

*Wiskunde*  
*voor alle vwo-niveaus*  
*Nieuwe versie 2022*

*Algebra-analyse-meetkunde-statistiek-kansrekening*  
*vectoralgebra-grafen-matrices-rijen-reeksen*  
*dynamische modellen-logica- perspectief*  
*Lorentzfactor-Poissonverdeling-complexe getallen*

Bij deze nieuwe versie

Deze uitgave is een volledige herziening van 'Wiskunde voor alle vwo-niveaus' van april 2022. Meer dan hiervoor is gedateerde stof weggelaten en zijn figuren, teksten en uitwerkingen van opgaven hier en daar aangevuld en soms verbeterd. Theorie en opgaven betreffende in onbruik geraakte onderwerpen van het vwo zijn weggelaten of aanzienlijk bekort.

De steeds geheel uitgewerkte opgaven en toepassingen zijn hoofdzakelijk bedoeld ter ondersteuning van de eraan voorafgaande theorie. Hun aantal is beperkt gehouden zodat u in betrekkelijk korte tijd (weer) stof (weer) kunt 'eigen' maken, en werkt het leren niet demotiverend omdat geen grote aantallen oefenopgaven doorgewerkt hoeven te worden. Elk onderdeel wordt steeds als compleet geheel op eind-vwo-niveau behandeld, dus niet volgens de structurele, concentrische opbouw van alle bekende wiskundemethoden, waarbij onderwerpen in de opvolgende leerjaren herhaald en uitgebreid worden volgens het lang beproefde, didactisch model van professor Herbart. Door deze opzet kunt u, mede door een zeer gedetailleerde inhoudsopgave en trefwoordenregister, de voor u meest interessante onderdelen snel vinden..

Aan het gebruik van de grafische rekenmachine (GR) wordt, geïntegreerd in de opgaven en toepassingen, alle nodige aandacht besteed. Wij kozen eerder voor de TI-83 van Texas Instruments, die vrijwel identiek is met de latere en iets handzamer TI-84.

De latere GR van Casio is overigens naar mijn mening gemakkelijker in het gebruik.

Ik hoop dat ook deze nieuwe uitgave aan uw verwachtingen zal mogen voldoen en houd mij voor opbouwende kritiek van harte aanbevolen.

Over de schrijver



Wim Gronloh begon zijn loopbaan als scheepswerktuigkundige bij de Nederlandse Koopvaardij en was na negen jaar vaartijd ruim 35 jaar werkzaam als leraar wis- en natuurkunde in het voortgezet onderwijs. Publiceerde in 1997 de wiskundemethode 'Basislijn' voor lbo-mavo en havo-vwo. Publiceert sedert 2006 wiskundeboeken voor vwo en havo.

Wim Gronloh

e-mail: [wimgronloh@kpnplanet.nl](mailto:wimgronloh@kpnplanet.nl)

Bussum, oktober 2022

I. FUNCTIES, GRAFIEKEN, EN FUNCTIEVERGELIJKINGEN	1- 42
1. Het begrip functie	1
2. Lineaire functies	2
3. Kwadratische functies	5
a. Nulpunten van een kwadratische functie	7
b. Ontbinden van kwadratische functies	7
4. Machtsfuncties	9
a. Grafieken van machtsfuncties	10
b. Transformaties	11
- Transformaties door translatie	11
- Transformaties door vermenigvuldiging	13
- Transformaties van wortelvormen	14
5. Exponentiële functies	15
- Exponentiële groei	16
6. Gebroken rationale functies	18
7. Grafieken van exponentiële functies	20
8. Logaritmische functies	21
a. logaritme van een getal	21
b. Eigenschappen van logaritmen	22
c. Inverse functies	22
9. Goniometrische functies	24
a. Definities in de eenheidscirkel	24
b. De eenheid radiaal	25
c. Herleidingformules	25
- sinus en cosinus van som en verschil	26
- verdubbeling- en halveringsformules	27
- formules van Simpson	27
d. Exacte waarden cirkel van de standaardhoeken	28
e. Sinus- en cosinusregel	28
- sinusregel	28
- cosinusregel ("Uitgebreide stelling van Pythagoras")	28
10. Periodieke functies	30
a. Sinusfunctie	30
b. Cosinusfunctie	31
c. Tangensfunctie	32
d. Sinusoïden	34
11. Limieten en continuïteit van functies	36
a. Continuïteit van een functie	36
b. Perforaties van functies	37

## IV

c. Rekenregels voor limieten	38
d. Rechter- en linkerlimieten	39
e. Existentie van limieten	39
f. Opgaven	41
II. OPLOSSEN VAN VERGELIJKINGEN EN ONGELIJKHEDEN	43- 60
1. Gelijkheden en ongelijkheden	43
2. Oplossen van vergelijkingen	45
a. Lineaire stelsels	45
b. Tweedegraads vergelijkingen	47
- ontbinden in factoren	47
- kwadraatafsplitsing	48
- de $abc$ -formule	48
c. Hogeregraads vergelijkingen	49
- de vergelijking $x^3 = 1$	49
- de vergelijking $x^3 = -1$	50
d. Exponentiële vergelijkingen	50
e. Logaritmische vergelijkingen	52
f. Logaritmische ongelijkheden	53
g. Goniometrische vergelijkingen	55
- $\sin A = p, \cos A = p$	55
- $\sin A = \sin B, \cos A = \cos B$	56,57
- $\sin A = \cos B$ of $\cos A = \sin B$	57
h. Parametervoorstellingen en bewegingsvergelijkingen	58
III. DIFFERENTIËREN EN AFGELEIDE FUNCTIES	61-78
1. Groeisnelheid	61
2. Differentiaalquotiënt en afgeleide functie	62
3. Differentieerbaarheid en continuïteit	63
4. Kenmerken van functies via hun afgeleiden	64
a. Stijgende en dalende functies	64
b. Convexe en concave kromming	65
c. Extreme waarden	65
- voorwaarden voor een lokaal extreem	66
d. Buigpunten	67
5. Regels bij het differentiëren	68
a. Factorregel	68
b. Somregel	68
c. Productregel	69
d. Quotiëntregel	69
6. Afgeleiden van elementaire functies	69
a. Afgeleide van een machtsfunctie	70
b. Afgeleiden van goniometrische functies	71
- afgeleide van $\sin x$ , $\cosinus x$ en $\tan gens x$	72

c. Afgeleiden van $e$ -machten	73
d. De kettingregel	73
e. Afgeleiden van exponentiële- en logaritmische functies	74
- exponentiële functies	74
- logaritmische functies	75
f. Afgeleiden van samengestelde functies	76
7. Praktische toepassingen van differentiëren	77
IV. INTEGREREN EN PRIMITIEVE FUNCTIES	79- 96
1. Oppervlakte en integraal	79
2. Integreren en stamprimitieven	81
a. Integreren	81
b. Stamprimitieven	82
c. Rekenregels bij het integreren	83
d. Bepaalde- en onbepaalde integralen	85
3. Substitutiemethode en partieel integreren	85
a. Substitutiemethode	85
b.. Partiële integratie	86
4. Toepassingen in de meetkunde	87
a. Lengte van een kromme	88
b. Oppervlakte tussen twee krommen	88
c. Inhoud van een omwentelingslichaam	89
- inhoud van een cilinder	89
- inhoud van een kegel	89
- inhoud van een bol	90
- inhoud van een omwentelingsellipsoïde	90
d. Oppervlakte van een omwentelingslichaam	93
- oppervlakte van een bol	94
- oppervlakte van een paraboloid	94
V. COMBINATORIEK EN KANSREKENING	97- 114
1. Driehoek van Pascal	97
- Binomium van Newton	99
- Routes in een rooster	100
2. Kansexperimenten	101
a. Somregel	101
b. Productregel	101
c. Complementregel	102
3. Permutaties, variaties en combinaties	103
a. Permutaties	103
b. Variaties	103
c. Combinaties	104

## VI

4. Onderscheid bij kansproblemen	105
a. Trekkingen zonder terugleggen	105
b. Trekkingen met terugleggen	106
c. Binomiale kansverdelingen	107
5. Verwachtingswaarden	110
- Somregel voor verwachtingswaarden	113
VI. STATISTIEK EN KANSREKENING	115- 138
1. Centrummaten	115
a. Gemiddelde	115
b. Modus	115
c. Mediaan	115
d. Kwartielsafstand, spreidingsbreedte en boxplot	116
2. Klassenindelingen	116
a. Klassenmidden	116
b. Modale klasse en klassenmediaan	117
3. Frequentiepolygonen	117
a. Cumulatieve frequenties	117
b. Relatieve cumulatieve frequenties	118
4. Beelddiagrammen	119
- geclusterd staafdiagram	119
- histogram	121
- reepdiagram	121
- gecombineerd beelddiagram	122
5. Spreidingsmaten	123
a. Standaardafwijking	124
- berekening van de standaardafwijking	124
- betekenis van de standaardafwijking	124
- standaardafwijking van een frequentieverdeling	125
b. Spreidingsmaten van binomiale kansverdelingen	127
- verwachtingswaarde	127
- variantie	128
- standaardafwijking	128
- de wortel- $n$ wet	129
6. Normale verdelingen	132
Eigenschappen van de normaalkromme	133
a. Berekening van standaardscores	134
b. Standaardiseren	135
VII . PLANIMETRIE	139-172
1. Driehoeken	139
a. Stelling van Pythagoras	140
b. Goniometrische verhoudingen	140

## VII

- Bijzondere lijnstukken in een driehoek	141
1. Zwaartelijnen	141
2. Bissectrices	141
3. Hoogtelijnen	142
4. Middelloodlijnen	143
5. Rechte van Euler	143
2. Vierhoeken	144
- koordenvierhoek	145
3. Regelmatige veelhoeken	145
a. De ‘Guldensnede’ en het getal phi	146
b. Regelmatige tienhoek	147
c. Regelmatige vijfhoek	148
d. Rij van Fibonacci	149
4. De cirkel	149
a. Hoeken in een cirkel	150
- middelpuntshoek	150
- omtrekshoek	150
- binnenhoek van een cirkel	151
- buitenhoek van een cirkel	151
- hoek tussen een koorde en een raaklijn	151
b. Cirkels om, in, en aan een driehoek	152
- omgeschreven cirkel	152
- ingeschreven cirkel	153
- aangeschreven cirkels	153
c. Omtrek van een cirkel	154
- Getal van Archimedes en pi	155
d. Oppervlakte van een cirkel	156
e. Meetkundige vraagstukken	157
5. Kegelsneden	160
a. De cirkel	161
b. De ellips	161
c. De parabool	162
d. De hyperbool	164
6. Transformaties	165
a. Assentransformaties	166
- transformatie door assentranslatie	166
- transformatie door assenrotatie	166
b. Transformaties door vermenigvuldiging	167
- vermenigvuldiging ten opzichte van een punt	167
- vermenigvuldiging ten opzichte van een lijn	168
- oppervlakte en omtrek van een ellips	169
c. Poolcoördinaten	170
- Spiraal van Archimedes	171
- De Cardioïde	172

## VIII

VIII. STEREOMETRIE		173- 190
1. Meetkundige lichamen		173
a. Het prisma		173
b. De piramide		173
c. De cilinder		174
d. De kegel		174
e. De bol		174
2. Oppervlakte en inhoud van lichamen		174
a. Oppervlakte van prisma en piramide		174
b. Inhoud van een prisma		174
c. Inhoud en oppervlakte van een cilinder		175
d. Inhoud van een piramide		176
e. Inhoud en oppervlakte van een kegel		176
- oppervlakte van een afgeknotte kegel		177
f. Inhoud van een bol naar Archimedes		178
3. Oppervlakte en inhoud van boldelen		179
a. Bolsegment		179
- Inhoud en oppervlakte van een bolsegment		179
4. Regelmatige vlakvullingen		181
a. regelmatige patronen		181
b. halfregelmatige patronen		182
5. Veelvlakken		182
a. Platonische veelvlakken		183
- dualiteit van veelvlakken		184
- dualiteit van kubus en octaëder		185
b. Archimedische veelvlakken		185
- mogelijke configuraties		185
- knooppunten van de derde orde		186
- knooppunten van de vierde orde		187
- knooppunten van de vijfde orde		187
c. Onregelmatige veelvlakken		188
- antiprisma		188
- rombische triacontaëder		188
IX. VECTORALGEBRA		191- 216
1. Het begrip vector		191
2. Basisbewerkingen van vectoren		192
a. Meetkundige som en verschil van twee vectoren		192
b. Meetkundig scalair product		192
3. Vectorcoördinaten en kentallen		193
a. Plaatsvectoren in het platte vlak		193
b. Plaatsvectoren in de driedimensionale ruimte		194



## IX

4. Algebraïsche bewerkingen van vectoren	194
a. De lengte van een vector	195
b. Algebraïsche som van twee vectoren	195
c. Algebraïsch scalair product	196
5. Inwendig product van twee vectoren	197
6. Meetkunde met vectoren	199
7. Vectorvoorstellingen en vectorvergelijkingen	201
a. Vectorvoorstelling van een punt	201
b. Vectorvergelijking van een lijn	201
c. Normaalvergelijking van een lijn	202
d. Vectorvergelijking van een vlak	203
e. Normaalvergelijking van een vlak	203
8. Hoeken en afstanden in vectorruimten	205
a. Vectorrotaties over $90^\circ$	205
b. Hoek tussen twee lijnen	205
c. Afstanden van punten en lijnen	206
9. Vectorproducten en determinanten	206
a. Uitwendig product en blokproduct	206
- eigenschappen van het uitproduct	207
- kentallen van het uitproduct	208
b. Determinanten	210
- Regel van Sarrus	210
- rekenregels voor vierkante determinanten	211
c. Uitproduct en blokproduct als determinanten	213
- het uitproduct	213
- het blokproduct	213
X. ANALYTISCHE MEETKUNDE MET VECTOREN	217-226
1. Afstanden in vectorruimten	217
a. Afstand van een punt tot een lijn	217
b. Afstand tussen twee evenwijdige lijnen	218
c. Afstand tussen twee elkaar kruisende lijnen	218
d. Afstand van een punt tot een vlak	219
2. Hoek tussen lijnen en vlakken	220
a. Hoek tussen twee lijnen	220
b. Hoek tussen een lijn en een vlak	221
c. Hoek tussen twee elkaar snijdende vlakken	221
- snijlijn van twee vlakken	223
XI. GRAFEN EN MATRICES	227- 248
1. Werken met grafen en matrices	227
a. Voorstellingen van een graaf	227

b. Gelijkwaardige grafen	227
c. Graaf en matrix	228
d. Het 'Handelsreizigersprobleem'	229
2. Maximale en minimale verbondenheid van een graaf	230
3. Bewerkingen met matrices	231
a. Som en verschil van twee matrices	231
b. Scalair product van een matrix en een reëel getal	232
c. Product van twee matrices	232
4. Overgangsmatrices	236
a. Toepassingen op diverse deelgebieden	236
b. Groei van populaties	238
c. Markowketens	239
d. Stabilisatie	240
5. Populatievoorspellingen volgens Leslie	242
a. Betekenis van een Lesliegraaf	242
- leeftijdsopbouw en totale populatie	243
b. Exponentiële groei	244
c. Bijzondere populatiegroei	244
d. Bevolkingsgroei in China	245
e. Ontwikkeling van een natuurgebied	247
6. De zeven bruggen van Koningsbergen	248
XII. RIJEN EN REEKSEN	249- 274
1. Getallenrijen	249
2. Speciale rijen	250
a. Rekenkundige rij	250
b. Meetkundige rij	251
c. Rij van Fibonacci	253
3. Convergentie en divergentie van rijen	254
4. Reeksen	255
- Convergentie en divergentie van reeksen	255
- Quotiëntencriterium van d' Alembert	256
- Regel van Leibniz	257
5. Convergentie van standaardreeksen	258
a. Rekenkundige reeks	258
b. Meetkundige reeks	258
c. Harmonische reeks	259
d. Alternierende harmonische reeks	260
6. Machtreeksen	260
a. Eigenschappen van machtreeksen	261
b. Convergentie van machtreeksen	262
- meetkundige reeks	262
- alternerende machtreeks	262

7. Machtreeksontwikkelingen volgens Taylor en MacLaurin	264
a. de functie $f(x) = e^x$	266
b. $f(x) = \sin(x)$	266
c. $f(x) = \cos(x)$	267
d. $f(x) = \tan^{-1}(x)$	267
e. $f(x) = \ln(x)$	268
8. Resttermen	270
- Resttermformule van Taylor	271
- Formule van Lagrange	271
9. Het Getal van Euler en het getal pi	271
a. Het Getal $e$ van Euler	271
- definitieformule van $e$	272
b. Het getal pi	273
XIII. DYNAMISCHE MODELLEN EN DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN	275-290
1. Differentiaalvergelijkingen	275
a. Voorbeelden	275
b. Lijnelementenvelden	276
c. Methode van Euler	279
d. Continu dynamische modellen	281
XIV SPECIFIEKE ONDERWERPEN NAAR NIVEAU EN PROFIEL	287- 362
A. Perspectief	287
1. Beelden via een glasplaat	287
2. Perspectiefbeelden van objecten	288
a. Perspectiefbeeld van een lijn	288
b. Beeld van evenwijdige lijnen in het grondvlak	289
c. Beeld van lijnen evenwijdig met het tafereel	290
d. Beeld van een punt in het grondvlak	290
e. Beeld van een tegelpatroon	291
3. Ware gedaante van het perspectiefbeeld	291
- ware perspectiefbeeld van tegelvloeren	293
4. Eenpuntperspectief	293
a. Kubus en vierkante balk	294
b. Tegelpaden van vierkante tegels	298
5. Tweepuntperspectief	299
B. Exacte logica	305
1. Conjunctie, disjunctie, implicatie	305
2. Waarheidstabellen	306
a. Waarheidstabellen van $p \Rightarrow q$ , $p \wedge q$ en $p \vee q$	306
b. De ontkenning niet $A$ ( $\neg A$ )	307

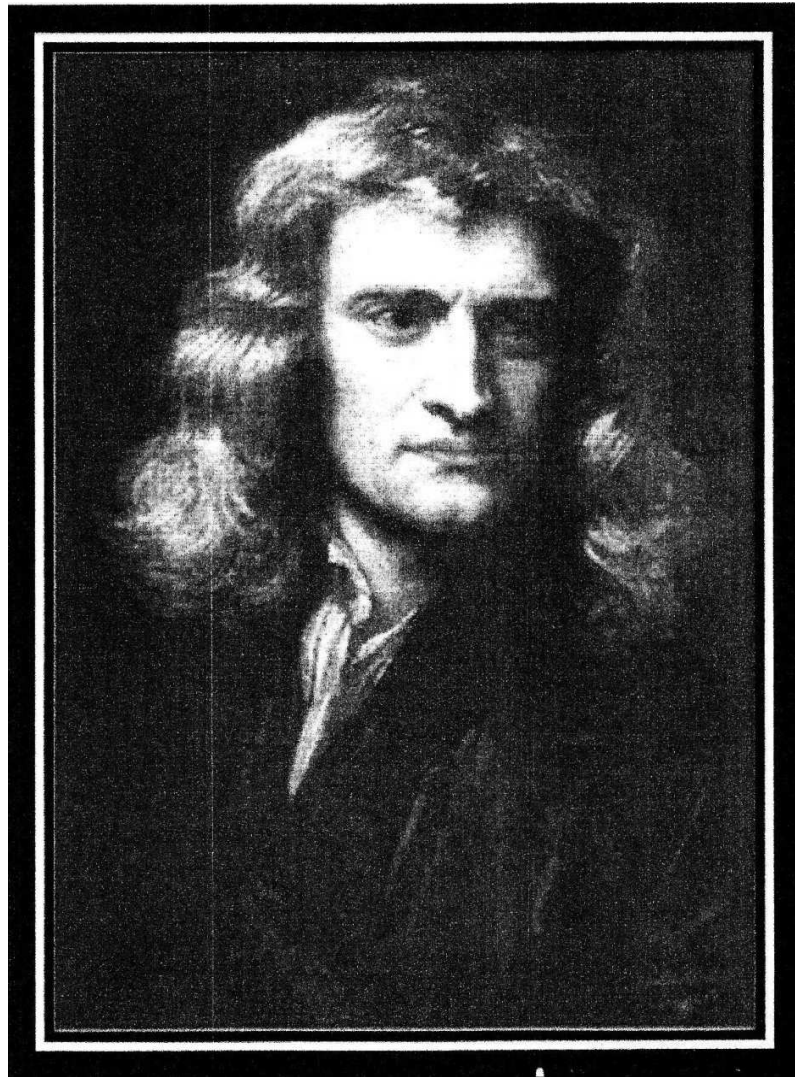
c. Equivalenties	308
- De Prinses en de tijger	310
3. Bijzondere proposities	312
a. Bewerkingsvolgorden	312
b. Modus ponens, modus tollens, 'modus nonsens'	312
c. Tautologieën, contradicties en paradoxen	314
4. Logische puzzels	315
a. De vier tegels	315
b. Het inslikken van olifanten	316
c. De vijf slavinnen van de kalief	317
d. De zeven bordjes	318
5. Algebra van Boole	319
a. Eigenschappen van de logische operatoren	319
- associatieve eigenschap	319
b. Speciale eigenschappen	320
C. Projectieve meetkunde	321
Kegelsneden in projectie	321
a. De ellips	322
- ware gedaante van de doorsnede	323
b. De parabool	324
- ware gedaante van de doorsnede	325
c. De hyperbool	325
- gelijkzijdige hyperbool	325
- ongelijkzijdige hyperbool	326
D. De Lorentzfactor	327
E. Beslissingen na steekproeven	329
a. Normale toetsen	329
- onderzoek naar de werking van een vulmachine	329
- toetsing van beweringen	333
b. Binomiale toetsen	334
c. Tekentoetsen	336
F. Poisson-verdeling	339
G. Complexe getallen	343
a. Rekenen met complexe getallen	343
- Som, product en quotiënt	343
- Het complexe vlak	344
- Absolute waarde van een complex getal	344
- Complexe getallen en poolcoördinaten	344
- Complexe getallen als vectoren	345
b. Meetkunde in de complexe vectorruimte	345
- De cirkel	345
- De eenheidscirkel, sinus $z$ en cosinus $z$	347
- Product van twee getallen op de eenheidscirkel	347
- Formules van Euler	347

- De polaire of $(r, \varphi)$ - notatie	348
c. De complexe functie $e^z$	352
- de complexe functies cosinus $z$ en sinus $z$	352
d. Wortels en polynomen	353
- $n^{\text{de}}$ machtswortels en $n^{\text{de}}$ graadspolynomen	354
e. Hoofdstelling van de Algebra	355
- 'Grafiek' van een complexe functie	356
f. Reële polynomen	357
Gebruikte symbolen en uitdrukkingen	359,360
Trefwoordenregister	361-364



'NIET ALLES KAN AAN  
ALLEN UITGELEGD WORDEN'

*Pythagoras, geboren op Samos (eiland in de Egeïsche Zee) circa 572 jaar v. Chr. Richtte omstreeks 530 jr. v. Chr. in Croton de school van de Pythagoreeërs op. Zij bewezen de beroemdste stelling uit de klassieke wiskunde: In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de schuine zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de twee rechthoekszijden. De Babyloniërs kenden de eigenschap al ca. 1000 jr. v. Chr. De Egyptische 'harpedonaptai' (touwspanners) pasten de stelling ca. 3000 jr. v. Chr. toe om rechte hoeken uit te zetten via knopentouwen (knopen op afstanden 3-4-5; 5-12-13; 8-15-17,.. (de later zogenoemde 'Pythagoras-triples').*



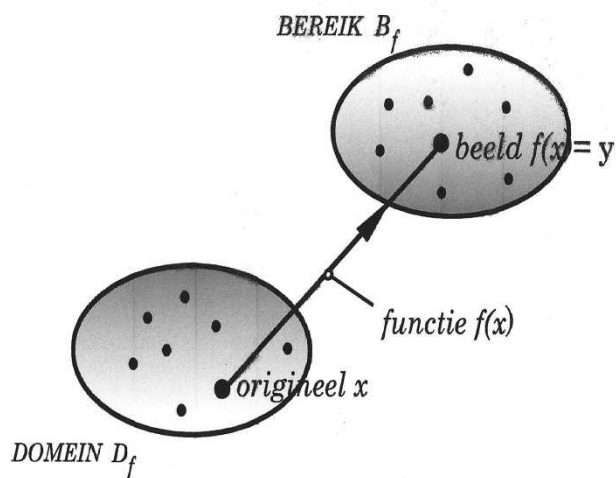
*Sir Isaac Newton, geboren in 1642 te Woolsthorp, overleden in 1727 te Kensington. Engels wis- en natuurkundige, astronoom, natuurfilosoof, alchemist, officieel muntmeester en theoloog. Publiceerde de differentiaal- en integraalrekening in zijn meesterwerk 'Principia' in 1687 betreffende zwaartekracht, banen van hemellichamen, grondwetten van de dynamica, .. De Britse 'Royal Society' beschouwde Newton in 2005 als grootste geleerde uit de wetenschap ooit.*

## I. FUNCTIES, GRAFIEKEN EN FUNCTIEVERGELIJKINGEN

Als je rustig wandelend per uur 4 km aflegt dan is de afgelegde afstand in 2½ uur dus 10 km. De lengte van de afgelegde weg *bij die snelheid* is afhankelijk van de *tijd* ofwel: de afstand is een **functie** van de tijd. Zo bestaan er talrijke grootheden die afhankelijk zijn van *één of meer* andere grootheden waarbij het verband tussen die grootheden in een functie is vastgelegd door een zeker **functievoorschrift**.

Als je in bovenstaand geval ook rekening wilt houden met een *wisselende snelheid*, dan is de lengte van de afgelegde weg een functie van *de tijd en de gemiddelde snelheid*.

### 1. Het begrip functie



Is bijvoorbeeld een functie  $f$  gegeven door het functievoorschrift:

‘vermenigvuldig met drie’ dan is  $f(3) = 9$ ,  $f(-7) = -21$  en  $f(a) = 3a$ .

De functie wordt dan geschreven als:

$f(x) = 3 \cdot x$  of korter  $f: y = 3x$

De getallen 3, -7 en  $a$  heten de **originelen**

van de functie  $f(x) = 3x$ , de getallen 9, -21 en  $3a$  zijn de bijbehorende **beelden** ofwel **functiewaarden van  $f$** .

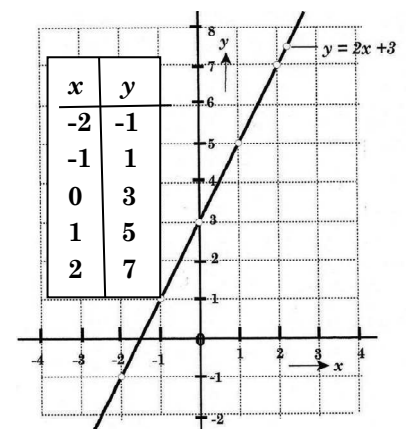
De verzameling **originelen** van  $f$  heet het **domein  $D_f$**  van de functie, de verzameling **beelden** heet het **bereik  $B_f$** .

Als *geen specifiek domein of bereik is aangegeven*, dan wordt er van uitgegaan dat *alle originelen en hun beelden* elementen zijn van de **verzameling reële getallen  $\mathbb{R}$** .

Een functie van  $x$  is een zeker voorschrift  $f$ , ( $g, h, i, \dots$ ) dat bij elk origineel  $x$  uit het domein  $D_f$ , precies één beeld  $f(x) = y$  uit het bereik  $B_f$  bepaalt

Vaak worden origineel  $x$  en beeld  $y$  van een functie getekend als punten  $P(x, y)$  van een grafiek in een rechthoekig coördinatenstelsel: het origineel  $x$  op een horizontale  $x$ -as, het beeld  $y = f(x)$  op de verticale  $y$ -as. Het snijpunt van de assen is de **oorsprong  $O$** . In bijgaande figuur is met behulp van de  $x$ - $y$ -tabel, de **grafiek** getekend van de functie:  $f(x) = y = 2x + 3$ .

Maak in opgaven steeds goed onderscheid tussen *een functie  $f(x)$*  en *de grafiek van die functie  $f(x)$* . \*)



\*) In vroegere lesmethoden van het voortgezet onderwijs kon met de 'functie  $f$ ' zowel het functievoorschrift  $f$  als de grafiek van  $f$  worden bedoeld.

## 2. Lineaire functies

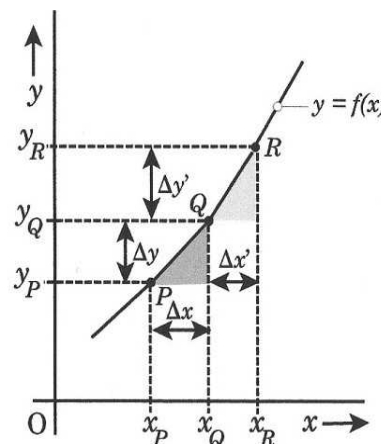
Voor elk tweetal punten  $P$  en  $Q$  van een *lineaire functie* geldt dat de **verhouding** tussen een zekere toename  $\Delta x = x_Q - x_P$  van  $x$  en de *bijbehorende* toename  $\Delta y = y_Q - y_P$  van  $y$  steeds een **vaste waarde** heeft. De betekenis hiervan is als volgt:

Stel  $P$  en  $Q$  zijn twee naburige punten op de grafiek van een lineaire functie  $y = f(x)$  waarbij  $P = (x_P, y_P)$  en  $Q = (x_Q, y_Q)$ .

De *verhouding*  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  bepaalt de *hoek* die het *lijnstukje*  $PQ$  maakt met de *positieve*  $x$ -as, dus bepaalt de *richting* van  $PQ$ .

Stel  $R(x_R, y_R)$  is een *ander* naburig punt van  $Q$  op de grafiek met  $x_R = x_Q + \Delta x'$  en  $y_R = y_Q + \Delta y'$ , dan wordt de *richting* van  $QR$

bepaald door de verhouding  $\frac{\Delta y'}{\Delta x'}$



Volgens de *definitie* heeft de verhouding  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  bij een lineaire functie een *vaste waarde* zodat er

geldt:  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$  dus zijn de *richtingen* van de *lijnstukjes*  $PQ$  en  $QR$  *gelijk* ofwel:

$PQ$  en  $QR$  liggen in elkaars verlengde dus  **$P, Q$  en  $R$  liggen op een rechte lijn**

(dit verklaart de naam *lineaire functie*).

Voor de lijn  $l$  tussen twee willekeurige punten  $P = (x_P, y_P)$  en  $Q = (x_Q, y_Q)$  van  $l$  geldt nu dat

de factor  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$  ( $\frac{\Delta y}{\Delta x} \neq 0$ ) de **richting bepaalt** van lijn  $l$ .

De waarde  $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$  ( $x_Q - x_P \neq 0$ ) heet daarom de **richtingscoëfficiënt**  $a$  van  $l$ . ... (1)

We bepalen nu een *vergelijking* van lijn  $l$ , dus een *betrekking* tussen de waarden  $x$  en  $y$  waaraan *alle* punten  $P(x, y)$  van lijn  $l$  ( $l$  niet evenwijdig met de  $y$ -as) *voldoen*:

Kies het punt  $P = (x_P, y_P) = (0, b)$  van  $l$  **op de  $y$ -as** en een punt  $Q = (x_Q, y_Q) = (x, y)$  van  $l$ .

Uit (1):  $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$  ( $\frac{\Delta y}{\Delta x} \neq 0$ ) volgt  $a = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{y - b}{x - 0} = \frac{y - b}{x} \Rightarrow ax = y - b \Rightarrow y = ax + b$ .

Omdat een *lineaire functie* dus voldoet aan de vergelijking  $f(x) = y = ax + b$  noemt men *deze een eerstegraads functie* omdat daarin de variabele  $x$  *hoogstens tot de eerste macht* voor komt.

*De grafiek van een lineaire functie is een (rechte) lijn  $l$  met vergelijking  $y = ax + b$  waarin  $a$  de richtingscoëfficiënt is van  $l$  en  $b$  de  $y$ -coördinaat van het snijpunt van  $l$  met de  $y$ -as.*

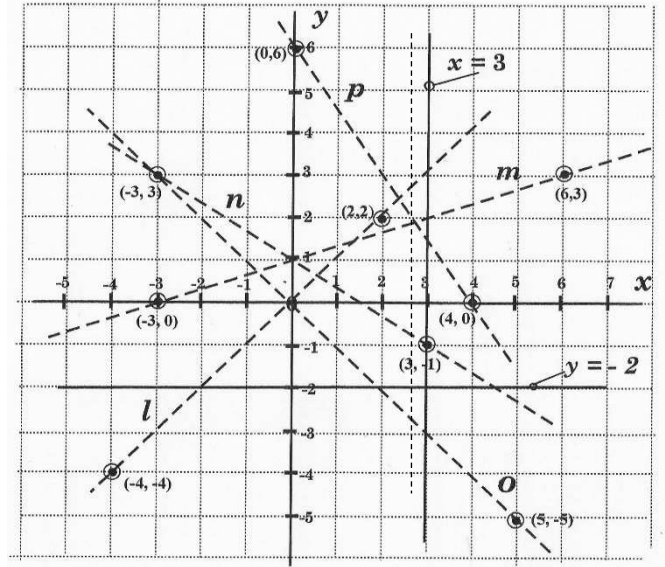
Als  $l \parallel y$ -as dan is bij elke  $y$ :  $x_P = x_Q$  dus  $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$  bestaat dan niet omdat  $x_Q - x_P = 0$ .

Bij elke  $y$  is dan  $x = x_P = x_Q$  dus is  $x = x_P (= x_Q)$  de vergelijking van  $l$ .



**Voorbeelden**

1. In de figuur hiernaast zijn in een *orthonormaal coördinatenstelsel XOY* de lijnen *l, m, n, o* en *p* getekend door twee omcirkelde gegeven punten.  
Een orthonormaal stelsel bestaat uit twee onderling loodrechte coördinaatassen  
De eenheden op de assen hebben daarbij de standaardlengte 1.



- Bepaal van elke lijn de vergelijking
- Bepaal de vergelijking van de X-as en de Y-as.
- Hoe lopen de lijnen  $q: x = 3$  en  $r: y = -5$ ?

a. De grafiek van een eerstegraads functie  $y = f(x) = ax + b$ , is een rechte lijn *l* waarin *a* de *richtingscoëfficiënt* is van *l* en *b* de *y*-coördinaat van het *snijpunt* van *l* met de *y*-as.  
In de figuur zijn van elke lijn steeds twee *roosterpunten* (punten in het snijpunt van twee roosterlijnen) met een cirkeltje aangegeven waarmee de vergelijking is te bepalen.

- Zo is van lijn *l*:  $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{2 - (-4)}{2 - (-4)} = 1$  en  $b = 0$  want O (0,0) ligt op lijnstuk

(-4,4) - (2,2). dus de vergelijking is  $l: y = 1 \cdot x + 0 \Rightarrow l: y = x$ .

- Voor *m* geldt  $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{3 - 0}{6 - (-3)} = \frac{1}{3}$  en  $b = 1$

dus wordt de vergelijking :  $m: y = \frac{1}{3}x + 1$

- Voor *n* geldt  $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{-1 - 3}{3 - (-3)} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$  en  $b = 1$

dus is de vergelijking is  $n: y = \frac{-2}{3}x + 1$

- Voor *o* geldt  $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{-5 - 3}{5 - (-3)} = \frac{-8}{8} = -1$  en  $b = 0$

dus de vergelijking is:  $o: y = -x$

- Voor *p* geldt  $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{0 - 6}{4 - 0} = -\frac{3}{2}$  en  $b = 6$

dus de vergelijking is:  $p: y = -\frac{3}{2}x + 6$

- b - Voor *alle punten op de x-as* geldt:  $y = 0$ .

De vergelijking van de *x*-as is dan:  $y = 0$ .

Zo geldt voor alle punten van de *y*-as  $x = 0$  dus is de vergelijking van de *y*-as  $x = 0$

- c - Alle punten (x, y) van de lijn *q* met vergelijking  $x = 3$ , zijn van de vorm (3, y).

Dus de lijn  $x = 3$  is de *lijn, evenwijdig met de y-as door het punt (3, 0)*

Zo is de lijn  $r: y = -2$  de *lijn evenwijdig met de x-as door het punt (0, -2)*

2. - a. Bepaal de vergelijking van de lijn  $l$  door de punten  $A = (3, 4)$  en  $B = (-4, -2)$

- b. Bepaal het snijpunt van de lijn  $l$  met de lijn  $m: y = 2x - 3$

a. In  $l: y = ax + b$  volgt de richtingscoëfficiënt

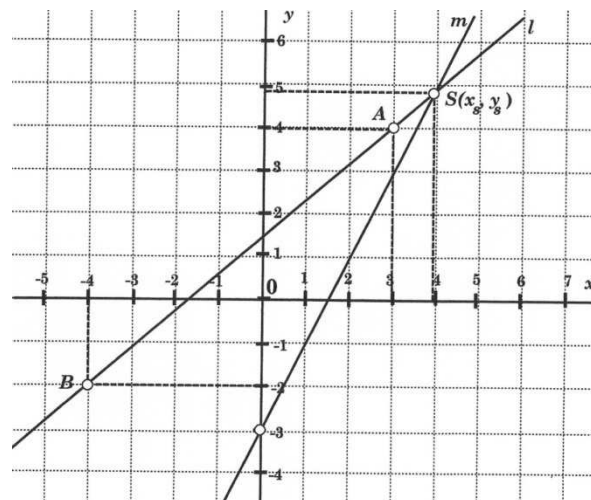
$$\text{van } l \text{ uit: } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{4 - (-2)}{3 - (-4)} = \frac{6}{7}$$

Lijn  $l$  heeft dan als vergelijking:  $l: y = \frac{6}{7}x + b$ .

Hierin de coördinaten van  $A = (3, 4)$  (of  $B = (-4, -2)$ )

ingevuld geeft  $4 = \frac{6}{7} \cdot 3 + b \Rightarrow b = \frac{10}{7}$  zodat de

vergelijking is  $l: y = \frac{6}{7}x + \frac{10}{7}$  \*)



b. Het snijpunt  $S(x_s, y_s)$  van de lijnen  $l$  en  $m$  ligt zowel op  $l$  als op  $m$ , dus voldoen de coördinaten  $x_s$  en  $y_s$  aan beide vergelijkingen:

$$l: y = \frac{6}{7}x + \frac{10}{7} \text{ en } m: y = 2x - 3, \text{ zodat dan } \frac{6}{7}x_s + \frac{10}{7} = 2x_s - 3 \Rightarrow \frac{8}{7}x_s = \frac{31}{7} \Rightarrow x_s = \frac{31}{8}$$

$$\text{Uit } y_s = 2x_s - 3 = -\frac{1}{2}x_s + \frac{9}{2} \text{ volgt dan } y_s = 2 \cdot \frac{31}{8} - \frac{24}{8} = \frac{38}{8} = \frac{19}{4}$$

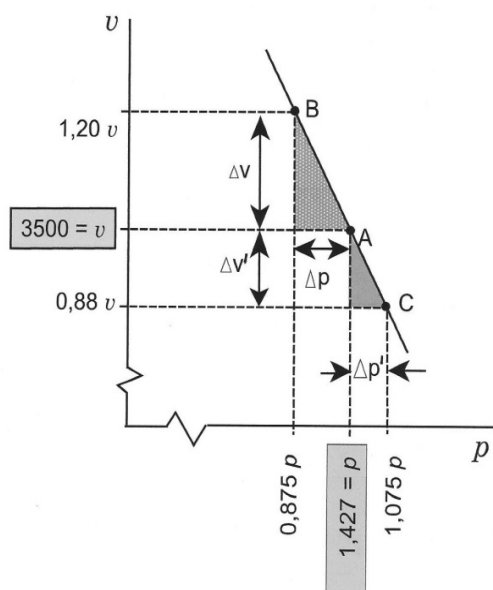
**Het snijpunt van  $l$  en  $m$  is dan het punt  $S(\frac{31}{8}, \frac{19}{4})$ .**

3. Bij een 'witte pomp' in Vreemdeuiden verkoopt men gemiddeld per dag 3500 liter

'Euro-95' benzine als hun literprijs € 1,427 bedraagt. (punt A in de grafiek).

Verlaagt men de prijs met 12,5% dan stijgt de verkoop met 20% (punt B).

Verhoogt men de prijs met 7,5% dan daalt de verkoop met 12%. (punt C).



a. Bewijs dat de punten  $A, B$  en  $C$  op een rechte lijn liggen.

b. Toon aan dat op het traject  $BC$  de toename van de verkoop bij prijsdaling evenredig is met de afname van de verkoop bij prijsstijging.

a. De richtingscoëfficiënt van  $AB$  is:

$$\frac{\Delta v}{\Delta p} = \frac{v - 1,20v}{p - 0,875p} = \frac{-0,20v}{0,125p} = -1,6 \cdot \frac{v}{p}$$

De richtingscoëfficiënt van  $CA$  is  $\frac{\Delta v'}{\Delta p'} = \frac{0,88v - v}{1,075p - p}$

$$= \frac{-0,12v}{0,075p} = -1,6 \cdot \frac{v}{p}$$

De richtingen van  $AB$  en  $CA$  zijn dus gelijk  $\Rightarrow$

**$A, B$  en  $C$  liggen op een rechte lijn.**

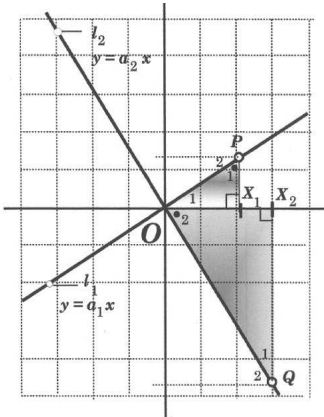
\*) Met de grafische rekenmachine TI-83-84 gaat dit als volgt: Voer via de accoladen  $\{3, -4\}$  [STO] L1 en  $\{4, -2\}$  [STO] L2 in Druk op [STAT] [CALC] en kies optie 4 [ENTER]: LinReg ( $ax + b$ ) [ENTER]

De waarden van  $a$  en  $b$  worden direct getoond: LinReg  $y = ax + b: a \approx .85714... = \frac{6}{7}; b \approx 1.42857... = \frac{10}{7}$

b. De uitkomst van a. betekent dat op het traject  $BC$  de *verhouding prijsstijging : verkoopdaling*  $(-1,6)$  gelijk is aan de *verhouding prijsdaling : verkoopstijging*.  $(-1,6)$ . De *verkoopdaling* bij toenemende prijs is dus **evenredig** met de *verkoopstijging* bij dalende prijs, want een *evenredigheid* is een *gelijkheid van twee verhoudingen*.

**Eigenschap:**

Als twee lijnen  $l_1$  en  $l_2$  loodrecht op elkaar staan dan is het product van hun richtingscoëfficiënten  $a_1$  en  $a_2$  gelijk aan  $-1$ , dus  $a_1 \cdot a_2 = -1$  en ook omgekeerd



**Bewijs:** In de figuur is vanuit een punt  $P$  op  $l_1$  een loodlijn  $PX_1$  op de  $x$ -as neergelaten en ook een loodlijn  $QX_2$  vanuit een punt  $Q$  van  $l_2$  op de  $x$ -as.

De richtingscoëfficiënten van  $l_1$  en  $l_2$  zijn respectievelijk:

$$a_1 = \frac{PX_1}{OX_1}; a_2 = \frac{-QX_2}{OX_2}, \text{ dus } a_1 \cdot a_2 = - \frac{PX_1}{OX_1} \cdot \frac{-QX_2}{OX_2} \quad \dots(1)$$

Van de  $\Delta OPX_1$  en  $OQX_2$  is  $\angle O_2 + \angle O_1 = 90^\circ$  (gegeven).

Ook is in  $\Delta OPX_1$ :  $\angle P_1 + \angle O_1 = 90^\circ$

dus is  $\angle P_1 = \angle O_2$ . (met zwarte stip).

De  $\Delta OPX_1$  en  $OQX_2$  zijn gelijkvormig omdat ze rechthoekig zijn en

$$\angle P_1 = \angle O_2 \text{ dus } PX_1 : OX_1 = OX_2 : QX_2 \text{ ofwel } -PX_1 : OX_1 = -OX_2 : QX_2 \quad \dots (2)$$

(2) in (1) gesubstitueerd geeft dan  $a_1 \cdot a_2 = - \frac{PX_1}{OX_1} \cdot \frac{QX_2}{OX_2} = -1$  zoals was te bewijzen.

De stelling geldt ook omgekeerd: Als  $a_1 \cdot a_2 = -1$  dan staan  $l_1$  en  $l_2$  loodrecht op elkaar.

Om het omgekeerde aan te tonen lees je bovenstaand bewijs van achteren naar voren.

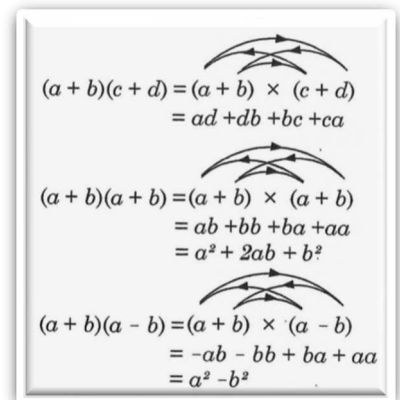
**3. Kwadratische functies**

Een kwadratische- ofwel tweedegraadsfunctie, is een functie  $f(x)$  van de vorm  $f(x) = ax^2 + bx + c$  waarin  $a, b$  en  $c$  reële getallen zijn en  $a \neq 0$

Voor het onderzoek naar de eigenschappen van tweedegraadsfuncties, herleiden we eerst de algemene vorm door middel van 'kwadraatsplitsing': \*)

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + a \cdot \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \end{aligned}$$

ofwel:  $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$  waarin  $D = b^2 - 4ac$ .



\*) In deze kwadraatsplitsing is gewerkt naar de vorm  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}$  een toepassing van het 'merkwaardig product'  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ . Hierboven is dit product met de 'papegaaimethode' gedemonstreerd evenals het merkwaardig product:  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

De tweedegraadsfunctie  $f(x) = ax^2 + bx + c \equiv a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}$  met  $D = b^2 - 4ac$

Kies je  $x = -\frac{b}{2a}$  in  $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}$  dan krijg je:

$$f(-\frac{b}{2a}) = a(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} = a \cdot 0 - \frac{D}{4a} \text{ dus } f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{D}{4a}.$$

Dit betekent dat  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$  een punt is van **elke kwadratische functie**  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

Noem je dit punt  $T$ , dan is dus  $T(x_T, y_T) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$  ... (a)

**1<sup>o</sup>**. We bewijzen nu dat het punt  $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$  een *uiterste waarde* is ('**maximum**' of '**minimum**') van  $f(x)$ , afhankelijk van het teken van  $a$ .

Omdat voor *elk willekeurig punt*  $(x, y)$  van  $f(x)$  geldt  $y = ax^2 + bx + c \equiv a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}$

geldt voor de waarde van  $y - y_T$ :  $\{a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}\} - \frac{-D}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2$  **dus**

$$\Rightarrow y - y_T = a(x + \frac{b}{2a})^2 \text{ voor willekeurige } y. \quad \dots(b)$$

**Als  $a > 0$**  dan is  $a(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ , want  $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ .

Dit betekent dat  $y - y_T > 0$  zodat *elke waarde van  $y$*  in  $y = ax^2 + bx + c$  groter dan of gelijk is aan  $y_T$ , dus is het punt  $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$  een **minimum van de functie  $f(x)$**  ... (c)

Op dezelfde manier blijkt uit (b) dat **als  $a < 0$**  steeds geldt

$y - y_T < 0$  ofwel:  $T = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$  is een **maximum** van de functie  $y = ax^2 + bx + c$ .

Het punt  $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ , *minimum of maximum*, **afhankelijk van  $a$** , heet de **top** van de kwadratische functie  $f(x)$ .

**2<sup>o</sup>** De lijn  $x = -\frac{b}{2a}$  door  $T$  is een **symmetrieas** van  $f(x)$ , want:

Voor een punt  $P$  van  $f(x)$  op een positieve afstand  $\delta$  links van de lijn

$x = -\frac{b}{2a}$  geldt  $x_p = -\frac{b}{2a} - \delta$  en voor een punt  $Q$  van  $f(x)$  op eenzelfde

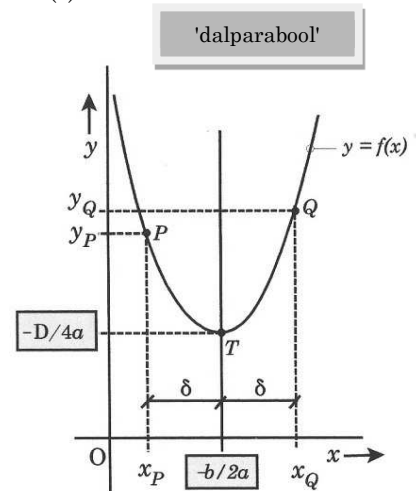
afstand  $\delta$  rechts van deze lijn is  $x_q = -\frac{b}{2a} + \delta$ .

In de vorm van de kwadraatafsplitsing is  $y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}$  dus als  $x = x_p = -\frac{b}{2a} - \delta$  dan is

$$y_p = a(-\frac{b}{2a} - \delta + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} = a \cdot \delta^2 - \frac{D}{4a} \quad \dots(d)$$

$$\text{Als } x = x_q = -\frac{b}{2a} + \delta \text{ dan is } y_q = a(-\frac{b}{2a} + \delta + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} = a \cdot \delta^2 - \frac{D}{4a} \quad \dots(e)$$

Uit (d) en (e) volgt  $y_p = y_q$  dus  $P$  en  $Q$  liggen **symmetrisch t.o.v. de lijn  $x = -\frac{b}{2a}$**   $\Rightarrow$



De grafiek van  $f(x) = y = ax^2 + bx + c$  met  $a \neq 0$  is een parabool met verticale as  $x = -\frac{b}{2a}$  en een punt  $T = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$  als top, waarin  $D = b^2 - 4ac$ . Als  $a > 0$  dan is  $T$  een minimum ('dalparabool'), als  $a < 0$  dan is  $T$  een maximum ('bergparabool')

**a. Nulpunten van een kwadratische functie**

Eventuele snijpunten van de parabool  $y = ax^2 + bx + c$  met de  $x$ -as ( $y = 0$ ) moeten voldoen aan de vergelijking  $y = ax^2 + bx + c$  **en** aan  $y = 0$  dus zijn de **oplossingen** van de vergelijking  $ax^2 + bx + c = 0$ . Ze worden ook **nulpunten** of **wortels** van  $f(x)$  genoemd..

Voor een algemene oplossing van deze vergelijking wordt meestal de ‘**abc-formule**’ gebruikt:

**Afleiding van de abc-formule**

Schrijf je de oplossingsvergelijking  $ax^2 + bx + c = 0$  in de vorm van de *kwadraat-afplitsing*, dan ontstaat:  $a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} = 0$ .

De nulpunten  $x$  volgen dan uit:  $a(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{D}{4a} \Rightarrow \frac{1}{a} \cdot a(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{1}{a} \cdot \frac{D}{4a} \Rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{D}{4a^2}$

met gevolg:  $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} \Rightarrow \mathbf{x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}}$

*Nulpunten van  $f(x) = ax^2 + bx + c$  zijn oplossingen van de vergelijking*  
$$y = ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \mathbf{x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad (D = b^2 - 4ac)}$$

De waarde van  $D$  hierin bepaalt het *aantal oplossingen*, dus het *aantal wortels* van  $ax^2 + bx + c = 0$ . Men noemt daarom  $D$  de **discriminant** van deze ‘vierkantsvergelijking.’

**1<sup>0</sup>.** Als  $D = b^2 - 4ac > 0$  dan bestaat  $\sqrt{D}$  en heeft de vergelijking *twee verschillende wortels*:

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$  en  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ . De parabool snijdt dan de  $x$ -as in de punten  $x_1$  en  $x_2$ .

**2<sup>0</sup>.** Als  $D = 0$  dan is  $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$  dus heeft de vergelijking slechts één ('dubbeltellende') wortel  $x = -\frac{b}{2a}$ .

Top  $T$  met  $x_T = -\frac{b}{2a}$  is dan een **raakpunt** ('twee samenvallende punten') op de  $x$ -as.

**3<sup>0</sup>.** Als  $D < 0$  dan bestaat  $\sqrt{D}$  niet in  $\mathbb{R}$  dus zijn er *geen reële oplossingen*.

De parabool snijdt de  $x$ -as niet. Er zijn *geen reële nulpunten*. \*)

**b. Ontbinden van kwadratische functies**

*De functie  $f(x) = x^2 + bx + c$  met nulpunten  $x = x_1$  en  $x = x_2$  is te schrijven als  $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$*

**Bewijs;**

De nulpunten  $x_1, x_2$  van de vierkantsvergelijking  $y = ax^2 + bx + c$  **met  $a = 1$**  zijn volgens de

*abc-formule*:  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2}$  en  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2}$  met  $D = b^2 - 4c$  en  $a = 1$  dus volgt dan het

**product** uit:  $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = \{x - (\frac{-b + \sqrt{D}}{2})\} \cdot \{x - (\frac{-b - \sqrt{D}}{2})\}$  met gevolg:

---

\*) In het volgende hoofdstuk worden imaginaire oplossingen van vierkantsvergelijkingen besproken in geval  $D < 0$ . In Hoofdstuk XIV worden expliciet voor wiskunde D de complexe getallen uitgebreid behandeld.

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = \left( \frac{2x + b - \sqrt{D}}{2} \right) \cdot \left( \frac{2x + b + \sqrt{D}}{2} \right) = \frac{4x^2 + 4bx + b^2 - D}{4} = \frac{4x^2 + 4bx + 4c}{4} \text{ want } \\ D = b^2 - 4ac \text{ en } a = 1 \text{ dus } b^2 - D = 4c \text{ zodat } (x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 + bx + c \quad \dots(1)$$

Met de gelijkheid  $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$  is de term  $x^2 + bx + c$  volgens (1) **ontbonden in twee factoren**  $(x - x_1)$  en  $(x - x_2)$  als  $x_1$  en  $x_2$  de *nulpunten* van  $f(x)$  zijn.

Uitgewerkt geeft dit:  $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2$   
waarin dus in  $x^2 + bx + c$  geldt  $(x_1 + x_2) = -b$  en  $x_1 \cdot x_2 = c$ . ... (2)

Op deze eigenschap berust een methode om de wortels  $x_1$  en  $x_2$  van  $f(x) = 1x^2 + bx + c = 0$  snel te kunnen vinden. (Op blz.48 volgt ook een ontbinding **als in**  $ax^2 + bx + c = 0$ :  $a \neq 1$ )

**Voorbeeld:**

Bepaal de wortels van de vergelijking  $x^2 - 11x + 28 = 0$ ,

Ontbind het linkerlid in factoren, dus schrijf  $x^2 - 11x + 28 = (x - p)(x - q) = x^2 - (p + q)x + p \cdot q$ .

Hiervoor geldt dan  $p + q = 11$  en  $p \cdot q = 28$ , waaruit je direct ziet dat  $p = 4$  en  $q = 7$  zodat  $x^2 - 11x + 28 = (x - 4) \cdot (x - 7)$  dus vind je de nulpunten uit:  $x^2 - 11x + 28 = 0 \Rightarrow (x - 4) \cdot (x - 7) = 0$

**Als  $a \cdot b = 0$  dan  $a = 0 \vee b = 0$**  dus volgt uit  $(x - 4) \cdot (x - 7) = 0$  dat  $(x - 4) = 0 \vee (x - 7) = 0$   
De wortels van  $x^2 - 11x + 28 = 0$  zijn dan  **$x = 4 \vee x = 7$**

**Opgaven:** 1. Bereken de nulpunten van  $f(x) = x^2 - x - 12$

Stel  $x^2 - x - 12 = (x - p) \cdot (x - q)$  dan is  $p + q = 1$  en  $p \cdot q = -12$ .

Hieraan voldoen  $p = 4$  en  $q = -3$  dus als  $x^2 - x - 12 = 0$ , dan is

$(x - p) \cdot (x - q) = (x - 4) \cdot (x + 3) = 0$  zodat  $x - 4 = 0 \vee x + 3 = 0 \Rightarrow x = 4 \vee x = -3$

De nulpunten zijn dan  **$x = 4$  en  $x = -3$** .

2. Los op:  $x^2 + 2x - 143 = 0$

Stel  $x^2 + 2x - 143 = (x - p) \cdot (x - q)$  dan is  $p + q = -2$  en  $p \cdot q = -143$

dus  $p = -13$  en  $q = 11$ , dus als  $x^2 + 2x - 143 = 0$ , dan is  $(x - p) \cdot (x - q) =$

$(x - (-13)) \cdot (x - 11) = 0$  zodat  $x + 13 = 0 \vee x - 11 = 0 \Rightarrow x = 11 \vee x = -13$

3. Gegeven is de parabool  $f(x) = x^2 - 4x + 1 = 0$

a. Bepaal de top van de parabool.

Uit kwadraatafsplitsing volgt dat voor de parabool  $y = x^2 - 4x + 1$  geldt  $y = (x - 2)^2 - 3$ .

Omdat voor elke  $x$ :  $(x - 2)^2 \geq 0$  is, is steeds  $y \geq -3$  dus geldt voor de coördinaten van top  $T$  dat  $y_T = -3$  en volgt uit  $y_T = (x_T - 2)^2 - 3 \Rightarrow x_T = 2$ .

De top is dus het punt  **$T(2, -3)$** .

(Dit volgt ook direct uit  $x_T = -\frac{b}{2a}$ ,  $y_T = \frac{-D}{4a}$  (blz.6)).

b. Bepaal de raaklijn aan de parabool in het punt  $(1, -2)$ .

Het punt  $P(1, -2)$  ligt op de parabool  $y = x^2 - 4x + 1$  want  $-2 = 1^2 - 4 \cdot 1 + 1$  dus voldoet aan de vergelijking.

Noem de raaklijn  $l: y = ax + b$ , dan geldt voor het raakpunt op  $l$   
 $P(1, -2): -2 = a \cdot 1 + b \Rightarrow a + b = -2 \Rightarrow a = -2 - b$ . ... (1)

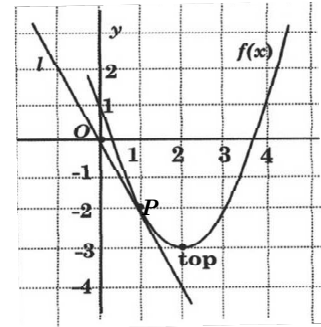
Omdat het raakpunt zowel op de parabool als op de raaklijn  $l$  ligt geldt:  $y = x^2 - 4x + 1$  en  $y = (-2 - b)x + b$  dus

$$x^2 - 4x + 1 = (-2 - b)x + b \Rightarrow x^2 - 2x + bx + 1 - b = 0 \Rightarrow x^2 + (b - 2)x + (1 - b) = 0.$$

De discriminant  $D$  van deze vierkantsvergelijking moet nul zijn

$$\text{omdat de vergelijking één wortel heeft, dus: } b^2 - 4 \cdot ac = (b - 2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - b) = 0 \Rightarrow b^2 - 4b + 4 - 4 + 4b = 0 \Rightarrow b = 0 \quad \dots (2)$$

Uit (1) en (2) volgt dan voor de raaklijn  $l: y = ax + b \Rightarrow y = -2x$ .



#### 4. Machtsfuncties

*De functie  $y = f(x) = x^n$  is een machtsfunctie van  $x$ , waarin de exponent  $n$  een constante is en het grondtal  $x$  een variabele*

Enkelvoudige machtsfuncties zijn van het type  $y = f(x) = x^n$  met  $n \in \mathbb{R}$ .

Samengestelde machtsfuncties zijn van de vorm  $y = f(x) = ax^p + bx^q + cx^r + \dots$

( $a, b, c$  en  $p, q, r \in \mathbb{R}$ ). Deze vormen noemt men **polynomen**.

Uitgaand van de *definitie van een natuurlijke macht* van  $x$ :

$x^1 = x$ ,  $x^2 = x \cdot x$ ,  $x^3 = x \cdot x \cdot x$ ,  $x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$  of algemeen:  $x^n = \overbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}^{n \text{ keer}}$  volgen direct de regels:  $x^p \cdot x^q = x^{p+q}$ ,  $\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$  en  $(x^p)^q = x^{p \cdot q}$ . Hieruit vind je de regels:

$$\frac{x^p}{x^p} = x^{p-p} = x^0 \text{ en ook } \frac{x^p}{x^p} = 1, \text{ dus } x^0 = 1; \frac{1}{x^p} = \frac{x^0}{x^p} = x^{0-p} = x^{-p};$$

$$\sqrt[p]{x} = x^{\frac{1}{p}} \text{ omdat } (x^{\frac{1}{p}})^p = x^{\frac{1}{p} \cdot p} = x^1 = x. \text{ Zo is ook: } x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$$

$$\begin{array}{cccccc} a^p \cdot a^q = a^{p+q} & (a^p)^q = a^{p \cdot q} & a^{-p} = \frac{1}{a^p} & a^0 = 1 & & \\ \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} & (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p & \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}} & \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} & (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p} & \end{array}$$

Per definitie gelden deze rekenregels ook voor *machten met reële exponenten*:

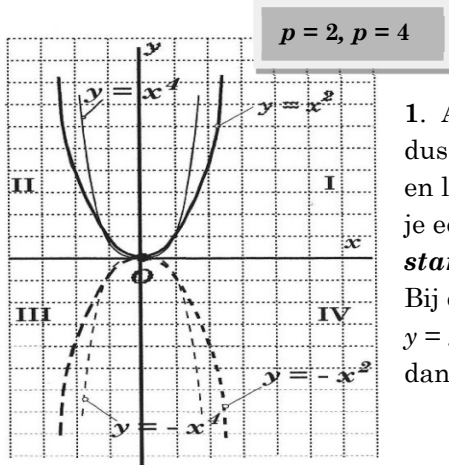
$$\text{dus: } 3^7 \cdot 3^{-9} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}, \quad 5^{-2\frac{1}{2}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad 7^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{7^3}, \quad 12^{-0,38} \approx 0,389 \text{ (GR)}$$

*Machtsfuncties waarin  $x$  hoogstens tot de macht  $n$  voorkomen, heten  $n^{\text{de}}$  graads machtsfuncties.*

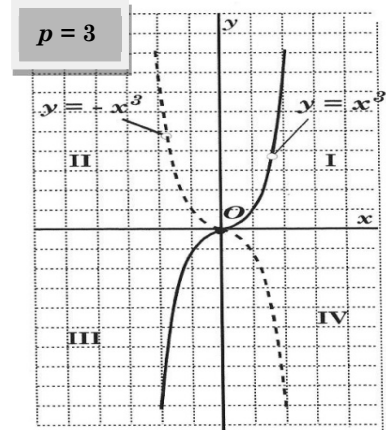
Zo is het *polynoom*  $f(x) = ax + b$  een machtsfunctie van de *eerste graad*, polynomen als  $f(x) = ax^2 + bx + c$  zijn van de *tweede graad*,  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  van de *derde graad* et cetera. Zoals eerder vermeld: De 'lineaire functie'  $f(x) = ax + b$  is een *eerstegraads machtsfunctie*, de 'kwadratische functie'  $f(x) = ax^2 + bx + c$  is een *tweedegraads machtsfunctie*.

**a. Grafieken van machtsfuncties**

Aan de *graad van enkelvoudige machtsfunctie* kun je globaal de grondvorm van hun grafieken afleiden. We onderzoeken hier de grondvorm van de grafieken in de *vier kwadranten* I, II, III en IV van *machtsfuncties*  $f(x) = y = x^p$  bij verschillende waarden van  $p$ .



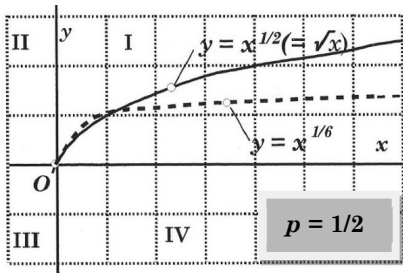
1. Als  $p$  in  $y = x^p$  een **positief, even getal** is, dus  $p = 2, 4, 6, \dots$  dan zijn alle  $y$ -waarden van  $y = x^p$  positief en ligt de grafiek geheel in I en II. In de grondvorm herken je een **dalparaboloïde**, die als  $p = 4, 6, 8, \dots$  'spitser' is dan de **standaard dalparabool**  $y = x^2$  dus die met  $p = 2$ . Bij eenzelfde waarde van  $p$  is  $y = -x^p$  het spiegelbeeld van  $y = x^p$  in de  $x$ -as (gestreept) en zie je daarin als grondvorm dan ook de **bergparaboloïden**.



2. Is  $p$  in  $y = x^p$  een **positief, oneven, geheel getal  $\neq 1$** , dus  $p = 3, 5, 7, \dots$  dan bestaan er in tegenstelling tot de *even* machten van  $x$  ook *negatieve*  $y$  waarden. Bijvoorbeeld  $(-3)^3 = -27 = -(3^3)$ . Hierdoor heeft  $y = x^p$  bij *oneven*  $p$  waarden in het *eerste kwadrant* (I) en het *derde kwadrant* (III).

Omdat  $(-x)^p = -(x^p)$  is de grafiek van  $y = -(x^p)$  een *spiegeling in de oorsprong* van  $y = x^p$  dus ligt in de kwadranten II en IV.

3. Als  $p$  in  $y = x^p$  een positieve breuk is, waarvan de **teller oneven is en de noemer even**, zoals in



$y = x^{\frac{1}{2}}$  ( $= \sqrt{x}$ ) en  $x^{\frac{1}{6}}$  dan bestaan *geen reële y-waarden bij negatieve x*.

Zo is bij  $y = x^{\frac{1}{2}}$  als  $x = -1$  gelijk aan  $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$  en is  $y = (-x)^{\frac{1}{6}}$  bij  $x = -1$  gelijk aan  $(-1)^{\frac{1}{6}} = ((-1)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$  dus bestaan niet in  $\mathbb{R}$ .

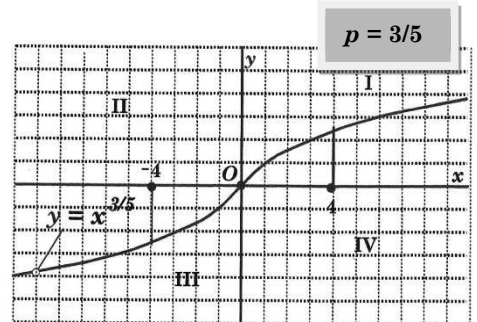
Omdat bij een **positieve waarde van  $x$**  ook alle machten van  $x$  positief zijn, liggen alle waarden van  $y = x^p$  in I.

4. Als  $p$  in  $y = x^p$  een positieve breuk is, met **teller en noemer oneven** dan bestaan er ook reële  $y$  waarden bij *negatieve*  $x$ , die dan ook zelf negatief zijn, en dus in III liggen.

Zo is als  $x = -4$  in  $y = x^{\frac{3}{5}}$   $y = (-4)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-4)^3} = \sqrt[5]{-64} \approx -2,297$ .

Als  $x = 4$  in  $y = x^{\frac{3}{5}}$   $y = (4)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(4)^3} = \sqrt[5]{64} \approx 2,297$ .

De grafiek van  $y = x^{\frac{3}{5}}$  ligt dus in I en III en is symmetrisch in de oorsprong  $O$ .



\*) Met de GR Ti-83 zijn de grafieken direct te plotten VB: Voer in  $Y1 = X^3 : 5$  ENTER . Druk op WINDOW en kies  $X_{min} = -5, X_{max} = 5, Y_{min} = -5, Y_{max} = 5, X_{scl} = 1, Y_{scl} = 1$  ; ENTER. Druk op Graph en de grafiek van voorbeeld 4 verschijnt op het display.



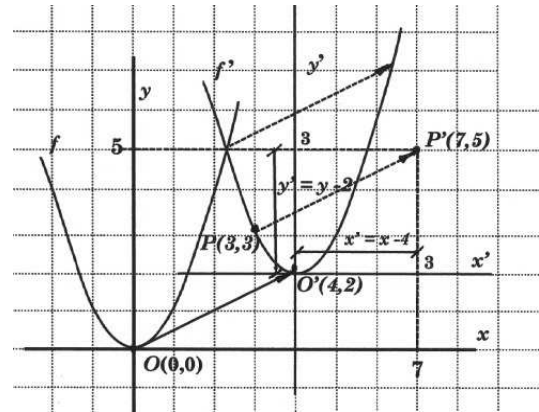
**b. Transformaties**

Uit de grafieken van standaardfuncties zoals  $y = x^2$ ,  $y = x^3$ ,  $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$  kan je via *transformaties* vaak gemakkelijk formules afleiden van meer gecompliceerde functies.

Bij **congruentietransformaties** als: *translatie* ('evenwijdige verschuiving' van  $y = f(x)$ ), *rotatie* (draaiing om de oorsprong  $O$ ) en *spiegeling* (vermenigvuldiging t.o.v. een lijn met de factor  $-1$ ) ontstaat uit  $f(x)$  een *beeld*  $f'(x)$  dat *congruent* is met  $f(x)$ . Voorbeelden:

**- Transformaties door translatie**

Hiernaast is in een  $XOY$  stelsel de grafiek  $f$  getekend van de 'standaardparabool'  $y = x^2$ . De top ligt in de oorsprong  $O$ . Via een **translatie**  $T(4,2)$  verschuiven alle punten over +4 eenheden naar rechts (positieve  $x$ -richting) en +2 eenheden omhoog (positieve  $y$ -richting), waardoor dan een **met  $f$  congruente** grafiek  $f'$  ontstaat. De oorsprong  $O(0,0)$  = top van  $f$ , wordt daarbij afgebeeld op het punt  $O'(4,2)$ , de oorsprong van het verschoven assenstelsel  $x'O'y'$ .



Een willekeurig punt  $P(x, y)$ , (in de figuur  $P(3, 3)$ ), wordt door de translatie  $T(4, 2)$  afgebeeld op het punt

$P'(x + 4, y + 2)$ , in de figuur  $P'(7, 5)$ .

Ten opzichte van het  $x'O'y'$ -stelsel geldt dan dat  $x' = x - 4$  en  $y' = y - 2$  ... (1)

De vergelijking van de verschoven parabool  $f'$  is  $f': y' = (x')^2$  want de top van  $f'$  ligt in de oorsprong  $O'$  dus geldt hier de topvergelijking ten opzichte van het stelsel  $x'O'y'$ .

Substitutie hierin van de waarden  $x' = x - 4$  en  $y' = y - 2$  uit (1) geeft als vergelijking van de parabool  $f'$ :  $y' = x'^2$ :  $y - 2 = (x - 4)^2 \Rightarrow y = (x - 4)^2 + 2$ . ... (2)

Noem je de translatie  $T(4,2)$  nu algemeen  $T(a, b)$ , dan volgt uit (2):

$f: y = x^2 \Rightarrow T(a, b) \Rightarrow f': y = (x - a)^2 + b$  ... (3)

Deze transformatieregel werd afgeleid via de functie  $f(x) = y = x^2$  door op het translatiebeeld  $y' = x'^2$  de algemeen geldende betrekkingen bij translaties volgens regel (1) toe te passen.

De regel geldt dus ook onvoorwaardelijk ook voor elke andere functie  $y = f(x)$  zoals  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = \ln(x)$ ,  $y = \sin(x)$ , ... Algemeen geldt dan ook:

Bij de translatie  $T(a, b)$  van de functie  $y = f(x)$  geldt voor het beeld  $y = f(x - a) + b$

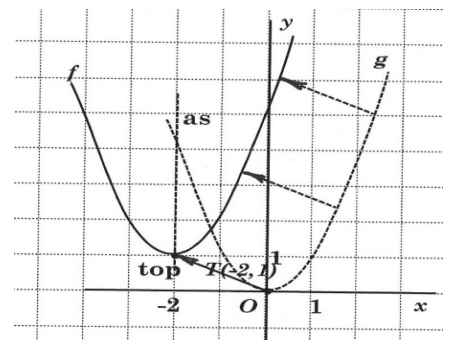
**Toepassingen**

1) Schets de grafiek van de functie  $f: y = (x + 2)^2 + 1$

Volgens de eigenschap gaat bij een translatie  $T(a, b)$  de grafiek  $g$  van  $y = f(x) = x^2$  over in  $f: y = (x - a)^2 + b$ .

In  $f: y = (x + 2)^2 + 1$  is dan  $a = -2$  en  $b = 1$  dus ontstaat de functie  $f: y = (x + 2)^2 + 1$  uit de translatie  $T(-2, 1)$  van de standaardfunctie  $g: y = x^2$

In de figuur is de grafiek van  $f: y = (x + 2)^2 + 1$  getekend. De **top** is dan het punt  $(-2, 1)$ , de **as** is de lijn  $x = -2$ .

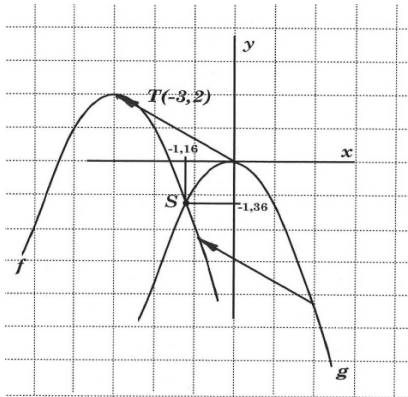


2. Schets de grafiek van de functie  $f: y = -x^2 - 6x - 7$  en bepaal het snijpunt van  $f$  en de parabool  $g: y = -x^2$

Via kwadraatplitsing herleid je eerst de gegeven functie  $f: y = -x^2 - 6x - 7$  tot:

$$f: (-x^2 - 6x - 9) + 2 = -(x+3)^2 + 2.$$

Volgens de translatietransformatie-regel is dit de grafiek van de functie die ontstaat uit de standaardfunctie  $g: y = -x^2$  door de **translatie**  $T(-3, 2)$ .



De **top** van (bergparabool)  $f$  is dan het punt  $(-3, 2)$   
de **as** is de lijn met  $x = -3$ .

Het **snijpunt**  $S(x, y)$  van de grafieken  $f$  en  $g$  volgt uit:

$$y = -x^2 - 6x - 7 \wedge y = -x^2 \text{ dus uit } -6x - 7 = 0 \text{ zodat}$$

$$x = -\frac{7}{6} \approx -1,16 \text{ en } y = -x^2 = -\left(-\frac{7}{6}\right)^2 \approx -1,36.$$

Het gevraagde snijpunt is dan  $S(-1,16; -1,36)$ .

3. Schets de grafiek van de functie  $f: y = (x-3)^5 - 50$  en bepaal de coördinaten van de snijpunten van  $f$  met de lijn  $l: y = 25x$ .

De grafiek van de functie  $f: y = (x-3)^5 - 50$  ontstaat uit  $f: y = x^5$  door de **translatie**  $T(3, -50)$ .

De snijpunten van de lijn  $l: y = 25x$  met de grafiek van  $f$  bereken je in het  $x'O'y'$ -stelsel omdat daarin geldt  $f': y' = (x')^5$  en  $l': y' = 25x'$ , want  $l' \parallel l$  gaat door  $O'(3, -50)$

Voor de snijpunten van  $l'$  en  $f'$  geldt dan  $(x')^5 = 25x'$

$$\text{dus } x' = 0 \vee (x')^4 = 25 \Rightarrow x' = \pm \sqrt[4]{25} = \pm \sqrt{5}$$

$$\text{Uit } y' = 25x' \text{ volgt } y' = 0 \vee y' \approx \pm 25 \cdot \sqrt{5}$$

De snijpunten van  $f': y = (x-3)^5 - 50$  en  $l: y = 25x$  zijn  $S_1', S_2'$  en  $S_3'$  (witte stippen in de figuur), met:

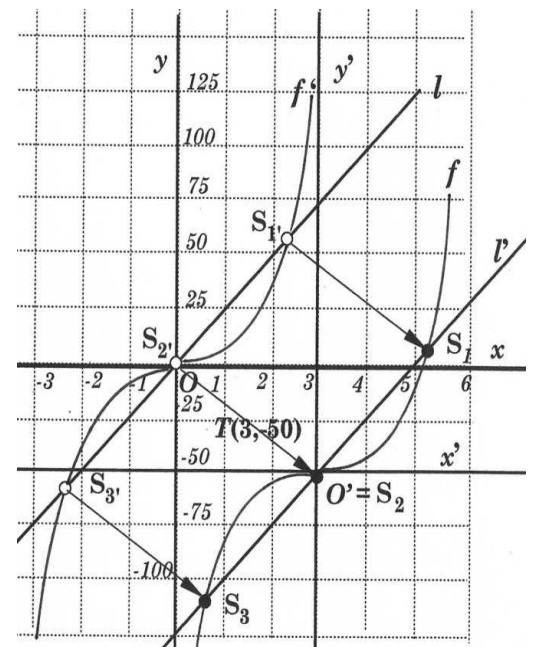
$$S_1' = (\sqrt{5}, 25\sqrt{5}); S_2' = (0, 0); S_3' = (-\sqrt{5}, -25\sqrt{5})$$

De gevraagde snijpunten  $S_1, S_2$  en  $S_3$  (zwarte stippen in de figuur), van  $l'$  en  $f'$  zijn dan:

$$S_1 = (\sqrt{5}; 25\sqrt{5}) + T(3, -50) = (\sqrt{5} + 3, 25\sqrt{5} - 50)$$

$$S_2 = (0, 0) + T(3, -50) = (3, -50)$$

$$S_3 = (-\sqrt{5}, -25\sqrt{5}) + T(3, -50) = (3 - \sqrt{5}, -25\sqrt{5} - 50)$$



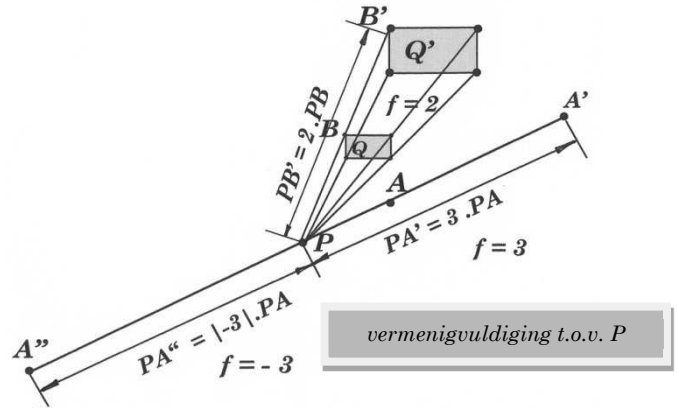
**NB:** Hiermee zijn de snijpunten van  $f: y = (x-3)^5 - 50$  en  $l: y = 25x$  exact bepaald, via de translatietransformatie  $T(3, -50)$ , waarmee de vijfdegraadsvergelijking:  $(x-3)^5 - 25x = 50$  exact is opgelost. Het nut van transformaties van functies blijkt duidelijk uit dit voorbeeld.

**Transformaties door vermenigvuldiging**

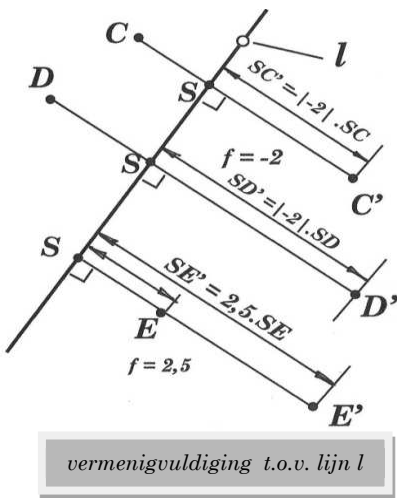
Ook bestaan transformaties van figuren door *vermenigvuldiging*. We kennen daarbij:

- a - vermenigvuldiging ten opzichte van een punt
- b - vermenigvuldiging ten opzichte van een lijn

a. Gedefinieerd is het **product** van een punt **A** ten opzichte van een punt **P** en een **factor f** als volgt: Bij een *positieve factor f*, ligt het beeld punt **A'** op de lijn **PA**, waarbij geldt dat **PA' = f × PA**.



Zo is ook de rechthoek **Q'** het beeld van **Q** bij vermenigvuldiging t.o.v. **P** met de factor **f = + 2**. Bij een *negatieve factor f* ligt het beeldpunt **A''** van punt **A** op de lijn **AP** aan de andere kant van **P** dan **A** en wel zo dat **PA'' = |f| × PA**, hier **PA'' = |-3| × PA**



b. Bij vermenigvuldiging van een punt **E** ten opzichte van een lijn **l** met een *positieve factor f* ontstaat het beeldpunt **E'** door vanuit **E** een loodlijn op **l** neer te laten en vanuit het voetpunt **S** van die loodlijn een afstand **SE'** zo af te passen, dat **SE' = f × SE**, in de figuur is **f = 2,5** dus **SE' = 2,5 × SE**

Bij een *negatieve factor f* ligt het beeldpunt **D'** van punt **D** op de lijn **DS** aan de andere kant van **S** als **D**, en wel zo dat **SD' = |f| × SD**, dus in de figuur met **f = -2**: **SD' = |-2| × SD**. Zo is ook **C'** het beeldpunt van **C** bij vermenigvuldiging van **C** t.o.v. **l** met de factor **f = -2**, zodat **SC' = |-2| × SC**

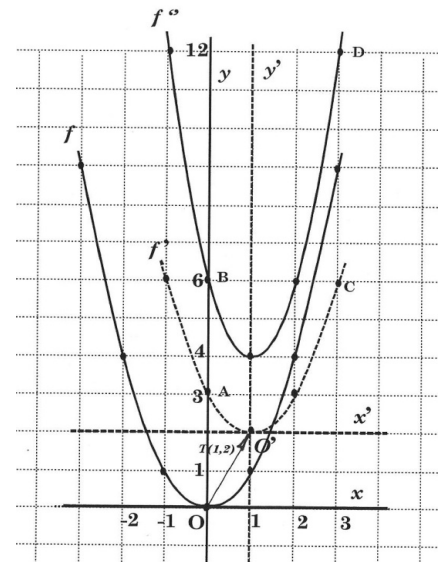
**Toepassing:**

Teken de grafiek van de functie **g: y = 2x<sup>2</sup> - 4x + 6**.

Omdat de *coëfficiënt van x<sup>2</sup> ≠ 1* heeft **g** niet de vorm van de *standaardparabool y = x<sup>2</sup>* zoals de grafieken van alle functies **y = 1 x<sup>2</sup> + b x + c**. Met alleen de *translatietransformatie* kan je deze opgave dus niet oplossen. Ga daarom als volgt te werk:

1<sup>0</sup> Pas kwadraatplitsing toe, dus schrijf: **g: y = 2x<sup>2</sup> - 4x + 6**  
 $\Rightarrow y = 2(x^2 - 2x + 3) = 2\{(x^2 - 2x + 1) + 2\} = 2(x - 1)^2 + 4$

2<sup>0</sup> Pas de *translatie T(1,2)* toe op de punten van de standaardgrafiek **f: y = x<sup>2</sup>** zodat het beeld ontstaat van de grafiek **f' = (x - 1)<sup>2</sup> + 2** (volgens de *translatietransformatie-regel*).



3<sup>0</sup> *Vermenigvuldig* dit beeld **f'** ten opzichte van de **x-as** met **+ 2** (notatie **P(x -as, 2)**).

Dit geeft: **f'' : y = 2. (x - 1)<sup>2</sup> + 4 = 2x<sup>2</sup> - 4x + 6**, de gevraagde parabool **g**, want uit de definitie van *vermenigvuldiging t.o.v. een lijn* (hier de **x-as**) volgt direct de eigenschap:

Bij de *vermenigvuldiging P(x -as, a)* gaat een functie **y = f(x)** over in **y = a. f(x)**

**- Transformaties van wortelvormen**

Ook de grafieken van *wortelvormen* (*machtsfuncties* met gebroken exponent) kunnen via translatie en/of vermenigvuldiging ten opzichte van de *x*-as, afgeleid worden van uit hun standaardvorm  $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ .

**Voorbeelden:**

a. Schets de grafieken van de functies

$f: y = \sqrt{x-3} - 2$  en  $g: y = -3\sqrt{x+3}$

b. Geef de coördinaten van het beginpunt van elk.

c. Geef domein en bereik aan van beide functies.

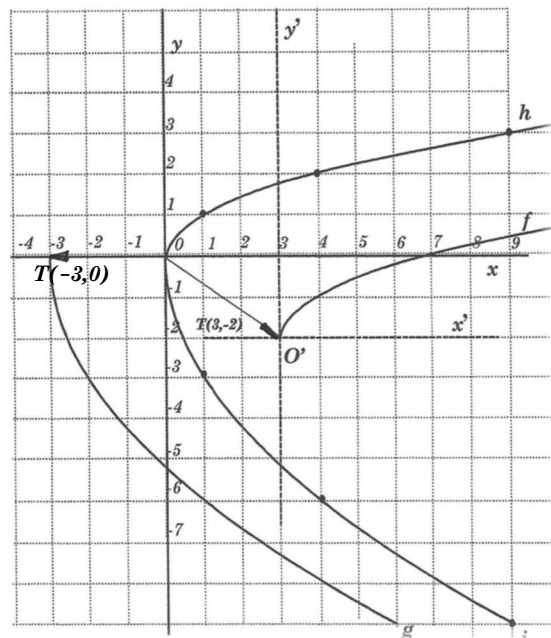
a. Teken de standaardgrafiek  $h: y = \sqrt{x}$ .

Deze heeft als startpunt het punt (0,0) en gaat verder door de roosterpunten (1,1), (4,2), (9,3),...

- Pas nu op  $h$  de translatie  $T(3,-2)$  toe dan ontstaat volgens de translatietransformatie-regel de gevraagde grafiek  $f: y = \sqrt{x-3} - 2$

- Uitgaande van de standaardgrafiek  $h: y = \sqrt{x}$  *vermenigvuldig* je deze *t.o.v. de x-as* met de factor  $-3$ , waaruit de grafiek  $i: y = -3\sqrt{x}$  ontstaat.

Pas hierop de translatie  $T(0,-3)$  toe, dan vind je de grafiek van  $g: y = -3\sqrt{x+3}$  welke werd gevraagd.



b. In de figuur zie je direct dat het *beginpunt* van  $f: y = \sqrt{x-3} - 2$  het *beeldpunt*  $O'(3,-2)$  is van het origineel (0,0) van  $h: y = \sqrt{x}$  bij de translatie  $T(3, -2)$ .

Zo is het beeldpunt  $(-3,0)$  het *beginpunt* van  $g: y = -3\sqrt{x+3}$ .

c. De linkergrens van het *domein* van de **standaardgrafiek**  $h: y = \sqrt{x}$  is  $x = 0$  in *het punt*  $O(0,0)$ , de rechtergrens is  $\infty$ , dus  $D_h = [0, \rightarrow)$  De linkergrens van het *bereik* van  $h$  is de waarde  $y = 0$ , de rechtergrens is  $y = +\infty$  dus  $B_h = [0, \rightarrow)$ . Daaruit volgt dan:

De linkergrens van het **domein** van  $f$  is  $x = 3$ , de rechtergrens is  $x = +\infty$ , dus  $D_f = [3, \rightarrow \mathbb{Q}]$

linkergrens van het **bereik** van  $f$  is  $y = -2$ , de rechtergrens is  $y = +\infty$ , dus  $B_f = [-2, \rightarrow \mathbb{Q}]$

De linkergrens van het **domein** van  $g$  is  $x = -3$ , de rechtergrens is  $x = +\infty$ , dus  $D_g = [-3, \rightarrow \mathbb{Q}]$

linkergrens van het **bereik** van  $g$  is  $y = 0$ , de rechtergrens is  $y = -\infty$ , dus  $B_g = \langle \leftarrow, 0 \right]$ .

**NB:** Het is in het algemeen *niet direct* mogelijk om *wortelvormen* betrouwbaar te 'plotten' in de GR. Als voorbeeld de functie  $f(x) = y = -2 + \sqrt{7-2x}$ :

- Voer in  $y = -2 + \sqrt{7-2x}$  en kies via [WINDOW]  $X_{min} = -4$ ;  $X_{max} = 4$ ;  $Y_{min} = -2$ ;  $Y_{max} = 2$ . Andere waarden in WINDOW 1 laten, en in TBLSET TblStart en  $\Delta$  Tbl op 1 instellen..

De **tabel** [TABLE] van de grafiek geeft *vanaf*  $X = 4$  'ERROR' omdat daarvoor dan  $\sqrt{7-2x} = \sqrt{-1}$  niet bestaat.

Verander je via [TBLSET]  $\Delta$  Tbl in 0.1 dan geeft de GR 'ERROR' *vanaf*  $X = 3,6$ .

Een eenduidig 'beginpunt' van de grafiek, vindt de GR niet omdat de 'trace-cursor' met een vaste stapgrootte werkt.

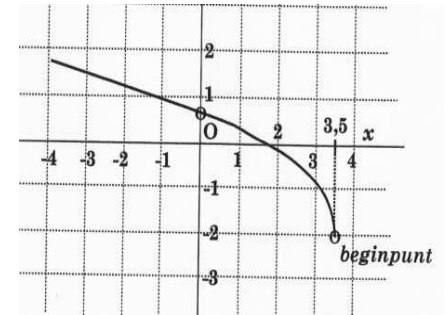
Zo'n beginpunt, hier van  $y = -2 + \sqrt{7 - 2x}$  moet dan handmatig worden bepaald:  $7 - 2x \geq 0$ , dus  $2x \leq 7 \Rightarrow x \leq 3,5$ , dus is het **startpunt  $x = 3,5$**  waarbij dan  $y = -2 + \sqrt{7 - 2x} = -2$ .

**Beginpunt van f:**  $y = -2 + \sqrt{7 - 2x}$  is dus het punt **(3,5, -2)**.

Het domein van de functie is  $(-\infty, 3,5]$ , het bereik is dan  $[-2, \infty)$

Voer in:  $y = -2 + \sqrt{7 - 2x}$  en kies TblStart 3,5,  $\Delta$  Tbl = -0,5.

Verdere punten van de grafiek kan je dan in [TABLE] op je GR aflezen:



$x$	3,5	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
$y$	-2,00	-1,00	-0,27	0,24	0,65	1,00	1,32	1,61	1,87

### Voorbeelden van veel gebruikte transformaties

1. Bij de *translatie*  $(0, a)$  tel je  $a$  op bij de functiewaarde  $y$  ( $x$  blijft onveranderd)

$$y = 2^{x+1} - 3 \xrightarrow{\text{translatie } (0,5)} y = 2^{x+1} + 2$$

2. Bij de *translatie*  $(b, 0)$  vervang je  $x$  door  $x - b$  ( $y$  blijft onveranderd)

$$y = x^2 - 3x \xrightarrow{\text{translatie } (2,0)} y = (x - 2)^2 - 3(x - 2) = x^2 - 7x + 10$$

3. Bij de *vermenigvuldiging* met  $c$  t.o.v. de  **$x$ -as** vermenigvuldig je  $y$  met  $c$

$$y = \frac{x-1}{2x-3} \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } 4} y = 4 \cdot \frac{x-1}{2x-3} = \frac{4x-4}{2x-3}$$

4. Bij de *vermenigvuldiging* met  $d$  t.o.v. de  **$y$ -as** vermenigvuldig je  $x$  met  $\frac{1}{d}$

$$y = 4 + \sqrt{2x-1} \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } 3} y = 4 + \sqrt{2 \cdot \frac{1}{3}x - 1} = 4 + \sqrt{\frac{2}{3}x - 1}$$

5. Bij *spiegeling in de lijn  $y = x$*  vervang je  $x$  door  $y$  en  $y$  door  $x$

$$2x - 3y = 4 \xrightarrow{\text{spiegeling in } y=x} 2y - 3x = 4 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 2$$

$$y = 3 \ln(x) \xrightarrow{\text{spiegeling in } y=x} x = 3 \ln(y) \text{ ofwel } \ln(y) = \frac{1}{3}x \Rightarrow y = e^{\frac{1}{3}x}$$

## 5. Exponentiële functies

Naast de *machtsfunctie*  $f(x) = x^a$  met vaste exponent  $a$  en variabel grondtal  $x$ , bestaat 'omgekeerd' een **exponentiële functie**  $f(x) = a^x$  met vast grondtal  $a$  en variabele exponent  $x$ .

*Functies waarvan de exponent  $x$  de variabele is en een positief grondtal de constante heten exponentiële functies. Algemene vergelijking:  $y = f(x) = a^x$  ( $a > 0$  en  $a \neq 1$ )*

Voor  $a \leq 0$  is de functie *niet gedefinieerd*.

Immers als  $a = 0$  dan is  $a^x = 0$  voor elke  $x$  dus is  $a^x$  *geen functie*.

Als  $a < 0$  dan *bestaat  $a^x$  niet voor elke waarde van  $x$* .

Zo zijn bijvoorbeeld  $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ ;  $a^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{a})^3$ ;  $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ ; ....ongedefinieerd als  $a$  negatief is.

Bij elke exponent  $x$ , is de waarde van  $a^x$  ( $a > 0$ ) steeds positief want:

- als  $x > 0$  dan  $a^x > 0$  omdat per definitie  $a^x = a \cdot a \cdot a \dots a \dots$  ( $x$ - keer) dus weer positief.
- als  $x < 0$  dan  $a^x = 1 / a^{-x}$  dus zeker positief omdat  $a^{-x}$  dan positief is.

Alle grafieken van  $y = f(x) = a^x$  liggen dus in het eerste en tweede kwadrant.

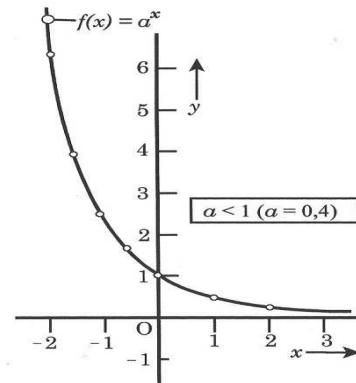
Omdat  $a^0 = 1$  voor iedere  $a$  gaan alle grafieken door het punt  $(0,1)$ .

Beschouw nu de functie  $f(x) = a^x$  voor waarden van  $a$ , met  $0 < a < 1$  en die als  $a > 1$ .

**1.  $f(x) = a^x$  met  $0 < a < 1$**

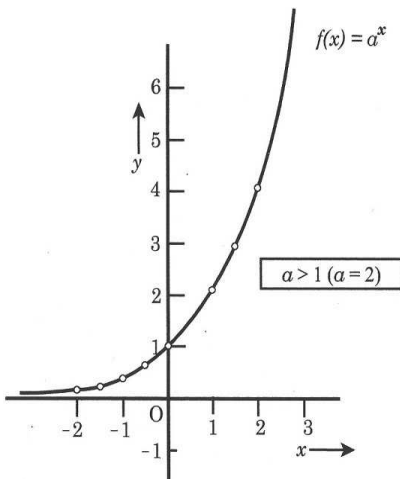
Voor  $0 < a < 1$  is de functie **monotoon dalend**, dus bij toenemende  $x$  neemt  $y$  af. Immers als  $f(x) = a^x$  dan is  $f(x+1) = a^{x+1} = a \cdot a^x$  en daar  $a < 1$  is  $a \cdot a^x < a^x$  dus  $a^{x+1} < a^x$  zodat  $f(x) = a^x$  monotoon daalt.

Bij onbepaald grote toename van  $x$ , dus als  $x$  tot oneindig nadert, notatie  $x \rightarrow \infty$ , dan daalt  $a^x$  onbepaald dicht tot nul omdat  $0 < a < 1$ . De waarde nul wordt nooit bereikt, want er bestaat geen reële  $x$  waarvoor  $a^x$  ( $a \neq 0$ ) gelijk is aan nul, zodat bij toenemende  $x$  de grafiek steeds dichtert tot de *positieve x-as* (rechts van  $O$ ) nadert *zonder hem ooit te raken*:



De  $x$ -as heet dan een (*horizontale*) **asymptoot** van de grafiek van  $f(x) = a^x$ .

**2.  $f(x) = a^x$  met  $a > 1$**



Als  $a > 1$  dan is de functie **monotoon stijgend**, want: als  $f(x) = a^x$  dan is  $f(x+1) = a^{x+1} = a \cdot a^x$  en daar  $a > 1$  is dan  $a \cdot a^x > a^x$  dus  $a^{x+1} > a^x \Rightarrow f(x) = a^x$  is dan *monotoon stijgend*. Bij *afname van de waarde van  $x$*  wordt de waarde van  $a^x$  steeds kleiner want  $a^{x-1} = \frac{a^x}{a} < a^x$  omdat  $a > 1$ .

Bij onbepaald grote afname van  $x$ , als  $x$  tot  $-\infty$  nadert, dan nadert  $a^x$  onbepaald dicht tot nul. De waarde nul wordt nooit bereikt, omdat er geen reële  $x$  bestaat met  $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = 0$  dus hier zal bij afnemende  $x$  de grafiek steeds dichtert tot de *negatieve x-as* naderen.

Ook hier is de  $x$ -as dus een **horizontale asymptoot**.

**- Exponentiële groei**

In onderstaande tabel wordt de groei weergegeven van de bevolking van Latijns- Amerika in de vierjaarlijkse perioden tussen 1950 en 1970

jaar	1950	1954	1958	1962	1966	1970
aantal $\times 10^6$	164	183	203	227	254	282

Elke periode blijkt de bevolking met een *factor* van *circa* 1,11 te zijn toegenomen, want:

$$\frac{183}{164} \approx \frac{203}{183} \approx \frac{227}{203} \approx \frac{254}{227} \approx \frac{282}{254} \approx 1,11.$$

De factor 1,11 heet in dit geval de **groefactor**. Het **groeipercentage** is dan 11%.

Werk je met de groeifactor de bevolkingsaantallen in de onderste rij uit, dan vind je:

<i>aantal</i> $\times 10^6$	<b>164</b>	<b>183</b> $= 1,11 \times$ 164	<b>203</b> $= 1,11$ $\times 1,11 \times$ 164	<b>227</b> $= 1,11$ $\times 1,11$ $\times 1,11 \times$ 164	<b>254</b> $= 1,11$ $\times 1,11$ $\times 1,11$ $\times 1,11 \times$ 164	<b>282</b> $= 1,11$ $\times 1,11$ $\times \dots$ $\times \dots$ 164
	$1,11^0 \times 164$	$1,11^1 \times 164$	$1,11^2 \times 164$	$1,11^3 \times 164$	$1,11^4 \times 164$	$1,11^5 \times 164$

Je ziet dan dat bij de *groeifactor* 1,11 na  $t$  perioden van 4 jaar ( $t = 0, 1, 2, 3, 4$ ) de *beginwaarde* 164 (dus het inwonertal na  $t = 0$  perioden) ongeveer met  $1,11^1, 1,11^2, 1,11^3, 1,11^4, 1,11^5$  is toegenomen. Na  $t$  perioden vanaf de startwaarde 164 is de beginwaarde dan toegenomen tot  $1,11^t \times 164$ .

Deze toename wordt **exponentiële groei** genoemd.

Noem je de **startwaarde**  $164 = N(0)$  en de *groeifactor per periode*  $1,11 = g$  dan is na  $t$  perioden:  $N(t) = N(0) \cdot g^t$ .  $N(t)$  is dus een *exponentiële functie van t*.

*Bij exponentiële groei waarbij de groeifactor  $g$  in gelijke perioden constant is, is na  $t$  perioden:  $N(t) = N(0) \cdot g^t$  ( $N(0) = \text{startwaarde}$ )*

### **Toepassingen:**

1. Een zekere hoeveelheid neemt *elk kwartier* met 12% toe. Bereken:

- a. de *groeifactor* per kwartier
- b. de *groeifactor* en het *groeipercentage* per uur
- c. het *groeipercentage* per *vijf minuten*

a. Na een kwartier is de hoeveelheid gegroeid tot  $1,12 \times$  de startwaarde (= 1). De *groeifactor per kwartier* is dan **1,12**.

b. De *groeifactor per uur* ( $4 \times 1$  kwartier) is  $1,12^4 = 1,574$ ; het *groeipercentage* is **57,4%**

c. De *groeifactor* in vijf minuten (=  $1/3$  kwartier) is  $1,12^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1,12} \approx 1,0385$  dus het *groeipercentage* per vijf minuten is  $\approx$  **3,85%**

2. Een bacteriecultuur groeit exponentieel.

Op  $t = 4$  zijn er 50.000 bacteriën, op  $t = 8$  zijn er 130.000 bacteriën als  $t$  de tijd is in uren. Bereken *groeifactor* en *groeipercentage* per uur en de *groeifactor* per dag in 3 decimalen.

$$N(8) = N(0) \cdot g^8 ; N(4) = N(0) \cdot g^4 \Rightarrow \frac{N(8)}{N(4)} = \frac{N(0) \cdot g^8}{N(0) \cdot g^4} \Rightarrow \frac{130.000}{50.000} = g^4 = 2,6$$

De *groeifactor*  $g$  is in vier uur is dan 2,6, dus *per uur*  $(2,6)^{\frac{1}{4}} = (1,2698\dots)$

Het *groeipercentage* per uur is  $\approx$  **0,270 %**

Per dag is de *groeifactor*  $(1,2698\dots)^{24} \approx$  **308,916**. (Niet eerder afronden!)

## 6. Gebroken rationale functies

Gebroken rationale functies zijn functies van de vorm  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$   
 waarin  $g(x)$  en  $h(x)$  polynomen zijn met reële coëfficiënten.

De grafieken van deze functies kunnen verschillende *hyperbolische* vormen aannemen.

Hiervan een voorbeeld  $f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$

De functie is niet gedefinieerd in het punt met  $x = 1$ , omdat voor die waarde de *noemer gelijk aan nul* wordt en dus de bijbehorende functiewaarde onbepaald is.

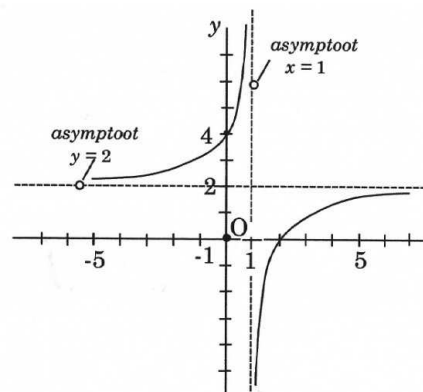
De functie heet dan **discontinu** in het punt met  $x = 1$ .

Verder volgt uit  $x = 0 \Rightarrow y = 4$  en uit  $y = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0$

dus  $x = 2$  dus de grafiek snijdt de  $x$ -as in  $(2,0)$  en de  $y$ -as in  $(0,4)$ .

Plot je de functie in de GR, dan blijkt de grafiek te bestaan uit twee krommen die je na *kegelsneden* zult herkennen als de *twee takken van een gelijkzijdige hyperbool*.

Je ziet dat *bij toenemende*  $|x|$  (dus  $x$  naar rechts of naar links toenemend), *rechter- en linkertak naderen tot de lijn*  $y = 2$  hetgeen als volgt is te bewijzen:



Deel je teller en noemer van  $f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$  door  $x$ , dan ontstaat  $f(x) = \frac{2-\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}}$  ... (1)

Als  $x$  in (1) tot oneindig nadert, dan naderen  $\frac{4}{x}$  en  $\frac{1}{x}$  tot nul zodat (1) overgaat in

$$f(x) = \frac{2-\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{2-0}{1-0} = 2. \text{ In wiskundige termen: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-4}{x-1} = 2.$$

De lijn  $y = 2$  heet nu een **horizontale asymptoot** van de functie  $y = f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$

Zo is ook aan te tonen dat *bij toenemende*  $|y|$  beide takken *naderen tot de lijn*  $x = 1$ .

Neem voor  $y \rightarrow \infty$  de reële waarde  $y = 10^{100}$  dan is  $y = \frac{2x-4}{x-1} = 2 \cdot 10^{100} - 4 / 10^{100} - 1$

waarvan je de uitkomst = 1 mag stellen. \*)

De functie heeft dus ook een **verticale asymptoot**  $x = 1$ . (Gr. 'symptootos' = samenvallend).

### Voorbeelden van asymptoten

Een *asymptoot van een functie* is dus in het algemeen een *lijn*  $y = ax + b$  waartoe de kromme  $y = f(x)$  steeds dichter nadert, zonder hem ooit te raken. We onderscheiden **horizontale, verticale en scheve asymptoten**. Hoe dichter  $x$  en of  $y$  tot *oneindig naderen*, hoe dichter de (grafiek van)  $y = f(x)$  tot de *lijn*  $y = ax + b$  nadert. \*)

In het geval hierboven zijn dus de *horizontale lijn*  $y = 2$  en de *verticale lijn*  $x = 1$

respectievelijk een horizontale en verticale asymptoot van de functie  $y = f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$ .

In de volgende opgave wordt ook een *scheve asymptoot* berekend.

1.  $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$

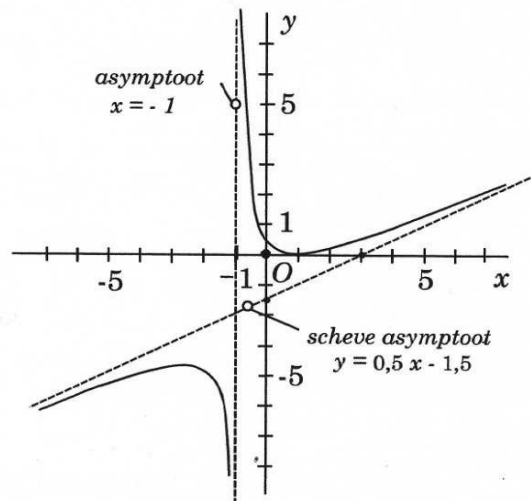
\*) Op blz.36 e.v. zullen de begrippen 'Limiet van een functie' en 'Asymptoten' wiskundig worden gedefinieerd.



Omdat de noemer van de breuk bij  $x = -1$  de waarde nul aanneemt, is de functie voor dat punt niet gedefinieerd. Je ziet dan ook dat de grafiek van  $f(x)$  **niet bestaat** in  $x = -1$ . De functie heet daarom **discontinu** in  $x = -1$ .

- Het *snijpunt met de y-as* is het punt met  $x = 0$   
en  $y = \frac{0,5(0-1)^2}{0+1} = 0,5$  dus is het punt  $(0; 0,5)$ .

- Een *snijpunt met de x-as* is het punt met  
 $y = 0$ , dus als  $\frac{0,5(x-1)^2}{x+1} = 0$  ofwel:  
 $0,5(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$  (dubbel tellend)  
twee *samenvallende punten*  $x = 1$ .  
Punt  $(1, 0)$  is dan *raakpunt* van  $f(x)$  aan de x-as.



1<sup>o</sup>. De grafiek heeft een verticale asymptoot in het punt met  $x = -1$ . Bewijs:

Als  $x$  **van links nadert tot -1** dan nadert de noemer van  $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$  tot 0  
en nadert de waarde van  $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$  tot  $-\infty$ .  
 $x = -1$  is dus *een (verticale) asymptoot van de linkertak van de hyperbool*.

2<sup>o</sup>. Ook van de rechtertak is de lijn  $x = -1$  een asymptoot want als  $x$  **van rechts nadert tot -1** dan nadert de noemer van  $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$  tot 0.  
De waarde van  $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$  nadert dan **van rechts** tot  $+\infty$  dus  $x = -1$  is *tevens asymptoot van de rechtertak van de hyperbool*.

- Omdat een eventuele limiet van  $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$  als  $x$  **tot plus of min oneindig nadert** niet direct is te berekenen, herleiden we de functie: door een *staartdeling* uit te voeren:

$$\begin{array}{r} x + 1 \overline{) 0,5x^2 - x + 0,5} \\ \underline{0,5x^2 + 0,5x} \phantom{0,5} \\ -1,5x + 0,5 \\ \underline{-1,5x - 1,5} \\ 2 \end{array}$$

dus is de gegeven functie gelijkwaardig met:

$$y = 0,5x - 1,5 + \frac{2}{x+1}$$

De limiet hiervan als  $x$  tot  $\pm\infty$  nadert is dan  $y = 0,5x - 1,5$  want  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x+1} = 0$ .

De lijn met vergelijking  $y = 0,5x - 1,5$  heet dan *een scheve asymptoot* van de gegeven functie.

De functie  $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$  heeft dus een verticale asymptoot  $x = -1$  en een scheve asymptoot  $y = 0,5x - 1,5$ .

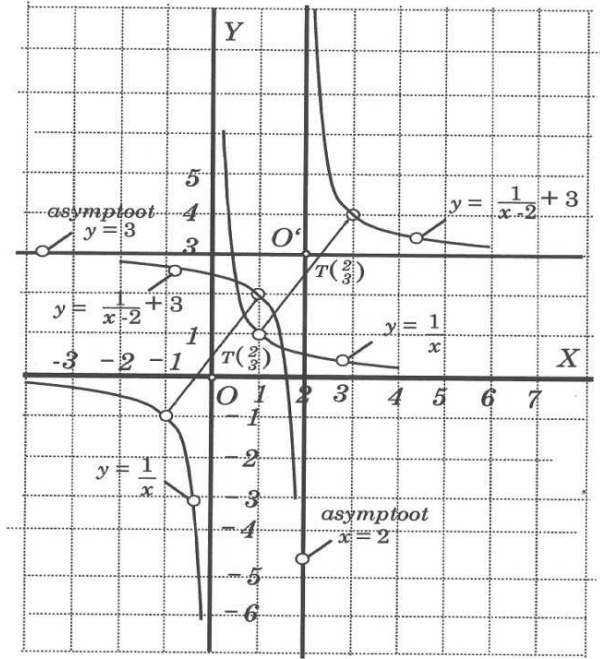
2.  $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$

De grafiek van deze gebroken rationale functie (dus een hyperbool) ontstaat door de translatie  $T(2,3)$  toe te passen op de *standaardhyperbool*  $g: y = \frac{1}{x}$  volgens de translatietransformatie-regel.

Horizontale asymptoot van  $g: y = \frac{1}{x}$  is de  $x$ -as met vergelijking  $y = 0$ , verticale asymptoot is de  $y$ -as met vergelijking  $x = 0$ .

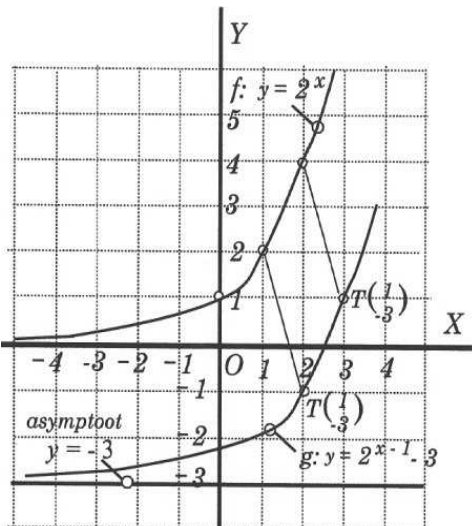
Bij de translatie  $T(2,3)$  gaat de oorsprong  $O$  over in  $O'$  dus de vergelijking  $y = 0$  over in  $y = 0 + 3 = 3$  en de vergelijking  $x = 0$  in  $x = 0 + 2 = 2$

Van  $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$  is de lijn  $y = 3$  dan een *horizontale asymptoot* en  $x = 2$  de *verticale asymptoot*.



7. Grafieken van exponentiële functies

1.  $f(x) = 2^{x-1} - 3$



Deze exponentiële functie ontstaat uit de standaardfunctie  $g: y = 2^x$  via de translatie  $T(1,-3)$ . (blz.11)

Horizontale asymptoot van  $f: y = 2^x$  is de  $x$ -as, dus de lijn  $y = 0$ , de *horizontale asymptoot* van  $g: y = 2^{x-1} - 3$  is dan:  $y = 0 - 3 = -3$ .

Er is geen verticale asymptoot want  $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x$  bestaat niet.

Het *domein* van  $f$  (alle waarden van  $x$  waarvoor de functie  $2^x$  is gedefinieerd) is  $\mathbb{R}$ , dus is  $\mathbb{R}$  ook het *domein* van  $g$ .

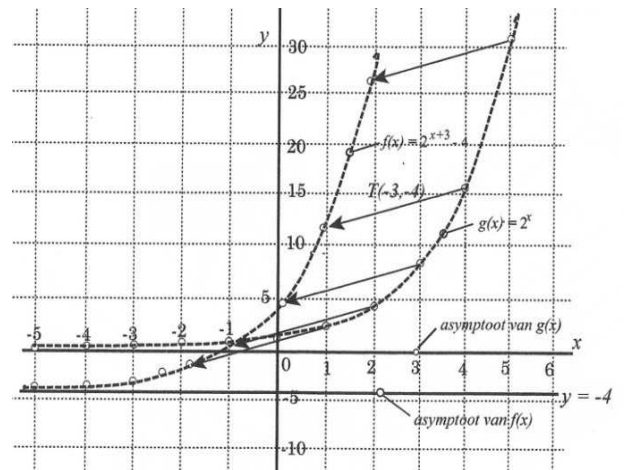
Het bereik van  $f$  (alle functiewaarden die  $2^x$  kan aannemen) is  $(0, \rightarrow)$ , dus is  $\langle -3, \rightarrow \mathbb{Q}$  het bereik van  $g$ .

2.  $f(x) = 2^{x+3} - 4$

- a. Hoe ontstaat de grafiek van  $f$  uit de standaardgrafiek van een exponentiële functie?
- b. Bepaal het domein en het bereik van  $f$ .

De exponentiële functie  $f(x) = 2^{x+3} - 4$  ontstaat uit de standaardfunctie  $g(x) = 2^x$  via de translatie  $T(-3,-4)$ . Volgens voorgaande opgave is het domein van  $g(x) = 2^x = \mathbb{R}$  dus is ook  $\mathbb{R}$  het *domein* van  $f: y = 2^{x+3} - 4$

Het bereik van  $g(x) = 2^x$  is  $\langle 0, \rightarrow \mathbb{Q}$   
 $f: y = 2^{x+3} - 4$  is het *bereik*  $\langle -4, \rightarrow \mathbb{Q}$



## Logaritmische functies

### a. Logaritme van een getal

Exponentiële vergelijkingen zoals bij voorbeeld  $17^x = 500$  kan je na voorgaande theorie nog niet algebraïsch oplossen. Men heeft voor dit probleem de *logaritme van een getal* ingevoerd. De Engelse wiskundige Henry Briggs (1561-1630) besloot alle *positieve getallen* als een **macht van tien** te schrijven. De *exponenten* van deze machten noemde hij **logaritmen**, dus de *logaritme* van een getal  $a$  is de *exponent  $p$  waarbij  $10^p = a$* . Definitie:  **$\log a = p$  als  $10^p = a$** .

Zo is bijvoorbeeld  $100 = 10^2$  dus de *logaritme* van  $100 = 2$ . Notatie:  $\log 100 = 2$ .

$1000 = 10^3$  dus  $\log 1000 = 3$ ;  $1 = 10^0 \Rightarrow \log 1 = 0$ ;  $0,001 = 10^{-3} \Rightarrow \log 0,001 = -3$

De *logaritmen* van getallen  $a$  met  $a \leq 0$  **bestaan niet** want er is *geen getal  $p$*  waarvoor  $10^p = a$  als  $a \leq 0$ . (Immers: Elke positieve of negatieve macht van 10 is groter dan 0, 'zelfs'  $10^{-1000} = 1 / 10^{1000} > 0$ ).

Briggs berekende de *logaritmen* van alle viercijferige getallen en verzamelde ze in 'logaritmetafels'. Zo ontstonden de **Briggse logaritmen**, met als **grondtal** het getal **10** \*)

Niet alleen het getal tien kan als *grondtal  $g$*  voor *logaritmen* dienen, maar in feite **elk positief reëel getal mits  $\neq 1$** .

Omdat bijvoorbeeld  $9 = 3^2$  kan men met *als grondtal 3* zeggen  ${}^3 \log 9 = 2$ .

Zo is  ${}^5 \log 125 = 3$  omdat  $5^3 = 125$ ;  ${}^{1/3} \log \frac{1}{27} = 3$ , want  $(1/3)^3 = \frac{1}{27}$ , etc.

Men definieert dan:  **${}^g \log a = x$  als  $g^x = a$**  ( $g > 0$  als grondtal van een exponentiële functie).

Omdat  $g > 0$  is dan ook  $a > 0$  dus **als  $a \leq 0$  dan bestaat  ${}^g \log a$  niet**.

Definitie:

De  ${}^g \log$  *logaritme* van een getal  $a$  is gedefinieerd door:  **${}^g \log a = x$  als  $g^x = a$**  ( $a$  en  $g > 0$ ,  $g \neq 1$ )

De wiskundige John Napier (1707-1783) voerde veel later voor *het grondtal  $g$*  van de *logaritmen* het '**Getal van Euler**' =  $e$  in. ( $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2,718281828\dots$ )

*Logaritmen* met dit grondtal noemt men **natuurlijke logaritmen** omdat de waarde ervan een rol speelt in veel natuurprocessen.

Notatie voor *logaritmen met grondtal  $e$*  is  **$\ln x$** , dus  **$\ln x = {}^e \log x$** .

*Log  $x$  is de Briggse logaritme van  $x$  met 10 als grondtal, dus  $\log x = {}^{10} \log x$ ,  $\ln(x)$  is de natuurlijke logaritme van  $x$  met  $e$  als grondtal dus  $\ln x = {}^e \log x$ .  
Als  $\log x = p$ , dan is  $10^p = x$ , als  $\ln x = p$  dan is  $e^p = x$ .*

De *logaritme met grondtal  $g$  van een getal  $x$*  is dus de **exponent** van de exponentiële functie  $g^y$ . Als  ${}^g \log x = y$  dan is  $g^y = x$  dus  ${}^g \log x$  en  $g^y$  zijn **elkaars inverse functies**.

\*) Zo berekende Briggs handmatig 27 wortels uit 10: De wortel uit 10 daarna de wortel uit de uitkomst daarvan en daaruit weer de wortel et cetera. Alles in zestien decimalen nauwkeurig!. Omdat  $\sqrt{10} = 10^{0,5} = 3,16227766\dots$ , is  $\log 3,16227766\dots = 0,5$ ;  $\sqrt{3,16227766} = \sqrt{\sqrt{10}} = 10^{0,25} = 1,77827941\dots$  dus  $\log 1,77827941\dots = 0,25$  enz.. En dat was nog maar een begin...

**b. Eigenschappen van logaritmen**

Voor elk positief grondtal  $g$  en alle positieve waarden voor  $a$  en  $b$  gelden de regels:

1.  ${}_g \log ab = {}_g \log a + {}_g \log b$
2.  ${}_g \log \frac{a}{b} = {}_g \log a - {}_g \log b$
3.  ${}_g \log(a^n) = n \cdot {}_g \log a$
- 4<sup>a</sup>  ${}_g \log(g^x) = x$     4<sup>b</sup>  $g^{{}_g \log x} = x$

Bewijs:

1. Noem  ${}_g \log a = p$  en  ${}_g \log b = q$  dan is per definitie  $g^p = a$  en  $g^q = b$  met gevolg:  
 $ab = g^p \cdot g^q = g^{p+q}$ , zodat  ${}_g \log ab = p + q$  dus:  **${}_g \log ab = {}_g \log a + {}_g \log b$** .
2. Noem  ${}_g \log a = p$  en  ${}_g \log b = q$  dan is  $g^p = a$ ,  $g^q = b$  dus  $\frac{a}{b} = \frac{g^p}{g^q} = g^{p-q}$  zodat  
 ${}_g \log \frac{a}{b} = p - q \Rightarrow$   **${}_g \log \frac{a}{b} = {}_g \log a - {}_g \log b$** .
3. Als  ${}_g \log a = p$  dan  $g^p = a$  en  $a^n = (g^p)^n = g^{n \cdot p} \Rightarrow {}_g \log(a^n) = n \cdot p = n \cdot {}_g \log a$   
dus  **${}_g \log(a^n) = n \cdot {}_g \log a$**
- 4<sup>a</sup>.  ${}_g \log(g^x) = x \cdot {}_g \log g$  (volgens 3)  $= x \cdot 1 = x$  (want  ${}_g \log g = 1$  omdat  $g^1 = g$ )  $\Rightarrow$   
 **${}_g \log(g^x) = x$**
- 4<sup>b</sup>. Noem  ${}_g \log x = p$  dan is  $g^p = x$  zodat  $g^{g^{\log x}} = g^p = x \Rightarrow$   **$g^{{}_g \log x} = x$**

**c. Inverse functies**

Punt  $a$  wordt in de figuur door de functie  $f_1$  afgebeeld op het punt  $b$  dus  **$b = f_1(a)$** .

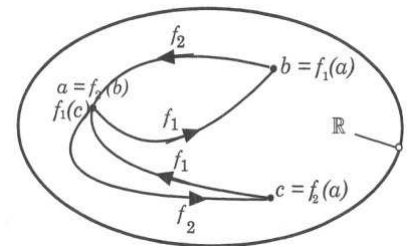
Stel nu dat het  $f_1$  beeld  $b$  van  $a$ , dus  $b = f_1(a)$  door een functie  $f_2$  wordt 'terug' afgebeeld op  $a$ , dan is  **$a = f_2(b) = f_2(f_1(a))$**  ... (1)

Door de functie  $f_2$  wordt het punt  $a$  afgebeeld op  $c$ , zodat  **$c = f_2(a)$** .

Stel nu dat ook dit  $f_2$ -beeld  $c$  van  $a$  door de functie  $f_1$  weer wordt 'terug' afgebeeld op  $a$ , dan is dus  **$a = f_1(c) = f_1(f_2(a))$**  ... (2)

Volgens (1) en (2) geldt dan voor de functies  $f_1$  en  $f_2$  dat  **$f_2(f_1(a)) = f_1(f_2(a)) = a$** .

**Als dit geldt voor alle punten  $x = a$  binnen het domein van  $f_1$  en  $f_2$  dan zijn  $f_1$  en  $f_2$  elkaars inverse functies.**



*Zijn  $f$  en  $g$  twee functies in  $\mathbb{R}$  waarbij voor elk element  $x$  geldt dat  $f(g(x)) = g(f(x)) = x$  dan zijn  $f$  en  $g$  elkaars inverse functies*

Zo zijn machtsverheffen  $f(x) = x^p$  en worteltrekken  $g(x) = \sqrt[p]{x}$  elkaars inverse functies, want voor elk getal  $x$  is  **$f(g(x)) = f(\sqrt[p]{x}) = (\sqrt[p]{x})^p = x$**  en  **$g(f(x)) = g(x^p) = \sqrt[p]{x^p} = x$** .  
 Hierbij geldt dan ook steeds als  $f(b) = a$  dan is  $g(a) = b$  dus als  $f(x) = f(4) = 4^p$  dan is  $g(x) = g(4^p) = \sqrt[p]{4^p} = 4$ .

*Eigenschap: De logaritmische functie  $f(x) = {}_g \log x$  en de exponentiële functie  $g(x) = g^x$  zijn elkaars inverse functies*

**Bewijs:**

Noem  $f(x) = {}^s \log x$  en  $g(x) = g^x$  dan is:  $f(g(x)) = f(g^x) = {}^s \log(g^x) = x$  (eig. 4<sup>a</sup>) ... (1)

Ook is  $g(f(x)) = g({}^s \log x) = g^{{}^s \log x} = x$  (eig 4<sup>b</sup>) ... (2)

Uit (1) en (2) volgt dan  $f(g(x)) = g(f(x)) = x$  dus zijn  $f(x) = {}^s \log x$  en  $h(x) = g^x$  per definitie elkaars **inverse functies**.

**Algemene eigenschap van inverse functies**

*Twee functies f en g waarvan de grafieken elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn y = x zijn elkaars inverse functies.*

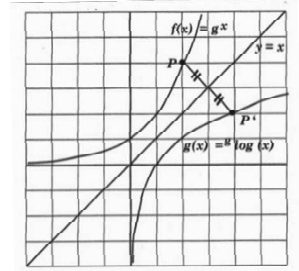
**Bewijs:**

Neem  $f: y = e^x$  dan is daarvan volgens eerdere regel *het spiegelbeeld in de lijn y = x*  $g: x = e^y$  (x en y omwisselen). (blz.15).

Uit  $g: x = e^y$  volgt  $e \log x = y$ , zodat nu de voorwaarde geldt:

$f(g(x)) = e^{e \log x} = e^y = x$  en  $g(f(x)) = e^{e \log x} = x$ , dus:

**f en g zijn elkaars inverse functies**



**Voorbeeld** ( Uit examenopgave vwo-B)

Toon aan dat  $f(x) = 5 - \frac{6}{x+2}$  en  $g(x) = \frac{2x-4}{5-x}$  elkaars inverse functies zijn:

Ga uit van  $f(x) = y = 5 - \frac{6}{x+2}$  en *verwissel x en y*

Je krijgt dan dat  $x = 5 - \frac{6}{y+2}$  *het spiegelbeeld is van*  $y = 5 - \frac{6}{x+2}$  in de lijn  $y = x$ .

Uit  $x = 5 - \frac{6}{y+2}$  volgt  $\frac{6}{y+2} = 5 - x \Rightarrow y + 2 = \frac{6}{5-x} \Rightarrow y = \frac{6}{5-x} - 2$ , dus

De inverse van  $f(x) = \frac{6}{5-x} - 2 = \frac{6}{5-x} - 2 \cdot \frac{5-x}{5-x} = \frac{6-10+2x}{5-x} = \frac{2x-4}{5-x} = g(x)$

Hiermee is aangetoond dat f en g elkaars inverse functies zijn.

**Opgaven**

1. Bewijs dat algemeen geldt:  ${}^s \log x = \frac{\log x}{\log g}$  . (eigenschap 5)

Noem  ${}^s \log x = p$  dan is  $x = g^p$ . Noem  $\log x = q$  dan is  $x = 10^q$  zodat  $g^p = 10^q = x$  ... (1)

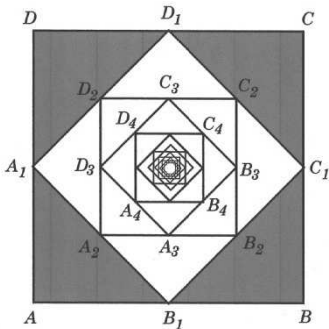
Noem  $\log g = r$ , dan  $g = 10^r$  dus  $g^p = (10^r)^p = 10^{rp} = 10^q$  volgens (1).

Gevolg:  $r \cdot p = q \Rightarrow p = \frac{q}{r}$  ofwel  ${}^s \log x = \frac{\log x}{\log g}$ .

Met deze eigenschap kunnen logaritmen met *elk willekeurig grondtal g* met de GR TI-83/84 via Briggse logaritmen (grondtal = 10) berekend worden. (Bij gebruik van de Casio kan je  ${}^s \log x$  voor willekeurig grondtal g direct bepalen).

Voorbeelden:  ${}^3 \log 17 = \frac{\log 17}{\log 3} \approx 2,5789$  ;  ${}^{1/3} \log 52 = \frac{\log 52}{\log 1/3} \approx -3,5966$

2. De middens van de zijden van een vierkant  $ABCD$  zijn de hoekpunten van vierkant  $A_1B_1C_1D_1$ . De middens van  $A_1B_1C_1D_1$  zijn weer de hoekpunten van vierkant  $A_2B_2C_2D_2$  en zo verder volgens onderstaande figuur. De zijde van  $ABCD = 8$ .  
Bij welke index  $n$  zal de oppervlakte van vierkant  $A_nB_nC_nD_n$  kleiner zijn dan 0,001?



De oppervlakte van  $ABCD = 8^2 = 64$ , de oppervlakte van  $A_1B_1C_1D_1 = \frac{1}{2} \times O_{ABCD} = \frac{1}{2} \times 64$  en ook van *elk* volgend vierkant is de oppervlakte steeds de helft van die van het vorige vierkant. Van  $A_nB_nC_nD_n$  is dan de oppervlakte  $O = 64 \times (\frac{1}{2})^n$ .  
Je berekent nu bij welke waarde van  $n$  geldt dat  $64 \times (\frac{1}{2})^n = 0,001$  dus wanneer  $\log(64 \times (\frac{1}{2})^n) = \log 0,001 = -3$ . (1)  
 $\log ab = \log a + \log b$  en  $\log a^n = n \cdot \log a$  dus volgt uit (1):  
 $\log 64 + n \cdot \log \frac{1}{2} = -3 \Rightarrow 1,80617 + n \cdot -0,30103 = -3 \Rightarrow 4,80617 = 0,30103 n \Rightarrow n = 15,9658 \Rightarrow$

De oppervlakte van  $A_{16}B_{16}C_{16}D_{16}$  is dus kleiner dan 0,001 vanaf de **index  $n = 16$** .  
(Controle:  $64 \times (\frac{1}{2})^{16} = 0,000976$  en  $64 \times (\frac{1}{2})^{15} = 0,001953$ ).

## 9. Goniometrische functies

### a. Definities in de eenheidscirkel

In de driehoeksmeetkunde werden *sinus*, *cosinus* en *tangens* van **hoeken**  $< 90^\circ$  gedefinieerd als de *verhoudingen van twee zijden in een rechthoekige  $\Delta$* :

$$\text{sinus } \alpha (\sin \alpha) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}, \text{cosinus } \alpha (\cos \alpha) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

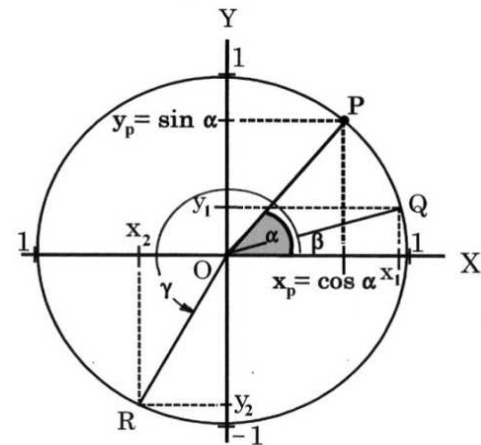
$$\text{en tangens } \alpha (\tan \alpha) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$$

Om sinus en cosinus te kunnen definiëren voor een **willekeurige hoek  $\alpha$**  heeft men de **'eenheidscirkel'** ingevoerd: een cirkel met **straal  $R = 1$**  en middelpunt  $O$  in de oorsprong van het  $XOY$  stelsel.

Een hoek  $\alpha$  wordt voorgesteld door de hoek  $XOP$  die het **'vaste been'**  $OX$  maakt met het **'bewegende been'** (de **'voerstraal'**)  $OP$  van  $\angle XOP$ .  
Zo is dan  $\alpha = 0$  als voerstraal  $OP$  *samenvalt met  $OX$* .

Als  $\alpha > 0$  dan wordt  $OP$  vanuit  $OX$  om  $O$  over de hoek  $\alpha$  *geroteerd in tegenwijzerzin*; als  $\alpha < 0$ , dan wordt  $OP$  om  $O$  over de hoek  $\alpha$  *geroteerd in wijzerzin*.

**Sin  $\alpha$  en cos  $\alpha$**  zijn nu gedefinieerd als de *coördinaten van het eindpunt  $P(x_p, y_p)$*  van de voerstraal  $OP$  en wel zo dat  $x_p = \cos \alpha$  en  $y_p = \sin \alpha$ .  
Omdat nu  $\alpha$  *elke reële waarde  $\alpha + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )* kan aannemen is het domein van  $\sin \alpha$  en  $\cos \alpha = \mathbb{R}$ , het bereik is  $[-1, 1]$ .



*Sinus  $\alpha$  en cosinus van  $\angle XOP = \alpha$  zijn gedefinieerd in de eenheidscirkel, als de lengte van de projecties  $y_p, x_p$  van het eindpunt  $P$  van de voerstraal  $OP$  op respectievelijk de  $y$ -as en de  $x$ -as*

**Voorbeelden:** Van  $\angle XOP = \alpha$  is **sin  $\alpha = y_p$**  en **cos  $\alpha = x_p$** ; **cos  $\angle XOQ = \cos \beta = x_1$** ,

$$\sin \angle XOQ = \sin \beta = y_1; \cos \angle XOR = \cos \gamma = x_2, \sin \angle XOR = \sin \gamma = y_2.$$

Lees ook af:  $\sin 90^\circ = 1, \cos 90^\circ = 0, \sin 180^\circ = 0, \cos 180^\circ = -1, \sin 270^\circ = \sin(-90^\circ) = -1,$   
 $\cos 270^\circ = \cos(-90^\circ) = 0, \sin 360^\circ = \sin 0^\circ = 0, \cos 360^\circ = \cos 0^\circ = 1.$