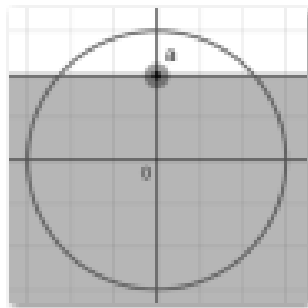
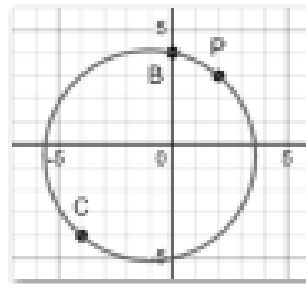


Examentraining met Desmos-tools

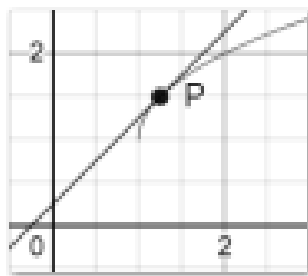
Wiskunde B, VWO



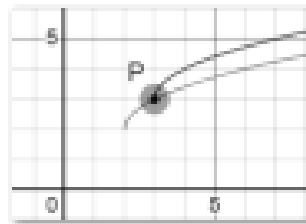
2018-2 antw4



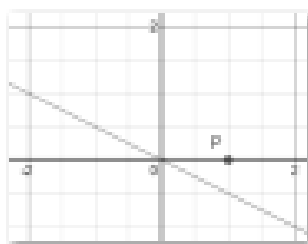
2018-2 antw8



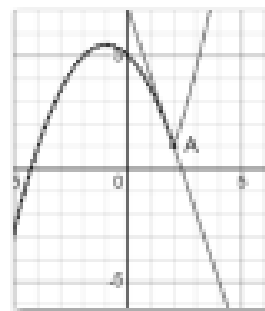
2019-1 antw3



2019-1 antw4



2019-2 antw3



2019-2 antw4

Inhoudsopgave

1. Examenopgaven
2. Uitwerkingen examenopgaven met Desmos-tools

Domein	Subdomein	in CE	moet in SE	mag in SE
A Vaardigheden		X	X	
B Functies, grafieken en vergelijkingen		X		X
C Differentiaal- en integraalrekening		X		X
D Goniometrische functies		X		X
E Meetkunde met coördinaten	E1: Meetkundige vaardigheden	X	X	
	E2: Algebraïsche methoden in de vlakke meetkunde	X		X
	E3: Vectoren en inproduct	X		X
	E4: Toepassingen	X		X
F Keuzeonderwerpen			X	

VERANTWOORDING






Deze examenbundel bevat de examenopgaven en de uitwerkingen van het examen wiskunde B VWO van 2018-1/ 2018-2/ 2019-1 /2019-2/ 2021-1/ 2021-2/ 2022-1. Het bijzondere hierbij is dat de uitwerkingen ondersteund worden door tools gemaakt met het programma Desmos. Dit programma is erg gebruiksvriendelijk en zeker ook geschikt om door leerlingen gebruikt te worden. Het controleren van de uitwerking kan daardoor op een interactieve manier gedaan worden. De meest ideale leeromgeving bestaat uit deze examenbundel en een laptop met de interactieve tools. De links naar deze tools vind je via de link :

[Examentraining Wiskunde B VWO | Vervoort Boeken](#)

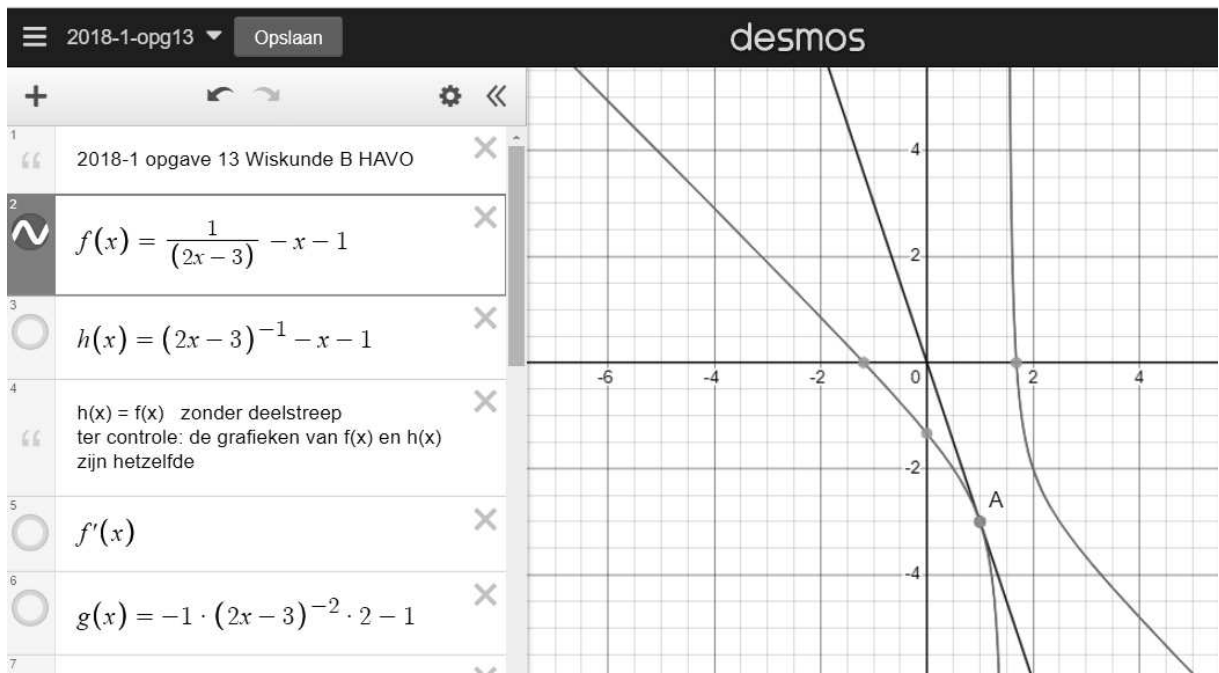
Succes met deze interactieve aanpak,

Jos Vervoort

WERKEN MET DESMOS

1	“ 2018-1 opgave 13 Wiskunde B HAVO	×	Regel 1 naam van de opgave
2	 $f(x) = \frac{1}{(2x-3)} - x - 1$	×	Regel 2 functie $f(x)$ rechts verschijnt de grafiek van $f(x)$
3	 $h(x) = (2x-3)^{-1} - x - 1$	×	Regel 3 Door $f(x)$ te herleiden tot deze vorm kun je deze beter differentiëren. Door op het icoon te klikken kun je de grafiek van $h(x)$ zien. Als de herleiding correct is overlappen de grafieken elkaar.
4	“ $h(x) = f(x)$ zonder deelstreep ter controle: de grafieken van $f(x)$ en $h(x)$ zijn hetzelfde	×	Regel 4 Uitleg van regel 3
5	 $f'(x)$	×	Regel 5 De grafiek van $f'(x)$, de afgeleide van $f(x)$ Deze wordt hierna gebruikt om de controleren of je $f'(x)$ correct hebt afgeleid.
6	 $g(x) = -1 \cdot (2x-3)^{-2} \cdot 2 - 1$	×	Regel 6 Door jou bepaalde afgeleide van $f(x)$ $g(x) = h'(x) = f'(x)$ Gebruik grafiek regel 5 voor controle.
7	“ $g(x)$ is de afgeleide van $h(x)$ of $f(x)$ $g(x) = f'(x)$	×	Regel 7 Uitleg van regel 6
8	 $k(x) = -\frac{2}{(2x-3)^2} - 1$	×	Regel 8 Herleiding van $g(x)$ tot vorm met deelstreep. Gebruik grafiek regel 5 voor controle.
9	“ herleiding $g(x)$ $k(x) = g(x) = f'(x)$	×	Regel 9 Uitleg regel 8

10	$f'(1)$	<input type="text" value="= -3"/>	Regel 10 Waarde van $f'(1)$, de rc van raaklijn in A ($x=1$), door deze tool berekend. $f'(1) = -3$
11	$g(1)$	<input type="text" value="= -3"/>	Regel 11 Waarde van $g(1)$ ter controle. $g(1) = f'(1) = -3$
12	“ rc van raaklijn in A ($x = 1$) -3		Regel 12 Uitleg regel 11
13	<input type="radio"/> $y = -3x + b$		Regel 13 Vergelijking raaklijn in A $rc = -3$ en b moet nog bepaald worden
14	“ vergelijking raaklijn k door A $rc = -3$ en b moet nog bepaald worden		Regel 14 Uitleg regel 13
15	$b = -3 + 3 \cdot 1$	<input type="text" value="b = 0"/>	Regel 15 Raaklijn gaat door $A(1,-3)$ $b = 0$ $x = 1$ en $y = -3$ ingevuld
16	“ punt $A(1,-3)$ ligt op lijn k		Regel 16 Uitleg regel 15
17	<input type="radio"/> $y = -3x$		Regel 17 Vergelijking raaklijn in punt A aan f
18	<input checked="" type="radio"/> $(1,-3)$ <input checked="" type="checkbox"/> Label: <u>A</u>		Regel 18 Punt A afbeelden in grafiek



Gebruik grafische rekenmachine:

De rekenmachine

Bij berekeningen kun je in veel gevallen je rekenmachine gebruiken. Je krijgt dan in het algemeen geen exacte antwoorden maar benaderingen.

Je kunt met je rekenmachine:

- grafieken plotten en tabellen maken
- de toppen van een grafiek vinden
- de snijpunten van grafieken vinden
- vergelijkingen oplossen
- de helling van een grafiek in een punt benaderen
- een hellingsgrafiek plotten

Bij gebruik van je rekenmachine geef je aan hoe je de rekenmachine hebt gebruikt. Daarbij neem je de volgende onderdelen op:

Invoer, Vensterinstelling en de gebruikte Opties.

Als in de opdracht staat: Bereken... of: Los op..., dan heb je de keuze tussen algebraïsch oplossen en oplossen met de rekenmachine.

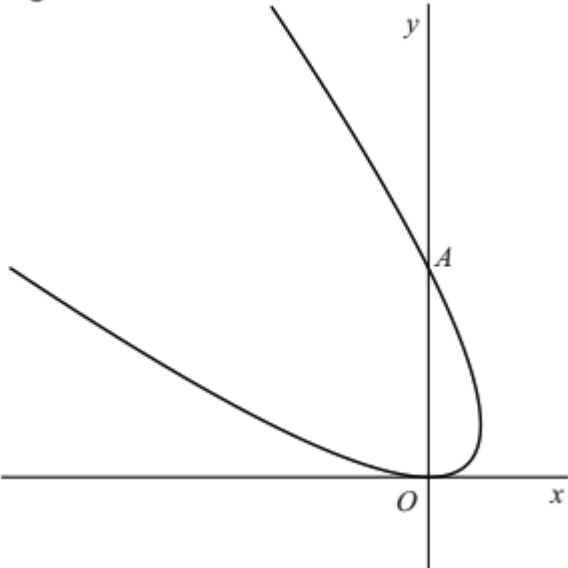
Als in de opdracht staat : Bereken algebraïsch...of: Los exact op dan moet je het probleem met algebra oplossen. Als je een probleem exact moet oplossen, dan moet het antwoord exact zijn. Moet je een probleem algebraïsch oplossen dan mag het antwoord benaderd worden.

ONDERWERP / OPGAVENUMMER/ DOMEIN / BLZ

2018-1	Bewegend punt	1-2	C / E	10
	Lijn door de toppen	3-4-5	B / C	12
	Zwaartepunt en rakende cirkels	6-7	B / E	15
	Maxima en minima	8-9	C / D	17
	Sheffield Winter Garden	10-11	B	19
	Natuurlijke logaritme van de wortel	12-13-14	B / C	22
	Vierkant onder grafiek	15	B	24
	Twee vierkanten op een kwart cirkel	16-17	E	26
2018-2	Loodrecht in de perforatie	1-2	B / C	29
	Ijsbol	3-4-5	B / C	31
	Constante verhouding	6-7	B / C	34
	Gekanteld vierkant	8-9-10	B / E	36
	Anderhalf keer zo groot	11	B / C	40
	Baan	12-13-14	D / E	42
	Buiten een vierkant	15-16	E	45
2019-1	Lijnen door de oorsprong en een cirkel	1	B / E	47
	Rechts van het snijpunt	2	C	48
	Altijd raak	3-4-5	B / C	50
	Slingshot	6-7	B	52
	Een logaritmische functie en haar afgeleide	8-9	B / C	55
	Gebroken goniometrische functie	10-11-12	B / C	57
	Driehoek met bewegend hoekpunt	13-14	B / E	58
	Afgeknotte paraboloid	15	B / C	63
2019-2	Minimale lengte	1	B / C	65
	Bewegend punt	2-3	B / C / E	67
	Raaklijn in knikpunt	4	B / C	69
	Optimale snijsnelheid	5-6-7	B / C	71
	Oppervlak onder een sinusgrafiek	8-9	C / D	75
	Horizontale en verticale asymptoot	10	B	77
	Wind aan zee	11-12	E	79
	Twee logaritmische functies	13-14-15	B	82
	Parabool en cirkel met variabele straal	16-17	C / E	85

2021-I	Parabool en twee lijnen	1	B / C	88
	Goniometrische functies	2-3-4	C / D	90
	Aardbevingen	5-6-7	B / E	93
	Een vierkant en vier sectoren	8-9	E	97
	Limiet van een verhouding	10	B / E	100
	Gebroken functie met een parameter	11-12	B / C	102
	Absolute natuurlijke logaritme	13	B	104
	P en P'	14	B / E	105
2021-2	Kromme K	1-2-3	B / C / E	107
	Vectoren spiegelen	4-5	E	109
	Raaklijnen bij een vierdegraads functie	6-7	B / C	111
	Bankenformules	8-9-10	B / C	113
	Twee wortelgrafieken	11-12	B / C	116
	Asymptoten en raaklijnen	13-14	B / C	119
	Driehoek in cirkel	15-16	B / C	121
2022-I	Inverse van $\ln(x)$	1-2-3	B / C	123
	Letter op computerbeeldscherm	4-5-6-7	B / C / E	125
	Gebroken sinusfunctie	8	C / D	126
	Raaklijn verschuiven	9-10-11	B / C	131
	Vulkaan	12-13-14	B / D / E	134
	Scheve asymptoot	15	B / C	137
	Vlieger	16-17	E	139

Opgaven/uitwerkingen 2018-I

		2018-I Bewegend punt	C / E
4p	1	<p>De beweging van een punt P wordt gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:</p> $\begin{cases} x(t) = 1 - t^2 \\ y(t) = (1 + t)^2 \end{cases}$ <p>In de figuur is de baan van P weergegeven.</p>	<p>figuur</p> 
4p	2	<p>De baan van P snijdt de y-as in de oorsprong O en in punt A. Zie de figuur. Bereken exact de snelheid waarmee P door punt A gaat.</p> <p>Voor elke waarde van t bevindt P zich op de kromme met vergelijking:</p> $(x + y)^2 = 4y$ <p>Bewijs dit.</p>	

		2018-I	Bewegend punt	B / C / E	
4p	1	$x(t) = 1 - t^2$ $y(t) = (1 + t)^2$ in punt A: $x = 0$ $1 - t^2 = 0$ geeft $t = -1 \vee t = 1$ $y(-1) = 0$ dus bij punt A hoort $t = 1$ $\frac{dx}{dt} = -2t$ en $\frac{dy}{dt} = 2(1+t)$ $[\frac{dx}{dt}]_{t=1} = -2$ en $[\frac{dy}{dt}]_{t=1} = 4$ snelheid is $(\sqrt{(-2)^2 + (4)^2} =) \sqrt{20}$ (of $2\sqrt{5}$)		 	1 1 1 1
4p	2	$(x + y) = (1 - t^2 + (1 + t)^2)$ $(x + y) = 2 + 2t$ $(x + y) = 2(1 + t)$ $(x + y)^2 = 4(1 + t)^2$ $4(1 + t)^2 = 4y$ dus $(x + y)^2 = 4y$		 	1 1 1 1

2018-I Lijn door de toppen B / C

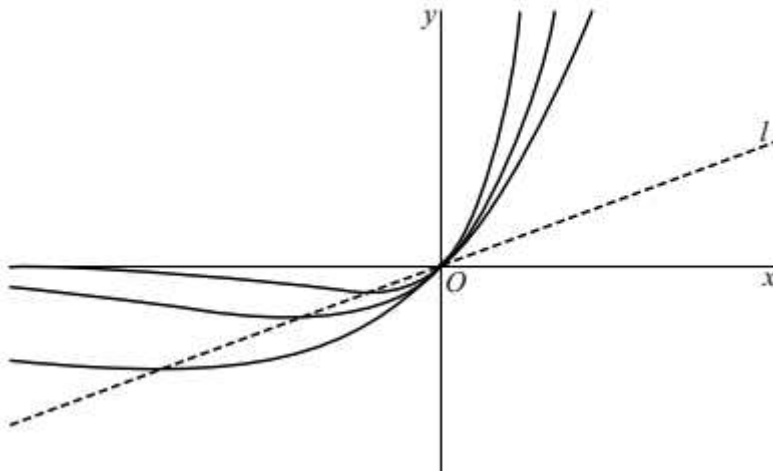
Voor elke waarde van a met $a > 0$ wordt de functie af gegeven door $f_a(x) = xe^{ax}$

De afgeleide functie f'_a wordt gegeven door $f'_a(x) = e^{ax} + axe^{ax}$.

In figuur 1 zie je voor een aantal waarden van a de grafiek van f_a .

Ook is de lijn l met vergelijking $y = \frac{1}{e}x$ weergegeven.

figuur 1



4p

3

Voor elke waarde van a met $a > 0$ heeft de grafiek van af precies één top. Bewijs dat deze top op lijn l ligt.

De functie F_a is gegeven door:

$$F_a(x) = \frac{1}{a}xe^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax}$$

F_a is een primitieve van f_a .

3p

4

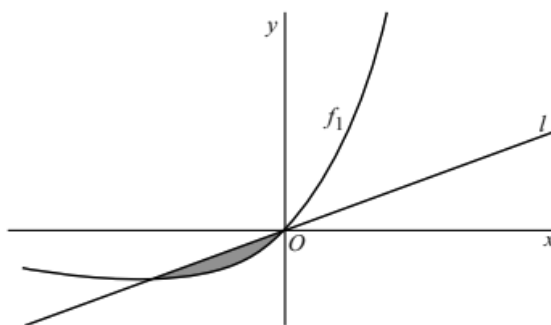
Bewijs dat F_a inderdaad een primitieve van f_a is.

Voor f_1 geldt $f_1(x) = xe^x$.

In figuur 2 is de grafiek van f_1 getekend, en ook lijn l .

Het vlakdeel tussen lijn l en de grafiek van f_1 is grijs gemaakt.

figuur 2



5p

5

Bereken exact de oppervlakte van het grijze vlakdeel.

2018-I Lijn door de toppen B / C

4p 3

$$f_a(x) = xe^{ax}$$

$$f'_a(x) = e^{ax} + axe^{ax}$$

$$f'_a(x) = e^{ax}(1+ax)$$

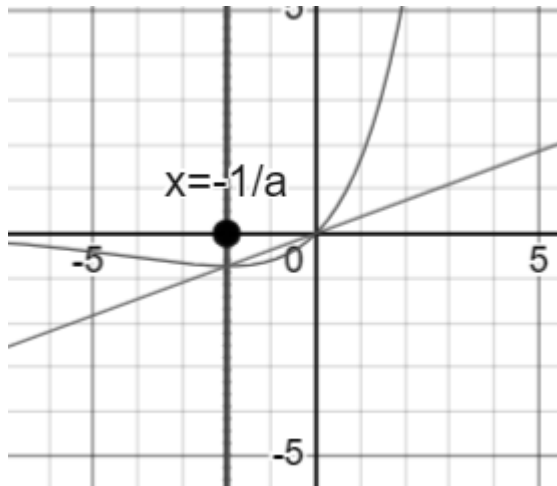
$$f'_a(x) = 0$$

$$1+ax = 0 \quad (e^{ax} \neq 0)$$

$$x = -\frac{1}{a} \quad (x\text{-coördinaat top})$$

$$(y\text{-coördinaat top}) \quad y = f_a\left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a} \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \cdot -\frac{1}{a}$$

dus top ligt op lijn $y = \frac{1}{e} \cdot x$



1
1
1
1
3

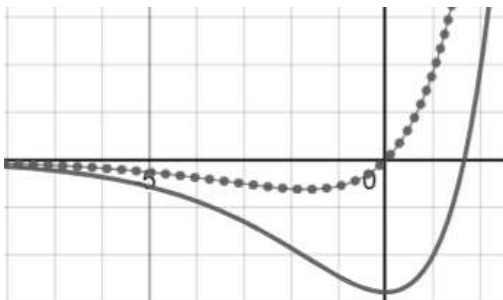
3p 4

$$f_a(x) = xe^{ax}$$

$$F_a(x) = \frac{1}{a}xe^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax}$$

$$F'_a(x) = \frac{1}{a}(e^{ax} + axe^x) - a \cdot \frac{1}{a^2} \cdot e^{ax} = \frac{1}{a}e^{ax} + xe^x - \frac{1}{a}e^{ax} = xe^{ax}$$

$$F'_a(x) = f'_a(x)$$



5p

5

$$f_1(x) = xe^x$$

$$l: g(x) = \frac{1}{e}x$$

x -coördinaten snijpunten f_1 en l :

$$xe^x = \frac{1}{e}x$$

$$\text{geeft } x = 0 \vee e^x = e^{-1}$$

$$e^x = e^{-1} \text{ geeft } x = -1$$

$$x = 0 \vee x = -1$$

$$O(V) = \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{e}x - xe^x \right) dx$$

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{e}x dx = \left[\frac{1}{2e}x^2 \right]_{-1}^0 = -\frac{1}{2e}$$

$$\int_{-1}^0 xe^x dx = \left[xe^x - e^x \right]_{-1}^0 = -1 - (-1 \cdot e^{-1} - e^{-1}) = -1 + \frac{2}{e}$$

$$O(V) = -\frac{1}{2e} - \left(-1 + \frac{2}{e} \right) = 1 - \frac{1}{2e} - \frac{2}{e} = 1 - \frac{5}{2e}$$

