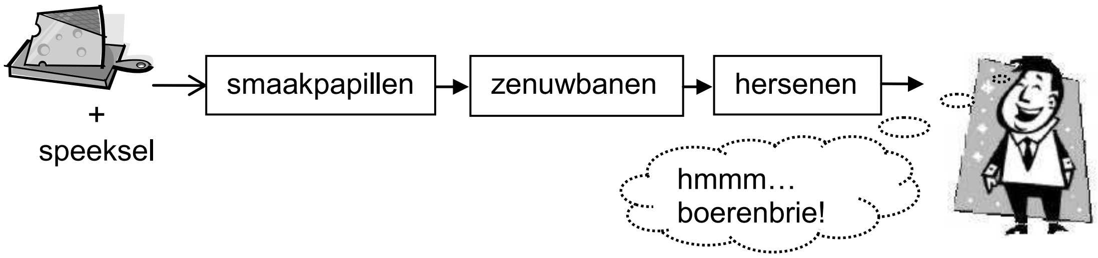
* proprioceptie: het lichaamsgevoel dat de mens vertelt waar en in welke stand hun lichaamsdelen zich bevinden en hoe ze bewegen.
De proprioceptie stelt je in staat om een complexe handeling zoals het traplopen uit te voeren.

Mogelijk wat overdone in een boek over systemen en signalen volgt hier in de tabel het overzicht van de zintuigen.

zintuig	anatomie	handeling	waarneming	sensortype
gezichtsvermogen	ogen	zien	licht, vorm, kleur	lichtkegeltjes
gehoor	oren	horen	geluid	trilharen in het slakkenhuis
reukzin	neus	ruiken	geur	geurreceptoren
smaakzin	tong	proeven	smaak	smaakpapillen
tastzin	huid	voelen	druk, warmte, pijn	gevoelszenuwen
evenwichtzin	evenwichtsorgaan	oriënteren	rotatie, positie	trilharen in het labyrint
proprioceptie	spieren	gevoelen	lichaamshouding	sensorische en motorische zenuwen

Deze tabel is volgens de gegeven definitie van menselijke zintuigen beslist niet uitputtend.
Zo zijn er angstgevoelens als waarschuwing voor gevaarlijke situaties. Denk bijvoorbeeld aan hoogtevrees. Een van de zintuigen, bij hoogtevrees is dat het gezichtsvermogen, neemt een afwijkend signaal waar en de hersenen triggeren met angstgevoelens: een waarschuwingssysteem.
Het moet de lezer duidelijk zijn dat er bij elk zintuig telkens sprake is van specifieke **signalen of stimuli** in de vorm van zintuiglijke prikkels. Het zijn **fysische signalen** die aan de sensoren een, voor die sensoren, **herkenbare boodschap** mededelen.
De **herkenbare mededeling of boodschap** wordt vervolgens als functie van de tijd via zenuwbanen naar een zekere regio in de hersenen verzonden en in de hersenen verwerkt.
Als output komt er voor de mens een herkenbaar resultaat ter beschikking. In het geval van een zintuig wordt de mens een bepaalde waarneming gewaar.
Bij het proeven van een pittig stukje Franse boerenbrie moeten de smaakpapillen voor zoet, zout, zuur en bitter onafhankelijk van elkaar detecteren met welke intensiteit er signalen in het hapje brie aanwezig zijn waarop de respectievelijke systemen voor zoet, zout, zuur en

bitter reageren. Gezamenlijk geven ze de persoon die de kaas proeft dan de sensatie van de smaak die bij “ boerenbrie ” hoort.



De Franse kaas wordt samen met speeksel toegevoerd aan de smaakpapillen op de tong. Daar wordt het **signaal**, de voor smaakpapillen herkenbare boodschap, **getransformeerd**, dat is **omgevormd**, van in speeksel opgeloste boerenbrie naar zenuwprikkels.
Die zenuwprikkels worden via zenuwbanen medegedeeld aan het smaakcentrum in de hersenen. De hersenen verwerken de voor hen herkenbare signalen uit de zenuwbanen en laten de persoon in kwestie de sensatie van de smaak van de kaas van zijn keuze gewaar worden.

Dieren beschikken ook vaak over “ analoog aan menselijke zintuigen ”.
Soms zijn die dan zelfs superieur aan de zintuigen van de mens.
Honden hebben bijvoorbeeld een veel beter ontwikkeld reukvermogen en insecten kunnen een veel breder kleurenspectrum, van infrarood tot en met ultraviolet, waarnemen.
Daarenboven zijn er volgens de gegeven definitie dieren die ook nog “ niet - analoog aan menselijke zintuigen ” hebben.

- Als een slang de gespleten tong uitsteekt blijven er geurdeeltjes van zijn prooi aan de tonghelften plakken. Als de slang zijn tong weer naar binnen trekt, wrijft hij met z’n beide tongdelen langs het geurzintuig dat in zijn verhemelte zit. Dat zintuig neemt de geurdeeltjes waar en stuurt via zenuwbanen een stereosignaal door naar de hersenen. Zo “ proeft ” of “ ruikt “ de slang de locatie van de prooi.
  Een slang heeft overigens wel neusgaten maar daar ademt hij alleen maar mee.
- Met magnetoceptie, magnetismezin, bepalen vogels de te volgen vliegroute over de aarde en electroceptie, electriciteitszin, komt voor bij vissen.
- Echolocatie komt voor bij vleermuizen en stromingdetectie bij vissen en amfibieën.

Dit zijn zo maar wat voorbeelden van “ niet - analoog aan menselijke zintuigen ”.
Let wel: de opsomming is exemplarisch en beslist niet volledig.

De omvang van de gewaarwording van de zintuigen hangt af **van de sterkte van het signaal; de intensiteit van de prikkel**. Het bestaande verband is zeker niet rechtevenredig met de intensiteit van de prikkel maar er is gewoonlijk eerder een logaritmisch verband.
Bovendien hangt de gewaarwording uiteraard af van de **architectuur, de conceptuele opbouw**, van het systeem.

Kenmerkend voor de zintuigen zoals die in de definitie voorkomen is dat het **zintuiglijk systeem** telkens reageert op de actie van een **signaal**, een prikkel uit de omgeving, dat aan het zintuig wordt medegedeeld. Het is de taak van het betreffende zintuiglijk **systeem** om de voor hem herkenbare prikkel uit de omgeving om te zetten in een gewaarwording.

signaal / prikkel → $\boxed{\text{zintuiglijk systeem}}$ → gewaarwording

Als voorbeeld geven we hierbij enkele specifieke signalen die geschikt zijn voor de daarbij behorende zintuiglijke systemen.
Maak daarna zelf met behulp van de tabel ook enkele voorbeelden.

lichtquanten → gezichtsvermogen → vorm, kleur

luchttrilling → gehoor → geluid

gas moleculen → reukzin → geur

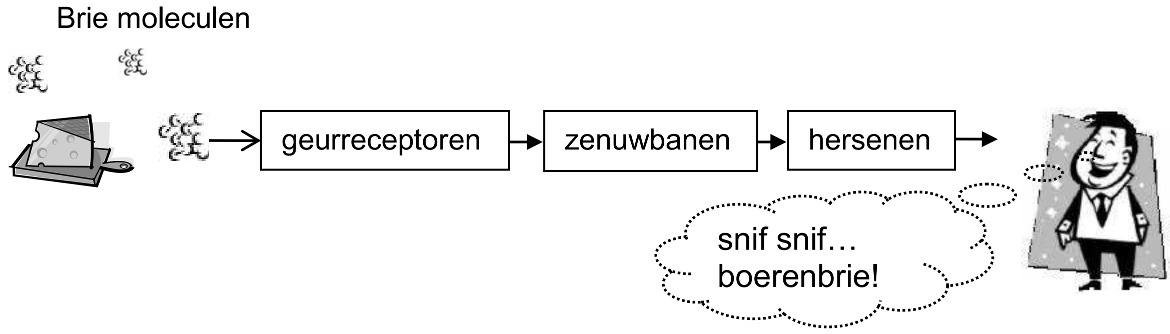
Je ziet dat er voor elk zintuig specifieke signalen zijn die speciaal dát zintuig prikkelen.

Het zal duidelijk zijn dat je wel een stukje boerenbrie in je oor kunt proppen of in je ogen kunt smeren maar dat je dan een totaal andere ervaring opdoet dan de gewenste smaaksensatie van boerenbrie…

Toch zitten er in het oor en het oog wel degelijk sensoren. Dat zijn echter geen smaakpapillen. Het oor kan met trilharen in het slakkenhuis slechts adequaat reageren op luchttrillingen en het oog reageert met lichtkegeltjes op lichtquanten.

Het systeem en het toegevoerde signaal moeten elkaars taal spreken!

De massa van de boerenbrie, opgelost in speeksel, vormt wél een signaal voor de smaakpapillen maar niet voor de trilharen in het slakkenhuis en de lichtkegeltjes op het netvlies.
Je kunt boerenbrie wél van verre ruiken. Er ontsnappen brie moleculen uit de kaasmassa die door de geurreceptoren kunnen worden gedetecteerd.
De geurreceptoren geven het signaal in de vorm van zenuwprikkels door aan zenuwbanen. Die zetten de hersenen in het reukcentrum aan het werk. De hersenen op hun beurt laten de persoon dan gewaar worden dat er ergens een stukje boerenbrie ligt te wachten tot het genuttigd wordt.



In de gegeven definitie van “ menselijk zintuig ” komen de termen “ **systeem**_” en “ **signaal**_” voor.

> Een menselijk zintuig is een **systeem** waarbij sensorische cellen reageren op specifieke fysische **signalen**. Die signalen worden **getransformeerd** naar zenuwprikkels en vervolgens via zenuwbanen verzonden naar een bepaalde regio van de hersenen en daar na aankomst verwerkt tot een voor de mens bewuste waarneming.

Het wordt de hoogste tijd dat we die termen nu ook in definities vastleggen.

De **definitie van de term “ systeem ”** luidt:

> Een systeem is een uit de omgeving geïsoleerd, samengesteld geheel van elkaar wederzijds beïnvloedende elementen, gericht op het bereiken van een **specifiek doel**. Als het systeem een signaal medegedeeld krijgt reageert het met het zelfstandig bewerken van dat signaal en het deelt vervolgens het resultaat van de bewerkingen weer in de vorm van een signaal aan zijn omgeving mee.

Zo leggen we ook **de definitie van de term “ signaal ”** vast:

> Een signaal is een, voor een systeem, herkenbare boodschap of mededeling.

Belangrijk: signalen en systemen horen onlosmakelijk bij elkaar.

De aard, en daarmee de **dimensie**, van het signaal moet zodanig zijn dat de boodschap die in het signaal besloten ligt door de ingang van het systeem wordt herkend.
Die boodschap kan dan door het systeem worden bewerkt tot een nieuw signaal dat op zijn beurt dan weer door het systeem aan zijn omgeving wordt medegedeeld.
Dat nieuwe signaal kan van dezelfde dimensie zijn als het signaal waarop het systeem heeft gereageerd. Het zou evenwel ten gevolge van het transformeren van signalen binnen het systeem ook wel in de vorm van een geheel andere dimensie naar buiten kunnen worden gebracht.
Zo reageren de smaakpapillen en de geurreceptoren elk op hun eigen wijze op de chemische samenstelling van de boerenbrie en ze geven een zenuwprikkel af aan de zenuwbaan.
De zenuwbaan transporteert de boodschap in de vorm van zenuwprikkels naar de hersenen.
De betreffende regio’s in de hersenen reageren op hun beurt op de zenuwprikkels en verwerken die tot de smaaksensatie en de geurbeleving die de betreffende persoon gewaar wordt.

Vanuit de definitie van het begrip “ systeem ” volgt dat het iets is dat “ geïsoleerd is uit de omgeving ” en dat het is samengesteld uit een geheel van elkaar wederzijds beïnvloedende elementen, gericht op het bereiken van een bepaald doel.

Het is aan de gebruiker om te bepalen wat de omvang van het systeem is dat hij uit de omgeving isoleert. Je zou bijvoorbeeld als systeem het zintuig “ reukzin ” kunnen beschouwen maar je zou ook best separaat de geurreceptoren als systeem kunnen isoleren, je zou naar de zenuwbanen als apart systeem kunnen kijken of naar het reukcentrum dat als systeem binnen een aparte regio in de hersenen een eigen plaats heeft.

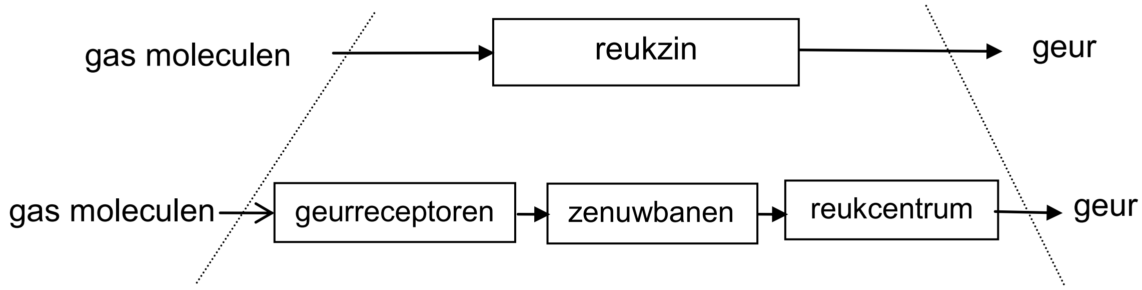
Zo komen we dan bij de **architectuur**, dat is de **conceptuele opbouw**, van het systeem.

Je zou de **term “ architectuur ” kunnen definiëren** als:

> De kunst en de wetenschap voor het ontwerpen van de conceptuele constructie van een gebouwde omgeving.

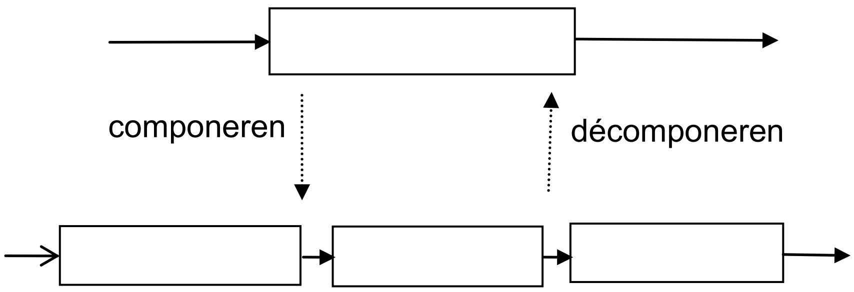
Systemen kunnen overeenkomstig deze definitie ook met “ architectuur ” opgebouwd gedacht worden. Het is aan de ontwerper van de infrastructuur om te bepalen welke de opbouw is van het te construeren systeem en aan welke materiaalkeuze de voorkeur wordt gegeven.
Het bouwblok met het systeem “ reukzin ” kun je bijvoorbeeld op die manier opgebouwd gaan denken uit een **onderliggend schema** waarin een drietal deelsystemen als bouwblokken **in cascade geschakeld** staan. Zo **componeren** we het systeem “ reukzin ” door in een onderliggend schema de systemen “ geurreceptoren ”, “ zenuwbanen ” en “ reukcentrum ” te bedenken en in cascade te schakelen.

De gasmoleculen worden toegevoerd aan het bouwblok reukzin en dat laat de eigenaar van het zintuig een zekere geur gewaar worden.



In de onderliggende compositie denken we het systeem “ reukzin ” opgebouwd uit een cascadeschakeling van deelsystemen. We werken het systeem verder uit door het maken van een analyse van het systeem “ reukzin ”.
Hier bedenken we voor het systeem “ reukzin ” dat de gasmoleculen worden medegedeeld aan de geurreceptoren. Deze geurreceptoren bewerken het signaal en geven een prikkel door aan de zenuwbanen die daarna op hun beurt de vertaalde boodschap aanbieden aan het reukcentrum in de hersenen. Deze regio in de hersenen laat het betrokken individu uiteindelijk een geursensatie ondergaan.

Als we de systeembeschrijving van een enkel bouwblok uiteen laten vallen in een onderliggende architectuur dan noemen we die handeling “ **componeren** ”.



Als we een deel van de architectuur comprimeren tot de beschrijving van één overkoepelend systeem dan noemen we die handeling **décomponeren**.

Het componeren, het uiteen laten vallen van een systeem in een onderliggende architectuur, is een bijzonder sterk ontwerpgereedschap!
Ontwerpers passen deze strategische handeling toe als de beschrijving van een systeem in hun beleving té complex is. Ze analyseren het systeem en komen uiteindelijk tot een onderliggend schema met daarin meerdere deelsystemen.
Zo wordt de Latijnse spreuk ” divide et impera ”, in goed Nederlands “ verdeel en heers ”, van Julius Caesar ook in de systeemtheorie toegepast.
Je laat het complexe overkoepelende systeem uiteenvallen in **een aantal deelsystemen** in **een onderliggend opgebouwd schema**. Het schema is weliswaar ingewikkelder dan het éne bouwblok met het overkoepelende systeem, maar **elk deelsysteem afzonderlijk is eenvoudiger van structuur**. Daarmee is ook de beschrijving van elk afzonderlijk deelsysteem eenvoudiger dan de complexe beschrijving van het overkoepelende systeem.
De verdeel en heers strategie biedt nog een andere aantrekkelijke mogelijkheid:
Er kunnen meerdere technici of ontwerpers tegelijkertijd met het ontwerpproces bezig zijn en je hoeft de verschillende deelsystemen niet allemaal op het zelfde moment te ontwerpen.

De beschrijving van elk deelsysteem ligt namelijk volkomen vast als het gedefinieerde ingangssignaal en uitgangssignaal vastliggen. Uit deze signalen is de bewerking die het systeem moet uitvoeren volledig te destilleren.
Zo kun je een karwei met de omvang van één manjaar opsplitsen in, laten we zeggen, twintig deelklussen met een omvang van ieder afzonderlijk enkele weken.
Er is echter ook een nadeel aan deze strategie verbonden. Als er meerdere systemen in cascade worden geschakeld zal **de totale looptijdvertraging** van de gecomponeerde cascadeschakeling gewoonlijk groter zijn dan die van de enkelvoudige beschrijving van het overkoepelende systeem. Het gecomponeerde systeem wordt daarmee mogelijk trager dan de uitvoering in het enkelvoudige bouwblok van het gedecomponeerde systeem.
We zullen t.z.t. nog zien dat er ook het gevaar van **instabiliteit** kan ontstaan.

Voorbeelden van signalen en daarbij behorende systemen zijn er legio.
Je vindt er hier een paar maar je bedenkt er zelf in de kortste keren een heleboel meer.

Je trapt het gaspedaal in en de auto gaat harder rijden.
Een paard krijgt de sporen en gaat lopen.
Met een rukje aan de teugels verandert het paard van looprichting.
Met een druk op de schakelaar gaat het licht branden.
De buitenverlichting gaat aan als het donker wordt.
Als het stoplicht op van rood naar groen gaat zal de file gaan rijden.
De zaadcel doorboort de wand van een eicel en er ontstaat nieuw leven.
De jonge moeder ruikt een poepluier en ze gaat haar baby verschonen.
De baby huilt en wordt prompt gevoed.
Als de microfoon geluid opvangt komt er lawaai uit de luidsprekerbox.
Op aanwijzingen van de dirigent begint het orkest te spelen en het zou wel fijn zijn als alle musici ook weer allemaal tegelijk klaar zijn met muziek maken.
Als je de ontspanner bedient wordt er een foto gemaakt.
De druk in je blaas neemt toe en je gaat naar het toilet om te plassen.
Er vloeit elektrische stroom door de spoel en de staaf gietijzer wordt magnetisch.
Nadat je de thermostaat hoger hebt ingesteld wordt het na een aantal minuten behaaglijk warm in de kamer.
Je stemt de TV op de juiste frequentie af en je ziet de zender van je keuze.

Analyseer deze voorbeelden en maak onderscheid tussen het ingaande signaal, het daarbij passende systeem en het verkregen uitgaande signaal van het systeem.
Probeer bij enkele voorbeelden ook eens om er geschikte onderliggende architectuur bij te bedenken.

De signalen waarop de systemen reageren en die door de systemen worden afgegeven voldoen allemaal aan de gestelde definities.

Een enkele keer kan de door ons gehanteerde definitie overigens wel tot een misverstand leiden. Zo kunnen we bijvoorbeeld niet spreken over een “ ruissignaal ”.
Elektronenruis in een elektrische weerstand is volgens de gegeven definitie géén signaal omdat voor “ ruis ” nou net kenmerkend is dat die stochastisch is. De veranderingen als functie van de tijd van de ruisvariabele zijn willekeurig; ze hangen volledig van het toeval af. Er is dan ook géén herkenbare boodschap of mededeling in de als functie van de tijd veranderende variabele opgesloten. Je kunt de ruis weliswaar aan een versterker aanbieden maar die zal voor de luisteraar geen herkenbare boodschap uit de speakerbox laten komen.

Zo zijn er medewerkers van ruimtevaartorganisaties voortdurend aan het zoeken naar signalen vanuit het heelal. In de achtergrondruis zouden er mogelijk verborgen boodschappen afkomstig van intelligente wezens elders uit het heelal kunnen zitten.
(Saaie baan; tot nu toe is er nog nooit een signaal gevonden.)

De aard van systemen en signalen kan uit een breed scala van mogelijkheden komen. Voorbeelden van typen systemen die je in de maatschappij om je heen kunt herkennen zijn:

Biologisch	Elektrisch	Mechanisch	Economisch
Politiek	Kunstmatig	Logistiek	Medisch

Ook deze lijst is weer exemplarisch en zeker niet uitputtend; je bedenkt er zelf in de kortste keren nog een aantal typen systemen bij.

Sommige systemen kun je volledig wiskundig beschrijven.
Je kunt dan exact voorspellend berekenen hoe dat systeem op een signaal zal reageren.
Bij andere systemen is het schier onmogelijk om ze volledig wiskundig te beschrijven omdat ze nog niet volledig doorgrond worden.
Zo zie je ministers van economische zaken en economische specialisten van de verschillende politieke partijen tamelijk tegenstrijdige oplossingen aandragen voor dezelfde economische probleemsituatie. Het systeem van de staatshuishoudkunde van het kleine Nederland is blijkbaar nog niet volledig doorgrond.

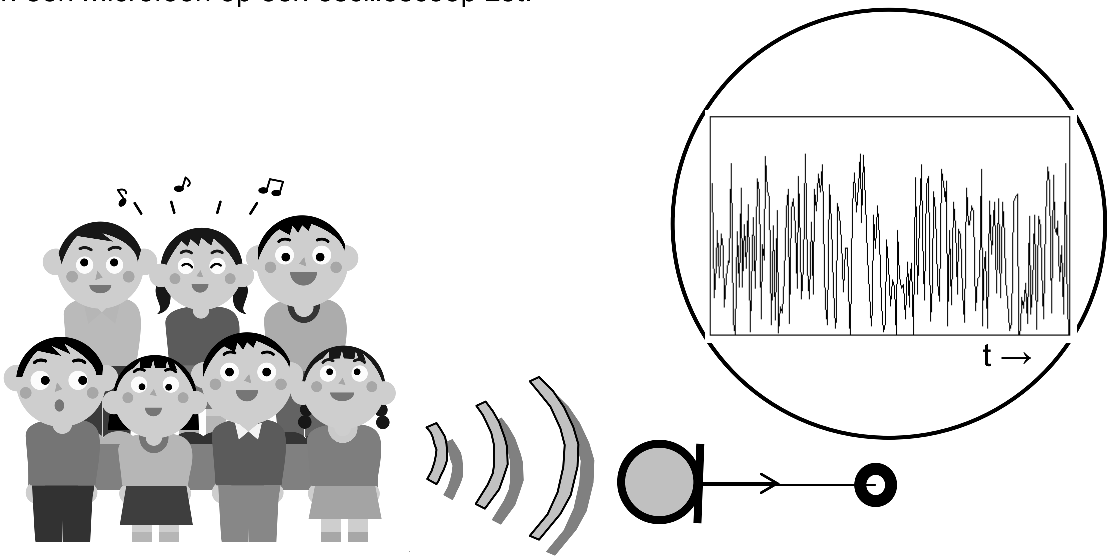
In de techniek gaan we gewoonlijk uit van “ kunstmatige ” systemen die je wél volledig wiskundig kunt beschrijven. We zullen er in dit boek nog legio van tegenkomen.
Wij, ontwerpers en technici, worden dan in álle voorkomende gevallen geacht om voor die volledig wiskundig te beschrijven systemen een 100% betrouwbare voorspellende oplossing aan te reiken. Dat vindt men dan maar heel gewoon. Natuurlijk doet uw Labtop het goed; uiteraard functioneert uw Iphone 100%, van zelfsprekend levert ASML een 100% betrouwbare chipmachine! Het is overigens wel even een contrast met hetgeen specialisten uit andere disciplines bewerkstelligen: economen mikken bijvoorbeeld zo goed mogelijk en ze handelen daarna wel weer als ze dat nodig vinden en als medisch handelen eens wat tegenzit? Gewoon “ zand erover ”.
De definities en uitgangspunten van hetgeen er in dit boek wordt beschreven gelden overigens onverkort óók voor de systemen die we niet volledig wiskundig kunnen beschrijven. Door in voldoende mate ervaring op te doen met signalen en systemen die wél wiskundig te beschrijven zijn is het mogelijk om ook over de systemen die we niet volledig wiskundig kunnen beschrijven geldende uitspraken te doen. Daarmee kun je ook dan voorspellingen doen over de manier waarop die systemen zich zullen gedragen als je er een zeker signaal aan mededeelt.

Een essentieel kenmerk van signalen en de manier waarop ze in systemen worden bewerkt is dat de processen zich als functie van de tijd afspelen. Wij leven nu eenmaal in **het tijddomein**.

> “ Tijd ” wordt wel gezien als de opeenvolging van gebeurtenissen. Daarnaast kan bepaald worden hoe lang een gebeurtenis duurt en hoe lang die na een andere gebeurtenis plaatsvindt. Het betreft dan de tijdsduur tussen twee tijdstippen.
> “ Tijd ” is het begrip waarmee deze volgorde en duur worden beschreven.

Als er zich in de wereld om ons heen gebeurtenissen afspelen gaat de tijd alsmaar onverstoorbaar verder. Tijd kent geen rust; staat nooit stil.

Zo zie je bijvoorbeeld hoe het geluidsignaal zich als functie van de tijd afspeelt als je het signaal van een microfoon op een oscilloscoop zet.



De boodschap die in het afgebeelde signaal als functie van de tijd op het scherm van de oscilloscoop is weergegeven zegt ons absoluut niets. Maar als we het signaal aan een versterker toevoegen en via luidsprekers ten gehore brengen wordt de mededeling ons volkomen duidelijk. Het blijkt dan een kinderkoor te zijn of een stuk hardrock popmuziek of misschien wel het concert voor fluit, harp en orkest van W.A. Mozart.
Aan het signaal kun je dat echter niet **zien**. De oorspronkelijk aan de microfoon aangeboden luchttrilling was dan ook niet voor onze ogen maar voor de oren bestemd.

Dat zowel de **systemen** als de **signalen** die aan de systemen worden medegedeeld functies van de tijd zijn brengt ons bij een tamelijk ingewikkelde situatie.

Je deelt een signaal, dat als functie van de tijd verandert, mee aan een systeem.
Dat systeem voert vervolgens bewerkingen uit op het signaal en heeft voor het verrichten van arbeid bij die taken zelf óók weer tijd nodig.
Als het systeem nog bezig is met het verwerken van de oude signalen uit het verleden wordt er tegelijkertijd een voortdurende stroom van nieuwe, in de tijd veranderende signalen aan het systeem medegedeeld. Dat maakt het behoorlijk moeilijk om voorspellende berekeningen uit te kunnen voeren. We zullen nog zien dat we met de wiskundige bewerkingen machtsverheffen, vermenigvuldigen, delen worteltrekken, optellen en aftrekken uit ” **M**eneer **v**an **D**alen **w**acht **o**p **a**ntwoord ” niet meer voldoende gereedschappen hebben om de gevraagde voorspellende berekeningen te kunnen uitvoeren.
Het zal noodzakelijk blijken te zijn om bij het rekenen in het tijddomein, je weet wel; het domein waarin wij nou eenmaal leven, een extra bewerking in te voeren.
In het eerste hoofdstuk zullen we zien dat het hier de wiskundige bewerking “ **convolueren** ” betreft. Bij die nieuw te definiëren wiskundige handeling ” convolueren ” wordt gebruik gemaakt van **differentiëren en integreren**. In dit boek wordt basiskennis over differentiëren en integreren dan ook als voorkennis verondersteld.
Je zult in het eerste hoofdstuk nog zien dat het convolueren als wiskundige bewerking voor de mens al vlug behoorlijk ingewikkeld is. Later zal bovendien blijken dat het in het tijddomein bijzonder moeilijk is om een adequate regelaar te ontwerpen.

Daarom gaan we op zoek naar een alternatieve aanpak voor het wiskundig gecompliceerde convolueren in het tijddomein.
Nu moet daar onmiddellijk relativerend aan worden toegevoegd dat het vandaag de dag met behulp van de aanwezige uitstekende programmatuur en snelle computers steeds eenvoudiger wordt om deze berekeningen te (laten) maken. De computer gedraagt zich wat dat betreft als een gelukkige slaaf. Als jij dat graag wilt voert hij 24 uur per dag onvermoeibaar de meest

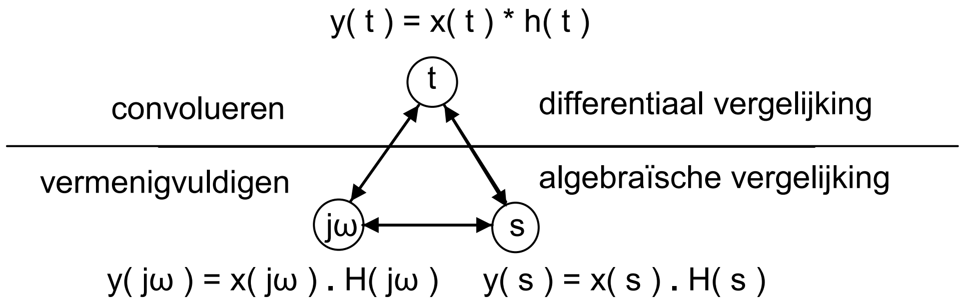
ingewikkelde berekeningen uit en reikt ons de resultaten in exacte getallen en / of in de door ons gewenste grafische vorm aan.
Blijft over dat wij, de ontwerpers van de systemen, dan op de juiste manier de te convolueren signaal- en systeemgegevens moeten invoeren. Daar hebben wij, mensen, de handen al vol aan.

Tot voor kort was het volslagen onmogelijk om in het tijddomein die grafische berekeningen bij hogere orde systemen en samengestelde ingangssignalen ter beschikking te krijgen.
Het aangereikte gereedschap “convolueren” kon slechts bij systemen met basisfuncties en standaard ingangssignalen worden toegepast.

Dit boek handelt over signalen en systemen; het is géén boek dat tot doel heeft om gezochte complexe wiskundige formuleringen uit te werken.
De berekende voorbeelden worden dan ook telkens uit de categorie met basale systeemfuncties en standaard ingangssignalen gekozen. Ook dan zijn de berekeningen in het tijddomein voor de meeste ontwerpers nog pittig genoeg.
Daarom werd er in het verleden ten behoeve van voorspellende berekeningen de toevlucht gezocht tot transformaties vanuit het tijddomein naar andere abstracte rekenkundige domeinen.
De berekeningen werden daardoor aanzienlijk vereenvoudigd en zo verkreeg je tóch de beoogde resultaten voor de verschillende typen systemen en ingangssignalen.
Voor continue systemen en signalen transformeren we de overdrachtsfuncties van de systemen en de ingangssignalen vanuit het tijddomein naar het **hoekfrequentiedomein** of naar het **Laplacedomein**.
Voor harmonische systeemfuncties (sinussen, cosinussen en combinaties daarvan) en harmonische signalen transformeren we met behulp van de **Fouriertransformatie** vanuit het tijddomein naar het hoekfrequentiedomein. Als we te maken hebben met willekeurige systemen en signalen maken we gebruik van de **Laplacetransformatie** om te transformeren naar het Laplacedomein.
De beide typen transformaties zullen in het boek vanuit hun ontstaan worden behandeld.
Het niveau waarop de stof wordt uitgewerkt is zodanig dat systemen en signalen zoals die gewoonlijk aan de orde zijn door de lezer volledig berekend kunnen worden. Ook hier passen we ons weer aan de dagelijkse praktijk aan en zullen we theoretische wiskundige hoogstandjes ten behoeve van ingewikkelde systemen en signalen vermijden.

Dan, hier en nu, tóch alvast de waarschuwing dat ook wij het niet zónder wiskunde kunnen stellen en dat het niveau waarop in dit boek op de stof wordt ingegaan toch écht het niveau is waarop ontwerpers voor hun klanten moeten kunnen presteren.

Het transformatieschema dat we ten behoeve van de vermelde transformaties aanreiken komt in deze inleiding zomaar uit de lucht gevallen maar zal in de betreffende hoofdstukken nog volledig worden afgeleid.



Boven de horizontale rechte bevinden we ons in het tijddomein.
Daar maken we berekeningen met behulp van **differentiaalvergelijkingen** die de systemen en signalen beschrijven. We moeten in het tijddomein, zoals we inmiddels weten, de wiskundige bewerking **“ convolueren** ” toepassen.

Door transformaties vanuit het tijddomein naar het hoekfrequentiedomein of naar het Laplacedomein te maken komen we voor de continue systemen en signalen in de abstracte rekendomeinen van het hoekfrequentiedomein of het Laplacedomein terecht.
We zullen nog zien dat de stelsels van differentiaalvergelijkingen daar overgaan naar **algebraïsche vergelijkingen** en dat de bewerking " convolueren " daar vervangen wordt door de standaard bewerking " vermenigvuldigen ".

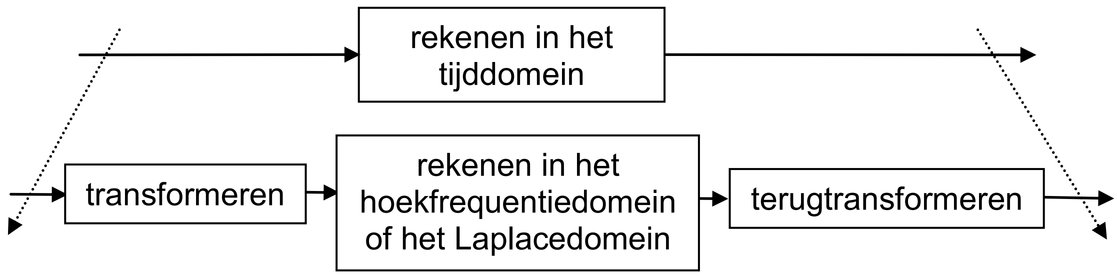
Uiteraard blijven we gewoon in het tijddomein leven maar voor het maken van de wiskundige afleidingen begeven we ons in een gedachte-experiment naar het hoekfrequentiedomein of naar het Laplacedomein.

Die transformaties vereenvoudigen het rekenwerk aanzienlijk.
Maar je krijgt, zoals gewoonlijk, niets voor niets. Het transformeren **vanuit** het tijddomein en de uiteindelijke terugtransformatie **naar** het tijddomein komt er als extra bewerkingen bij.
Ook hier geldt voor de berekening in het tijddomein dat er sprake is van een mogelijke constructie met een **onderliggende architectuur** in een alternatief rekenschema.

Je kunt rechtstreeks in het tijddomein rekenen met functies in het tijddomein, met differentiaalvergelijkingen en met de bewerking " convolueren "

óf

Je kunt eerst transformeren vanuit het tijddomein, daarna werken met algebraïsche functies en de standaard bewerking vermenigvuldigen en tenslotte weer terugtransformeren naar het tijddomein.



Zoals gebruikelijk bij onderliggende architecturen neemt in dit geval het aantal rekenfuncties toe maar wordt elke afzonderlijke bewerking eenvoudiger. Als dit niet het geval zou zijn zou je de bedachte architectuur namelijk moeten verwerpen en een ander alternatief moeten bedenken.
Het zal zo blijken te zijn dat de transformaties voor technici en ontwerpers naast het vereenvoudigde rekenwerk nog meer voordelen te bieden hebben. Bij het werken met bijzondere gereedschappen zoals de **polaire figuur** en de **Bode diagrammen** voor het hoekfrequentiedomein en polen- en nulpuntenbeelden en de rootlocus designmethode in het complexe s-vlak of het Laplacedomein ontstaan er grafische voorstellingen die het maken van verantwoorde keuzes voor het bereiken van de gewenste uitgangssignalen aanzienlijk vereenvoudigen.
Voor het algebraïsche rekenen bij polaire figuren en Bode diagrammen in het hoekfrequentiedomein en bij het complexe s-vlak in het Laplacedomein is het nodig dat de lezer vertrouwt is met de **complexe rekenwijze**. Dat complexe rekenen wordt dan ook als voorkennis voor het kunnen bestuderen van dit boek verondersteld.

Voor wat betreft het niveau waarop de voorkennis aanwezig moet zijn kan het volgende worden opgemerkt:

> In dit leermiddel wordt alleen gebruik gemaakt van een beperkte maar essentiële subset van de genoemde bewerkingen die het mogelijk moet maken om alle standaardberekeningen van dit vakgebied uit te voeren.
> Het niveau waarop in dit boek de wiskunde wordt bedreven is echter wel écht onontbeerlijk om met kans op succes de behandelde stof voor jou, je baas en je klant met succes in de praktijk concreet te maken.

Nadat we de Fouriertransformatie en de Laplacetransformatie hebben leren kennen en we hebben gezien hoe die gereedschappen met succes kunnen worden toegepast gaan we onderzoeken welke de specifieke kenmerken zijn van de systemen en de signalen die in de wereld om ons heen aanwezig zijn en die we met onze zintuigen waarnemen
We zullen zien dat deze systemen gewoonlijk met 0^e orde, 1^e orde of 2^e orde

differentiaalvergelijkingen of
met systeemoverdrachten in het Fourierdomein of
met systeemoverdrachten in het Laplacedomein

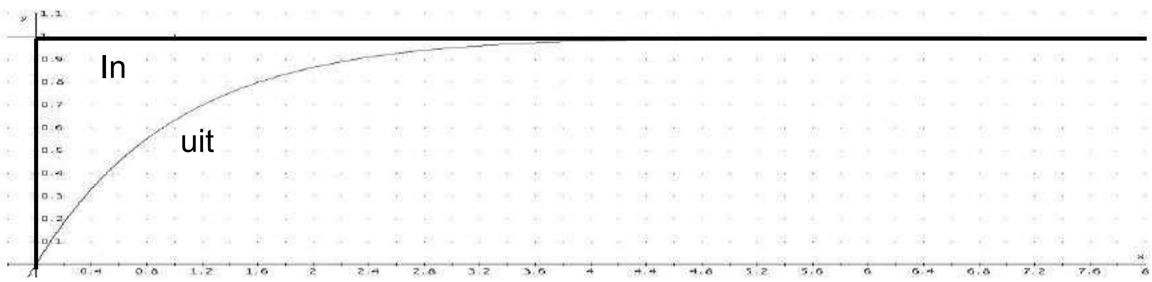
beschreven kunnen worden.

Het zal zo blijken te zijn dat de toe te passen orde van de beschrijvingen van die systemen **afhankelijk is van de frequentieopbouw** van de signalen die we aan de ingangen van die systemen mededelen. Als de frequentiecomponenten in het ingangssignaal toenemen zal de orde van het systeem waaraan ze worden medegedeeld uiteindelijk ook hoger moeten zijn.
In de praktijk van alle dag zal blijken dat als we systeembeschrijvingen tot en met de 2^e orde in ogenschouw nemen we vrijwel álle systemen naar behoren vast kunnen leggen.
En die keer dat de orde van het systeem in verband met hoge frequenties van bijvoorbeeld de 3^e orde of de 4^e orde moet zijn?
Welnu: dan ontwerp je, met de opgedane kennis, daar de juiste regelaar maar voor !

Met de systeembeschrijvingen zijn we in staat om signalen en processen die zich in de wereld om ons heen als functie van de tijd voltrekken te beïnvloeden en, overeenkomstig de wensen van ons, of van onze klant, naar onze hand te zetten.
We gaan daarbij telkens uit van de volgende eenvoudige aanpak:

Het idee is om een ingangssignaal voor een systeem te kiezen dat als functie van de tijd identiek verloopt als het door ons gewenste signaalverloop op de uitgang.

We proberen op de uitgang van het systeem het aangeboden ingangssignaal exact te kopiëren. We zullen daar zeker fouten bij maken. Bedenk dat als je als ingangssignaal de thermostaat stapsgewijs hoger instelt het echt wel even duurt voordat het in de kamer ook daadwerkelijk behaaglijk warm zal zijn.

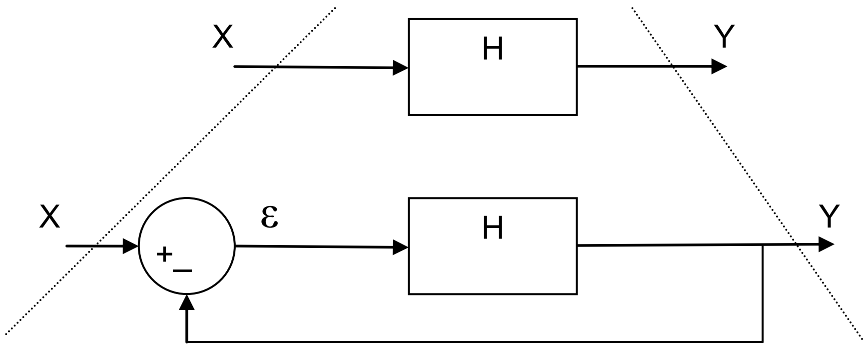


Er is namelijk altijd sprake van een **inschakelverschijnsel**. Maar, na afloop van dat inschakelverschijnsel dient het uitgangssignaal het ingangssignaal dan ook exact, met eindfout “ 0 ”, te volgen.
We bezien om te beginnen hoe de systemen van verschillende orden als **stuursysteem** op een aantal standaard ingangssignalen reageren. We delen het standaard ingangssignaal mee aan het systeem en wachten vervolgens af wat het resultaat op de uitgang zal zijn en of dat uitgangssignaal het ingangssignaal naar behoren volgt.

Bijvoorbeeld: thermostaat stapvormig hoger → temperatuur hoger

Het resultaat van een **stuursysteem**, een systeem zonder terugkoppeling, voldoet lang niet altijd aan onze verwachtingen.

Daarom gaan we **regelsystemen** invoeren waarbij het uitgangssignaal voortdurend wordt vergeleken met het standaard ingangssignaal.
We handhaven het idee van het plaatsen van een inputsignaal dat qua vorm = f (tijd) als twee druppels water lijkt op de gewenste grootheidverandering op de output.
Maar, in plaats van het direct werken met een stuursysteem gaan we het gekozen stuursysteem opnemen in het onderliggend bouwschema van een regelsysteem.

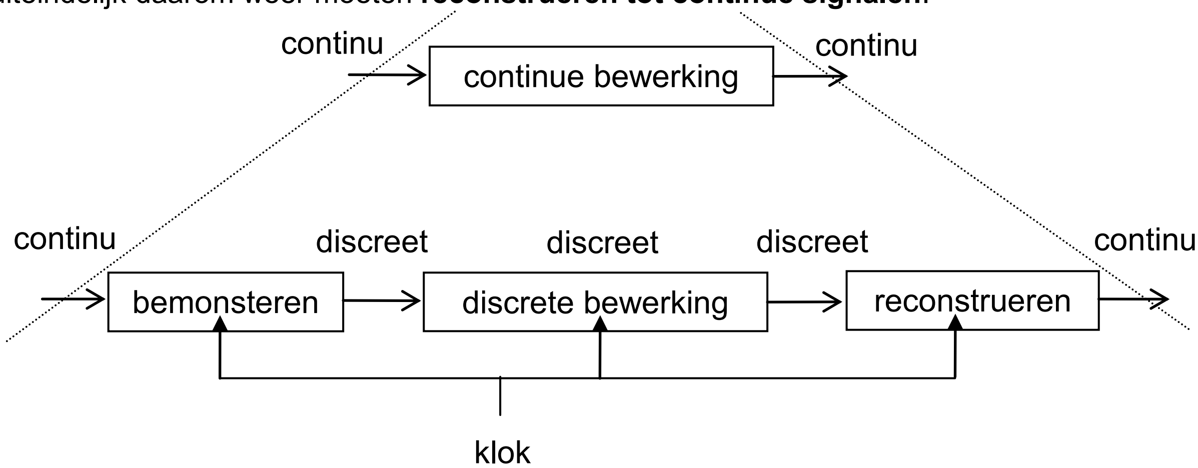


In zo'n regelsysteem vergelijk je op ieder moment het momentele uitgangssignaal met het opgedrukte ingangssignaal. Dat doe je door het outputsignaal terug te koppelen naar een aftrekeenheid bij de input. In die aftrekeenheid ga je het momentele outputsignaal aftrekken van het momentele inputsignaal. Het verschil tussen de beide signalen is telkens het foutsignaal, de error "ε". Zolang er nog een foutsignaal is wordt het uitgangssignaal bijgeregeld.

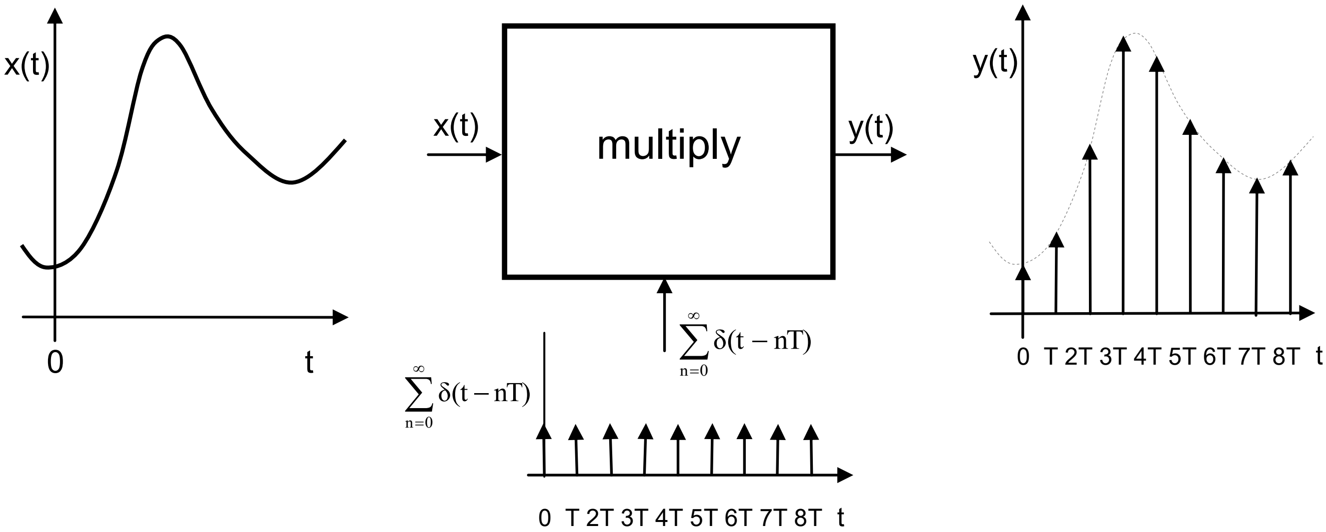
Vb.: met de grootte van de oogpupillen wordt de lichtintensiteit bij de oogzenuw **geregeld**.

Door het terugkoppelen van het uitgangssignaal ontstaat naast de mogelijkheid om uitgangssignalen exact naar je hand te zetten tegelijkertijd het **gevaar van instabiliteit**.
We zullen er voor moeten zorgen dat de systemen zodanig worden aangepast dat de uitgangssignalen gegarandeerd en onder alle omstandigheden stabiel zijn.
Met de in het boek aangereikte aanpak zullen we in staat zijn om tijdafhankelijke grootheden optimaal naar onze hand te zetten. Die grootheden worden uiteindelijk via de zintuigen door ons waargenomen. Vandaar de nadruk op zintuigen in dit inleidende hoofdstuk.

Nadat we signalen en systemen voor continue functies hebben behandeld gaan we over naar de **discrete signalen en systemen**.
Dat is voor ons mensen een opvallend gegeven. We hebben gezien dat signalen en systemen onlosmakelijk met elkaar verbonden zijn. Onze menselijke zintuigen zijn totaal ongeschikt om deze discrete signalen te classificeren en te verwerken.
De discrete signalen ontstaan door het **bemonsteren van continue signalen**.
Voordat we het resultaat van de bewerkte signalen aan de medemens mededelen zullen we ze uiteindelijk daarom weer moeten **reconstrueren tot continue signalen**.



Bij het bemonsteringsproces gaat veel informatie uit het oorspronkelijke continue signaal verloren. Alle informatie die tussen twee bemonsteringen in het signaal ligt opgeslagen ben je, **en dat definitief voor altijd**, kwijt. We zullen er voor moeten zorgen dat de informatie die voor ons van belang is ook in het bemonsterde discrete signaal nog aanwezig is. De aanpak om dat te realiseren zal een essentieel onderdeel uitmaken van de aangereikte leerstof.



Van de oorspronkelijke functie x(t) blijven alleen nog maar de functiewaarden in de punten t = nT over. Voor alle overige tijdstippen verdwijnt de functie volledig.
Het kloksignaal moet er voor zorgen dat het continue signaal telkens op het juiste moment wordt bemonsterd en het discrete systeem krijgt dan telkens de tijd om, tot aan de volgende bemonstering, het genomen monster te bewerken.

In de loop van de afgelopen decennia zijn de discrete signalen en systemen van eminent belang geworden. **Digitale systemen** en **digitale signalen** zoals microprocessoren en DSP's, Digitale Signaal Processoren, zijn niet meer uit ons leven weg te denken.

Ze bieden ons dan ook grote voordelen:

technisch:

betrouwbaar, De **signalen** zijn robuust en daardoor ondanks ruis en stoorsignalen toch altijd goed herkenbaar.
flexibel, De **systemen** zijn eenvoudig aan te passen aan de eisen van de klant en volgens een vaste ontwerpaanpak te realiseren.
Onafhankelijk van elkaar ontwikkelde deelsystemen kunnen zonder meer met elkaar gekoppeld worden om zo één groot geheel te vormen.

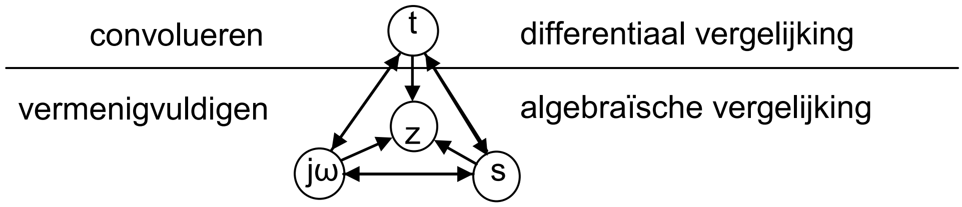
economisch:

goedkoop In grote aantallen gemaakt zijn de **systemen** zelfs uiterst goedkoop.
(meer dan 100.000.000 componenten voor enkele Euro's)

Continue signalen kenmerken zich doordat ze op elk willekeurig tijdstip en met oneindig veel verschillende amplituden kunnen voorkomen.
De discrete signalen daarentegen kenmerken zich door het feit dat ze slechts op discrete, dat is afzonderlijk te onderscheiden tijdstippen, en met slechts een beperkte reeks afgeronde amplituden geldig en herkenbaar zijn.

De discrete systemen en signalen zullen dan ook onder invloed van een **kloksignaal** zodanig moeten worden aangestuurd dat elke signaalwaarde op het juiste moment door het systeem kan worden verwerkt.
We zullen zien dat de Fouriertransformatie en de Laplacetransformatie voor deze categorie geen soelaas meer bieden. Daarom ontwikkelen we vanuit de Laplacetransformatie de “ z - transformatie ” zodat we ook discrete signalen en systemen wiskundig kunnen beschrijven en er mee kunnen manipuleren.

$$y(t) = x(t) * h(t)$$



$$y(j\omega) = x(j\omega) \,.\, H(j\omega) \qquad y(s) = x(s) \,.\, H(s)$$

In het, naar het “ z-domein ” uitgebreide transformatieschema, valt op dat, net als bij de Fouriertransformatie en de Laplacetransformatie, we bij de z - transformatie te maken hebben met systemen en signalen waarbij algebraïsche vergelijkingen i.p.v. differentiaalvergelijkingen en vermenigvuldigen i.p.v. convolueren bepalend zijn bij het maken van voorspellende berekeningen. Er is echter ook een opvallend verschil: de vectoren wijzen nog slechts naar het z-domein en niet meer in de omgekeerde richting…

Van discrete signalen terugkeren naar continue signalen is niet zonder meer mogelijk!
Daar moeten we het tegen die tijd in de leerstof nog met elkaar over hebben!

Natuurlijk gaan we met dezelfde strategie als bij de continue signalen en systemen ook bij de discrete signalen en systemen uit van **die vorm van het ingangssignaal** als functie van de tijd **die we graag als uitgangssignaal gerealiseerd willen hebben**.
In het gegeven onderliggende schema van de gegeven architectuur worden de handelingen “ **bemonsteren** ” en “ **reconstrueren** ” dan nog als extra bewerkingen toegevoegd.
Benodigde bouwblokken zoals de Analoog Digitaal Converter en de Digitaal Analoog Converter die voor het bemonsteren en reconstrueren onontbeerlijk zijn worden in aparte paragrafen nader verklaard.
De discrete stuursystemen en regelsystemen kunnen ook in dit geval met de rootlocus design methode worden berekend en door middel van de bekende top – down aanpak volgens vaste procedures worden ontworpen. De technicus moet dan wel inzicht hebben in de daarvoor bekende structuren van de digitale schakelingen.

(zie hiervoor o.a. het boek “ Digitaal Ontwerpen volgens de top-down aanpak ”,
ISBN 90-395-1024-5 van de auteur van dit boek.)

De herkenbare specifieke structuren zoals die op DSP’s, Digitale Signaal Processoren, worden geïntegreerd in het leermiddel dat voor u ligt. Ze worden in een aparte paragraaf afgeleid en schematisch verduidelijkt.

Voor wat de stabiliteit betreft komt er bij de discrete systemen naast het terugkoppelen van het signaal nog een extra reden tot mogelijke instabiliteit bij:

Als de grootte van de sample periodetijd “ T_s “ te groot wordt en er daardoor nog te weinig informatie in het signaal overblijft kan het uitgangssignaal niet meer adequaat worden berekend en daarna worden gereconstrueerd.
Het is mogelijk dat ten gevolge daarvan er instabiliteit in het signaal ontstaat.

Naast de wiskundige beschrijvingen en benodigde transformaties van de discrete systemen en signalen zullen we ook nu de specifieke gereedschappen die bij het ontwerpproces worden toegepast leren kennen. Aan de hand van de reeds genoemde rootlocus ontwerpmethode

zullen we eindfouten en inschakelverschijnselen van signalen leren beheersen.
Wij, de ontwerpers van het systeem, zullen degenen zijn die ten gunste van onszelf en onze opdrachtgever de in te bouwen regelaar zodanig instellen dat het te regelen signaal geheel aan de gestelde eisen voldoet.

Als laatste hoofdstuk wordt er stil gestaan bij “ niet lineaire systemen ”.
De transformaties zoals ze in dit vakgebied worden toegepast gelden namelijk enkel en alleen voor lineaire systemen. Toch is het zo dat er zich in de natuur om ons heen bij grotere amplitudes en hogere frequenties vaak niet lineaire verschijnselen voor doen. De geleerde technieken voor lineaire systemen blijven dan, weliswaar met enkele aanpassingen, tóch toepasbaar. Er bestaan verschillende technieken voor de overgang van niet – lineaire systemen naar lineaire systemen. We beperken ons in dit boek tot de beschrijving van de “ Niet Lineaire Elementen methode ”. Die geeft snel een goede indruk van een geschikte aanpak van het probleem. Het is een aanpak waarbij je hetgeen je geleerd hebt bij de lineaire systemen onverkort bij de niet – lineaire systemen kunt toepassen.

De opbouw van de stof is zodanig geordend dat er een logische opeenvolging van onderwerpen aan de orde komt. Aan het einde van het boek heeft u een goed overzicht van hetgeen er op dit vakgebied zoal bestaat. U bent dan tenminste een volwaardige gesprekspartner voor ervaren technici.
Mogelijk ten overvloede, maar dan toch opnieuw de opmerking dat de theorie van dit vakgebied veel verder gaat dan in dit leermiddel wordt aangegeven.
Het niveau van de toegepaste wiskunde is een acceptabele ondergrens en niet meer dan dat. Op het gebied van transformaties, stelsels van differentiaalvergelijkingen, determinanten etcetera kan nog veel dieper worden ingegaan. Mocht u daar belangstelling voor hebben dan is er een heel scala aan Engelstalige leermiddelen voorhanden om u op uw wenken te bedienen.

In dit boek wordt niet voorgeschreven met welke wiskunde software pakketten je de beschreven technieken het beste kunt uitvoeren. Met opzet wordt de stof of een wiskundige handeling nergens gekoppeld aan welk pakket dan ook. Docenten en studenten kunnen zodoende geheel naar eigen inzicht de aangereikte wiskundige formuleringen verwerken. Software zoals “ Matlab ”, “ Simulink ” als regeltechnische schil om Matlab heen, Derive of het gespecialiseerde regeltechnische pakket “ Winfact ” bieden goede mogelijkheden.
Gebruik vooral het pakket waarbij jij jezelf prettig voelt of dat bij jou tijdens de studie is aangereikt.
De lezer wordt erop gewezen dat voor studenten via internet studentenversies van die pakketten voor weinig geld, of soms zelfs geheel gratis, te downloaden zijn.

Bij het schrijven van dit boek heb ik gebruik gemaakt

- van de opgedane theoretische kennis door de studies elektrotechniek aan HTS en Technische Universiteit,
- van de jarenlang opgedane praktische ervaring in het bedrijfsleven als technicus industriële automatisering met als specialisaties digitale systemen en regelbare aandrijvingen.
- en van de ervaringen als docent “ digitale technieken ” en “ digitaal IC-ontwerpen ”, als docent “ regeltheorie ” en als docent “ systemen en signalen ” aan de Fontys Hogeschool voor Engineering en Elektrotechniek te Eindhoven.

Wat zou het fijn zijn als ik nieuwe generaties ontwerpers en technici zou kunnen laten mee profiteren van die kennis, de jarenlange ervaring en de opgedane technische levenswijsheid.
Zoals je ziet heb ik, als auteur van dit boek, een elektrotechnische achtergrond.
Het kan niet anders zijn dan dat je dat tijdens het bestuderen van dit leermiddel regelmatig bemerkt. Maar, ben er van overtuigd dat de aangereikte stof voor een erg breed scala van disciplines toepasbaar is. Zeker, voor technici bij disciplines als industriële automatisering, mechatronica, robotica, domotica, chemie, werktuigbouwkunde, telecommunicatie, weg- en waterbouwkunde en energietechniek is dit leermiddel een “ must ”. Maar ook specialisten uit

andere disciplines en ontwerpers uit totaal andere vakgebieden kunnen er nadrukkelijk hun voordeel mee doen.
Bovendien zal het vaak zo zijn dat ook bij andere disciplines de, in de regelaars toegepaste, integratoren en differentiatoren meestal van elektrotechnische oorsprong zullen zijn.

Ten slotte wens ik de gebruiker van dit boek het nodige plezier bij het verwerken van de leerstof.
Dat plezier in je attitude naar het vakgebied toe is essentieel en onontbeerlijk.
Voor buitenstaanders zal het wel droge kost lijken maar studenten die geïnteresseerd zijn in deze materie en technici, ontwerpers en vakspecialisten die op zoek zijn naar praktische richtlijnen om in hun werkzaamheden toe te kunnen passen zullen in dit boek op een voor hen aangename manier worden geschoold in het vakgebied “ systemen en signalen ”.

Uiteraard ben ik graag bereid om met u te communiceren en daar waar mogelijk verbeteringen in het lesmateriaal door te voeren.
Neem daartoe gerust contact op met de uitgever; die zal er zorg voor dragen dat je berichten op de juiste plaats terecht komen.

Ook hier is de terugkoppeling van jouw **signaal** onontbeerlijk om het leer**systeem** de juiste output te laten genereren.

Hartelijk dank, Najaar 2020, A. H. Geerts

Intro Hoofdstuk 01 **Convolueren; de wiskundige aanpak om voorspellende berekeningen uit te kunnen voeren in het tijddomein: de Convolutieintegraal**

Tijdens onze vooropleiding hebben we de nodige wiskunde aangereikt gekregen.
Al op de basisschool en de middelbareschool leerden we rekenen, we maakten kennis met de voorrangsregels uit " **M**ijnheer **V**an **D**alen **W**acht **O**p **A**ntwoord " voor **M**achtsverheffen, **V**ermenigvuldigen, **D**elen, **W**orteltrekken, **O**ptellen en **A**ftrekken. Daarna leerden we ook nog werken met Logaritmes en we werden vertrouwd gemaakt met goniometrische functies zoals sinus, cosinus, tangens en cotangens.
Dat was voor ons, technici en ontwerpers van systemen, nog niet voldoende. Het bleek dat de complexe rekenwijze, differentiëren en integreren ook nog noodzakelijke gereedschappen waren om technische berekeningen uit te kunnen voeren.

En dan nu, in dit hoofdstuk, zal blijken dat het maken van voorspellende berekeningen voor **stuursystemen** (systemen zonder terugkoppeling) en **regelsystemen** (Systemen mét terugkoppeling) al vlug bijzonder tijdrovend en gecompliceerd wordt.

In het tijddomein, het domein waarin wij leven, blijkt dat we de bewerking " convolueren " nodig hebben om de voorspellende berekeningen adequaat uit te kunnen voeren.

Het **convolueren** wordt als nieuw wiskundig gereedschap aan de voornoemde gereedschappen toegevoegd. Aan de hand van voorbeelden zullen we het convolueren eerst introduceren.
Daarna gaan we de bewerking convolueren toepassen en dan zal blijken dat deze convolutieberekeningen al vlug bijzonder ingewikkeld worden.

Dat geldt al helemaal als we meerdere bouwblokken in **cascade** gaan schakelen.
(In cascade schakelen: bouwblokken die elkaar achtereenvolgens beïnvloeden)
De berekeningen worden zelfs zo gecompliceerd dat het aantrekkelijk wordt om onze toevlucht te nemen tot een wiskundige omweg.
We gaan over tot **transformatieberekeningen** in het frequentiedomein en in het Laplacedomein.

Maar kom: we lopen op de stof vooruit. Nu eerst: **Convolueren**

De reis die ons langs de belangrijke kenmerken van signalen en systemen zal brengen begint met het begrip “ tijd ”. “ Tijd ” speelt een belangrijke rol in de processen waarmee signalen en systemen elkaar wederzijds beïnvloeden.
Het is nou eenmaal een onomstotelijk feit; we kunnen er niet omheen: we leven in het tijddomein….
Alles om ons heen speelt zich af als functie van de tijd. Na het lezen van deze regels is het al weer een aantal seconden later. De tijd verstrijkt, vergaat, verloopt of vliegt, maar staat nooit stil…
Maar, wat is “ tijd ” nu eigenlijk?
Laten we daarvoor eerst maar eens “ het woordenboek der Nederlandse taal ” raadplegen.

tijd = de algemene voortgang en opvolging van gebeurtenissen en verschijnselen waarover een werking of een toestand zich uitstrekt.
Bij het ordenen van waarnemingen wordt gebruik gemaakt van tijd en ruimte.

Kijk; dat brengt ons verder!
De voortgang en opvolging van gebeurtenissen en verschijnselen zoals processen, signalen, bewerkingen op signalen, het verrichten van arbeid, het converteren van signalen etc. kost “ tijd ”.

Als we ons beperken tot ons onderwerp en een tijdsafhankelijk continu signaal x = x(t) mededelen aan een L.T.C. – systeem zal dat systeem op dat tijdsafhankelijke signaal dan ook reageren met een tijdsafhankelijk antwoord y = y(t)

Hierbij is een signaal :	**een, voor een systeem, herkenbare boodschap of mededeling.**
en een systeem:	**een uit de omgeving geïsoleerd stelsel dat in staat is om specifieke / kenmerkende, bewerkingen uit te voeren op signalen.**

Voor de **overdrachtsfunctie** van een **L.T.C. - systeem**, (L.T.C. = **L**ineair, **T**ijdinvariant en **C**ontinu) vormt een continue functie x(t) op de input een herkenbare boodschap of mededeling en is daarom, voor dat L.T.C. - systeem, een “ signaal ”.
(De begrippen **L**ineair, **T**ijdinvariant en **C**ontinu zullen spoedig worden gedefinieerd)
Het L.T.C. - systeem krijgt dus door middel van het signaal x(t) een voor het systeem herkenbare mededeling of boodschap en zal op dat bericht reageren. De **actie d.m.v. het signaal op de input** veroorzaakt een **reactie** in het systeem. Het systeem voert de bewerking, die voor dat systeem kenmerkend is, uit en komt vervolgens weer met een reactie y(t) op de output naar buiten.
Die reactie heeft ook weer de vorm van een signaal en kan dus als zodanig voor een volgend systeem, of voor de gebruiker van het systeem, opnieuw een actie inluiden. Ook hier zie je telkens opeenvolgende gebeurtenissen, en daarmee het verschijnsel “ tijd ”, een belangrijke rol spelen.
Er is sprake van een **oorzakelijk verband**; van eerst **een actie** die daarna **gevolgd** wordt door **een reactie of een keten aan reacties**.
De signalen en de systemen horen / passen bij elkaar. Zij “ spreken elkaars taal ”.

Denk aan voorbeelden zoals beeld- en geluidsignalen die worden opgenomen door de systemen “ camera ” en “ microfoon ”. Deze systemen converteren het beeld, d.m.v. een lichtgevoelige cel, en het geluid, d.m.v. een condensatormicrofoon, naar continue signalen zoals spanningen en stromen.
(converteren = omvormen)
Die continue signalen worden door L.T.C. - systemen gefilterd en versterkt, geconverteerd naar digitale signalen, gecodeerd en als discrete signalen door een zender over een grote afstand verzonden.
M.b.v. een antennesysteem en een Phase Lock Loop, een systeem dat uit het ontvangen antennesignaal een bijpassend kloksignaal terugwint, worden de digitale, discrete, signalen weer ontvangen, door een decoder gedecodeerd en in een D.V.D. gebrand.

Na verloop van tijd wordt de D.V.D. afgespeeld, digitaal versterkt, geconverteerd naar een continue spanning, gefilterd, versterkt in een analoge versterker, door een monitor en een luidspreker weer naar beeld en geluid geconverteerd en door mensen bekeken en beluisterd.
Het is niet zo moeilijk om in deze keten de diverse systemen en signalen aan te wijzen.

De systemen herkennen telkens de boodschappen van de signalen die steeds als functie van de tijd worden aangeboden en zijn daardoor in staat om ze te bewerken en weer door te geven.

Het is vanzelfsprekend dat het outputsignaal y(t) dat aan de omgeving wordt aangeboden kenmerken in zich zal dragen van zowel het inputsignaal x(t) als van de kenmerkende eigenschappen van het L.T.C. – systeem dat bepaalde bewerkingen uitvoert op het signaal.
De, tijdsafhankelijke, kenmerken van het L.T.C. – systeem worden vastgelegd door de tijdsafhankelijke overdrachtsfunctie **h(t)**.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

Let op: we noteren de overdracht met een kleine letter “ h ”.
De reden waarom “ wij technici ” de ene keer met hoofdletters en dan weer eens met kleine letters werken bij het beschrijven van signalen en systemen is volstrekt ondoorgrondelijk. Pas je maar aan; technici over de hele wereld communiceren nou eenmaal in deze terminologie met elkaar.

Dan moeten we nu eerst de begrippen **L**ineair, **T**ijdinvariant en **C**ontinu nog vastleggen.

Lineair: Een functie is lineair als hij beschreven kan worden met een **lineaire differentiaalvergelijking**.

Een differentiaalvergelijking is lineair als:
- Alle differentiaalquotienten en functievariabelen tot de macht “ 1 ” in de vergelijking voorkomen.
- Er geen producttermen of quotiënt - termen in de vergelijking voorkomen.

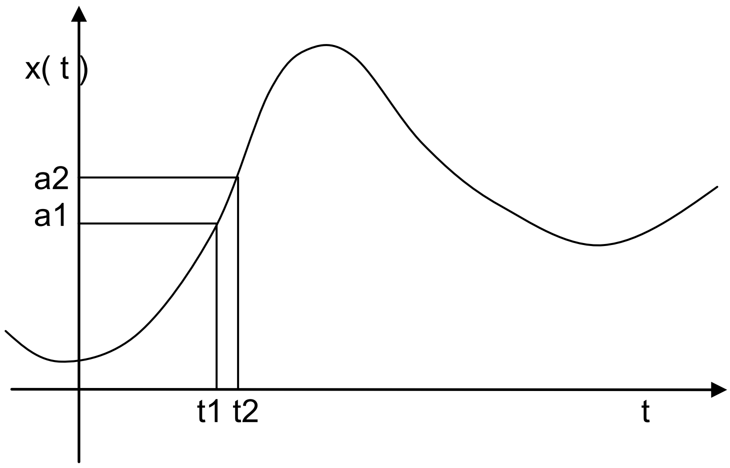
Zo zijn de volgende termen bijvoorbeeld verboden: $[\frac{dy(t)}{dt}]^2$, $[y(t)]^{0,5}$, $\frac{dx(t)}{dt}.x(t)$ en $x(t).y(t)$

De differentiaal vergelijking $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} - 2.\frac{dx(t)}{dt} + 2,5.x(t) - 1,5$ is een voorbeeld van een toegestane lineaire beschrijving van een overdrachtsfunctie van x(t) naar y(t).

Tijdinvariant: **Een functie is tijdinvariant als de beschrijving van de functie, en daarmee zijn specifieke eigenschappen, tijdens het gebruik ervan niet verandert.**

Gisteren, een minuut geleden, een microseconde geleden, over 10 minuten of nog verder In de toekomst? De beschrijving blijft identiek.
Temperatuur, vocht, trillingen en andere invloeden van buitenaf hebben tijdens de beschouwing geen invloed op de beschrijving van de functie.

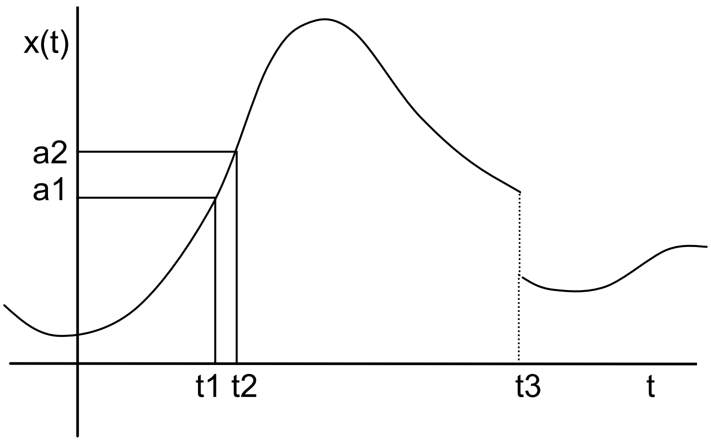
Continu **Een functie is continu als hij zowel amplitude - continu als tijdcontinu is en als hij bovendien over het gehele domein in elk punt van de kromme differentieerbaar is**.



Amplitude - continu als op een willekeurig klein amplitudetraject van a1 naar a2 er altijd oneindig veel tussenliggende waarden zijn

tijdcontinu als op een willekeurig klein tijdtraject van t1 naar t2 er altijd oneindig veel tussenliggende waarden zijn

Zo is de onderstaande functie zowel amplitude-continu als tijdcontinu maar, volgens de definitie, toch **niet continu** omdat de functie een **discontinuïteit**, een “ stap ”, vertoont in t3 en daardoor niet differentieerbaar is in t = t3.



Een ander belangrijk voorbeeld van een discontinue functie is **de impulsfunctie δ(t)**.
Let op! De impulsfunctie δ(t) is géén continue functie. We kennen de **energie-inhoud**, en de **amplitude**, van de functie weliswaar maar de **vorm** van de functie kennen we niet en daarom is de functie uiteraard ook niet differentieerbaar. Zoals we ons nog wel zullen herinneren is differentieerbaarheid een noodzakelijke voorwaarde voor continuïteit. Zie hiervoor de gemaakte “ signaaldefinities ”.

Een systeem dat Lineair, Tijdinvariant en Continu is wordt een “ L.T.C. - systeem ” genoemd.
Zonder tegenbericht gaan we er in het vervolg vanuit dat de besproken systemen van het type “ L.T.C.” zullen zijn.
Dan keren we nu weer terug naar de vaststelling dat het vanzelfsprekend is dat het outputsignaal y(t) dat aan de omgeving wordt aangeboden kenmerken in zich draagt van zowel het inputsignaal x(t) als van de kenmerkende eigenschappen van het L.T.C.–systeem dat bewerkingen uitvoert op het aangeboden signaal.
Bovendien wordt nogmaals gememoreerd dat de, tijdsafhankelijke, kenmerken van het L.T.C. – systeem worden vastgelegd door de tijdsafhankelijke overdrachtsfunctie h(t).

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

We hebben al gezien dat de overdrachtsfunctie h(t) in het algemeen wordt beschreven door middel van een lineaire differentiaalvergelijking.

Zo is de differentiaalvergelijking $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} - 2.\frac{dx(t)}{dt} + 2{,}5.x(t) - 1{,}5$ bijvoorbeeld van de 2e orde omdat er de 2e afgeleide " $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ " in voorkomt. Het bijbehorende systeem dat met deze differentiaalvergelijking beschreven wordt noemen we dan een " systeem van de 2e orde ".

Overeenkomstig deze definitie zullen de tijdsafhankelijke overdrachtsfuncties h(t) gewoonlijk van de 0de orde, de 1e orde of van de 2e orde zijn. Hogere orden zijn voor praktische systemen zeer wel denkbaar maar worden in de theoretische **modelvorming** nauwelijks gebruikt.

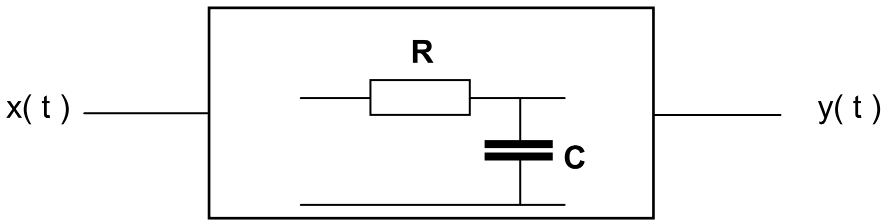
Daarmee zal de h(t) gewoonlijk te beschrijven zijn met :

- een **algebraïsche vergelijking** die van de 0e- orde is. (er komen geen afgeleiden in voor)
- of met **differentiaalvergelijkingen** waarin de 1e – orde afgeleide $\frac{d}{dt}$ respectievelijk de 2e – orde afgeleide $\frac{d^2}{dt^2}$ zullen voorkomen.

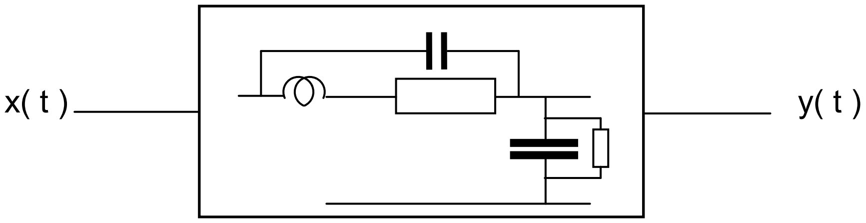
Als we de wiskundige beschrijving van het continue signaal x(t) en bovendien de wiskundige beschrijving van de overdrachtsfunctie h(t) kennen moet het mogelijk zijn om uit berekeningen in het tijddomein het outputsignaal y(t) te berekenen en te voorspellen.

Om die berekeningen te realiseren maken we in de techniek gebruik van **symbolen en modellen** voor componenten die in netwerken worden toegepast. Het RC - netwerkje dat hier staat afgebeeld is zo'n **model** voor een uit een weerstand en een condensator opgebouwde filterschakeling. Om de schakeling in werkelijkheid te bouwen moeten we op enig moment de **componenten** " weerstand " en " condensator " uit de kast halen en die in een netwerk solderen. Bij de frequenties waarvoor het filter is berekend, gebouwd en bedoeld voldoet het **getekende model als abstractie van de gebouwde werkelijkheid** heel goed.

Het praktisch gebouwde filter kan dan worden beschreven met de 1e- orde lineaire differentiaal vergelijking $y(t) + RC.\frac{dy(t)}{dt} = x(t)$.



Maar als het inputsignaal x(t) hogere frequenties bevat dan die waarvoor het filter eigenlijk gebouwd is voldoet het getekende vervangschema niet meer. De ideaal verondersteld weerstandcomponent blijkt een kleine parasitaire zelfinductie te hebben die in serie met de weerstand gemodelleerd kan worden.
De weerstandcomponent blijkt bovendien ook een kleine parasitaire capaciteit te hebben die parallel gemodelleerd kan worden aan de zelfinductie in serie met de weerstand.
De praktische condensator blijkt een parasitaire verliesweerstand te hebben die gemodelleerd kan worden parallel aan de condensator.

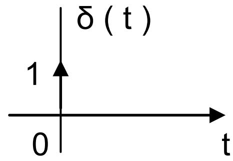


Bij nog hogere frequenties hebben de getekende bedradingen allemaal parasitaire capaciteitjes ten opzichte van elkaar en hebben alle bedradingen kleine parasitaire zelfinducties in serie.
De beschrijving met de lineaire differentiaalvergelijking voldoet dan echt niet meer.
De 1^e - orde differentiaalvergelijking gaat dan via een 2^e - orde vergelijking over in een 3^e - orde resp. n^e- orde differentiaalvergelijking. Als de frequentie van het inputsignaal toe blijft nemen zal de praktische schakeling steeds complexer moeten worden gemodelleerd en zal de beschrijving van het model met een steeds hogere orde differentiaalvergelijking moeten worden vastgelegd.
Zoals al eerder is opgemerkt zal het meestal zo zijn dat de netwerken, die door ons gemodelleerd en beschreven zijn, beperkt blijven tot de 0^e-, 1^e- en 2^e- orde.

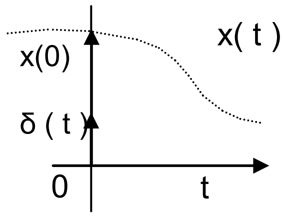
We verbieden de toename van de frequentie van het ingangssignaal tot een niveau waarbij nog hogere orde differentiaalvergelijkingen dan van de 2^e- orde in de beschrijving van het netwerk voorkomen.
Als die beschrijvingen ooit noodzakelijk zouden zijn zullen we domweg overstappen op overdrachten die met andere componenten worden opgebouwd en worden gemodelleerd.

Dit onderwerp zal bij verschillende hoofdstukken nog uitgebreid aan de orde komen.
Laten we ons nu dan eerst maar eens bezighouden met de beschrijving van het ingangssignaal x(t).
In de beschrijving van deze ingangssignalen speelt de impulsfunctie “ δ(t) ” een bijzonder belangrijke rol.
Het is namelijk zo, dat we alle continue signalen, en dus ook ons ingangssignaal x(t), opgebouwd gaan denken uit een oneindige som van impulsfuncties met variërende amplitude.

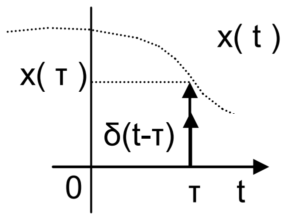
We gaan uit van het signaal x(t) = δ(t), de zogenaamde **eenheidsimpuls**.
Het is een signaal dat **alleen rond het tijdstip t = 0** ongelijk is aan “ 0 ” en dat een **energieinhoud**, c.q. oppervlakte, gelijk aan “ 1 ” heeft.
We tekenen op het tijdstip “ 0 ” een eenheidsvector met amplitude “ 1 ”.



Als we een willekeurig continu signaal x(t), dat als functie van de tijd varieert, **vermenigvuldigen met deze eenheidsimpuls** dan “ zeeft ” de eenheidsimpuls op het tijdstip t = 0 de waarde x(0) uit het continue signaal. Het signaal wordt immers alleen maar op het tijdstip waarop de eenheidsimpuls plaatsvindt vermenigvuldigd met “ 1 ” en voor alle andere tijdstippen met “ 0 ”. x(t) = x(0). δ(t)



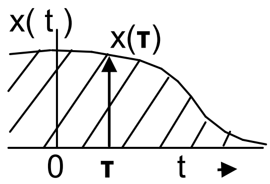
Door nu de eenheidsimpuls δ(t) niet op het tijdstip “ t = 0 ” maar pas op het tijdstip “ t = τ ” te laten optreden zeeft de eenheidsimpuls δ(t –τ) niet de waarde x(0) op het tijdstip “ 0 ” maar de waarde met de amplitude x(τ) op het tijdstip “ t = τ ” uit de in de tijd variërende functie
x(t) = x(τ) . δ(t –τ)



Let op! De impuls δ(t – τ) treedt op het tijdstip “ t = τ ” op; (t – τ), de term tussen haakjes, is dan “ 0 ”, ofwel t = τ.

We zullen het ingangssignaal x(t), opgebouwd gaan denken uit een oneindige som van impulsfuncties met variërende lengte.
Daarom gaan we het signaal x(t) opbouwen door: de lopende variabele “ τ ” te variëren van “ min oneindig “ naar “ plus oneindig ” en zo op een oneindig aantal tijdstippen telkens de waarde “ x(τ) uit te zeven ” en vervolgens al die eruit gezeefde signaalwaarden te sommeren.

Zo ontstaat de **convolutenintegraal** $x(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau).\delta(t-\tau)d\tau$ waarbij x(t) inderdaad is opgebouwd uit oneindig veel impulsfuncties met variërende amplitudes.

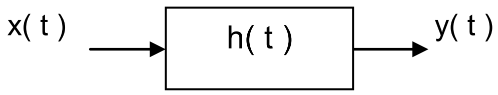


Het signaal x(t) is dus het oppervlak onder de kromme en heeft op elk tijdstip t = τ de waarde x(τ)

> **Het is best een beetje cynisch om te moeten vaststellen dat een continu signaal wordt gemodelleerd door het sommeren van een oneindige reeks discrete, NIET continue, impulsfuncties. (discreet: los van elkaar staand; niet aaneengesloten)**

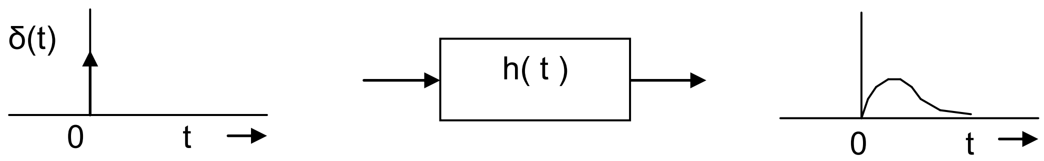
We hebben nu een continu signaal x(t) beschreven d.m.v. een **convolutieintegraal**.
De wiskundige bewerking die je uitvoert bij het berekenen van een convolutieintegraal wordt " **convolueren** " genoemd.

Zo zijn we nu in staat om een **continu signaal** te laten ontstaan uit de integratie van impulsfuncties d.m.v. het convolutieproces. Daar laten we het uiteraard niet bij.
Natuurlijk gaan we vervolgens wat met dit, door convolueren ontstane, continue signaal ondernemen.
We zullen het signaal gaan **mededelen** aan een overdracht h(t).



Het zal duidelijk zijn dat de overdracht h(t) invloed op het signaal zal uitoefenen.
Blijft even de vraag hoe het uitgangssignaal y(t) onder invloed van x(t) en door de beïnvloeding van h(t) er uit zal gaan zien.

Om daar achter te komen passen we dezelfde aanpak toe waar we in het voorafgaande, bij de definitie van het continue signaal x(t), gebruik van hebben gemaakt.
We gaan maar weer uit van een eenheidsimpuls op de input, x(t) = δ(t), op het tijdstip " t = 0 ", en we gaan nu bekijken hoe y(t) op de eenheidsimpuls op het tijdstip t = 0 reageert.



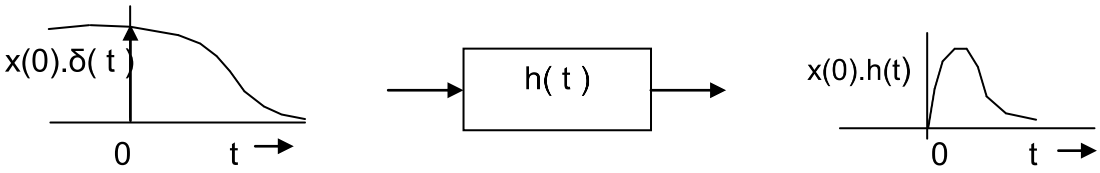
Omdat we de inhoud van h(t) niet kennen nemen we maar een gefingeerde " hobbel " als signaalvorm op de uitgang aan. Die signaalvorm moet echter wel aannemelijk zijn.
Het is redelijk
- dat er überhaupt een signaal op de uitgang ontstaat
- dat de output pas op de actie, gegeven op de input, reageert door een reactie die van " 0 " afwijkt **vanaf** het tijdstip waarop de impuls plaats vindt. (oorzaak / gevolg; actie / reactie; een oorzakelijk verband)
- dat er even later een maximale waarde van het signaal optreedt en
- dat het uitgangssignaal dat is ontstaan t.g.v. het impulsvormige ingangssignaal vervolgens weer uitsterft.

Dat uitsterven van het outputsignaal y(t) op een aan de ingang gegeven impulssignaal is overigens een essentieel kenmerk van een **stabiel systeem**. Instabiliteit van systemen wordt gekenmerkt door een onbeperkte groei van het uitgangssignaal of door een altijd voortdurende onrust op de uitgang.

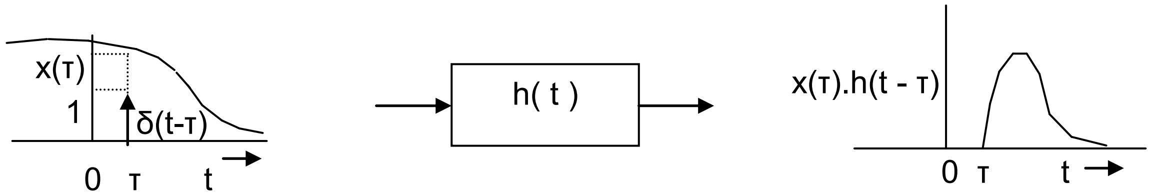
We **definiëren** nu de overdrachtsfunctie h(t) als volgt:

h(t) is het uitgangssignaal y(t) als voor het ingangssignaal de impulsfunctie x(t) = δ(t) wordt gekozen.

Als we op het tijdstip “ t = 0 ” de eenheidsimpuls vervangen door de eruit gezeefde signaalwaarde met amplitude x(0) van het signaal x(t), dan zal de reactie op y(t) vergelijkbaar zijn met die van de eenheidsimpuls. De **vorm van de “ hobbel ”** zal gelijk blijven. Alleen de amplitude, de grootte, van het outputsignaal zal, evenredig met de waarde van de amplitude x(0), worden aangepast.
Het L.T.C. - systeem is immers **L**ineair.



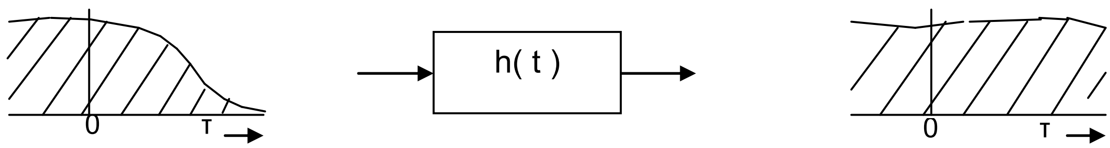
Vervolgens zeven we niet meer op het tijdstip “ t = 0 ” maar op het latere tijdstip “ t = τ ”
(spreek uit: “ tau ”) de waarde x(τ) weer uit de functie x(t). Dat doen we door de x(t) te vermenigvuldigen met de impulsfunctie δ(t –τ). De reactie van h(t) zal vertraagd met de tijd τ op de uitgang komen met een amplitude die evenredig is met de eruit gezeefde waarde x(τ).



Ook ditmaal gaan we het signaal y(t) opbouwen door “ τ ” te variëren van “ **min oneindig** “ naar “ **plus oneindig** ” en zo op een oneindig aantal tijdstippen telkens de respons x(τ) . h(t – τ) “ uit te zeven ” en vervolgens al die eruit gezeefde signaalwaarden te sommeren.

Zo ontstaat ook hier een **convolutenintegraal**: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\ .\ h(t-\tau)d\tau$

$x(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau).\delta(t-\tau).d\tau$ $\qquad$ $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau).h(t-\tau).d\tau$



Net als bij de definitie van het signaal x(t) is nu het outputsignaal y(t), de responsie van x(t) op de overdracht h(t), opgebouwd uit de som van oneindig veel impulsresponsies met variërende amplitudes.
Signaal y(t) is dus het oppervlak onder de kromme en heeft op elk tijdstip **“** t = τ ” de waarde x(τ).

We schrijven de convolutieintegraal $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ .\ h(t-\tau)d\tau$ ook wel als: $y(t) = x(t) * h(t)$

Ofwel in woorden: **y(t) is gelijk aan x(t) geconvolueerd met h(t)**.

De asterisk “ * ” staat hier dus **NIET voor vermenigvuldigen** maar voor **CONVOLUEREN!**

We weten nu dat het **tijdsafhankelijke outputsignaal y(t)** op de uitgang van een overdrachtsfunctie gevonden kan worden door **het tijdsafhankelijke signaal x(t)** dat je aan de input van de overdrachtsfunctie toevoert te **convolueren** met de tijdsafhankelijke **overdrachtsfunctie h(t)**.

Dit is een uiterst belangrijke conclusie: In het tijddomein moet je CONVOLUEREN!

Als we in het tijddomein, waarin wij nu eenmaal leven, een signaal mededelen aan een L.T.C. - systeem wordt het uitgangssignaal y(t) gevonden door het ingangssignaal x(t) te convolueren met de overdracht h(t).

y(t) = x(t) * h(t)

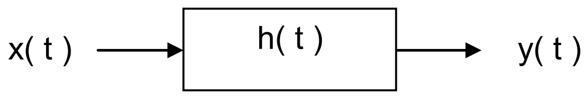
Deze uitdrukking voor berekeningen in het tijddomein is algemeen geldig. Dus óók voor continue signalen, processen en overdrachten. Denk hierbij aan continue elektrische signalen zoals spanningen, stromen, energie en vermogen. Maar, de uitdrukking geldt zeker óók voor andere disciplines zoals die voorkomen bij natuurkunde, informatica, robotica, werktuigbouwkunde, economie, medische wetenschappen etc. Echt niet alleen voor elektrotechnici in het algemeen en voor ontwerpers van elektronische schakelingen.

> Het zou best eens nuttig kunnen zijn om alfa- en gammaopgeleiden en zeker ook politici die in onze maatschappij de “ macht ” uitoefenen daarvan te overtuigen.
> Je hebt als technicus niet altijd het gevoel dat deze kennis betreffende convolueren in het tijddomein daar ook al is doorgedrongen. Hun voorspellende berekeningen in het tijddomein betreffende bijvoorbeeld staatshuishoudkundige problemen willen in de praktijk nog wel eens anders, en voor hen totaal onverwacht, uitpakken.
> Dit in schril contrast met de eisen die aan ons, technici, worden gesteld. Men vindt het vanzelfsprekend en volkomen normaal dat wij er in slagen om betrouwbare voorspellende berekeningen te doen. Met de technieken zoals die in dit boek worden aangedragen zouden ook andere disciplines veel betrouwbaarder kunnen anticiperen op hun specifieke complexe problemen.

Oké; het is nu wel duidelijk:
Als we het outputsignaal y(t) willen bepalen moeten we het inputsignaal x(t) convolueren met de overdrachtsfunctie h(t) . $y(t) = x(t) * h(t)$ en daarom de convolutenintegraal uitrekenen.

De hoogste tijd om eens aan de hand van een voorbeeld te laten zien hoe e.e.a. werkt.

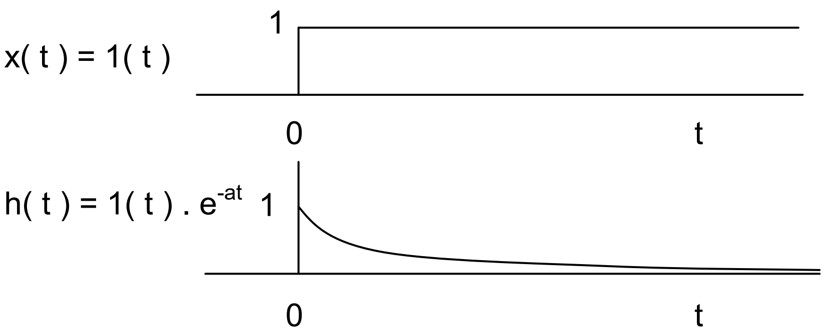
We nemen een stapvormig ingangssignaal 1(t) en voeren dat toe aan het model van een 1^e- orde overdrachtsysteem h(t) = 1(t) . e^{-at} dat exponentieel als functie van de tijd afneemt.



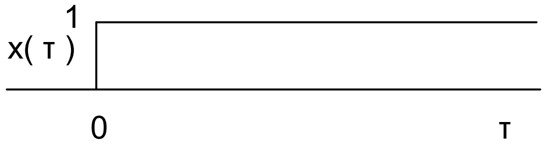
We schakelen zowel het ingangssignaal als het 1^e orde systeem op het tijdstip “ t = 0 “ in .

Om het signaal y(t) te bepalen gaan we nu de integraal $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) \,.\, h(t-\tau) d\tau$ berekenen.

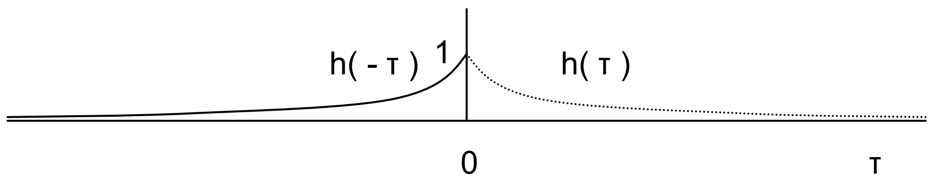
Daartoe schetsen we eerst het signaal x(t) en de overdracht h(t) in het tijddomein: doordat ze beide met 1(t) zijn vermenigvuldigd, we schakelen immers in op het tijdstip “ t = 0 ”, zijn ze allebei “ 0 ” voor t < 0.



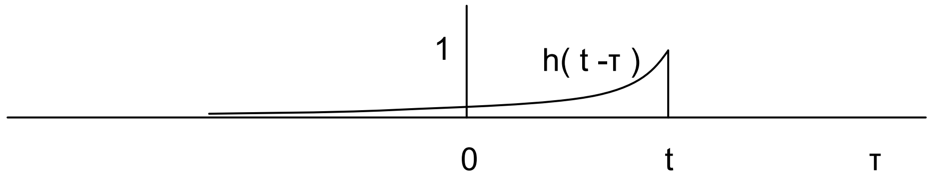
Vervolgens vervangen we de lopende variabele “ t ” door “ τ ”. Het ingangssignaal is nu x(τ), precies zoals die term voorkomt in de convolutie-integraal maar de overdrachtfunctie h(τ) moet nog wel worden aangepast naar h(t – τ).



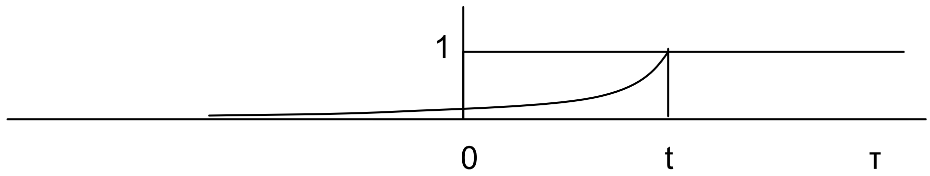
Daarom spiegelen we de functie in de as “ τ = 0 ”. We krijgen zo de gespiegelde functie h(- τ).

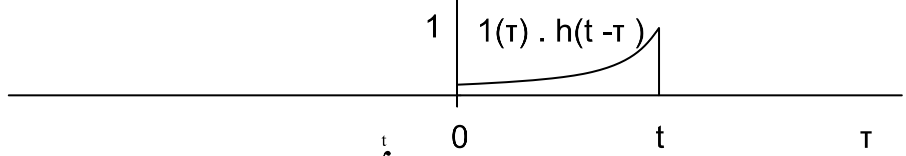


Om h(t – τ) te verkrijgen tellen we nu de constante waarde “ t ” bij “ τ ” op.
Let op! “ t ” is nu een constante en “ τ ” is de lopende variabele.



Dan kunnen we nu het product x(τ) . h(t - τ) van de twee functies x(τ) en h(t - τ) bepalen.





We zien daarin dat de integraal $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,.\,h(t-\tau)d\tau$ overgaat in de integraal: $y(t) = \int_{0}^{t} x(\tau)\,.\,h(t-\tau)d\tau$

De grenzen van deze convolutieintegraal veranderen van “ - ∞ ” naar “ 0 ” omdat de stapfunctie pas bij “ τ = 0 ” begint en van “ ∞ ” naar “ t ” omdat h(t – τ) na “ τ = t ” al weer “ 0 ” is.

Voor **oorzakelijke signalen** en **oorzakelijke functies** gaat de convolutieintegraal **altijd** over van

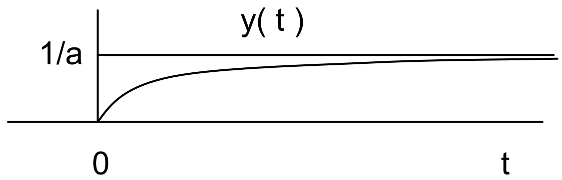
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,.\,h(t-\tau)d\tau \qquad \textit{naar} \qquad y(t) = \int_{0}^{t} x(\tau)\,.\,h(t-\tau)d\tau$$

In dit geval komen we op deze manier tot de integraal $y(t) = \int_{0}^{t} x(\tau)\,.\,h(t-\tau)d\tau = y(t) = \int_{0}^{t} 1.e^{-a(t-\tau)}d\tau$

Dat is in dit geval juist de oppervlakte onder de geschetste kromme omdat x(t) precies “ 1 ” is.

$$y(t)=\int_0^t e^{-a(t-\tau)}d\tau=\left|\frac{1}{a}\,e^{-a(t-\tau)}\right|_0^t=\frac{1}{a}\left[e^{-a(t-t)}-e^{-a(t-0)}\right]=\frac{1}{a}\left[e^{0}-e^{-at}\right]=\frac{1}{a}\left[1-e^{-at}\right]$$

De uitkomst van de convolutie - integraal resulteert in een exponentiele toename van het outputsignaal y(t) tot aan het niveau 1 / a.



We gaan er vanaf nu voortaan vanuit dat, zonder tegenbericht, alle inputsignalen en alle tijdsafhankelijke overdrachtsfuncties **oorzakelijk** zijn, zodat de convolutieintegraal dan met de ondergrens " 0 " en met de bovengrens " t " beschreven wordt als: $y(t)=\int_0^t x(\tau)\,.\,h(t-\tau)d\tau$

Als het ingangssignaal x(t) en de overdracht h(t) zijn gegeven is het berekenen van een uitgangssignaal y(t) in het tijddomein d.m.v. convolueren daarmee binnen handbereik gekomen.

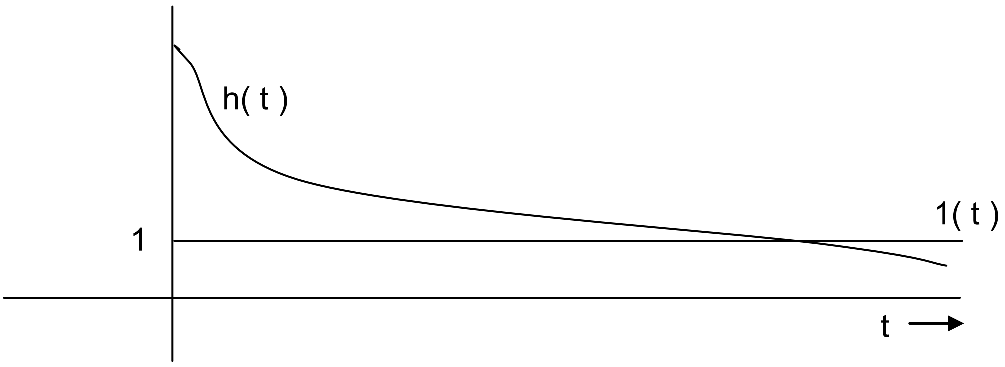
We zullen nu, als vervolgstap op het primaire proces van convolueren, aantonen dat de volgorde van de tijdsafhankelijke functies x(t) en h(t) bij het convolueren als je wilt **cyclisch verwisseld** mag worden. Dat geldt in principe voor willekeurige functies, maar voor de eenvoud kiezen we de stapfunctie 1(t) als inputsignaal en voor een willekeurige overdrachtsfunctie h(t).

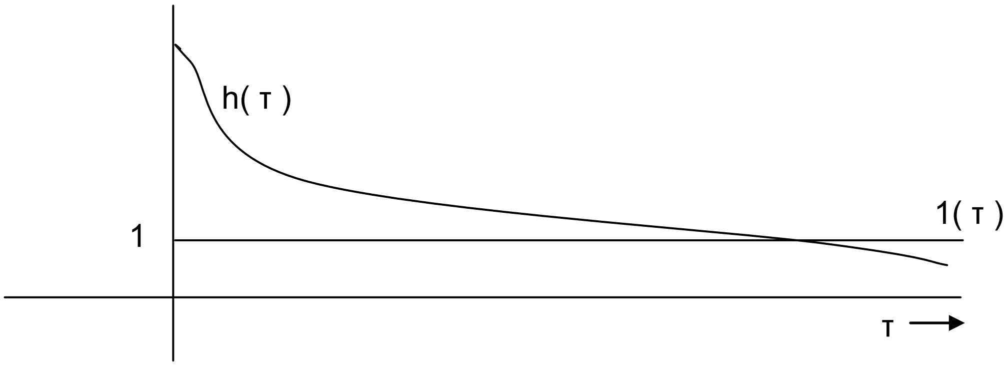
Als de outputfunctie $y(t)=\int_0^t x(\tau)\,.\,h(t-\tau)d\tau$ berekend moet worden met x(τ) = 1(τ) dan gaat de integraal over in: $y(t)=\int_0^t 1.h(t-\tau)d\tau$ omdat voor τ > 0 de stapfunctie 1(τ) gelijk is aan " 1 ".

Er is binnen de convolutieintegraal sprake van twee functies, namelijk 1(τ) en h(t – τ), én van een lopende variabele " τ ".

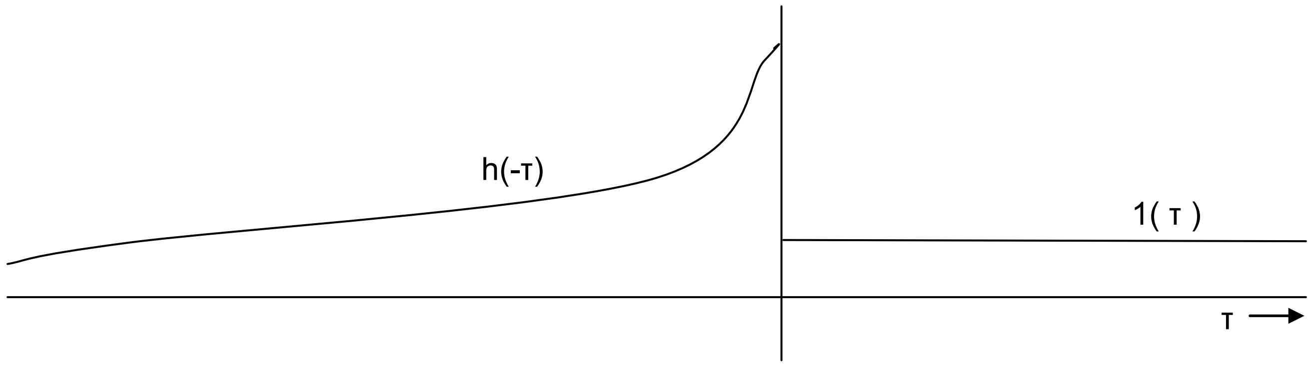
Let op! De " t " is in deze integraal een **constante** en **NIET de lopende variabele**. We zullen beide functies zo bewerken dat de convolutie-integraal duidelijk herkenbaar wordt.

Er wordt uitgegaan van de grafiek van de functies δ(t) en h(t) en vervangen om te beginnen de lopende variabele " t " door de lopende variabele " τ ". We verkrijgen zo de functies 1(τ) en h(τ).

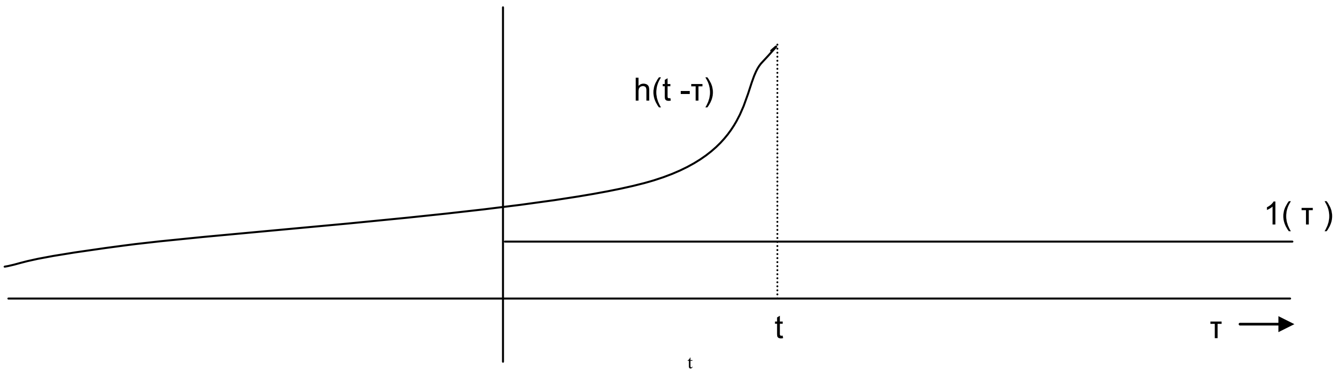




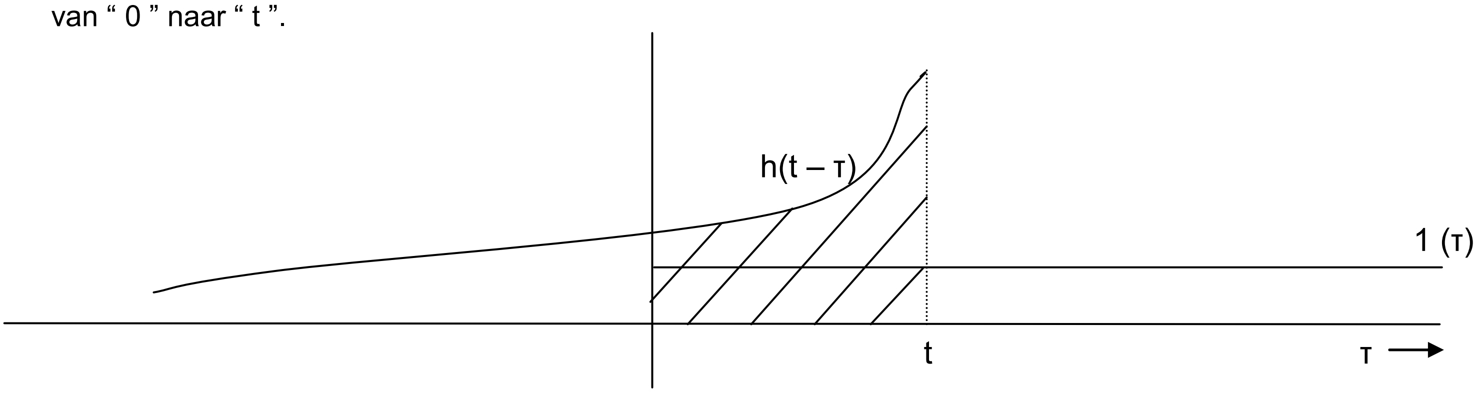
De volgende stap die we zetten is de overgang van de functie h(τ) naar de functie h(- τ).
In de afbeelding zien we deze functie als een om de nul - as gespiegelde grafiek.



Dan zetten we nu de laatste de stap door de overgang van de functie h(- τ) naar de in tijd verschoven functie h(t – τ). Let op! ” t ” Is hier een **constante**; de lopende variabele is immers “ τ ”.
De beide functies 1(τ) en h(t – τ) uit de convolutenintegraal zijn nu in de grafiek duidelijk herkenbaar.



Bij het berekenen van de convolutie-integraal $y(t) = \int_0^t 1.h(t - \tau)d\tau$ gaat het om de integraal met de grenzen van “ 0 ” naar “ t ”, om het **product** van de functies 1(τ) en h(t – τ) én om de lopende variabele “ τ ”.
Maar;de functie 1(τ) speelt zich alleen vanaf het punt “ τ = 0 ” af. We integreren daarom met grenzen van “ 0 ” naar “ t ”.

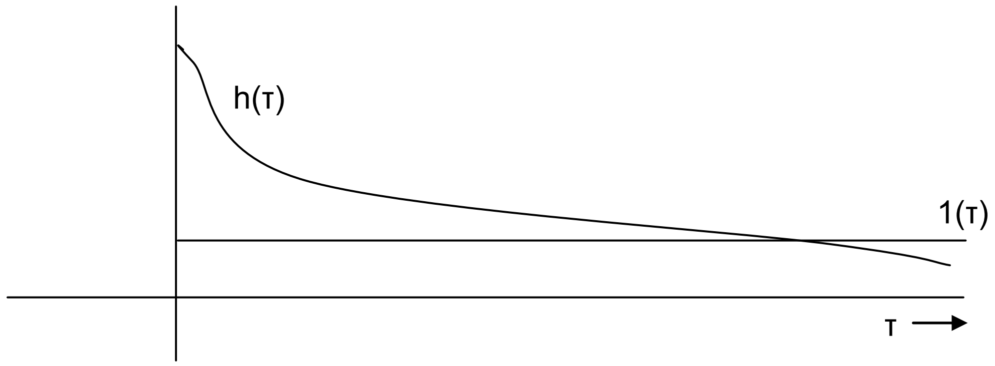


De convolutieintegraal heeft als oplossing het gearceerde oppervlak onder de kromme h(t – τ).

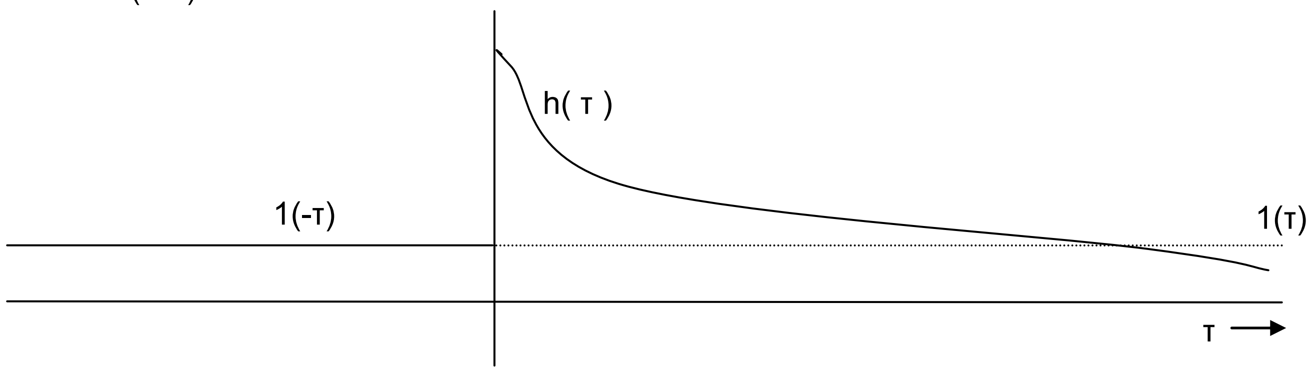
Dan gaan we nu de convolutieintegraal nogmaals uitrekenen, maar dan nu met de cyclische verwisseling van de beide functies.

De integraal $y(t) = \int_0^t x(\tau).h(t - \tau)d\tau$ gaat dan over in $y(t) = \int_0^t h(\tau).x(t - \tau)d\tau$.

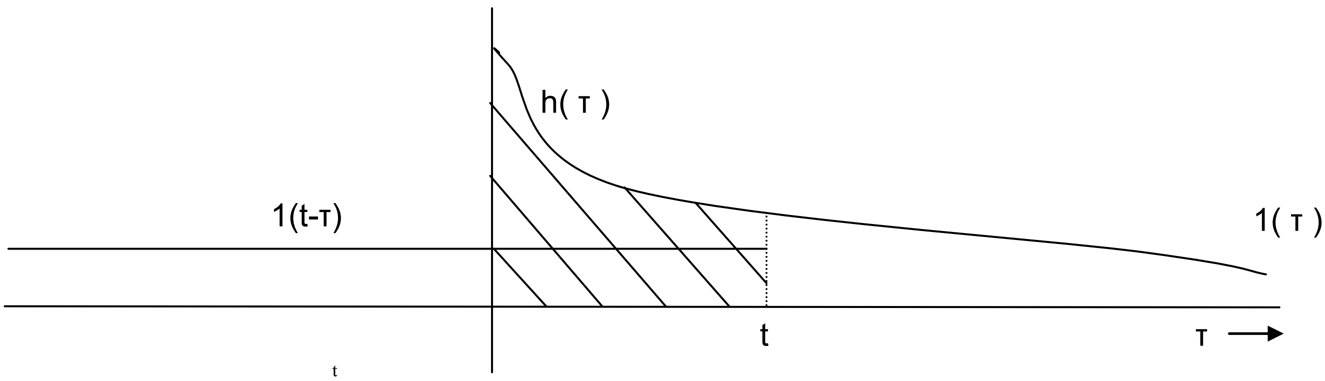
Om de consequenties te bekijken gaan we opnieuw uit van de functies 1(τ) en h(τ).
In dit geval moeten we de 1(τ) nog omwerken naar 1(t – τ).



Als eerste handeling spiegelen we dit keer niet de overdrachtsfunctie h(τ) maar de stapfunctie1(τ) weer tot 1(- τ)



Vervolgens tellen we er de constante waarde ” t ” weer bij op. (“ τ ” is de lopende variabele!)

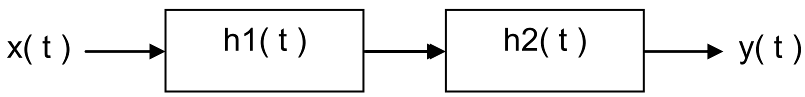


De convolutieintegraal $y(t) = \int_0^t h(\tau).x(t - \tau)d\tau$ komt dan weer overeen met het gearceerde oppervlak onder de kromme h(τ). De op beide manieren uitgerekende oppervlakte-integralen zijn weliswaar horizontaal gespiegeld maar overigens volledig identiek, zodat:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau).h(t - \tau)d\tau \quad = \quad y(t) = \int_0^t h(\tau).x(t - \tau)d\tau$$

Als deze integralen gelijk zijn dan is het blijkbaar zo dat: **y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)**

Zo geldt in het algemeen dat, als meerdere overdrachtsfuncties in **cascade** staan, het outputsignaal gevonden wordt door de convolutie van het inputsignaal en de respectievelijke overdrachtsfuncties:



y(t) = x(t) * h1(t) * h2(t)

De overdrachtsfunctie h1(t) en h2(t) staan in cascade als de onderlinge koppeling van de overdrachten zodanig plaatsvindt dat ze elkaar niet beïnvloeden.
Overdracht h1(t) wordt niet belast door overdracht h2(t) doordat de ingangsimpedantie van h2(t) oneindig groot is. Overdracht h2(t) op zijn beurt wordt aangestuurd door overdracht h1(t) met een uitgangsimpedantie van h1(t) die “ 0 ” is.

Doordat het cyclisch verwisselen van inputsignaal en overdrachtsfuncties niet van invloed is op het eindresultaat kan deze convolutie ook worden gerealiseerd door een van de onderstaande 3! = 6 (3! = drie faculteit = 3 **.** 2 **.** 1) mogelijke convoluties:

y(t) = x(t) * h1(t) * h2(t)   **y(t) = x(t) * h2(t) * h1(t)**

y(t) = h1(t) * x(t) * h2(t)   **y(t) = h1(t) * h2(t) * x(t)**

y(t) = h2(t) * x(t) * h1(t)   **y(t) = h2(t) * h1(t) * x(t)**

Het zal nu wel duidelijk zijn dat het bepalen van zulke convoluties, en al helemaal in het geval van schema’s met toenemende complexiteit, al heel vlug een tijdrovende zaak wordt en dat de respectievelijke convolutie-integralen zorgvuldig beschreven moet worden. Bij complexe signalen en overdrachten van een hogere dan de 2^e - orde is het voor de mens al betrekkelijk vlug onmogelijk om deze berekeningen tot een goed einde te brengen.

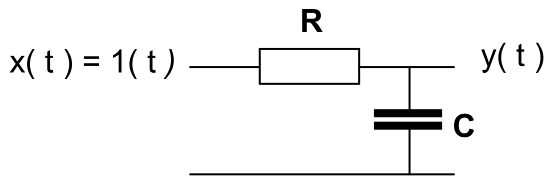
Nu leven we wél in het tijdperk van de computer. Zo’n machine voert, als een onvermoeibare werknemer zonder cao, zonder morren of tegenstribbelen elke willekeurige geprogrammeerde opdracht voor ons uit. Anders dan in het recente verleden is het nu beter mogelijk om ook in het tijddomein met convoluties voorspellende berekeningen te kunnen maken. Je moet je als technicus wél altijd vergewissen van het op de juiste volgorde en de juiste manier invoeren van de functies van signalen en overdrachten in de convolutieintegralen.

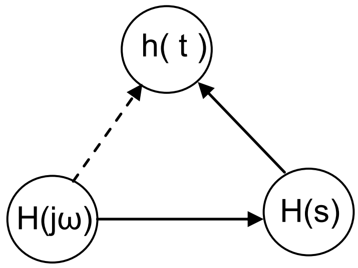
Toch zullen we, na het maken van enkele eenvoudige voorbeelden over convolueren in het tijddomein, naar alternatieve methodes voor het maken van berekeningen toewerken.
Dat doen we omdat die alternatieve rekenmethodes in verhouding met convolueren veel eenvoudiger zijn en omdat we de resultaten van die berekeningen dan beter naar onze hand kunnen zetten.
Je krijgt dan aantrekkelijke gereedschappen aangereikt die het mogelijk maken om signalen door middel van het kiezen van de juiste systemen je wil op te leggen en foutloos te laten doen wat je verlangt.

Bij de gegeven voorbeelden wordt er vanuit gegaan dat de lezer, zoals in de inleiding van dit boek al is gememoreerd, enige wiskundige voorkennis heeft van de complexe rekenwijze, van berekeningen met Fouriergetransformeerden in het H(jω) - domein en van de Laplacetransformatie. Deze wiskunde gereedschappen maken het eenvoudig om overdrachten in het tijddomein te bepalen.
Degenen die deze voorkennis ontberen moeten, for the time being, maar even aannemen dat de overdrachtsfuncties in het tijddomein goed worden berekend. Accepteer ze maar als een gegeven. Bij het “ hoe ” en het “ waarom ” van de genoemde transformaties wordt in dit boek overigens in de hoofdstukken drie en vier over Fouriertransformatie en Laplacetransformatie nog uitgebreid stilgestaan. Er wordt dan opnieuw naar deze voorbeelden verwezen.

Als voorbeeld geven we hier de convolutie in het tijddomein van het volgende RC - circuit met als ingangssignaal de eenheidsstap 1(t). Deze berekening sluit volledig aan bij het gegeven convolutievoorbeeld van het 1^e - orde systeem.
Vervolgens nemen we, om rekenmethodieken te kunnen beoordelen, de vergelijkbare berekeningen door met de Laplacetransformatie en met de Fouriertransformatie.
Deze transformaties worden in opvolgende hoofdstukken nog uitgebreid behandeld.

Voor het bepalen van de h(t) zouden we de differentiaalvergelijking kunnen oplossen.
Dat doen we echter niet. We kiezen voor een eenvoudigere weg door uit te gaan van de berekening van H(jω), de overdracht in het jω-domein, en de terugtransformatie, eventueel via het s - domein, naar het t - domein.

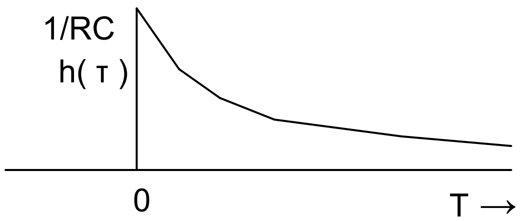


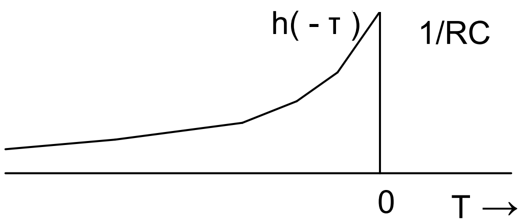


$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad H(s) = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad h(t) = \frac{1}{RC} 1(t) . e^{\frac{-t}{RC}}$$

We kennen nu het ingangssignaal x(t) = 1(t) en de overdracht $h(t) = \frac{1}{RC} 1(t) . e^{\frac{-t}{RC}}$

Om de convolutieintegraal $y(t) = \int_{-0}^{t} x(\tau) \, . \, h(t-\tau) d\tau$ uit te kunnen rekenen moeten we echter beschikken over het product x(τ). h(t – τ) en dus afzonderlijk over x(τ) en over h(t – τ).
Laten we maar meteen met het lastigste beginnen: de overdracht h(t – τ).
We kennen inmiddels het te volgen recept. We doen dat door achtereenvolgens te gaan kijken naar: h(τ), h(- τ) en dan naar : h(t – τ).
Om h(τ) te krijgen vervangen we in de functie h(t) de lopende variabele “ t ” door “ τ ”.
De volgende stap is om de overdracht h(τ) te vervangen door h(- τ)

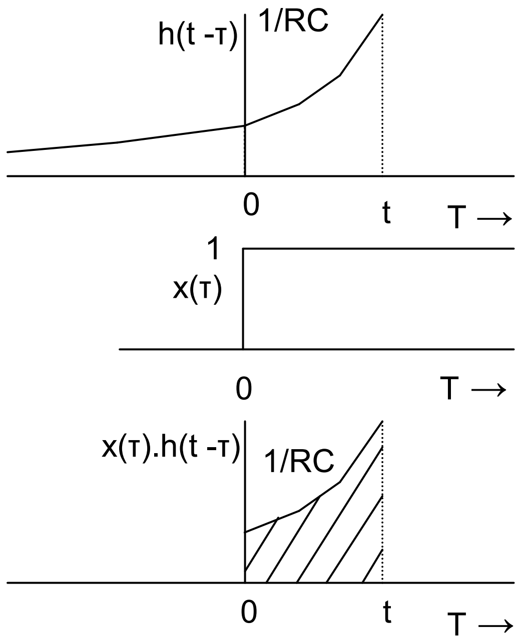




Door nu bij de lopende variabele “ τ ” telkens een constante waarde “ t ” op te tellen ontstaat de overdracht h(t – τ) **.** (Let op: “ τ ” is de lopende variabele en dus is “ t ” hier een constante)

Vervolgens schetsen we het signaal x(τ).
(Vervang in x(t) de lopende variabele “ t ” door “ τ ”.)

Door het product x(τ) **.** h(t – τ) te bepalen zien we dat de convolutie-integraal wordt gevonden door m.b.v. de bepaalde integraal het gearceerde oppervlak tussen de grenzen “ 0 ” en “ t ” te berekenen.

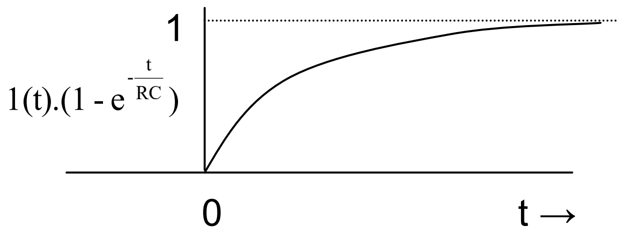


De convolutie x(t) * h(t) wordt:

$$\int_0^t x(\tau).h(t-\tau)d\tau = \frac{1}{RC}\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{RC}}d\tau =$$

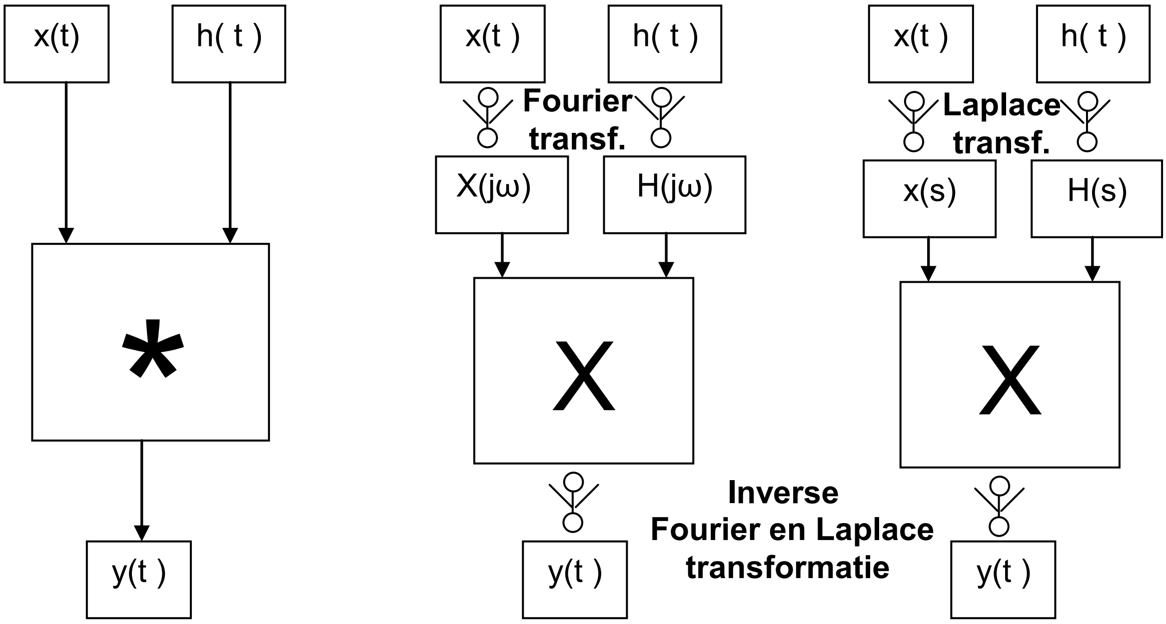
$$\frac{1}{RC}.RC.\ e^{-\frac{t-\tau}{RC}}\Big]_0^t = e^{-\frac{t-t}{RC}} - e^{-\frac{t-0}{RC}} = 1(t).(1 - e^{\frac{-t}{RC}})$$

Zo ontstaat het resultaat op de output y(t). In de grafiek zien we de bekende exponentiele toename van het laden van de condensator



Opgave:	We hebben als voorbeeld y(t) = x(t) * h(t) doorgerekend.
	Bereken nu zelf y(t) = h(t) * x(t) en **toon aan dat de uitkomst gelijk blijft**

In de rekenschema's van de Fouriertransformatie voor harmonische signalen en de Laplacetransformatie voor willekeurige signalen zien we de mogelijkheid om **convolueren** in het tijddomein te vervangen door **vermenigvuldigen** in het jω - domein resp. het s - domein.

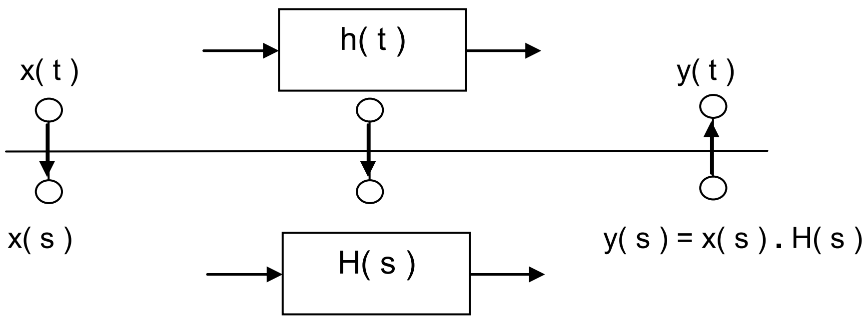


De voordelen van de transformaties gaan nog verder:
Heb je in het tijddomein te maken met differentiaalvergelijkingen; bij de Fourier- en Laplacetransformatie zijn er nog slechts algebraïsche vergelijkingen.
Als alternatief voor de het convolueren in het tijddomein geven we hierbij de oplossing van de berekening met het RC – netwerk met behulp van de **Laplacetransformatie**.

stap 1 we transformeren zowel x(t) als h(t) naar het “ s ”-domein en vinden x(s) en H(s)

stap 2 we vermenigvuldigen x(s) met H(s) en vinden y(s)

tap 3 we transformeren y(s) weer naar het tijddomein en vinden het resultaat y(t)



Uitgaande van $x(t) = 1(t)$ en $h(t) = \frac{1}{RC} 1(t) \,.\, e^{\frac{-t}{RC}}$ vinden we de Laplacegetransformeerden

$$\circ\!-\!\circ \qquad\qquad \circ\!-\!\circ$$

$x(s) = 1/s$ en $H(s) = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$

Vermenigvuldigen geeft y(s) in het s - domein: $y(s) = x(s) \,.\, H(s) = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{s(s + \frac{1}{RC})}$

Na breuksplitsen en residu bepalen volgt:

$$y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

Terugtransformeren naar het tijddomein:

$$\begin{array}{l} s \\ t \end{array} \quad \circ\!-\!\circ \qquad \circ\!-\!\circ \qquad \circ\!-\!\circ$$

$$y(t) = (1 - e^{-t/RC}) \,.\, 1(t)$$

Zo levert de vergelijkbare berekening m.b.v. de **Fouriertransformatie** ook dezelfde oplossing: $x(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$ en $H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$

Dan is y(jω) na vermenigvuldigen in het jω - domein: $y(j\omega) = x(j\omega) \,.\, H(j\omega) = \frac{1}{j\omega .(1 + j\omega RC)}$

Na breuksplitsen en residu bepalen wordt dit:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$\begin{array}{l} \omega \\ t \end{array} \quad \circ\!-\!\circ \qquad \circ\!-\!\circ \qquad \circ\!-\!\circ$$

$$y(t) = (1 - e^{-t/RC}) \,.\, 1(t)$$

Terugtransformeren van het frequentiedomein naar het tijddomein resulteert uiteraard de identieke uitkomst.

“ Ter lering en vermaak ” werken we nog een voorbeeld uit van een berekening in het tijddomein waarbij ook nog een paar vragen als opgave moeten worden uitgewerkt.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

We kiezen voor het signaal x(t) opnieuw de stapfunctie x(t) = 1(t).

Voor h(t) kiezen we het 2^e – orde systeem $h(t) = \frac{1}{a} . (1 - e^{-at}) . 1(t)$

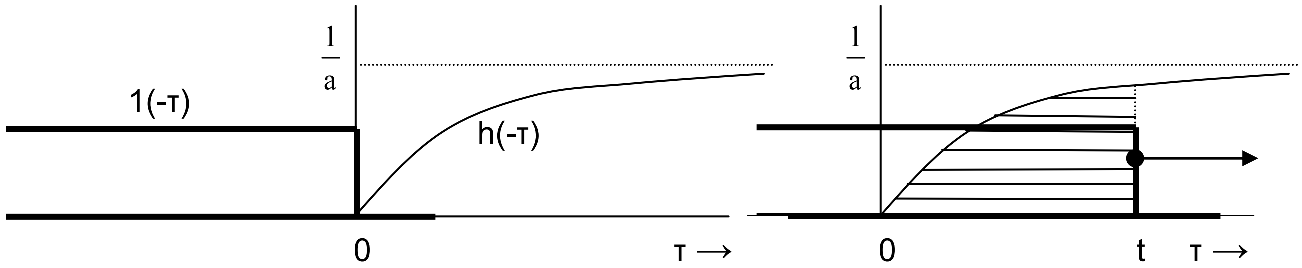
Vraag: Geef de overdrachtsfunctie H(s) en
de differentiaalvergelijking behorend bij de overdracht h(t).

$$\left(H(s) = \frac{1}{s(s+a)} \text{ en } x(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a\frac{dy(t)}{dt} \right)$$

De convolutie $y(t) = x(t) * h(t)$ wordt berekend als $y(t) = \int_0^t x(\tau) \,.\, h(t\text{-}\tau)d\tau$

Je kunt het convolutieproces als volgt beschouwen:
Spiegel, naar keuze, een van de twee termen in de as " τ = 0 ". Neem bijvoorbeeld de term 1(τ).
Sleep nu deze gespiegelde term over de " τ - as " tot aan het punt " τ = t ".

De convolutie bestaat dan uit de berekening van de oppervlakte-integraal van het product van de beide functies tussen de grenzen " 0 " en " t " met de lopende variabele " τ ".

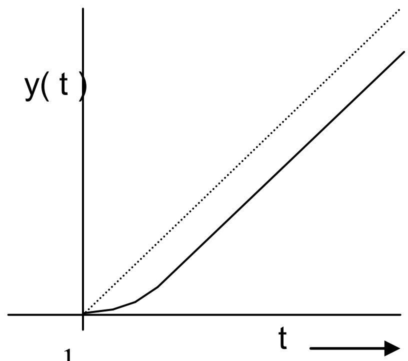


Voor onze situatie gaat dit over in:

$$y(t) = \frac{1}{a}\int_0^t (1 - e^{-a(t-\tau)})d\tau$$

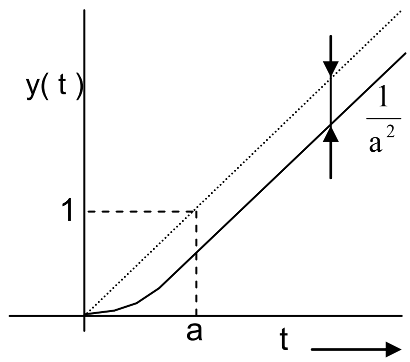
$$y(t) = \frac{1}{a}.\left\{ t - \frac{1}{a}.e^{-a(t-\tau)}\Big|_0^t \right\}$$

$$y(t) = \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}.(1 - e^{-at})$$



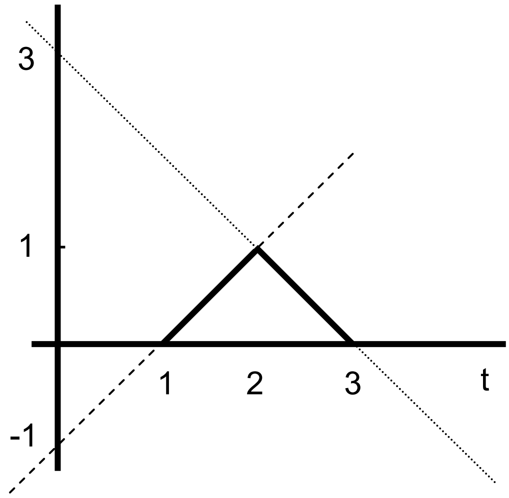
y(t) is een functie die lineair toeneemt met een richtingscoëfficiënt $\frac{1}{a}$.

Na het uitstervende inschakelverschijnsel is de afwijking t.o.v. de rechte $y(t) = \frac{t}{a}$ gelijk aan $\frac{1}{a^2}$



Opgave: bereken zelf y(t) = h(t) * x(t) en vergelijk de uitkomsten.

Voorbeeldopgave met een driehoekvormig signaal:



Gegeven: $x(t) = 0 \qquad t < 1$
$x(t) = t - 1 \qquad 1 \le t < 2$
$x(t) = -t + 3 \qquad 2 \le t < 3$
$x(t) = 0 \qquad 3 \le t$

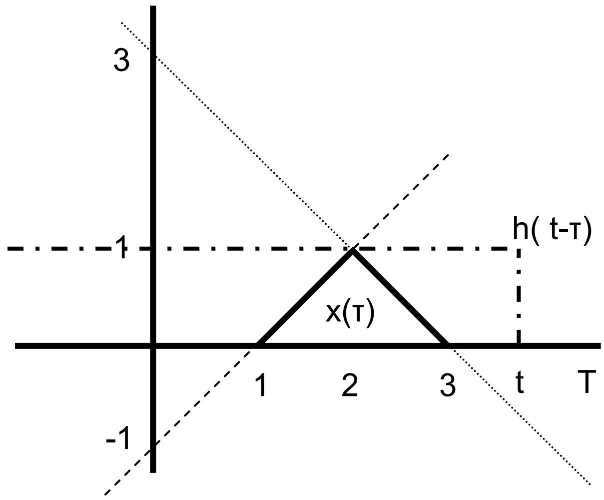
$h(t) = 1(t)$

Gevraagd: bereken $y(t)$

Om de convolutieintegraal $y(t) = \int_0^t x(\tau)\,.\,h(t-\tau)d\tau$ uit te kunnen rekenen moeten we beschikken over het product $x(\tau)\,.\,h(t-\tau)$ en dus afzonderlijk over $x(\tau)$ en over $h(t-\tau)$.

Voor het bepalen van $x(\tau)$ vervangen we de lopende variabele " t " door " τ ".

$x(\tau) = 0 \qquad \tau < 1$
$x(\tau) = \tau - 1 \qquad 1 \le \tau < 2$
$x(\tau) = -\tau + 3 \quad 2 \le \tau < 3$
$x(\tau) = 0 \qquad 3 \le \tau$



Om $h(t-\tau)$ te bepalen gaat $1(t)$ over in $1(t-\tau)$.

Hier zien we in één figuur zowel $x(\tau)$ als $h(t-\tau)$.

Het is duidelijk dat, voor deze eenvoudige $h(t)$,
de integraal zal bestaan uit het oppervlak van de driehoek. De vermenigvuldigfactor $h(t-\tau)$ is immers voor elke waarde $\tau < t$ gelijk aan " 1 ".

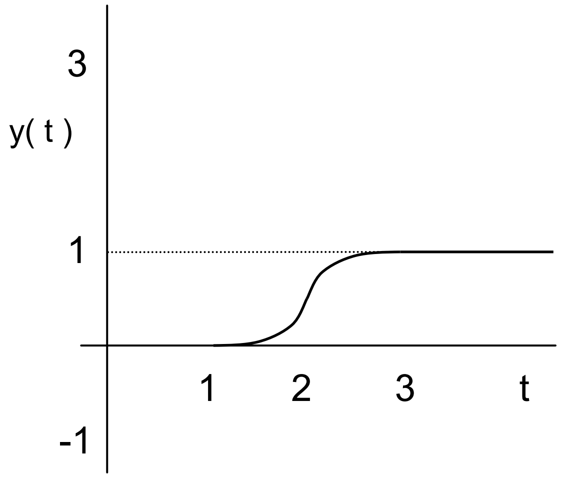
$$y(t) = \int_0^t x(\tau)\,.\,h(t-\tau)d\tau =$$

$$= \int_1^2 (\tau - 1)d\tau + \int_2^3 (-\tau + 3)d\tau = \left| \frac{1}{2}\tau^2 - \tau \right|_1^2 + \left| -\frac{1}{2}\tau^2 + 3\tau \right|_2^3$$

$$= \{(\frac{1}{2}.4 - 2) - (\frac{1}{2}.1 - 1)\} + \{(-\frac{1}{2}.9 + 9) - (-\frac{1}{2}.4 + 6)\} = \{0 + \frac{1}{2}\} + \{\frac{9}{2} - 4\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Het resultaat van de convolutie-integraal is dus: $y(t) = 1$. Hierbij is aangenomen dat " $t > 3$ ".

Dat hoeft natuurlijk niet zo te zijn. Je mag aan de variabele " t " best elke willekeurige waarde toekennen.
In de grafiek $y = f(t)$ zie je hoe de oppervlakte-integraal vanaf " $t = 1$ " toeneemt en bij " $t = 3$ " de eindwaarde " 1 " bereikt.

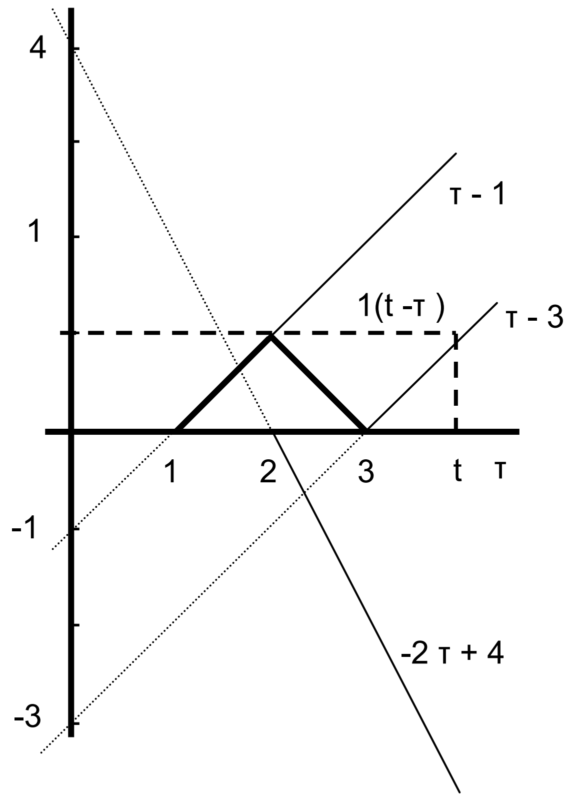


Om de convolutieintegraal te berekenen kunnen we ook gebruik maken van een alternatieve manier om dezelfde driehoekvormige x(t) te beschrijven.

De oplossing hiervoor wordt gegeven:

$$x(t) = (t-1)\,.\,1(t-1) - (2t-4)\,.\,1(t-2) + (t-3)\,.\,1(t-3)$$

Dit is overigens de manier van beschrijven die je **MOET** gebruiken om de functie te kunnen transformeren naar het Fourierdomein of naar het Laplacedomein.
Om aan te tonen dat dit in dezelfde functie x(t) resulteert volgt hierbij de constructie van de som van de drie termen uit x(t).



Door de drie afzonderlijke rechten, die respectievelijk vanaf de tijdstippen 1, 2 en 3 door hun stapfuncties worden ingeschakeld, bij elkaar op te tellen ontstaat het identieke driehoekvormig signaal.

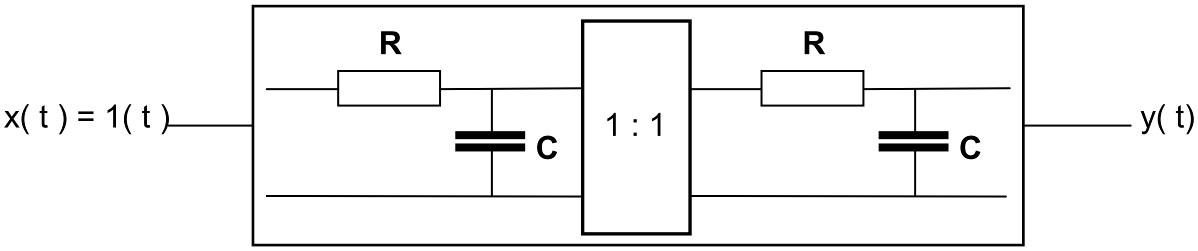
Hier zijn de drie functies als f(τ) geschetst. Bovendien is de h(t –τ) = 1(t –τ) in de figuur opgenomen.

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)\,.\,h(t-\tau)d\tau = \int_1^t(\tau-1)d\tau + \int_2^t(-2\tau+4)d\tau + \int_3^t(\tau-3)d\tau = \left|\frac{1}{2}\tau^2-\tau\right|_1^t + \left|-\tau^2+4\tau\right|_2^t + \left|\frac{1}{2}\tau^2-3\tau\right|_3^t$$

$$= \{(\frac{1}{2}.4-2)-(\frac{1}{2}.1-1)\}+\{(-\frac{1}{2}.9+9)-(-\frac{1}{2}.4+6)\}=\{0+\frac{1}{2}\}+\{\frac{9}{2}-4\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

We hebben nu, nogal “ wollig ”, bij het maken van de convolutieberekeningen in het tijddomein telkens de signaalfuncties en overdrachtsfuncties getekend, van lopende variabele gewisseld, gespiegeld en verschoven. De zichtbaar gemaakte oppervlakte werd vervolgens berekend.
Dit diende een onderwijskundig doel; namelijk het doorgronden van het “ hoe ” en het “ waarom ” van het convolueren in het tijddomein.
Maar als je eenmaal weet hoe het een en ander in elkaar steekt vervalt de noodzaak om aldus te handelen. Je slaat de illustratieve handelingen bij de constructiegrafieken over en je gaat onmiddellijk over tot het maken van de berekeningen voor het convolutieproces.
Je past in de convolutie-integraal de juiste substituties $f_1(\tau)$ en $f_2(t-\tau)$ toe en vervolgens bereken je, puur wiskundig, de oppervlakte - integraal.

Ter illustratie van deze aanpak geven we hier een voorbeeld van een 2^e- orde systeem.
Het is een 2^e-orde Laag Doorlaat Filter waarbij twee identieke 1^e - orde filtersecties in cascade zijn geschakeld. Hiertoe zijn de beide secties door een “ een – op – een - versterker ” van elkaar gescheiden zodat ze elkaar niet kunnen beïnvloeden.



Om de berekening niet nodeloos moeilijk te maken kiezen we maar weer voor een stapsignaal op de ingang.
Om de overdracht h(t) te bepalen bekijken we eerst de overdracht in het Laplacedomein en transformeren de overdracht dan naar het tijddomein.
De overdracht van de 1^e- orde sectie was, zie het betreffende voorbeeld, $H(s) = \frac{1}{RC}.\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}$.

De beide secties staan in cascade, zodat de overdracht in het Laplacedomein gevonden wordt door de overdrachten van de beide secties met elkaar te vermenigvuldigen.
(convolueren in het tijddomein; vermenigvuldigen in het Laplacedomein)
De totale overdracht wordt derhalve: $H(s) = \frac{1}{(RC)^2}.\frac{1}{(s+\frac{1}{RC})^2}$.

Om de overdracht h(t) te vinden gaan we deze overdracht terugtransformeren naar het tijddomein.

$H(s) = \frac{1}{(RC)^2}.\frac{1}{(s+\frac{1}{RC})^2} \quad \leftrightarrow \quad h(t) = 1(t)\,.\,\frac{1}{(RC)^2}.\,t\,.\,e^{-\frac{t}{RC}}$ We kennen nu x(t) = 1(t) en

$h(t) = 1(t)\,.\,\frac{1}{(RC)^2}.\,t\,.\,e^{-\frac{t}{RC}}$ zodat we de convolutieintegraal kunnen berekenen.

We mogen daarbij, naar eigen inzicht, gebruik maken van $y(t) = \int_0^t x(\tau)\,.\,h(t-\tau)d\tau$ of van

$y(t) = \int_0^t h(\tau).x(t-\tau)d\tau$. Omdat in dit geval de inputfunctie veel eenvoudiger is dan de overdrachtsfunctie

kiezen we voor de optie $y(t) = \int_0^t h(\tau).x(t-\tau)d\tau$ zodat we de complexe functie h(t) kunnen vervangen

door h(τ) als we simpelweg de lopende variabele “ t ” vervangen door “ τ ”.

$$h(t) = 1(t)\,.\,\frac{1}{(RC)^2}\,.\,t\,.\,e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{wordt} \quad h(\tau) = 1(\tau)\,.\,\frac{1}{(RC)^2}\,.\,\tau\,.\,e^{-\frac{\tau}{RC}}$$

Dan gaan we vervolgens 1(t) vervangen door 1(t – τ).

De convolutie $y(t) = \int_0^t h(\tau).x(t-\tau)d\tau$ gaat over in $y(t) = \int_0^t \frac{1}{(RC)^2}\,.\,\tau\,.\,e^{-\frac{\tau}{RC}}d\tau = \frac{1}{(RC)^2}\,.\int_0^t \tau\,.\,e^{-\frac{\tau}{RC}}d\tau$

Partieel integreren brengt ons bij de volgende oplossing:

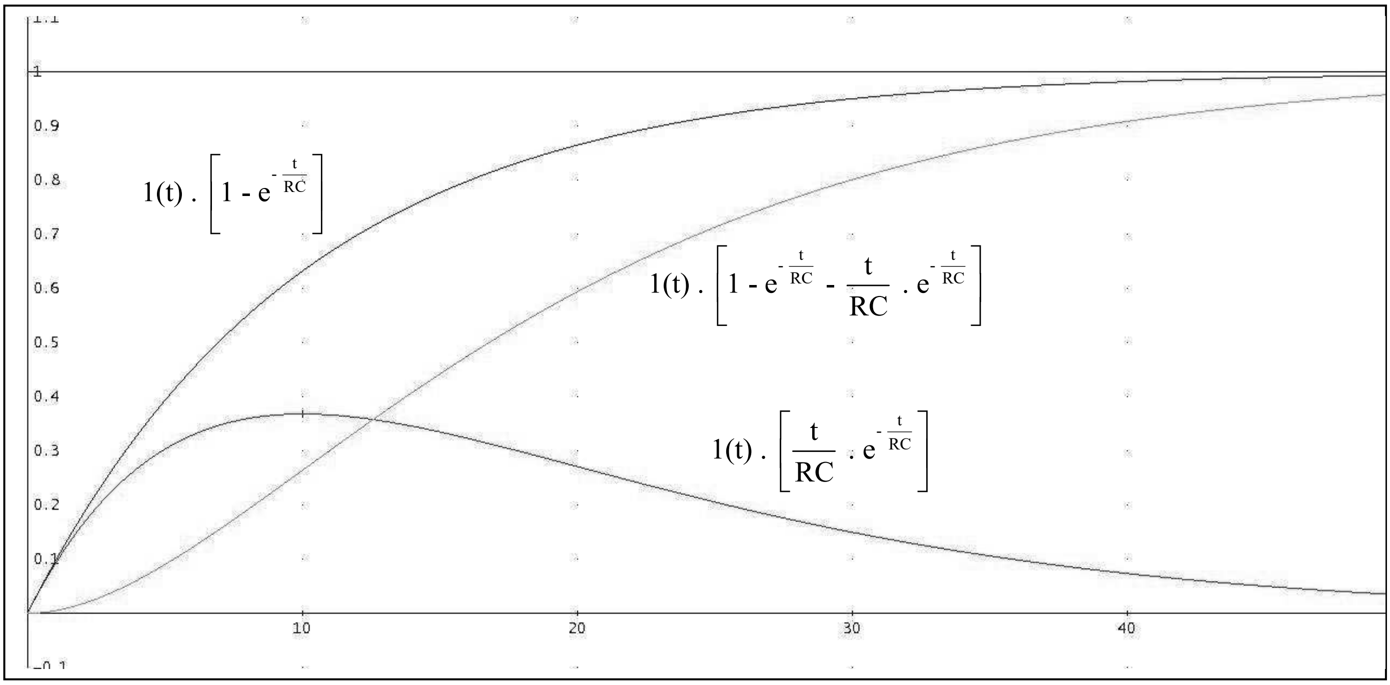
$$y(t) = \left(\frac{\tau}{RC}\,.\,\tau\,.\,e^{-\frac{\tau}{RC}} + e^{-\frac{\tau}{RC}}\right)_0^t = 1(t)\,.\left[1 - e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{t}{RC}\,.\,e^{-\frac{t}{RC}}\right]$$

We zien hier de grafieken van de verschillende functies die gezamenlijk het signaal y(t) op de output realiseren. Hierbij is voor het product RC de gefingeerde waarde 10 genomen.

Om te beginnen $1(t)\,.\left[1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right]$. Dit is, zoals we al eerder berekenden, het uitgangssignaal van de eerste filtertrap. Doordat dit signaal direct wordt doorgegeven aan de tweede trap is dit ook de signaalvorm van het ingangssignaal van de tweede trap.

Dan het outputsignaal y(t) = $1(t)\,.\left[1 - e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{t}{RC}\,.\,e^{-\frac{t}{RC}}\right]$.

Het signaal verschilt $1(t)\,.\left[\frac{t}{RC}\,.\,e^{-\frac{t}{RC}}\right]$ van het ingangssignaal $1(t)\,.\left[1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right]$ van de tweede trap.



Als laatste de functie $1(t)\cdot\left[\frac{t}{RC}\cdot e^{-\frac{t}{RC}}\right]$. Deze functie heeft exact de vorm van h(t).

Maar, de functie verschilt wel een factor “ RC ” van de gedefinieerde 2^e-orde overdrachtsfunctie h(t).
Ook dit keer ter vergelijk t.o.v. het convolueren in het tijddomein de berekening d.m.v. de Laplacetransformatie.

Omdat de Laplacegetransformeerde van de eenheidsstap volgens de tabel gelijk is aan $1(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$

kunnen we y(s) vinden door x(s) te **vermenigvuldigen** met H(s). $y(s)=\frac{1}{(RC)^2}\cdot\frac{1}{s.(s+\frac{1}{RC})^2}$

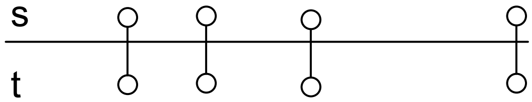
Na breuksplitsen, zie de module in de bijlagen, volgt dan: $y(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{(s+\frac{1}{RC})}-\frac{1}{(RC)}\cdot\frac{1}{(s+\frac{1}{RC})^2}$

Terugtransformeren naar het tijddomein geeft de oplossing voor de overdrachtsfunctie h(t).

$$y(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{(s+\frac{1}{RC})}-\frac{1}{(RC)}\cdot\frac{1}{(s+\frac{1}{RC})^2}$$

Terugtransformeren

naar het tijddomein:



$$y(t)=\{1 - e^{-\frac{t}{RC}} - t.e^{-\frac{t}{RC}}\}\,.\,1(t)$$

Deze m.b.v. de Laplcetransformatie gevonden functie y(t) is uiteraard dezelfde als de oplossing die we gevonden hebben met de methode van convolueren in het tijddomein.

Bij het vergelijken van deze twee oplossingmethoden valt het op dat je bij het berekenen van de Laplacetransformatie weliswaar kunt vermenigvuldigen i.p.v. convolueren, dat is toch wel een voordeel, maar dat je vervolgens moet gaan breuksplitsen. Dat breuksplitsen komt bij het convolueren niet voor. Ten gunste van het breuksplitsen kan worden opgemerkt dat de methode van residubepaling die taak aanzienlijk vereenvoudigt.

Hiermee is het gereedschap “ Convolueren “ voor het berekenen van signalen in het tijddomein uitgebreid aan de orde gekomen.
U heeft gezien dat het convolueren al vlug gecompliceerde berekeningen met zich mee brengt.
Nu hoeft dat met de juiste programmatuur op uw computer op zichzelf niet zo’n probleem te zijn.
Zo’n computer gedraagt zich als een onvermoeibare werknemer zonder CAO.
Die rekent uw berekeningen op elk door u gewenst moment, dag of nacht, wel uit.

Maar dan toch blijft de situatie dat u vanuit de signaaltransformaties naar het frequentiedomein en het Laplacedomein veel beter besluiten kunt nemen over de noodzakelijke berekeningen van het **type regelaar** dat u voor het probleem van uw klant moet gaan ontwerpen.
De keuze en de constructie van de juiste regelaar blijft vanuit die domeinen veel eenvoudiger dan vanuit het tijddomein. Daarom gaan we ook in dit boek uitgebreid de Fouriertransformatie, de Laplace-transformatie en later ook de z – transformatie behandelen.

Nu eerst nog enkele opgaven en dan: op naar de hoofdstukken over de verschillende transformatie methoden.
Opgaven:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$