

Wiskunde doorstroom HBO applied science

Wiskunde voor verdere studie aan het HBO

Didactisch concept : Vervoort Boeken
Grafisch ontwerp: uwontwerp.nl Eindhoven
Versie 2021

ISBN 9789464356489

© Vervoort Boeken

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of enig andere manier, zonder voorafgaande toestemming van de uitgever.

Voor zover het maken van kopieën uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16 B Auteurswet 1912 j° het Besluit van 20 juni 1974, Stb. 351, zoals gewijzigd bij het Besluit van 23 augustus 1985, Stb. 471 en artikel 17 Auteurswet 1912, dient men de daarvoor verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Reprorecht (Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp). Voor het overnemen van gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet 1912) dient men zich tot de uitgever te wenden.

Wat is het bijzondere van dit boek?

Het is geschreven door docenten die met bijzonder veel ervaring in het onderwijs in de toegepaste natuurwetenschappen. Het boek is ontstaan door de samenwerking van Fontys Hogeschool en Summa College en wordt ondersteund door de site www.vervoortboeken.nl.



Het boek is bedoeld voor MBO-studenten laboratoriumonderwijs die door willen studeren in de richting Applied Science van het HBO, maar ook voor HBO-studenten die extra wiskundige ondersteuning en/of oefening nodig hebben.

Alle soorten functievoorschriften, ook met toepassing in het vakgebied, worden systematisch behandeld. Bij hiaten in de voorkennis wordt doorverwezen naar sites die hiervoor bijzonder geschikt zijn, zoals de site van [Herman Hofstede](#) en de site van [Joke Evers](#) e.a.



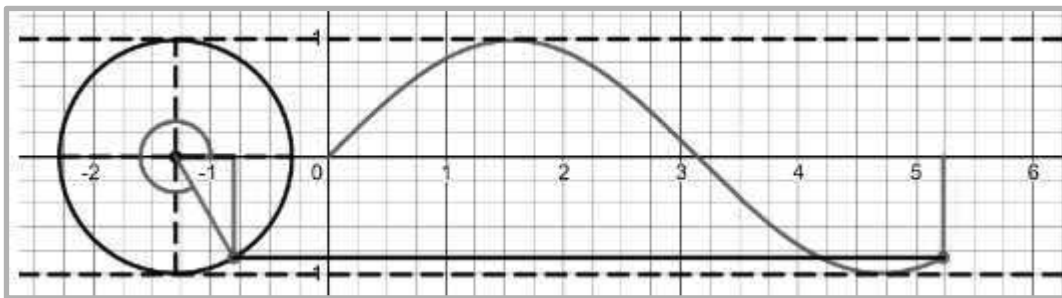
Ieder stukje theorie en alle opgaven worden ondersteund met een interactieve tool. De juiste oplossing van de opgaven kan nu behalve via de uitwerkingen ook onderzocht worden met een interactieve desmostool door [Jos Vervoort](#).

Alle oefensites en tools zijn via QR-codes gelinkt aan het internet.

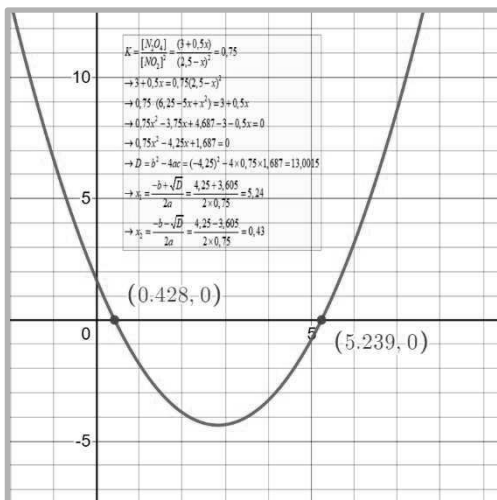


Schijndel, juni 2021
Jos Vervoort

tool 6.2



tool 2.17



Inhoudsopgave

HOOFDSTUK 1 LINEAIRE FUNCTIES

Onderwerpen

- 1.1 Formule, tabel en grafiek
- 1.2 Betekenis snijpunt lineaire grafieken
- 1.3 Functievoorschrift en constanten bij lineair verband
- 1.4 Gelijkheden en ongelijkheden
- 1.5 Inverse functie
- 1.6 Functie in de vergelijkingvorm. Twee vergelijkingen met twee onbekenden
- 1.7 Grafieken loodrecht op elkaar
- Samenvatting hoofdstuk 1

opgave

- 1.1
- 1.2 t/m 1.3
- 1.4 t/m 1.6
- 1.7 t/m 1.9
- 1.10 t/m 1.11
- 1.12 t/m 1.14
- 1.15

HOOFDSTUK 2 KWADRATISCHE FUNCTIES

Onderwerpen

- 2.1 Algemeen functievoorschrift kwadratische functie
- 2.2 Functievoorschrift $f(x) = a(x + p)(x + q)$ voor een parabool
- 2.3 Functievoorschrift $f(x) = a(x + p)^2 + q$ voor een parabool
- 2.4 Snijpunten en top van $f(x) = ax^2 + bx + c$
- 2.5 Bijzondere functies met $b=0$ en $c=0$
- 2.6 Verschuiven van grafieken
- 2.7 Gelijkheden en ongelijkheden met kwadratische functies
- 2.8 Functie opstellen als 3 punten van de grafiek gegeven zijn
- 2.9 Toepassingen kwadratische functies
- Samenvatting hoofdstuk 2

opgave

- 2.1
- 2.2 t/m 2.4
- 2.5
- 2.6
- 2.7 t/m 2.8
- 2.9 t/m 2.10
- 2.11 t/m 2.13
- 2.14
- 2.15 t/m 2.18

HOOFDSTUK 3 GEBROKEN FUNCTIES

Onderwerpen

- 3.1 Functievoorschrift en grafiek van gebroken functie.
- 3.2 Functievoorschrift opstellen bij bepaalde gegevens.
- 3.3 Gelijkheden en ongelijkheden bij gebroken functies
- 3.4 Hyperbool wordt rechte lijn als je de reciproke waardes tegen elkaar uitzet
- 3.5 Samenstellen gebroken functies
- 3.6 Andere functies met asymptoten
- Samenvatting hoofdstuk 3

opgave

- 3.1 t/m 3.4
- 3.5
- 3.6 t/m 3.9
- 3.10 t/m 3.11
- 3.12
- 3.13 t/m 3.15

HOOFDSTUK 4 MACHTSFUNCTIES EN WORTELFUNCTIES

Onderwerpen

- 4.1 Functievoorschrift en grafiek bij machtsfuncties.
- 4.2 Machtsfunctie met gebroken exponent, decimale exponent en wortelfunctie
- 4.3 Regels voor machten.
- 4.4 Functievoorschrift met negatief getal als exponent.
- 4.5 Gelijkheden en ongelijkheden.
- 4.6 Functievoorschrift met absolute waarde.
- 4.7 Functievoorschrift van polynoom.
- 4.8 Wortelfunctie is de inverse van de kwadratische functie.
- Samenvatting hoofdstuk 4

opgave

- 4.1 t/m 4.2
- 4.3 t/m 4.11
- 4.8 t/m 4.12
- 4.13
- 4.14 t/m 4.16
- 4.17
- 4.18
- 4.19

HOOFDSTUK 5 EXPONENTIËLE EN LOGARITMISCHE FUNCTIES

Onderwerpen

- 5.1 Functievoorschrift en grafiek bij exponent als variabele
- 5.2 Basiseigenschappen van logaritmen
- 5.3 Het grondgetal kan iedere waarde hebben
- 5.4 ${}^{10}\log(x)$ is de inverse functie van 10^x
- 5.5 De functies e^x en $\ln(x)$
- 5.6 Gelijkheden en ongelijkheden met exponentiële en logaritmische functies
- Samenvatting hoofdstuk 5

opgave

- 5.1 t/m 5.9
- 5.10 t/m 5.12
- 5.13 t/m 5.17
- 5.18
- 5.19 t/m 5.21

HOOFDSTUK 6 GONIOMETRISCHE FUNCTIES

Onderwerpen

- 6.1 Goniometrische verhoudingsgetallen en grafieken
- 6.2 Goniometrische functies
- 6.3 Goniometrische functies met tijd als variabele
- 6.4 Gelijkheden en ongelijkheden goniometrische functies
- Samenvatting hoofdstuk 6

opgave

- 6.1 t/m 6.4
- 6.5 t/m 6.9
- 6.10 t/m 6.18
- 6.19

HOOFDSTUK 7 DIFFERENTIËREN

Onderwerpen

- 7.1 Wat is de betekenis van differentiëren
- 7.2 Theorie van het differentiëren
- 7.3 Differentiëren van samengestelde functies
- 7.4 Optimaliseren met eerste afgeleide
- 7.5 Wat is de betekenis van de tweede afgeleide
- Samenvatting hoofdstuk 7

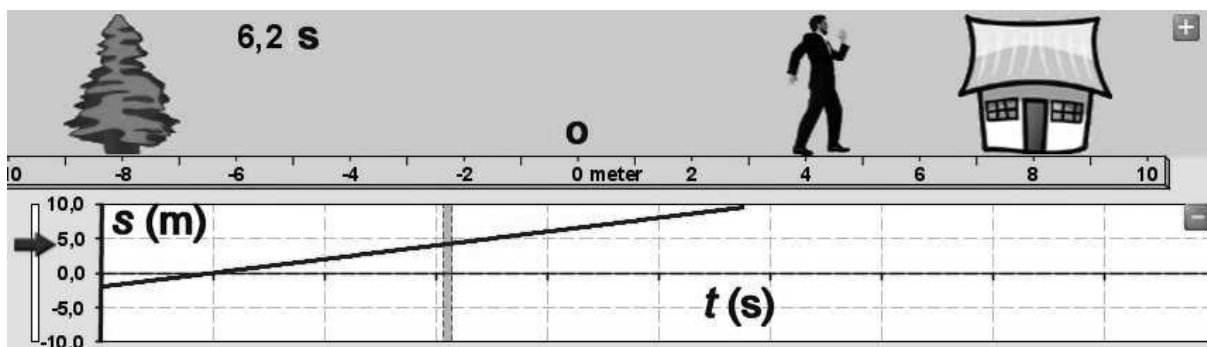
opgave

- 7.1 t/m 7.7
- 7.8 t/m 7.9
- 7.10 t/m 7.12
- 7.13 t/m 7.16
- 7.17

1 Lineaire functies

1.1 Formule, tabel en grafiek

Het verband tussen twee grootheden kun je op verschillende manieren beschrijven. We nemen als voorbeeld het verband tussen de afstand s tot een bepaald punt (O) van iemand die met constante snelheid loopt en de tijd (t).



De man begon te lopen ($t = 0$ s) op 2 meter links van punt O ($s = -2$ m). Hij liep met een constante snelheid van 1 m/s. De afstand (s) tot punt O verandert iedere seconde met 1 m. In de grafiek is de afstand s verticaal uitgezet in meter en de tijd horizontaal in seconden. Op $t = 6,2$ s was de man op 4,2 m rechts van punt O (verticale blauwe lijn). De grafiek is een rechte lijn, men spreekt van een lineair verband. Als s negatief is, dan is de man links van O.



Het verband tussen s en t kun je ook beschrijven met een formule of functievoorschrift.

$$s = -2 + t \quad \text{of} \quad s(t) = -2 + t$$

Bij de tweede notatie is te zien dat s afhangt van t . s is een functie van t , in dit geval een lineaire functie. s noemt men de afhankelijke variabele en t de onafhankelijk variabele.

Het verband kun je ook beschrijven met een tabel.

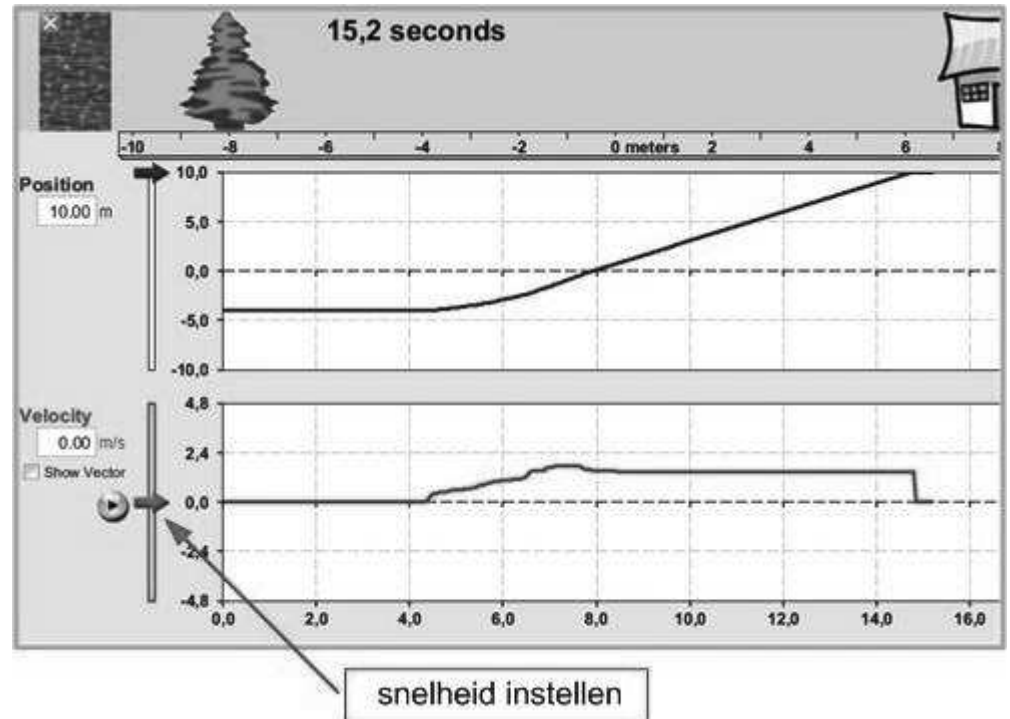
t (s)	0	1	2	3	4
s (m)	-2	-1	0	1	2

s is het symbool van de grootheid afstand en meter (m) is de eenheid. t is het symbool van de grootheid tijd en seconde (s) is de eenheid. Om verwarring te voorkomen worden grootheden cursief geschreven.

Opgave 1.1

Functievoorschrift bedenken bij beschrijving van een beweging.

Bedenk voor de volgende bewegingen een voorschrift voor de functie $s(t)$. Controleer de juistheid met behulp van tool **1.2**



- P begint op 4 meter links van O en loopt met snelheid van 1,5 m/s naar rechts.
- Q begint op 2 meter rechts van O en loopt met een snelheid van 2 m/s naar links.
- R start op 10 meter rechts van O en loopt met constante snelheid naar links. Hij is na 4 seconden in punt O.
- S loopt even hard als P in dezelfde richting, maar heeft in het begin een afstand van 4 meter rechts van O.
- T is altijd 2 meter verder naar links dan R.
- A heeft altijd dezelfde afstand tot O als P, maar dan aan de andere kant van O.

1.2 Betekenis van snijpunt van lineaire grafieken

Als A en B beide een beweging uitvoeren over dezelfde rechte weg dan er een mogelijkheid dat ze op een bepaald moment op dezelfde plaats zijn.

Voorbeeld:

Voor A geldt: $s(t) = 2t - 3$ en voor B geldt: $s(t) = -t + 3$

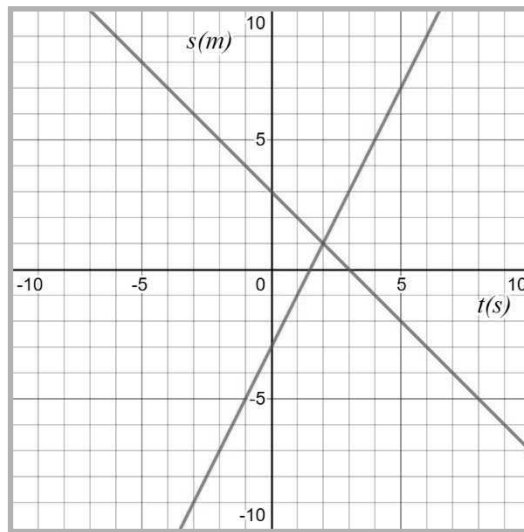
A beweegt dus naar rechts met een snelheid van 2 m/s en is gestart op 3 meter links van referentiepunt O. B beweegt naar links met een snelheid van 1 m/s en is gestart op 3 meter rechts van O.

Het is dus zeker dat ze elkaar tegenkomen.

Als beide op een bepaald tijdstip op dezelfde plaats zijn, dan geldt:

$$2t - 3 = -t + 3 \rightarrow 3t = 6 \rightarrow t = 2 \rightarrow s_A(2) = s_B(2) = 1$$

Na 2 seconden komen ze elkaar tegen op 1 m rechts van punt **O**.



Je kunt ook berekenen wanneer A 12 m verder naar rechts is dan B.

Dan geldt:

$$s_A - s_B = 12 \rightarrow$$

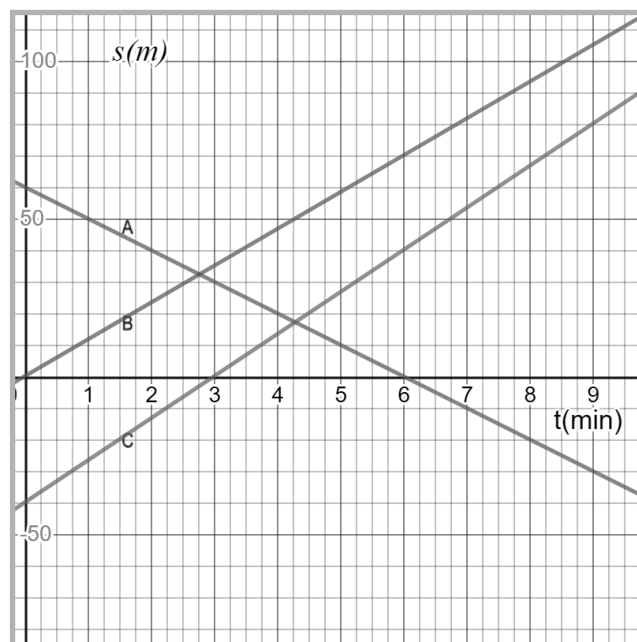
$$(2t - 3) - (-t + 3) = 12 \rightarrow 2t - 3 + t - 3 = 12 \rightarrow 3t = 18 \rightarrow t = 6$$

$$s_A(6) = 9 \text{ en } s_B(6) = -3 \rightarrow s_A(6) - s_B(6) = 9 - (-3) = 12$$

Opgave 1.2

Funcievoorschrift bedenken bij een grafiek.

In onderstaande figuur zijn de grafieken getekend die horen bij de rechtlijnige beweging met constante snelheid van A, B en C.





- a Bedenk voor de bewegingen van A, B en C een voorschrift voor de functie $s(t)$.
- b Bereken het snijpunt van de grafiek van A en B.
- c Bereken het snijpunt van de grafiek van A en C.
- d Bereken tijdstip en plaats waar C B inhaalt.
- e Bereken de afstand tussen A en C op $t = 8$ min.
 $s_A(8) - s_C(8) = \dots$
- f Bereken het tijdstip waarop C 30 meter links van A is.

Oefenen met bepaling snijpunt (item 19) WIMS

Opgave 1.3

Eigenschappen beschrijven van bewegingen aan de hand van een functievoorschrift.

Voor de volgende auto's is het functievoorschrift gegeven.

(s in km en t in uur)

A : $s(t) = 0,5 + 50t$

B : $s(t) = -0,5 - 30t$

C : $s(t) = 5 + 15t$

D : $s(t) = 5 + 15(t - 1)$

E : $s(t) = 60t$

F : $s(t) = 0,5 + 30t$

G : $s(t) = 50t - 10$

- a Bereken de beginplaats van auto A.
 $s_A(0) = \dots \dots \dots$ km
- b Bereken het tijdstip waar A en B elkaar tegenkomen.
- c D heeft dezelfde snelheid als C, begint op dezelfde plaats maar start 1 uur later.
Hoe kun je zien dat D 1 uur later vertrekt dan C?
Wat is het verschil in de s - t - grafiek van C en D?
- d Welk functievoorschrift hoort bij een auto H die precies dezelfde beweging uitvoert als E, maar 2,5 uur later vertrekt?
Hoeveel is de grafiek van H verschoven t.o.v. de grafiek van E?
- e Voor welke waarden van t geldt dat $s_F > s_G$?
- f Voor welke waarden van t geldt dat $s_F \geq s_G + 2$?
- g Welk functievoorschrift hoort bij een auto K die dezelfde snelheid heeft als auto G maar waarvoor geldt $s(0) = 10$ m?
- h Wat is het verschil in de s - t -grafiek van G en K?



1.4



R1 In het algemeen kun je het functievoorschrift voor een rechtlijnige beweging met constante snelheid schrijven als $s(t) = at + b$.

Welke betekenis hebben a en b in de s - t -grafiek ?

Welke betekenis hebben a en b voor de beweging?

$b = s(0)$ Waarom?

Waarom moet t groter of gelijk zijn aan 0 ($t \geq 0$)

R3 Van een bepaalde rechtlijnige beweging is de s - t -grafiek gegeven.

Teken hierin de grafiek van eenzelfde beweging die p seconden later vertrokken is.

Teken hierin de grafiek van eenzelfde beweging die q meter meer naar links vertrokken is.

R4 Voor een beweging geldt het functievoorschrift:

$$s(t) = 10t + 5$$

Eenzelfde beweging heeft een functievoorschrift

$$s(t) = 10(t - 5) + 10 ?$$

Wat is het verschil in de grafieken van deze functies?

R5 Wat betekent het voor de beweging als je de grafiek naar links verschuift?

Wat betekent het voor de beweging als je de grafiek naar beneden verschuift?



1.5



1.3 Functievoorschrift en constanten bij lineair verband

Omdat de onafhankelijk variabele op de x -as uitgezet wordt en de afhankelijk variabele op de y -as wordt een lineaire functie vaak geschreven in de vorm $f(x) = ax + b$ of $y = ax + b$ ($y = f(x)$)

In een grafiek wordt de waarde van $f(x)$ uitgezet op de y -as

a is de richtingscoëfficiënt (r.c.) of hellingsgetal (Eng: slope)

a is de toename van y als x met 1 toeneemt.

b is de beginwaarde of snijpunt met y -as (Eng: intercept)

b is de waarde van y als $x = 0$ ofwel $f(0) = b$

De waarden van x die mogelijk zijn noemt men het domein (D_f).

De bijbehorende y - waarden men het bereik (B_f).

Als een functievoorschrift gebruikt wordt voor een beperkt gebied van x -waarden wordt dat aangegeven met een intervalnotatie.

Met $< -10, 10 >$ bedoelt men alle reële getallen tussen -10 en 10 .

Met $[-10, 10]$ bedoelt men alle reële getallen -10 en 10 , inclusief -10 en 10 .

Met $[-10, 10 >$ bedoelt men alle reële getallen tussen -10 en 10 inclusief -10 .

Met $< -10, 10]$ bedoelt men alle reële getallen -10 en 10 , inclusief 10 .



1.6



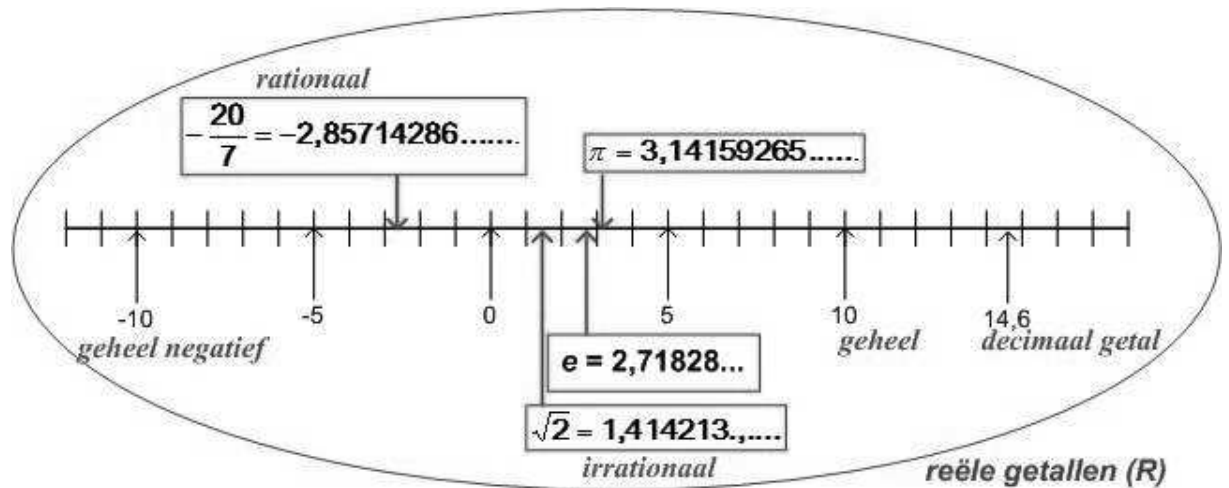
In plaats van $\langle -10, 10 \rangle$ kun je ook noteren $\{x \in R \mid -10 < x < 10\}$, de zogenaamde acolade-notatie.

Hier staat dus: x is een element van R (reële getallen) met een waarde tussen -10 en 10.

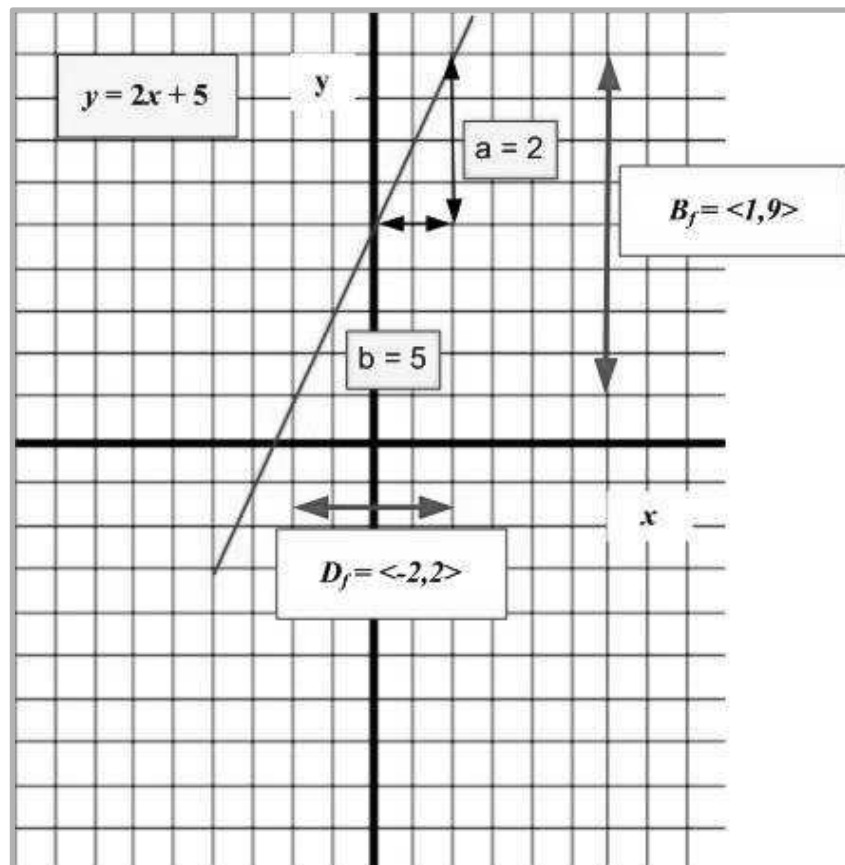
Reële getallen kun je schrijven als een eindig of oneindig voortlopend decimaal getal en horen bij een punt op een getallenlijn.

Hiertoe behoren de gehele getallen, de rationale getallen (breuken) en de irrationale getallen (wortels, π en e).

Voorbeeld : -10; $-2/3$; -0,41 ; $\sqrt{2}$; $20/7$; π ; 10



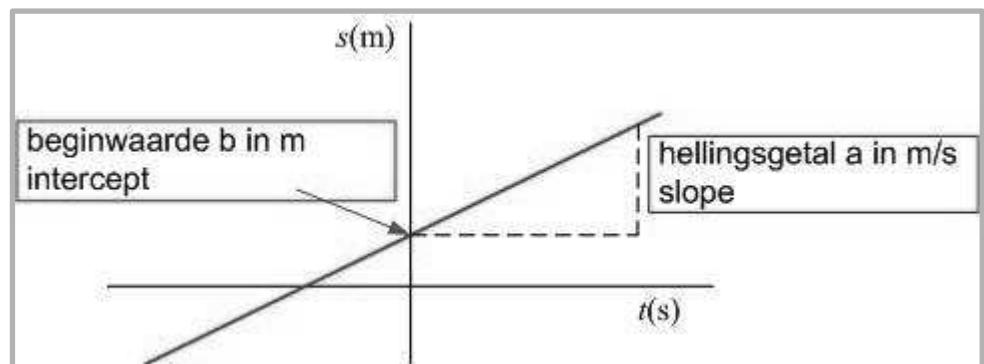
Als $y = 2x + 5$ en voor het domein geldt (waardes van x) $\langle -2, 2 \rangle$ dan is het bereik (waardes van y) $\langle 1, 9 \rangle$



In wiskundige grafieken is de schaalverdeling van x – en y -as meestal hetzelfde. Vandaar dat men de steilheid van de grafiek aanduidt met richtingscoëfficiënt, de coëfficiënt die de richting bepaald.

In de science-vakken hebben de grootheden langs de assen een eenheid en is de schaalverdeling van de verticale as om praktische redenen meestal anders dan die van de horizontale as. Het is dan beter de term hellingsgetal (slope) te gebruiken. Het hellingsgetal heeft dan meestal ook een fysische betekenis.

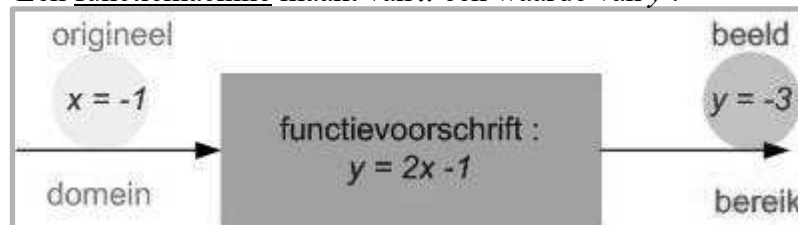
Bij onderstaande s - t -grafiek is het hellingsgetal de snelheid in m/s!



Opgave 1.4

Welke functievoorschrift zit er in de black box?

Een functiemachine maakt van x een waarde van y .



De onafhankelijk variabele x wordt ook wel het origineel genoemd en de afhankelijk variabele y het beeld genoemd.

Dus van het origineel x wordt het beeld y gevormd.

Bij een lineair verband kun je aan de hand van de coördinaten van twee punten het functievoorschrift bepalen.

voorbeeld 1:

Bepaal het functievoorschrift in de haakjesvorm $f(x)$ van de grafiek die door de punten $(2,4)$ en $(4,7)$ loopt.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-4}{4-2} = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2}x + b$$

$$\text{punt } (2,4) \text{ invullen levert } 4 = \frac{3}{2} \times 2 + b \rightarrow b = 1$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x + 1 \quad \text{of} \quad f(x) = 1,5x + 1$$



1.7



Bepaal het functievoorschrift in de haakjesvorm $f(x)$ van de grafiek die door de volgende punten loopt.
 Controleer de juistheid met behulp van de tool **1.7**

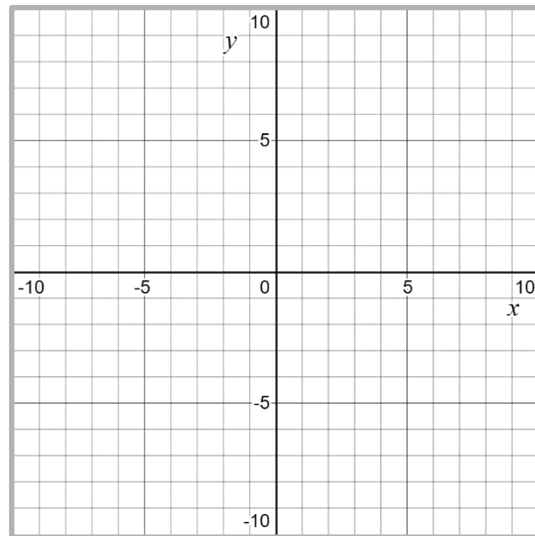
- a (1,9) en (3,17)
- b (0,0) en (2,-3)
- c (-2,-5) en (2,1)
- d (1,4; 2,1) en (2,4; 3,5)
- e (-3,3) en (-1,2)
- f (0,02; 0,3) en (0,04; 0,5)

Opgave 1.5

Grafiek tekenen met functievoorschrift.

Teken in het diagram de grafiek die hoort bij de volgende functievoorschriften. Controleer met tool **1.8**

- a $f(x) = 3x - 1$
- b $f(x) = -2x$
- c $f(x) = -2(x - 2)$
- d $f(x) = -2(x - 2) + 4$
- e $f(x) = -2(x + 2)$



1.8



-
- R6 Hoe kun je de grafiek van vraag **c** snel tekenen als je uitgaat van de grafiek van vraag **b**?
 - R7 Hoe kun je de grafiek van vraag **d** snel tekenen als je uitgaat van de grafiek van vraag **c**?
 - R8 Hoe kun je de grafiek van vraag **e** snel tekenen als je uitgaat van de grafiek van vraag **c**?
 - R9 Wat is de betekenis van het **teken** van de richtingscoëfficiënt?
 - R10 Wat is de snelste manier om de grafiek te tekenen als je het functievoorschrift kent?
-
- R11 Welk functievoorschrift hoort bij de grafiek die 4 schaaldelen naar rechts en 2 schaaldelen naar beneden verschoven is t.o.v. de grafiek van $y = x$
-

Opgave 1.6

Functievoorschrift opstellen als slope en intercept gegeven zijn.

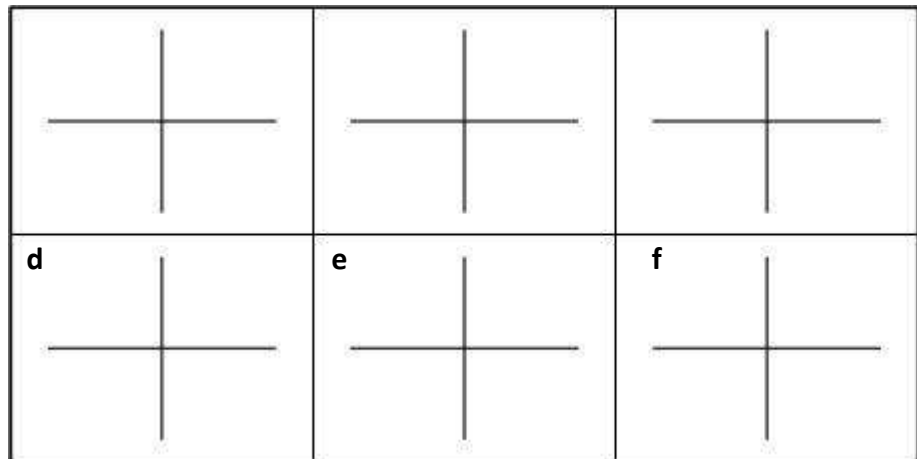
Teken in onderstaand schema de grafieken aan de hand van de onderstaande gegevens. Schrijf ook de eenheden langs de assen.

	<i>hellingsgetal (slope)</i>	<i>snijpunt y-as (intercept)</i>
a	-2 m/s	3 m
b	2	-3
c	0,8 mmol ⁻¹	0,05
d	1 g/mL	3,0 g
e	-2	3
f	-3 %/°C	1,5 %

a

b

c



Oefenen met lineaire functies en grafieken (items 4, 5, 6, 8, 14, 21)
WIMS



R12 Bij het hellingsgetal is het vermelden van de eenheid belangrijk. Geef een voorbeeld waaruit dat blijkt.

R13 Als de grootte op de y -as geen eenheid heeft (dimensieloos) dan is de eenheid van de slope altijd $1/(\text{eenheid langs } x\text{-as})$ of $(\text{eenheid langs } x\text{-as})^{-1}$. Leg uit.

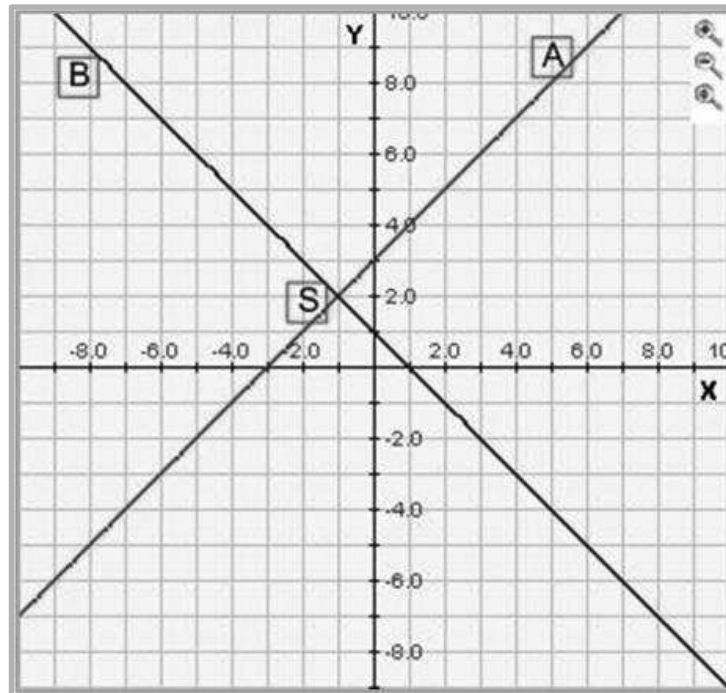
R14 Als zoals bij een beweging de tijd op de x -as wordt uitgezet is het domein $[0, \infty[$. Leg uit.

1.4 Gelijkheden en ongelijkheden

Zoals we gezien hebben bij de functievoorschriften voor een beweging kun je snijpunt van twee grafieken vinden door de functies aan elkaar gelijk te stellen.

Zo kun je ook bepalen voor welke waarden van x de y -waarde van de ene grafiek groter of kleiner is dan de y -waarde van de andere grafiek.

In de figuur zijn de grafieken getekend van $y_A = x + 3$ en $y_B = -x + 1$
 Voor welke waarden van x is $y_A \geq y_B$?



In punt S geldt : $y_A = y_B \rightarrow x + 3 = -x + 1 \rightarrow 2x = -2 \rightarrow x = -1$

Voor het domein $[-1, \infty>$ geldt : $y_A \geq y_B \rightarrow x + 3 \geq -x + 1 \rightarrow 2x \geq -2 \rightarrow x \geq -1$

Als bij een ongelijkheid links en rechts gedeeld of vermenigvuldigd wordt met een $-$ teken dan wordt het $>$ teken een $<$ teken en omgekeerd

Voorbeeld: $-2x \leq 2 \rightarrow x \geq -1$



Opgave 1.7

Behoeft extra oefening? (item 9) WIMS

Gelijk en ongelijkheden.

Voor welke waarde(n) van x geldt :
 Controleer je antwoorden met tool **1.9**



- a $2x - 2 = 4 - 3x$
- b $-2x = 4$
- c $-2x + 6 = 4x - 3$
- d $2x > 4$
- e $-2x > 4$
- f $-2x + 6 \geq 4x - 3$
- g $1,1x - 3,4 > 2x + 2$
- h $-1 < 2x - 3$
- i $-4x + 1 > -2x + 3$

Opgave 1.8

Functiewaardes met elkaar vergelijken.



1.10



Controleer je antwoorden met tool **1.10**

De volgende functievoorschriften zijn gegeven:

$$A : y = 5 + 10x$$

$$B : y = -5 - 7x$$

$$C : y = 2 + 4x$$

$$D : y = 20 + 4x$$

$$E : y = -30x - 100$$

$$F : y = 10x + 100$$

- a Voor welke waarde van x is $y_A \leq y_B$?
- b Voor welke waarde van x is $y_C \geq y_B$?
- c Voor welke waarde van x is $y_F = y_B$?
- d Voor welke waarde van x is $y_E \leq y_B - 2$?
- e Bereken de coördinaten van het snijpunt van E en F.
- f Voor welk domein geldt dat $2 < y_D < 10$?
Maak een schets van de grafiek van D en teken hierin het domein.
- g Voor welk domein geldt dat $-10 < y_E < -2$?
- h Bepaal het functievoorschrift van de grafiek die door het snijpunt van A en B gaat en evenwijdig is aan C.

Opgave 1.9

Kostenanalyse met lineaire verbanden.

Voor de kostenberekening van een bepaalde analyse gebruikt men de volgende verbanden.

Met apparatuur A zijn de kosten : $K_A = 120.000 + 3,5n$

Met apparatuur B zijn de kosten : $K_B = 160.000 + 2,5n$

Hierbij is K het bedrag van de totale kosten bij n analyses.

- a Bij welk aantal analyses is het interessanter apparatuur B aan te schaffen?
- b Bij welk aantal analyses zijn de kosten per analyse met apparatuur B 10% goedkoper dan bij A?

R15 De K -waarde van A is 30 meer dan die van B.

Voor welke waarde van n geldt dit?

Wat is de wiskundige notatie van dit probleem?

R16 $-x > 0$ is hetzelfde als $x < 0$

Leg uit met behulp van de x -as.

R17 Geef op de x -as aan voor welke waarden van x

$(2x - 1) > (-x + 2)$. Waarom is het verstandig eerst de x -waarde van het snijpunt te berekenen?

R18 Beschrijf met eigen woorden de betekenis van de volgende

wiskundige notatie voor een rechte lijn $5 \leq y \leq 25$ voor het

domein $[-2, 5]$. Beschrijf het domein ook met de intervalnotatie.

1.5 Inverse functie

Voor het omrekenen van de temperatuur in graden Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) naar graden Celsius ($^{\circ}\text{C}$) geldt het functievoorschrift:

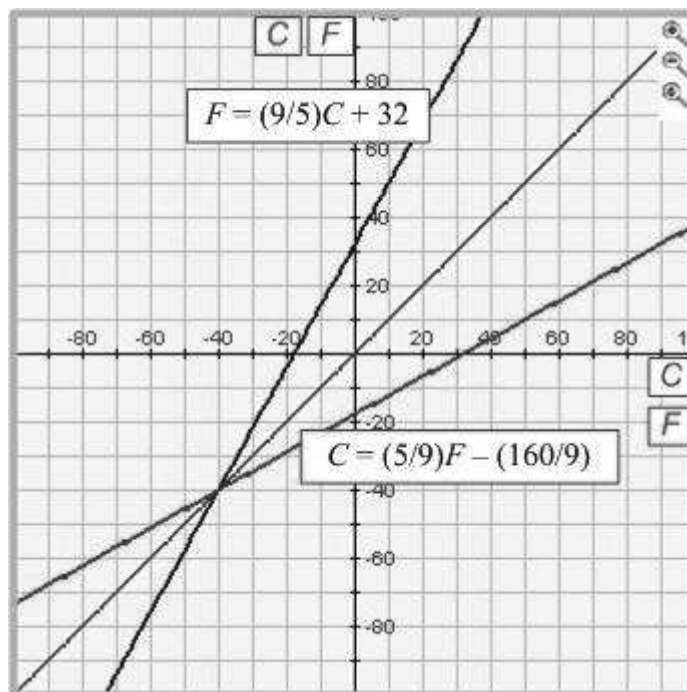
$$\boxed{C = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}} \quad \text{Als } F = 0 \text{ dan } C = -160/9$$

Voor het omrekenen van de temperatuur in graden Celsius ($^{\circ}\text{C}$) naar graden Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) geldt het functievoorschrift:

$$\boxed{F = \frac{9}{5}C + 32} \quad \text{Als } C = -160/9 \text{ dan } F = 0$$

C en F zijn inverse functies.

De grafieken van C en F zijn gespiegeld t.o.v. de lijn $C = F$



In wiskundige notatie krijgen de functies het voorschrift:

$$\boxed{f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}} \quad \text{en} \quad \boxed{f^{-1}(x) = \frac{9}{5}x + 32}$$

$f(x)$ in C en x in F $f^{-1}(x)$ in F en x in C

$f^{-1}(x)$ is de inverse functie van $f(x)$

Bij inverse functies bij lineair verband geldt: $rc(f^{-1}) \times rc(f) = 1$

voorbeeld 2:

Bepaal de inverse functie van $f(x) = 2x + 3$

In plaats van $f(x)$ kunnen we ook y schrijven.

$$\begin{aligned}y &= 2x + 3 \rightarrow \\2x &= y - 3 \rightarrow \\x &= \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} \\f^{-1}(x) &= \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\end{aligned}$$

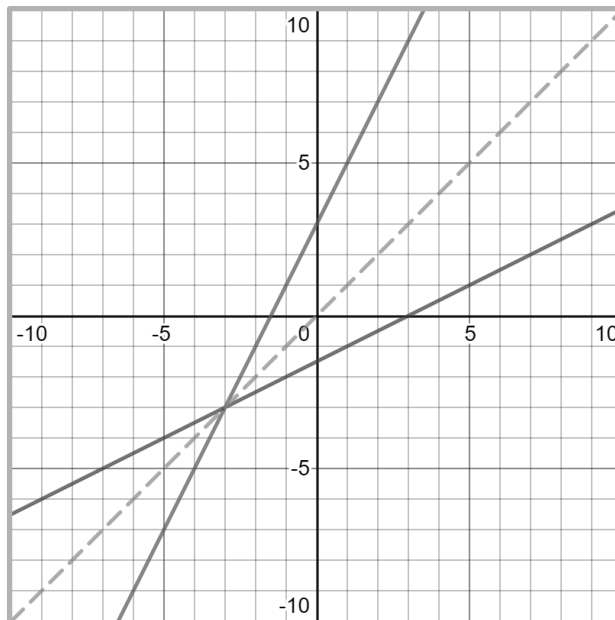
x is nu het *beeld* en y het *origineel*

we vervangen x door f^{-1} en y door x

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

is de inverse functie van $f(x) = 2x + 3$

De blauwe grafiek hoort bij de inverse functie, de grafiek is gespiegeld t.o.v. de lijn $y = x$



Opgave 1.10

Inverse functie opstellen

Stel het voorschrift op van de inverse functie van:

Controleer je antwoorden met tool **1.11**

- a $f(x) = 5 + 10x$
- b $C(F) = -5 - 7F$
- c $y = 2 + 4x$
- d $y = 20 + 4x$
- e $y = -30x - 100$
- f $s(t) = 10t + 100$

Opgave 1.11

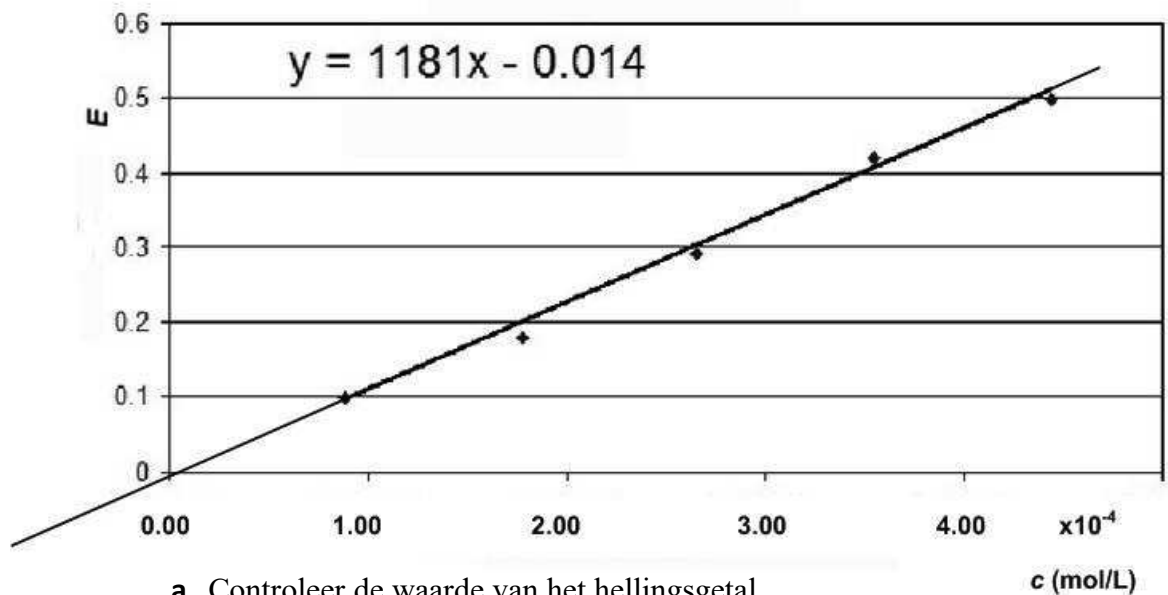
Inverse functie bij meten van extinctie.

Bij een analyse is de volgende ijkgrafiek gemaakt.

Voor verschillende concentraties (c) van een opgeloste stof is de extinctie (E) bepaald. $y = E$ en $x = c$

Op de y -as is de extinctie E (geen eenheid) uitgezet en op de x -as de concentratie c van de standaardoplossingen in mol/L.

Met Excel is onderstaande grafiek gemaakt.



a Controleer de waarde van het hellingsgetal.

b Welke eenheid heeft het hellingsgetal?

Door de extinctie van een monster te meten kan de concentratie berekend worden. Het is dan handig de inverse functie $c(E)$ op te stellen.

c Stel het functievoorschrift van $c(E)$ op.

d Bereken de concentratie van een monster met $E = 0,342$.

e Wat is de betekenis van het getal $-0,014$ in het functievoorschrift $E(x)$.

1.6 Functie in de vergelijking $py + qx = r$

Twee vergelijkingen met twee onbekenden

Het functievoorschrift kan ook gegeven worden in de vergelijkingsvorm of standaardvorm $py + qx = r$ met p , q en r als constanten.

De lijn heeft dan een richtingscoëfficiënt $-\frac{q}{p}$ en een snijpunt met de

$$y\text{-as } \frac{r}{p} \text{ want } y = -\frac{q}{p}x + \frac{r}{p}$$

voorbeeld 3:

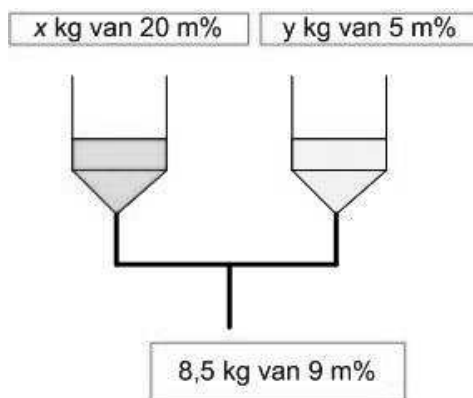
$$2x + 3y = 4 \rightarrow 3y = -2x + 4$$
$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \quad (rc = -\frac{2}{3} \quad \text{snijpunt } y\text{-as} = (0, \frac{4}{3}))$$

Deze vorm van functienotatie kom je vooral tegen als x en y in twee verschillende formules voorkomen.

Je krijgt dan twee vergelijkingen met twee onbekenden.

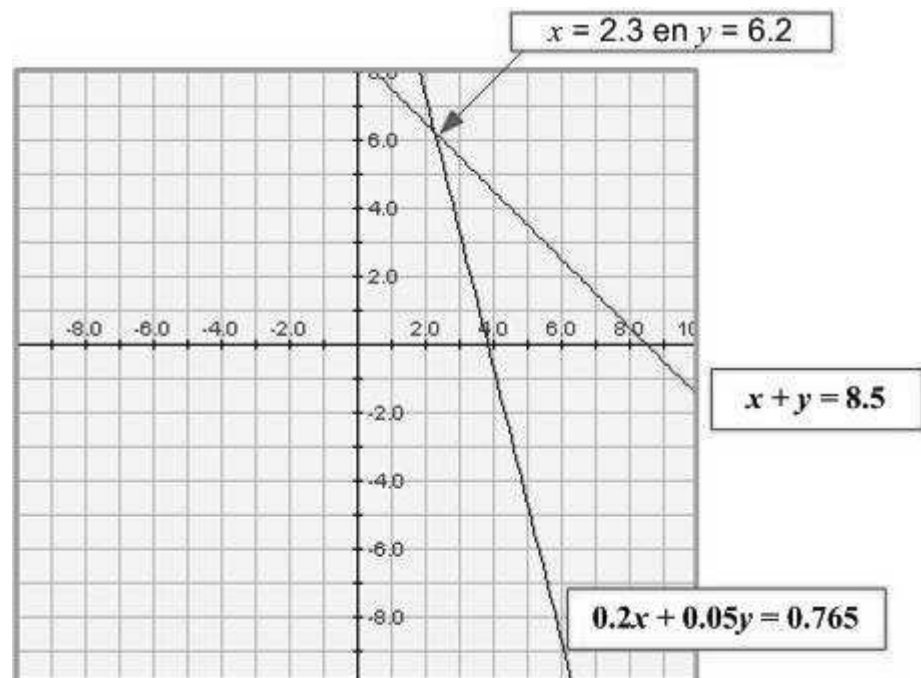
voorbeeld 4:

Je moet 8,5 kg van een water-alcohol mengsel maken door een mengsel met 20 m % alcohol te mengen met een mengsel met 5m % alcohol. Hoeveel moet je van ieder mengsel nemen?



vergelijking 1: $x + y = 8,5$ massabalans totaal
vergelijking 2: $0,2x + 0,05y = 0,09 \times 8,5$ massabalans alcohol

grafische oplossing d.m.v. het snijpunt



Je kunt het snijpunt ook wiskundig bepalen.

Methode 1: slim vermenigvuldigen en optellen of aftrekken

$$\begin{array}{r} x + y = 8,5 \\ 0,2x + 0,05y = 0,765 \quad \times 5 \\ \hline x + y = 8,5 \\ x + 0,25y = 3,825 \\ \hline 0,75y = 4,675 \\ y = 6,23 \\ x = 8,5 - 6,23 = 2,27 \end{array}$$

De tweede vergelijking is met 5 vermenigvuldigd zodat een van de termen van de twee vergelijkingen hetzelfde is.
Je had ook de eerste vergelijking met 0,05 kunnen vermenigvuldigen.

Vervolgens zijn de termen links en rechts van elkaar afgetrokken zodat de gelijke term (in dit geval x) wegvalt.

Methode 2: substitutiemethode

$$\begin{array}{l} x + y = 8,5 \rightarrow y = 8,5 - x \\ \rightarrow 0,2x + 0,05(8,5 - x) = 0,765 \\ \rightarrow 0,2x + 0,425 - 0,05x = 0,765 \\ \rightarrow 0,15x = 0,34 \rightarrow x = 2,27 \end{array}$$

$$y = 8,5 - 2,27 = 6,23$$

y wordt geïsoleerd in vergelijking 1 en ingevuld in vergelijking 2.
Men noemt dit de substitutiemethode.

Opgave 1.12



1.12



Opgaven met het functievoorschrift $py + qx = r$

Bepaal richtingscoëfficiënt en snijpunt y -as van de grafieken met het volgende functievoorschrift.

Controleer je antwoorden met tool **1.12**

- a $3y + 2x = 4$
- b $-y - 3x = 4$
- c $3x + y - 1 = 0$
- d $3y - 2x = 0$
- e $2y + 1,5x + 3 = 0$
- f Bepaal het snijpunt met de x -as van de grafiek bij vraag a.
- g Voor welk domein geldt dat $y > 2$ bij de grafiek van vraag b.

- h Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de grafieken van opgave a en c.
- i Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de grafieken van opgave b en e
- j Wat is het verschil tussen de grafieken van $2x + 3y = 2$ en $2x + 3y = -2$

Opgave 1.13



Twee vergelijkingen met twee onbekenden.

Bereken de waarden van x en y die aan beide vergelijkingen voldoen. Controleer je antwoorden met tool **1.13**

- a $2y + 3x - 3 = 0$ en $-y + 2x - 1 = 0$
- b $2x + y = 2$ en $-2y + x = -3$
- c $y - 0,5x = 2$ en $-x + 2y - 3 = 0$
- d $-0,5y + x - 3 = 0$ en $2y + x = -3$
- e $2y + x - 3 = 0$ en $y + x = 4$
- f $4x - y - 3 = 0$ en $y + x - 2 = 0$

Opgave 1.14

Twee vergelijkingen met twee onbekenden bij mengproces.

Een mengsel water-alcohol met 20 m% alcohol wordt gemengd met een water-alcohol met 96 m% alcohol. Er moet 100 kg gemaakt worden met een alcoholgehalte van 40 m% .

- a Bereken de hoeveelheden van de toegevoerde mengsels.
- b Controleer het antwoord met tool **1.13**.

1.7 Grafieken loodrecht op elkaar

Als twee lijnen loodrecht op elkaar staan is het product van de rc 's gelijk aan **-1** .

