Wiskunde

voor alle vwo-niveaus

Nieuwe versie 2022

Algebra-analyse-meetkunde-statistiek-kansrekening
vectoralgebra-grafen-matrices-rijen-reeksen
dynamische modellen-logica- perspectief
Lorentzfactor-Poissonverdeling-complexe getallen

Bij deze nieuwe versie

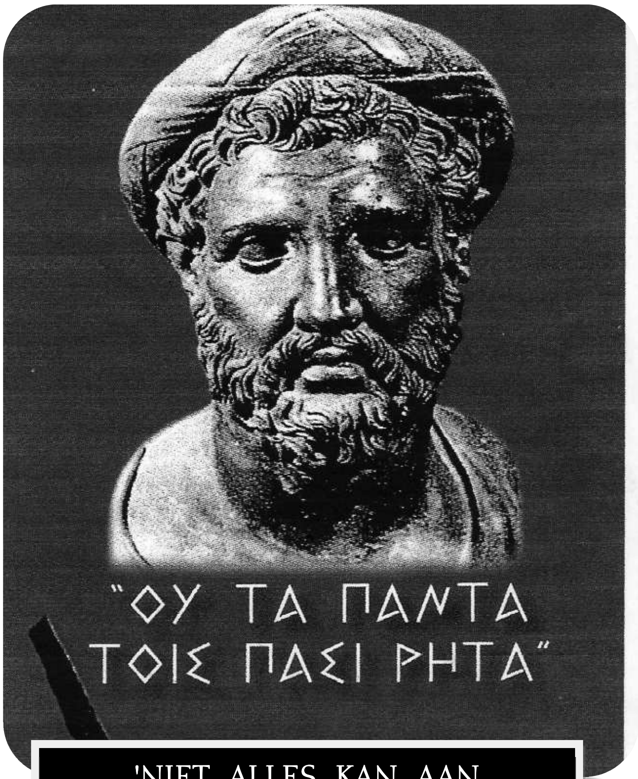
Deze uitgave is een volledige herziening van 'Wiskunde voor alle vwo-niveaus' van april 2022. Meer dan hiervoor is gedateerde stof weggelaten en zijn figuren, teksten en uitwerkingen van opgaven hier en daar aangevuld en soms verbeterd. Theorie en opgaven betreffende in onbruik geraakte onderwerpen van het vwo zijn weggelaten of aanzienlijk bekort.

De steeds geheel uitgewerkte opgaven en toepassingen zijn hoofdzakelijk bedoeld ter ondersteuning van de eraan voorafgaande theorie. Hun aantal is beperkt gehouden zodat u in betrekkelijk korte tijd (weer) stof (weer) kunt ‘eigen’ maken, en werkt het leren niet demotiverend omdat geen grote aantallen oefenopgaven doorgewerkt hoeven te worden.
Elk onderdeel wordt steeds als compleet geheel op eind-vwo-niveau behandeld, dus niet volgens de structurele, concentrische opbouw van alle bekende wiskundemethoden, waarbij onderwerpen in de opvolgende leerjaren herhaald en uitgebreid worden volgens het lang beproefde, didactisch model van professor Herbarts. Door deze opzet kunt u, mede door een zeer gedetailleerde inhoudsopgave en trefwoordenregister, de voor u meest interessante onderdelen snel vinden..
Aan het gebruik van de grafische rekenmachine (GR) wordt, geïntegreerd in de opgaven en toepassingen, alle nodige aandacht besteed. Wij kozen eerder voor de TI-83 van Texas Instruments, die vrijwel identiek is met de latere en iets handzamer TI-84.
De latere GR van Casio is overigens naar mijn mening gemakkelijker in het gebruik.
Ik hoop dat ook deze nieuwe uitgave aan uw verwachtingen zal mogen voldoet en houd mij voor opbouwende kritiek van harte aanbevolen.

Over de schrijver

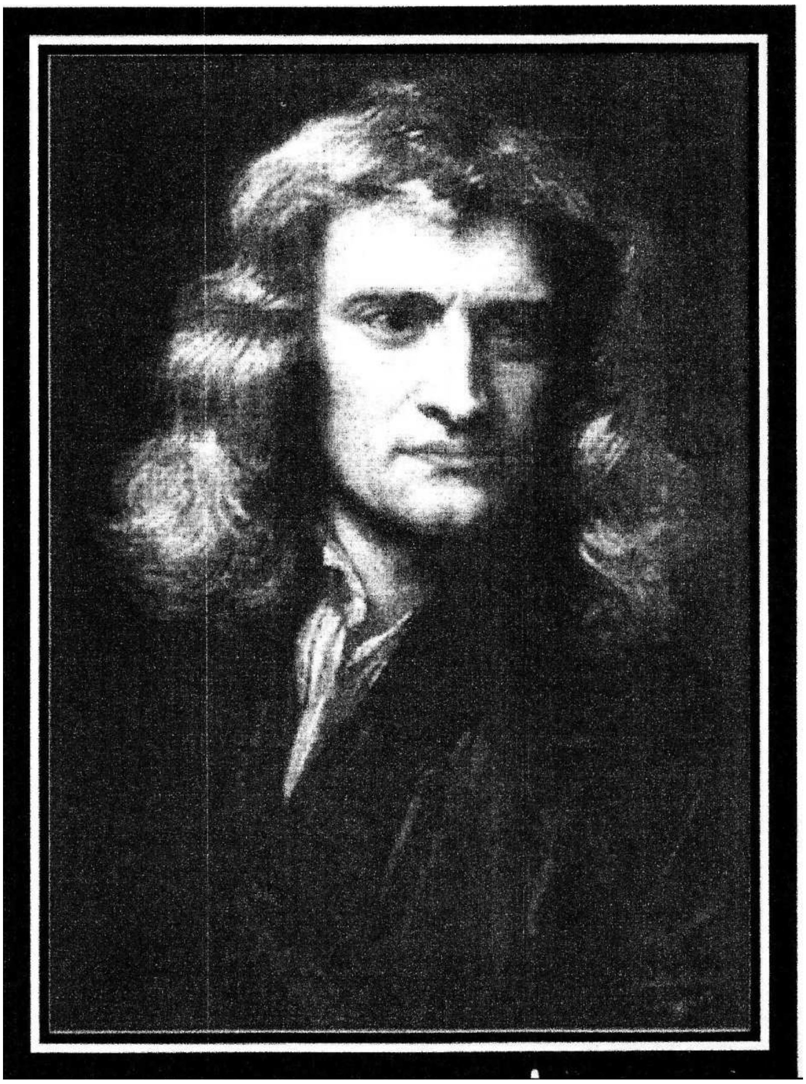
Wim Gronloh begon zijn loopbaan als scheepswerktuigkundige bij de Nederlandse Koopvaardij en was na negen jaar vaartijd ruim 35 jaar werkzaam als leraar wis- en natuurkunde in het voortgezet onderwijs. Publiceerde in 1997 de wiskundemethode 'Basislijn' voor lbo-mavo en havo-vwo. Publiceert sedert 2006 wiskundeboeken voor vwo en havo.

Wim Gronloh
e-mail: wimgronloh@kpnplanet.nl
Bussum, oktober 2022



'NIET ALLES KAN AAN
ALLEN UITGELEGD WORDEN'

Pythagoras, geboren op Samos (eiland in de Egeïsche Zee) circa 572 jaar v. Chr. Richtte omstreeks 530 jr. v. Chr. in Croton de school van de Pythagoreeërs op. Zij bewezen de beroemdste stelling uit de klassieke wiskunde:
In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de schuine zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de twee rechthoekszijden. De Babyloniërs kenden de eigenschap al ca. 1000 jr. v. Chr. De Egyptische 'harpedonaptai' (touwspanners) pasten de stelling ca. 3000 jr. v. Chr. toe om rechte hoeken uit te zetten via knopentouwen (knopen op afstanden 3-4-5; 5-12-13; 8-15-17,..
(de later zogenoemde 'Pythagoras-triples').

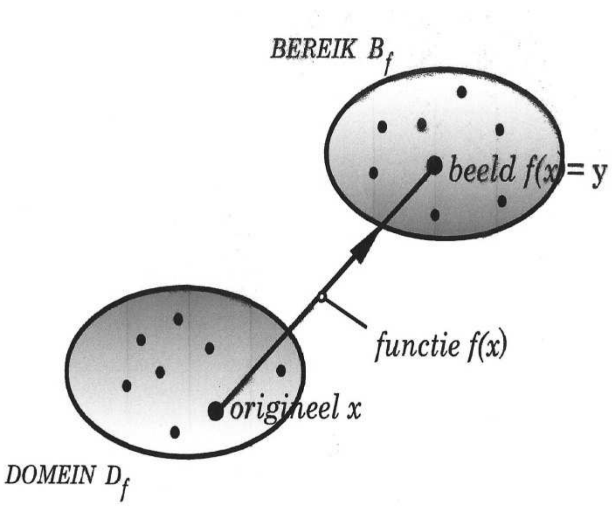


Sir Isaac Newton, geboren in 1642 te Woolsthorp, overleden in 1727 te Kensington. Engels wis- en natuurkundige, astronoom, nauurfilosoof, alchemist, officieel muntmeester en theoloog. Publiceerde de differentiaal- en integraalrekening in zijn meesterwerk 'Principia' in 1687 betreffende zwaartekracht, banen van hemellichamen, grondwetten van de dynamica, .. De Britse 'Royal Society' beschouwde Newton in 2005 als grootste geleerde uit de wetenschap ooit.

I. FUNCTIES, GRAFIEKEN EN FUNCTIEVERGELIJKINGEN

Als je rustig wandelend per uur 4 *km* aflegt dan is de afgelegde afstand in 2½ *uur* dus 10 *km*. De lengte van de afgelegde weg *bij die snelheid* is afhankelijk van de *tijd* ofwel: de afstand is een ***functie*** van de tijd. Zo bestaan er talrijke grootheden die afhankelijk zijn van *één of meer* andere grootheden waarbij het verband tussen die grootheden in een functie is vastgelegd door een zeker ***functievoorschrift***.
Als je in bovenstaand geval ook rekening wilt houden met een *wisselende snelheid*, dan is de lengte van de afgelegde weg een functie van *de tijd en de gemiddelde snelheid.*

1. *Het begrip functie*

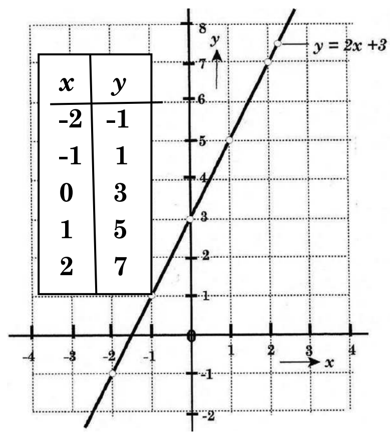


Is bijvoorbeeld een functie f *gegeven door* het *functievoorschrift:*
'vermenigvuldig met drie' dan is $f(3) = 9$, $f(-7) = -21$ en $f(a) = 3a$.
De functie wordt dan geschreven als:
$\boldsymbol{f(x) = 3.\,x}$ of korter $\boldsymbol{f: y = 3\,x}$
De getallen 3, −7 en a heten de ***originelen*** van de functie $f(x) = 3\,x$, de getallen 9, −21 en $3a$ zijn de bijbehorende ***beelden*** ofwel ***functiewaarden van f.***
De verzameling *originelen* van f heet het ***domein*** $\boldsymbol{D_f}$ *van de functie*, de verzameling *beelden* heet het ***bereik*** $\boldsymbol{B_f}$.

Als *geen specifiek domein of bereik is aangegeven*, dan wordt er van uitgegaan dat *alle originelen* en *hun beelden* elementen zijn van de ***verzameling reële getallen*** $\mathbb{R}$.

> *Een functie van x is een zeker voorschrift f, (g, h, i, ...) dat bij elk origineel x uit het domein D_f, precies één beeldt $f(x) = y$ uit het bereik B_f bepaalt*

Vaak worden origineel x en beeld y van een functie getekend als punten $P(x\,,y)$ van een grafiek in een rechthoekig coördinatenstelsel: het *origineel x* op een horizontale *x-as*, het beeld $y = f(x)$ op de verticale *y*-as. Het snijpunt van de assen is de ***oorsprong O.***
In bijgaande figuur is met behulp van de *x-y* ***-tabel,*** de ***grafiek*** getekend van de functie: $\boldsymbol{f(x) = y = 2\,x + 3}$.



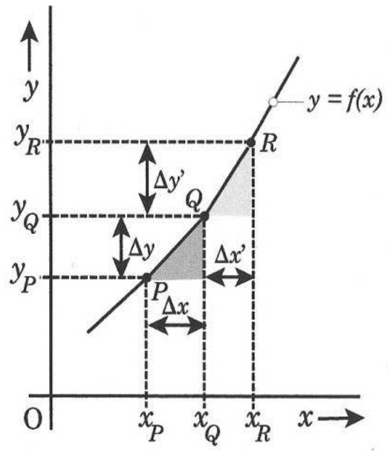
x	y
-2	-1
-1	1
0	3
1	5
2	7

Maak in opgaven steeds goed onderscheid tussen *een* ***functie f(x)*** *en* ***de grafiek van die functie f(x).*** [*)]

[*)] *In vroegere lesmethoden van het voortgezet onderwijs kon met de 'functie f' zowel het functievoorschrift f als de grafiek van f worden bedoeld.*

2. *Lineaire functies*

Voor *elk tweetal punten P en Q* van een *lineaire functie* geldt dat de ***verhouding*** tussen een zekere toename $\Delta x = x_Q - x_P$ van x en de *bijbehorende* toename $\Delta y = y_Q - y_P$ van y steeds een ***vaste waarde*** heeft. De betekenis hiervan is als volgt:



Stel P en Q zijn twee naburige punten op de grafiek van een lineaire functie $y = f(x)$ waarbij $P = (x_P, y_P)$ en $Q = (x_Q, y_Q)$.
De *verhouding* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bepaalt de *hoek* die het *lijnstukje PQ* maakt met de *positieve x*-as, dus bepaalt de *richting van PQ*.
Stel $R\ (x_R, y_R)$ is *een ander* naburig punt van Q op de grafiek met $x_R = x_Q + \Delta x'$ en $y_R = y_Q + \Delta y'$, dan wordt de richting van QR bepaald door de verhouding $\frac{\Delta y'}{\Delta x'}$

Volgens de definitie heeft de verhouding $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bij een lineaire functie een vaste waarde zodat er geldt: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ dus zijn de *richtingen* van de lijnstukjes PQ en *QR gelijk* ofwel:
PQ en *QR* liggen in elkaars verlengde dus ***P, Q* en *R liggen op een rechte lijn***
(dit verklaart de naam *lineaire functie).*

Voor de lijn l tussen twee willekeurige punten $P = (x_P, y_p)$ en $Q = (x_Q, y_Q)$ van l geldt nu dat de factor $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$ $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \neq 0\right)$ de ***richting bepaalt*** van lijn l.
De waarde $\boldsymbol{a} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$ $(x_Q - x_P \neq 0)$ heet daarom de ***richtingscoëfficiënt a*** van l. …(1)

We bepalen nu een *vergelijking* van lijn l, dus een betrekking tussen de waarden x en y *waaraan alle punten P (x, y) van lijn l* (*l niet evenwijdig met de y-as*) *voldoen*:
Kies het punt $P = (x_P, y_p) = (0, b)$ van l ***op de y -as*** en een punt $Q = (x_Q, y_Q) = (x, y)$ van l.
Uit **(1):** $\boldsymbol{a} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$ $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \neq 0\right)$ volgt $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{y_Q - y_P}}{\boldsymbol{x_Q - x_P}} = \frac{\boldsymbol{y - b}}{\boldsymbol{x - 0}} = \frac{\boldsymbol{y - b}}{\boldsymbol{x}} \Rightarrow ax = y - b \Rightarrow \boldsymbol{y = ax + b.}$

Omdat een *lineaire functie* dus voldoet aan de vergelijking $f(x) = y = ax + b$ noemt men *deze* ***een eerstegraads functie*** omdat daarin de variabele *x hoogstens tot de eerste macht* voor komt.

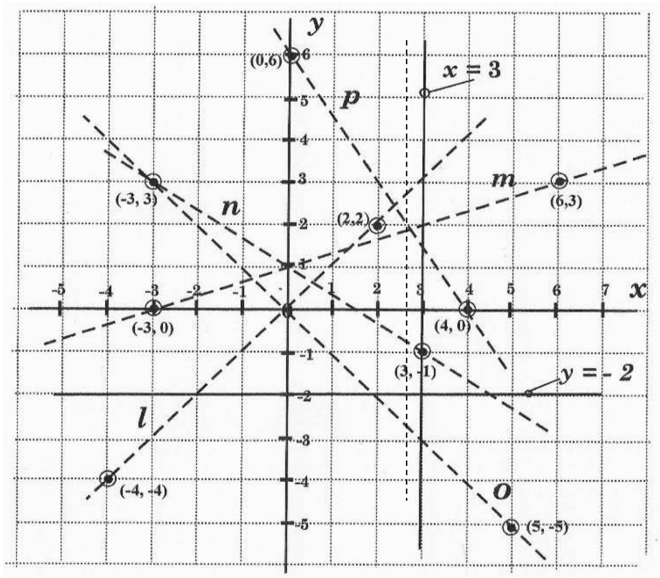
> *De grafiek van een lineaire functie is een (rechte) lijn l met vergelijking y = ax + b waarin a de richtingscoëfficiënt is van l en b de y-coördinaat van het snijpunt van l met de y-as.*

Als l // *y-as dan is bij elke y* : $\boldsymbol{x_p} = \boldsymbol{x_q}$ dus $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\boldsymbol{y_q - y_p}}{x_q - x_p}$ bestaat dan niet omdat $x_q - x_p = 0$.
Bij elke y is dan $x = x_p = x_q$ dus is $\boldsymbol{x = x_p}$ $(= \boldsymbol{x_q})$ de vergelijking van l.

Voorbeelden

1. In de figuur hiernaast zijn in een *orthonormaal coördinatenstelsel XOY* de lijnen *l, m, n, o en p* getekend door twee omcirkelde gegeven punten.
Een orthonormaal stelsel bestaat uit twee onderling loodrechte coördinaatassen
De eenheden op de assen hebben daarbij de standaardlengte 1 .

a. Bepaal van elke lijn de vergelijking
b. Bepaal de vergelijking van de X-as en de Y-as.
c. Hoe lopen de lijnen q: $x = 3$ en r: $y = -5$?



a. De grafiek van een eerstegraads functie $y= f(x) = ax + b$, is een rechte lijn l waarin $\boldsymbol{a}$ de *richtingscoëfficiënt* is van *l en b* de *y-coördinaat* van het *snijpunt van l met de y-as.*
In de figuur zijn van elke lijn steeds twee *roosterpunten* (punten in het snijpunt van twee roosterlijnen) met een cirkeltje aangegeven waarmee de vergelijking is te bepalen.

- Zo is van lijn $\boldsymbol{l}$**:** $\boldsymbol{a} = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{2-(-4)}{2-(-4)} = \mathbf{1}$ en $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ want O (0,0) ligt op lijnstuk (-4,4) - (2,2). dus de vergelijking is $l : y = 1.\, x + 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{l}\textbf{:}\ \boldsymbol{y = x}.$

- Voor $\boldsymbol{m}$ geldt $\boldsymbol{a} = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{3-0}{6-(-3)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ en $\boldsymbol{b} = \mathbf{1}$
  dus wordt de vergelijking : $\boldsymbol{m}$: $\boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}$

- Voor $\boldsymbol{n}$ geldt $\boldsymbol{a} = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{-1-3}{3-(-3)} = \frac{-4}{6} = \frac{\mathbf{-2}}{\mathbf{3}}$ en $\boldsymbol{b} = \mathbf{1}$
dus is de vergelijking is $\boldsymbol{n}$: $\boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{-2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}$

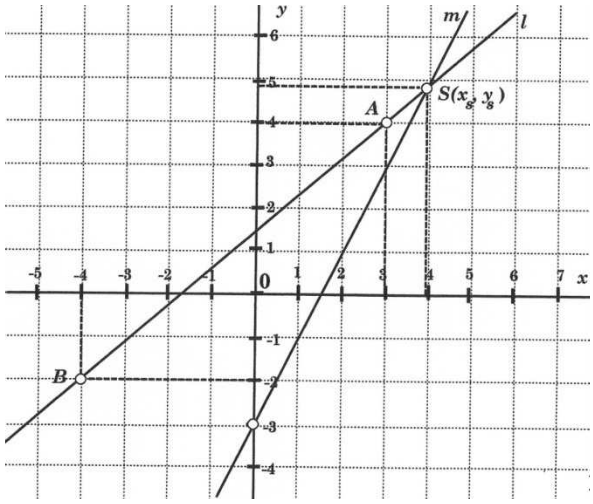
- Voor $\boldsymbol{o}$ geldt $\boldsymbol{a} = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{-5-3)}{5-(-3)} = \frac{-8}{8} = \mathbf{-1}$ en $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$
dus de vergelijking is: $\boldsymbol{o}$: $\boldsymbol{y = -x}$

- Voor $\boldsymbol{p}$ geldt $\boldsymbol{a} = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{0-6}{4-0} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$ en $\boldsymbol{b} = \mathbf{6}$
dus de vergelijking is: $\boldsymbol{p}$: $\boldsymbol{y} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x} + \mathbf{6}$

- b - Voor *alle punten op de x-as* geldt: $y = 0$..
De vergelijking van de x-as is dan**:** $\boldsymbol{y = 0}$**.**
Zo geldt voor alle punten van de *y-as* $\boldsymbol{x = 0}$ dus is de vergelijking van de *y-as* $\boldsymbol{x = 0}$

- c - Alle punten (x, y) van de lijn q met vergelijking $x = 3$, zijn van de vorm $(3, y)$.
Dus de lijn $\boldsymbol{x = 3}$ is de ***lijn, evenwijdig met de y-as door het punt*** **(3, 0)**
Zo is de lijn r: $\boldsymbol{y = -2}$ de *lijn evenwijdig* ***met de x-as door het punt*** **(0, - 2)**

2. - a. Bepaal de vergelijking van de lijn l door de punten $A = (3, 4)$ en $B = (-4, -2)$
   - b. Bepaal het snijpunt van de lijn l met de lijn m: $y = 2x - 3$



a. In l: $y = ax + b$ volgt de richtingscoëfficiënt van l uit: $\boldsymbol{a} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{4-(-2)}{3-(-4)} = \boldsymbol{\frac{6}{7}}$

Lijn l heeft dan als vergelijking: l: $y = \frac{6}{7}x + b$.
Hierin de coördinaten van $A = (3,4)$ (of $B = (-4, -2)$) ingevuld geeft $\boldsymbol{4} = \frac{6}{7} \cdot \boldsymbol{3} + b \Rightarrow b = \frac{10}{7}$ zodat de vergelijking is $\boldsymbol{l}$: $\boldsymbol{y = \frac{6}{7}x + \frac{10}{7}}$ *)

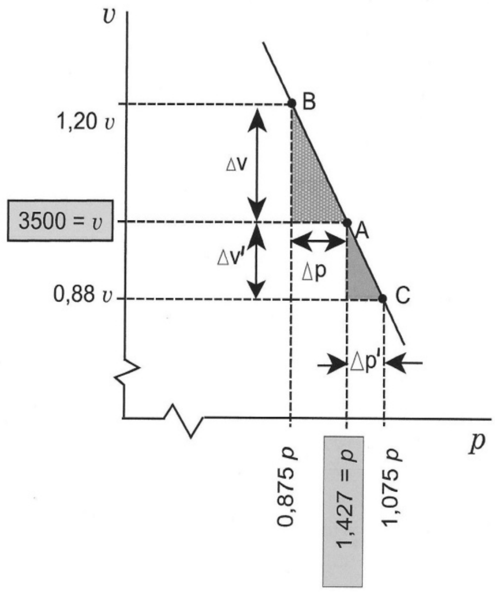
b. Het snijpunt $S\,(x_S, y_S)$ van de lijnen l en m ligt zowel op l als op m, dus voldoen de coördinaten x_s en y_s aan beide vergelijkingen:

$\boldsymbol{l}$: $\boldsymbol{y = \frac{6}{7}x + \frac{10}{7}}$ ***en*** m: $\boldsymbol{y = 2x - 3}$, zodat dan $\frac{6}{7}x_s + \frac{10}{7} = 2\,x_s - 3 \Rightarrow \frac{8}{7}x_s = \frac{31}{7} \Rightarrow \boldsymbol{x_s = \frac{31}{8}}$

Uit $y_s = 2\,x_s - 3 = -\frac{1}{2}x_s + \frac{9}{2}$ volgt dan $\boldsymbol{y_s = 2.\frac{31}{8} - \frac{24}{8} = \frac{38}{8} = \frac{19}{4}}$

Het snijpunt *van l en m is dan het punt* $\boldsymbol{S\,(\frac{31}{8}, \frac{19}{4})}$.

3. Bij een 'witte pomp' in Vreemdemuiden verkoopt men gemiddeld per dag 3500 liter 'Euro-95' benzine als hun literprijs € 1,427 bedraagt. (punt A in de grafiek).
Verlaagt men de prijs met 12,5% dan stijgt de verkoop met 20% (punt B).
Verhoogt men de prijs met 7,5% dan daalt de verkoop met 12%.(punt C).



a. Bewijs dat de punten A, B en C op een rechte lijn liggen.
b. Toon aan dat op het traject BC de toename van de verkoop bij prijsdaling evenredig is met de afname van de verkoop bij prijsstijging.

a. De richtingscoëfficiënt van AB is:

$$\frac{\Delta v}{\Delta p} = \frac{v - 1{,}20\,v}{p - 0{,}875\,p} = \frac{-0{,}20\,v}{0{,}125\,p} = \boldsymbol{-1{,}6 \cdot \frac{v}{p}}$$

De richtingscoëfficiënt van CA is $\frac{\Delta v'}{\Delta p'} = \frac{0{,}88v - v}{1{,}075p - p}$

$$= \frac{-0{,}12v}{0{,}075\,p} = \boldsymbol{-1{,}6 \cdot \frac{v}{p}}$$

De richtingen van AB en CA zijn dus gelijk $\Rightarrow$
A, B **en** ***C liggen op een rechte lijn.***

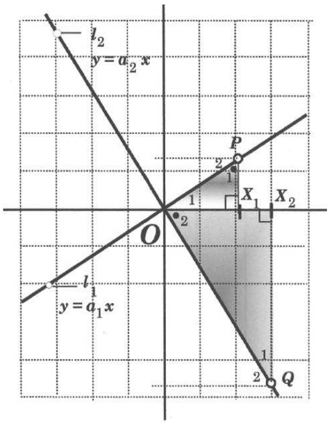
---

*) *Met de grafische rekenmachine TI*-83-84 *gaat dit als volgt: Voer via de accoladen* **{3, - 4} [STO] L1** en **{4, - 2} [STO] L2** in *Druk op* **[STAT] [CALC]** *en kies optie* 4 [ENTER]: **LinReg (*ax + b*)** [ENTER]
De waarden van a en b worden direct getoond: LinReg $y = ax + b$: $a \approx .85714... = \frac{6}{7}$; $b \approx 1.42857.... = \frac{10}{7}$

b. De uitkomst van a. betekent dat op het traject *BC* de *verhouding* prijs*stijging* : verkoop*daling* (−1,6) gelijk is aan de verhouding prijs*daling* : verkoop*stijging.* (−1,6). De verkoop*daling* bij toenemende prijs is dus ***evenredig*** met de verkoop*stijging* bij dalende prijs, want een *evenredigheid* is een *gelijkheid van twee verhoudingen.*

Eigenschap:

Als twee lijnen l_1 en l_2 loodrecht op elkaar staan dan is het product van hun richtingscoëfficiënten $a_1$en a_2 gelijk aan −1, dus $a_1 \cdot a_2 = -1$ en ook omgekeerd



Bewijs: In de figuur is vanuit een punt P op l_1 een loodlijn PX_1 op de x-as neergelaten en ook een loodlijn QX_2 vanuit een punt Q van l_2 op de x-as. De richtingscoëfficiënten van l_1 en l_2 zijn respectievelijk:

$a_1 = \frac{PX_1}{OX_1}$; $a_2 = \frac{-QX_2}{OX_2}$, dus $\boldsymbol{a_1 . a_2} = -\ \frac{\boldsymbol{PX_1}}{\boldsymbol{OX_1}} \ \boldsymbol{.} \ \frac{\boldsymbol{-QX_2}}{\boldsymbol{OX_2}}$ …(1)

Van de ΔΔ OPX_1 en OQX_2 *is* $\boldsymbol{\angle O_2 + \angle O_1 = 90°}$ (gegeven).

Ook is in Δ OPX_1 : $\boldsymbol{\angle P_1 + \angle O_1 = 90°}$

dus is $\boldsymbol{\angle P_1 = \angle O_2}$. (met zwarte stip).

De ΔΔ OPX_1 en OQX_2 zijn gelijkvormig omdat ze rechthoekig zijn en $\angle P_1 = \angle O_2$ dus $PX_1 : OX_1 = OX_2 : QX_2$ ofwel $-PX_1 : OX_1 = -OX_2 : QX_2$ ... (2)

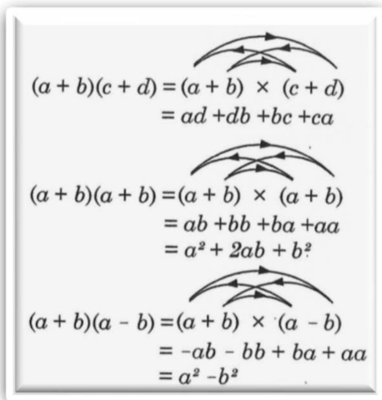
(2) in (1) gesubstitueerd geeft dan $\boldsymbol{a_1 . a_2} = -\ \frac{\boldsymbol{PX1}}{\boldsymbol{QX_1}} \ \boldsymbol{.} \ \frac{\boldsymbol{QX_2}}{\boldsymbol{OX_2}} = -\ \boldsymbol{1}$ zoals was te bewijzen.

De stelling geldt ook omgekeerd: Als $\boldsymbol{a_1 . a_2 = -1}$ dan staan l_1 *en* l_2 *loodrecht op elkaar.* Om het omgekeerde aan te tonen lees je bovenstaand bewijs van achteren naar voren.

3. *Kwadratische functies*

Een kwadratische- ofwel tweedegraadsfunctie, is een functie f(x) van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ waarin a, b en c reële getallen zijn en $a \neq 0$

Voor het onderzoek naar de eigenschappen van tweedegraads-functies, herleiden we eerst de algemene vorm door middel van '***kwadraatafsplitsing***': [*)]



$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$

$= a\ (x^2 + 2.\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}) + a.(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2})$

$= a\ (x + \frac{b}{2a})^2 - a\ (\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a})$

ofwel: $\boldsymbol{f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}}$ waarin $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac.}$

[*)] *In deze kwadraatafsplitsing is gewerkt naar de vorm* $\boldsymbol{(x + \frac{b}{2a})^2 = x^2 + 2.\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}}$ *een toepassing van het 'merkwaardig product'* $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$*. Hierboven is dit product met de 'papegaaimethode ' gedemonstreerd evenals het merkwaardig product: (a + b) (a −b) =* $a^2 - b^2$

De tweedegraadsfunctie $f(x) = ax^2 + bx + c \equiv a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}$ *met* $D = b^2 - 4ac$

Kies je $\boldsymbol{x} = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}$ in $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}$ dan krijg je:

$\boldsymbol{f}(-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}) = a\,(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} = a.\,0 - \frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{4a}}$ dus $\boldsymbol{f}(-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}) = -\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{4a}}$.

Dit betekent dat $(-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}, -\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{4a}})$ een punt is van ***elke kwadratische functie*** $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Noem je dit punt T, dan is dus $\boldsymbol{T}\,(\boldsymbol{x_T}, \boldsymbol{y_T}) = (-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}, -\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{4a}})$ ...(a)

1⁰. We bewijzen nu dat het punt $\boldsymbol{T}\,(-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}, -\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{4a}})$ een *uiterste waarde* is ('***maximum***' of '***minimum***') van $f(x)$, afhankelijk van het teken van a.

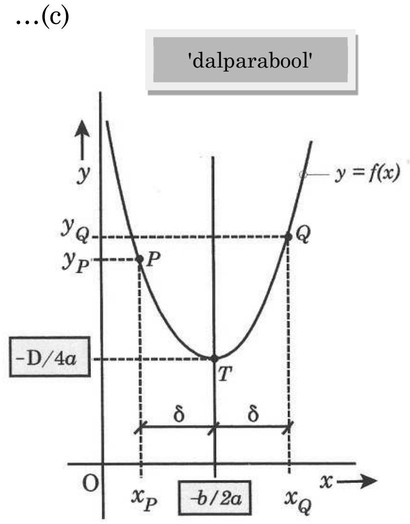
Omdat *voor elk willekeurig punt* (x, y) *van* $f(x)$ geldt $y = ax^2 + bx + c \equiv \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{x} + (\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}})^{\boldsymbol{2}} - \frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{4a}}$

geldt voor de waarde van $\boldsymbol{y - y_T}$: $\{a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}\} - \frac{-D}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2$ **dus**

$\Rightarrow\ \boldsymbol{y - y_T = a(x + \frac{b}{2a})^2}$ voor willekeurige y. ...(b)

Als a > 0 dan is $a.\,(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$, want $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$.

Dit betekent dat $\boldsymbol{y - y_T > 0}$ *zodat elke waarde van* $\boldsymbol{y}$ in $y = ax^2 + bx + c$ groter dan of gelijk is aan $\boldsymbol{y_T}$, dus is het punt $T\,(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ een ***minimum van de functie f(x)*** ...(c)



Op dezelfde manier blijkt uit (b) dat **als** $\boldsymbol{a < 0}$ steeds geldt $\boldsymbol{y - y_T < 0}$ ofwel: $T = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ is een ***maximum*** van de functie $y = ax^2 + bx + c$.

Het punt $T\,(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$, *minimum of maximum,* ***afhankelijk van a***, heet de ***top*** van de kwadratische functie *f(x).*

2⁰ De lijn $x = -\frac{b}{2a}$ door T is een ***symmetrieas*** *van* $f(x)$, want:

Voor een punt P van $f(x)$ op een positieve afstand δ *links* van de lijn $x = -\frac{b}{2a}$ geldt $\boldsymbol{x_p = -\frac{b}{2a} - \delta}$ en voor een punt Q van $f(x)$ *op eenzelfde afstand δ rechts* van deze lijn is $\boldsymbol{x_Q = -\frac{b}{2a} + \delta}$.

In de vorm van de kwadraatafsplitsing is $y = a(x + \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}})^2 - \frac{D}{4a}$ dus als $x = \boldsymbol{x_p} = -\frac{b}{2a} - \delta$ *dan is*

$\boldsymbol{y_p} = a\,(-\frac{b}{2a} - \delta + \frac{b}{2a})^{\boldsymbol{2}} - \frac{D}{4a} = \boldsymbol{a.\,\delta^2 - \frac{D}{4a}}$ ...(d)

Als $\boldsymbol{x = x_q = -\frac{b}{2a} + \delta}$ dan is $\boldsymbol{y_q = a}\,(-\frac{b}{2a} + \delta + \frac{b}{2a})^{\boldsymbol{2}} - \frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{4a}} = \boldsymbol{a.\,\delta^2 - \frac{D}{4a}}$ ...(e)

Uit (d) en (e) volgt $\boldsymbol{y_p = y_q}$ dus P en Q liggen ***symmetrisch t.o.v. de lijn*** $\boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}$ $\Rightarrow$

De grafiek van $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ *met* $a \neq 0$ *is een parabool met verticale as* $x = \frac{-b}{2a}$ *en een punt* $T = (\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a})$ *als top, waarin* $D = b^2 - 4ac$. *Als* $a > 0$ *dan is T een minimum ('dalparabool'), als* $a < 0$ *dan is T een maximum ('bergparabool')*

a. Nulpunten van een kwadratische functie

Eventuele snijpunten van de parabool $y = ax^2 + bx + c$ met de x- as ($y = 0$) moeten voldoen aan de vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ ***en*** *aan* $y = 0$ dus zijn de ***oplossingen*** van de *vergelijking* $ax^2 + bx + c = 0$. Ze worden ook ***nulpunten*** of ***wortels*** van $f(x)$ genoemd..
Voor een algemene oplossing van deze vergelijking wordt meestal de '***abc-formule'*** gebruikt:

Afleiding van de abc-formule

Schrijf je de oplossingsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ in de vorm van de *kwadraat-afsplitsing,* dan ontstaat: $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} = 0$.
De nulpunten x volgen dan uit: $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a} \Rightarrow \frac{1}{a}.\ a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}.\ \frac{D}{4a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}$
met gevolg: $x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{D}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} \Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}} \vee \boldsymbol{x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}}$

Nulpunten van f(x) = $ax^2 + bx + c$ *zijn oplossingen van de vergelijking*
$y = ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}} \vee \boldsymbol{x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}} \quad (D = b^2 - 4\,ac)$

De waarde van D hierin bepaalt het *aantal oplossingen,* dus het *aantal wortels* van $ax^2 + bx + c = 0$. Men noemt daarom D de ***discriminant*** van deze '*vierkantsvergelijking*:'

1⁰. Als $\boldsymbol{D} = b^2 - 4\,ac\ \boldsymbol{> 0}$ dan bestaat $\sqrt{D}$ en heeft de vergelijking *twee verschillende wortels*:
$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ en $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$. De parabool snijdt dan de x-as in de punten x_1 en x_2.
2⁰. Als $\boldsymbol{D = 0}$ dan is $\boldsymbol{b^2 - 4\,ac = 0} \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ dus heeft de vergelijking slechts één ('*dubbeltellende*') wortel $x = -\frac{b}{2a}$.
Top T met $x_T = -\frac{b}{2a}$ is dan een ***raakpunt*** ('twee samenvallende punten') op de x-as.
3⁰. Als $\boldsymbol{D < 0}$ dan bestaat $\sqrt{D}$ niet in ℝ dus zijn er *geen reële oplossingen.*
De parabool snijdt de x-as niet. Er zijn *geen reële nulpunten* . [*)]

b. Ontbinden van kwadratische functies

De functie f(x) = $x^2 + bx + c$ *met nulpunten* $x = x_1$ *en* $x = x_2$
is te schrijven als f(x) = $(x - x_1).(x - x_2)$

Bewijs;

De nulpunten x_1, x_2 van de vierkantsvergelijking $y = ax^2 + bx + c$ ***met a* = 1** zijn volgens de *abc-formule*: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2}$ en $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2}$ met $D = b^2 - 4\,c$ en $a = 1$ dus volgt dan het ***product*** uit: $(x - x_1).(x - x_2) = \{x - (\frac{-b + \sqrt{D}}{2})\}\ .\ \{x - (\frac{-b - \sqrt{D}}{2})\}$ met gevolg:

---

*) *In het volgende hoofdstuk worden imaginaire oplossingen van vierkantsvergelijkingen besproken in geval D <* 0. *In Hoofdstuk XIV worden expliciet voor wiskunde D de complexe getallen uitgebreid behandeld.*

$(x - x_1).(x - x_2) = \left(\frac{2x + b - \sqrt{D}}{2} \right).\left(\frac{2x + b + \sqrt{D}}{2} \right) = \frac{4x^2 + 4bx + b^2 - D}{4} = \frac{4x^2 + 4bx + 4c}{4}$ want
$D = b^2 - 4ac$ en $a = 1$ dus $b^2 - D = 4c$ zodat $\boldsymbol{(x - x_1).(x - x_2) = x^2 + bx + c}$ ...(1)

Met de gelijkheid $\boldsymbol{x^2 + bx + c} = \boldsymbol{(x - x_1)}\ \boldsymbol{(x - x_2)}$ is de term $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$ volgens (1) ***ontbonden in twee factoren*** $(\boldsymbol{x - x_1})$ **en** $\boldsymbol{(x - x_2)}$ als x_1 en x_2 de *nulpunten* van $f(x)$ zijn.

Uitgewerkt geeft dit: $x^2 + \boldsymbol{b}\,x + \boldsymbol{c} = (x - x_1)\ (x - x_2) = x^2 - \boldsymbol{(x_1 + x_2)}.\,x + \boldsymbol{x_1.\,x_2}$
waarin dus in $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$ geldt $\boldsymbol{(x_1 + x_2) = -\,b}$ en $\boldsymbol{x_1.\,x_2 = c.}$ ...(2)

Op deze eigenschap berust een methode om de wortels x_1 en x_2 van $f(x) = \boldsymbol{1}x^2 + \boldsymbol{b}x + \boldsymbol{c} = 0$ snel te kunnen vinden. (Op blz.48 volgt ook een ontbinding ***als in*** $\boldsymbol{a}x^2 + \boldsymbol{b}x + \boldsymbol{c} = 0$: $\boldsymbol{a \neq 1}$**)**

Voorbeeld:
Bepaal de wortels van de vergelijking $x^2 - 11x + 28 = 0$,

Ontbind het linkerlid in factoren, dus schrijf $x^2 - 11x + 28 = (x - p)(x - q) =$
$= x^2 - (p + q)\,x + p.\,q$.
Hiervoor geldt dan $p + q = 11$ en $p.\,q = 28$, waaruit je direct ziet dat $p = 4$ en $q = 7$ zodat
$x^2 - 11x + 28 = ((x - 4).\,(x - 7)$ dus vind je de nulpunten uit: $x^2 - 11x + 28 = 0$
$\Rightarrow (x - 4).\,(x - 7) = 0$
***Als a. b* = 0 *dan a* = 0** $\boldsymbol{\vee}$ ***b* = 0** dus volgt uit $(x - 4).\,(x - 7) = 0$ dat $(x - 4) = 0 \vee (x - 7) = 0$
De wortels van $x^2 - 11x + 28 = 0$ zijn dan $\boldsymbol{x = 4 \ \vee\ x = 7}$

Opgaven: 1. Bereken de nulpunten van $f(x) = x^2 - x - 12$

Stel $x^2 - x - 12 = (x - p).(x - q)$ dan is $p + q = 1$ en $p.\,q = -12$.
Hieraan voldoen $p = 4$ en $q = -3$ dus als $x^2 - x - 12 = 0$, dan is
$(x - p).(x - q) = \boldsymbol{(x - 4).(x + 3) = 0}$ zodat $x - 4 = 0 \vee x + 3 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = 4 \ \vee x = -3}$
De nulpunten zijn dan $\boldsymbol{x = 4}$ **en** $\boldsymbol{x = -3.}$

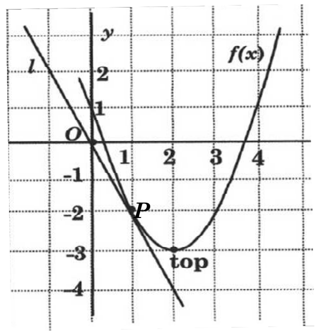
2. Los op: $x^2 + 2x - 143 = 0$
Stel $x^2 + 2x - 143 = (x - p).(x - q)$ dan is $p + q = -2$ en $p.\,q = -143$
dus $p = -13$ en $q = 11$, dus als $x^2 + 2x - 143 = 0$, dan is $(x - p).(x - q =$
$= (x - (-13)).(x - 11) = \boldsymbol{0}$ zodat $x + 13 = 0 \vee x - 11 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = 11 \vee x = -13}$

3. Gegeven is de parabool $f(x) = x^2 - 4x + 1 = 0$

a. Bepaal de top van de parabool.

Uit kwadraatafsplitsing volgt dat voor de parabool $y = x^2 - 4x + 1$ geldt $y = (x - 2)^2 - 3$.
Omdat voor elke x: $(x - 2)^2 \geq 0$ is, is steeds $y \geq -3$ dus geldt voor de coördinaten van top T dat $\boldsymbol{y_T = -3}$ en volgt uit $y_T = (x_T - 2)^2 - 3 \Rightarrow \boldsymbol{x_T = 2.}$
De top is dus het punt $\boldsymbol{T\ (2,-3).}$
(Dit volgt ook direct uit $x_T = -\frac{b}{2a}$, $y_T = \frac{-D}{4a}$ (blz.6)).

b. Bepaal de raaklijn aan de parabool in het punt $(1, -2)$.



Het punt $P\,(1,-2)$ ligt op de parabool $y = x^2 - 4x + 1$ want
$-2 = 1^2 - 4.1 + 1$ dus voldoet aan de vergelijking.
Noem de raaklijn l: $y = ax + b$, dan geldt voor het raakpunt op l
$P\,(1,-2)$: $-2 = a.1 + b \Rightarrow a + b = -2 \quad \Rightarrow \boldsymbol{a = -2 - b.}$ …(1)
Omdat het raakpunt *zowel op de parabool als op de raaklijn* l ligt
geldt: $y = x^2 - 4x + 1$ *en* $y = (-2 - b)\,x + b$ *dus*
$x^2 - 4x + 1 = -2x - bx + b \Rightarrow x^2 - 2x + bx + 1 - b = 0 \Rightarrow$
$\boldsymbol{x^2 + (b - 2)\,x + (1 - b) = 0.}$
De discriminant D van deze vierkantsvergelijking moet *nul* zijn
omdat de vergelijking één wortel heeft, dus: $\boldsymbol{b^2} - 4.\boldsymbol{ac} = (b-2)^2 - 4.1.(1-b) = 0 \Rightarrow b^2 - 4b +$
$4 - 4 + 4b = 0 \Rightarrow \boldsymbol{b = 0}$ ..(2)
Uit (1) en (2) volgt dan voor de raaklijn l : $y = ax + b \Rightarrow \boldsymbol{y = -2x}$ **.**

4. *Machtsfuncties*

De functie $y = f(x) = x^n$ is een machtsfunctie van x, waarin
de exponent n een constante is en het grondtal x een variabele

Enkelvoudige *machtsfuncties* zijn van het type $y = f(x) = x^n$ met $n \in \mathbb{R}$.
Samengestelde machtsfuncties zijn van de vorm $y = f(x) = ax^p + bx^q + cx^r + \ldots$
(a,b,c en $p,q,r \in \mathbb{R}$) . Deze vormen noemt men ***polynomen***.

Uitgaand van de *definitie van een natuurlijke macht* van x:

$\boldsymbol{x^1} = x$, $\boldsymbol{x^2} = x.\,x$, $\boldsymbol{x^3} = x.\,x.\,x$, $\boldsymbol{x^4} = x.\,x.\,x\,.x$ of algemeen: $\boldsymbol{x^n} = \overbrace{\boldsymbol{x.\,x\ldots.\,x}}^{n\ keer}$ volgen direct
de *regels*: $\boldsymbol{x^p.\,x^q = x^{p+q}}$, $\boldsymbol{\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}}$ en $\boldsymbol{(x^p)^q = x^{p.q}}$ **.** Hieruit vind je de regels**:**
$\frac{x^p}{x^p} = x^{p-p} = \boldsymbol{x^0}$ en ook $\frac{x^p}{x^p} = 1$, dus $\boldsymbol{x^0 = 1}$; $\boldsymbol{\frac{1}{x^p} =} \frac{x^0}{x^p} = x^{0-p} = \boldsymbol{x^{-p}}$;
$\boldsymbol{\sqrt[p]{x} = x^{\frac{1}{p}}}$ omdat $(x^{\frac{1}{p}})^p = x^{\frac{1}{p}.\,p} = x^1 = x$. Zo is ook: $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

$a^p \,.\, a^q = a^{p+q}$ $\quad (a^p)^q = a^{p.q}$ $\quad a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ $\quad a^0 = 1$

$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ $\quad (a.b)^p = a^p.\,b^p$ $\quad \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$ $\quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $\quad (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

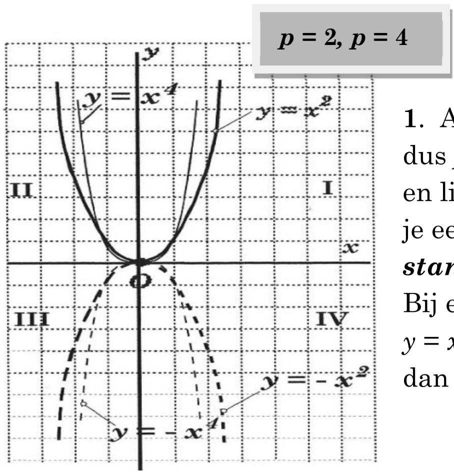
Per definitie gelden deze rekenregels ook voor *machten met reële exponenten*:
dus: $\boldsymbol{3^7.\,3^{-9}} = 3^{-2} = \boldsymbol{\frac{1}{3^2}} = \boldsymbol{\frac{1}{9}}$, $\boldsymbol{5^{-2\frac{1}{2}}} = \frac{1}{5^{\frac{5}{2}}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5^5}}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5^5}}{5^5}}$, $\boldsymbol{7^{\frac{3}{4}}} = \sqrt[4]{7^3}$, $12^{-0,38} \approx \boldsymbol{0,389}$ (GR)

Machtsfuncties waarin x hoogstens tot de macht n voorkomen, heten
n^{de} graads machtsfuncties .

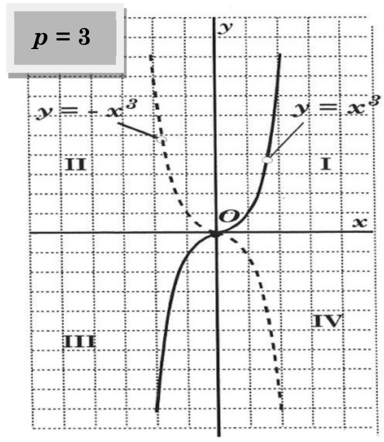
Zo is het *polynoom* $f(x) = ax + b$ een machtsfunctie van de *eerste graad,* polynomen als
$f(x) = ax^2 + bx + c$ zijn van de *tweede graad,* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ van de *derde graad*
et cetera. Zoals eerder vermeld: De *'lineaire functie'* $f(x) = ax + b$ is een *eerstegraads machtsfunctie*, de *'kwadratische functie'* $f(x) = ax^2 + bx + c$ is een tweedegraads *machtsfunctie.*

a. Grafieken van machtsfuncties

Aan de *graad van enkelvoudige machtsfunctie* kun je globaal de grondvorm van hun grafieken afleiden. We onderzoeken hier de grondvorm van de grafieken in de *vier kwadranten* I, II, III en IV van *machtsfuncties* $\boldsymbol{f(x) = y = x^p}$ bij verschillende waarden van *p*.

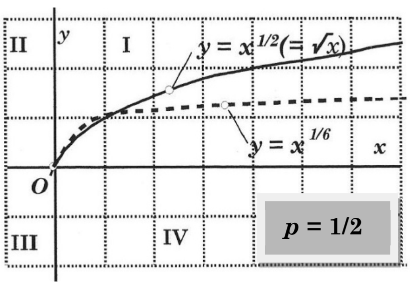


1. Als ***p* in $y = x^p$ een positief, even getal** is, dus $p = 2, 4, 6, \ldots$ dan zijn alle *y*-waarden van $\boldsymbol{y = x^p}$ positief en ligt de grafiek geheel in I en II. In de grondvorm herken je een ***dal****paraboloïde, die als p = 4, 6, 8, …'spitser' is dan de* ***standaard dalparabool $\boldsymbol{y = x^2}$*** *dus die met p* = 2.
Bij eenzelfde waarde van *p* is $\boldsymbol{y = -x^p}$ het spiegelbeeld van $y = x^p$ in de *x*-as (gestreept) en zie je daarin als grondvorm dan ook de ***berg****paraboloïden.*



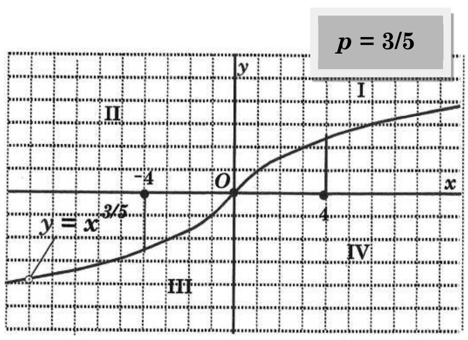
2. Is ***p* in $y = x^p$ een positief, oneven, geheel getal $\neq$ 1**, dus $p = \mathbf{3}, 5, 7, \ldots$ dan bestaan er in tegenstelling tot de *even* machten van *x* ook *negatieve y* waarden. Bijvoorbeeld $(-3)^3 = -27 = -(3^3)$.
Hierdoor heeft $y = x^p$ bij *oneven p* waarden in het *eerste kwadrant* (I) *en het derde kwadrant* (III).
Omdat $(-x)^p = -(x^p)$ is de grafiek van $\boldsymbol{y = -(x^p)}$ een *spiegeling* ***in de oorsprong*** van $y = x^p$ dus ligt in de kwadranten II en IV.

3. Als *p* ***in* $\boldsymbol{y = x^p}$** een positieve breuk is, waarvan de ***teller oneven is en de noemer even***, zoals in



$y = \boldsymbol{x^{\frac{1}{2}}}$ $(\boldsymbol{= \sqrt{x}})$ en $x^{\frac{1}{6}}$ dan bestaan *geen reële y-waarden* ***bij negatieve*** *x.*
Zo is bij $y = x^{\frac{1}{2}}$ als $x = -1$ gelijk aan $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbf{-1}}$ en is $y = (-x)^{\frac{1}{6}}$ bij $x = -1$ gelijk aan $(-1)^{\frac{1}{6}} = ((-1)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbf{-1}}$ dus bestaan niet in $\mathbb{R}$.

Omdat bij een ***positieve waarde van x*** ook alle machten van *x* positief zijn, liggen alle waarden van $y = x^p$ in I.



4. Als *p* ***in* $\boldsymbol{y = x^p}$** een positieve breuk is, met ***teller en noemer oneven*** dan bestaan er ook reële *y* waarden bij *negatieve x,* die dan ook zelf negatief zijn, en dus in III liggen.
Zo is als $x = -4$ in $y = x^{\frac{3}{5}}$ $y = (-4)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-4)^3} = \sqrt[5]{-64} \approx -2{,}297$.
Als $x = 4$ in $y = x^{\frac{3}{5}}$ $y = (4)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(4)^3} = \sqrt[5]{64} \approx -2{,}297$.
De grafiek van $y = x^{\frac{3}{5}}$ ligt dus in I en III en is symmetrisch in de oorsprong *O*.

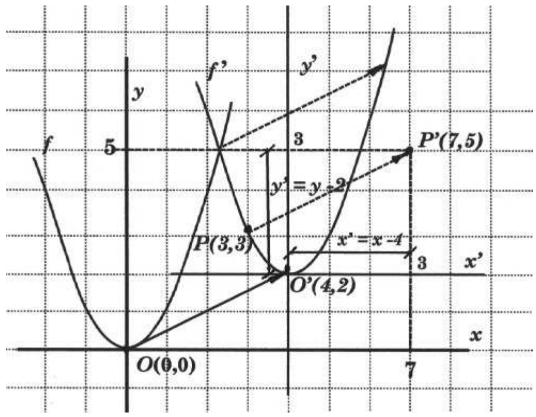
---

*) *Met de GR Ti-83 zijn de grafieken direct te plotten VB: Voer in Y1 = X* ^3 :5 ENTER . *Druk op* WINDOW *en kies* $X_{min} = -5$, $X_{max} = 5$, $Y_{min} = -5$, $Y_{max} = 5$, Xscl = 1, Yscl = 1 ; ENTER. *Druk* op Graph *en de grafiek van voorbeeld* 4 *verschijnt op het display.*

b. Transformaties

Uit de grafieken van standaardfuncties zoals $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$ *kan je* via *transformaties* vaak gemakkelijk formules afleiden van meer gecompliceerde functies.
Bij ***congruentietransformaties*** als: *translatie* ('*evenwijdige verschuiving*' van $y = f(x)$), *rotatie* (*draaiing* om de oorsprong *O*) en *spiegeling* (*vermenigvuldiging* t.o.v. een lijn *met de factor* -1) ontstaat uit $f(x)$ een *beeld* $f'(x)$ dat *congruent* is met $f(x)$. *Voorbeelden*:

- Transformaties door translatie

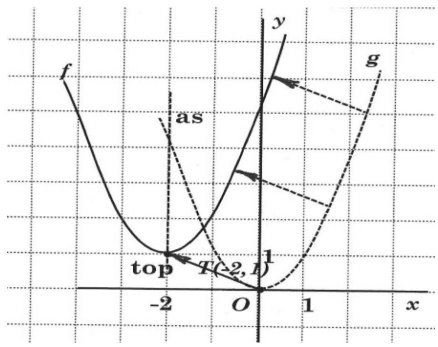


Hiernaast is in een *XOY* stelsel de grafiek *f* getekend van de '***standaardparabool***' $y = x^2$. De top ligt in de oorsprong *O*. Via een ***translatie T (4,2)*** *verschuiven* alle punten over +4 eenheden *naar rechts* (*positieve x-richting*) en + 2 eenheden omhoog (*positieve y-richting*), waardoor dan een ***met f congruente*** *grafiek f' ontstaat* . De oorsprong *O* (0,0) = top van *f*, wordt daarbij afgebeeld op het punt *O*' (4, 2), *de oorsprong van het verschoven assenstelsel x' O' y'*.
Een *willekeurig* punt ***P*(*x, y*)**, (in de figuur ***P*(3, 3)**), wordt door de translatie *T* (4, 2) afgebeeld op het punt
***P*' (*x* + 4, *y* + 2),** in de figuur ***P*' (7, 5)).**
Ten opzichte van het x' O' y'-stelsel geldt dan dat $\boldsymbol{x' = x - 4}$ en $\boldsymbol{y' = y - 2}$ …(1)
De vergelijking van de verschoven parabool *f' is* $\boldsymbol{f': y' = (x')^2}$ want de top van *f'* ligt in de oorsprong *O'* dus geldt hier de t*opvergelijking* ten opzichte van het stelsel *x'O'y'*.
Substitutie hierin van de waarden $\boldsymbol{x'} = x - 4$ *en* $y' = y - 2$ uit (1) geeft als vergelijking van de parabool $f': y' = x'^2: y - 2 = (x-4)^2 \Rightarrow \boldsymbol{y = (x-4)^2 + 2}$. …(2)
Noem je de *translatie T* (4,2) nu algemeen *T* (*a*, *b*), dan volgt uit (2):
$\boldsymbol{f: y = x^2 \Rightarrow T(a, b) \Rightarrow f': y = (x - a)^2 + b}$ … (3)

Deze transformatieregel werd afgeleid via de functie $f(x) = y = x^2$ door op het translatiebeeld $y' = x'^2$ de *algemeen geldende betrekkingen bij translaties* volgens regel (1) toe te passen.
De regel geldt dus ook onvoorwaardelijk ook voor elke andere functie $y = f(x)$ zoals $y = \sqrt{x}$, $y = \ln(x)$, $y = \sin(x)$, … Algemeen geldt dan ook:

Bij de translatie T (*a, b*) *van de functie* $y = f(x)$ *geldt voor het beeld* $y = f(x - a) + b$

Toepassingen

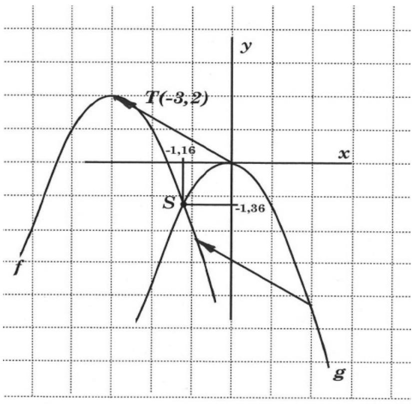


1) Schets de grafiek van de functie *f*: $y = (x+2)^2 + 1$

Volgens de eigenschap gaat bij een translatie *T (a, b)* de grafiek *g* van $y = f(x) = x^2$ over in *f*: $y = (x - a)^2 + b$.
In *f*: $y = (x+2)^2 + 1$ is dan $a = -2$ en $b = 1$ dus ontstaat de functie *f*: $y = (x+2)^2 + 1$ uit de translatie *T* **(−2, 1).** van de standaardfunctie *g*: $y = x^2$
In de figuur is de grafiek van *f*: $y = (x+2)^2 + 1$ getekend.
De **top** is dan het punt **(−2, 1)**, de **as** is de lijn $\boldsymbol{x = -2}$.

2. Schets de grafiek van de functie f: $y = -x^2 - 6x - 7$ en bepaal het snijpunt van f en de parabool g: $y = -x^2$

Via kwadraatafsplitsing herleid je eerst de gegeven functie f: $y = -x^2 - 6x - 7$ tot:
f: $(-x^2 - 6x - 9) + 2 = -(x+3)^2 + 2$.
Volgens de translatietransfomatie-regel is dit de grafiek van de functie die ontstaat uit de standaardfunctie g: $\boldsymbol{y = -x^2}$ door de ***translatie T* (– 3, 2)**.



De ***top*** van (bergparabool) f is dan het punt **(– 3, 2)**
*de **as** is de lijn met* **x =** – 3.

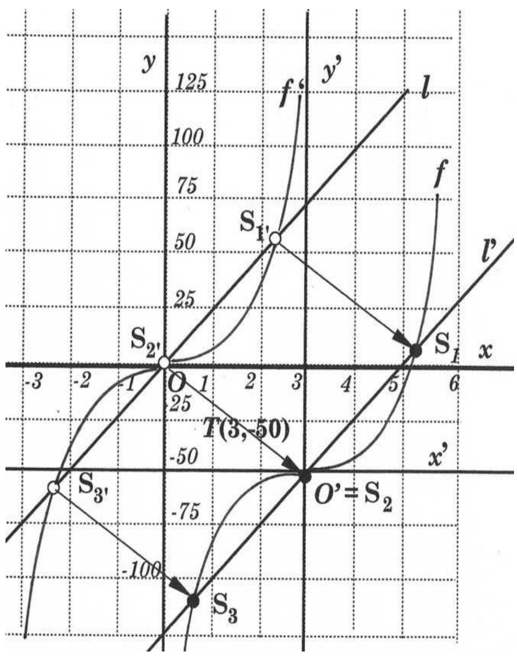
Het ***snijpunt S (x, y)*** van de grafieken f en g volgt uit:
$y = -x^2 - 6x - 7 \;\wedge\; y = -x^2$ dus uit $-6x - 7 = 0$ zodat
$\boldsymbol{x} = -\frac{7}{6} \approx -1{,}16$ en $\boldsymbol{y} = -x^2 = -\left(-\frac{7}{6}\right)^2 \approx -1{,}36$.

Het gevraagde snijpunt is dan ***S*** **(–1,16; –1,36).**

3 Schets de grafiek van de functie f: $y = (x-3)^5 - 50$ en bepaal de coördinaten van de snijpunten van f met de lijn l: $y = 25x$.

De grafiek van de functie f: $y = (x-3)^5 - 50$ ontstaat uit f : $y = x^5$ door de ***translatie T*** **(3, – 50)**.

De snijpunten van de lijn l: $y = 25x$ met
de grafiek van f bereken je in het $x'\,O'\,y'$ -stelsel
omdat daarin geldt f': $y' = (x')^5$ en l' : $y' = 25x'$,
want $l' \,//\, l$ *gaat door O'* (3, –50)
Voor de snijpunten van l' en f' geldt dan $(x')^5 = 25x'$
dus $\boldsymbol{x' = 0} \;\vee\; (x')^4 = 25 \Rightarrow \boldsymbol{x' = \pm\sqrt[4]{25}} = \pm\sqrt{5}$
Uit $y' = 25x'$ volgt $\boldsymbol{y' = 0} \;\vee\; \boldsymbol{y' \approx \pm 25 \,.\, \sqrt{5}}$

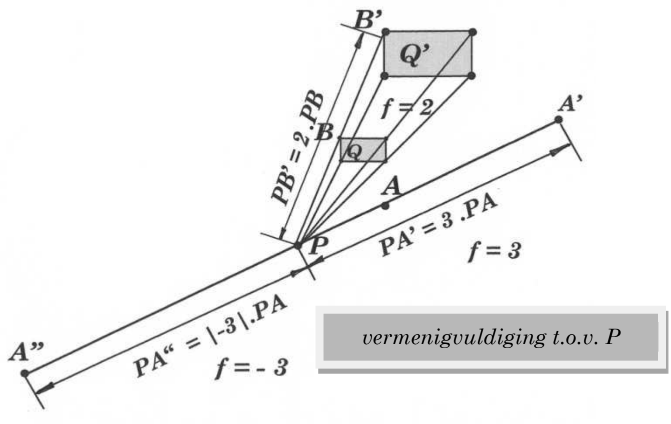


De snijpunten van f': $y = (x-3)^5 - 50$ en l: $y = 25x$ zijn S_1', S_2' en S_3' (witte stippen in de figuur), met:
$\boldsymbol{S_1'} = \left(\sqrt{5}, 25\sqrt{5}\right)$; $\boldsymbol{S_2'} = (0{,}0)$; $\boldsymbol{S_3'} = (-\sqrt{5}; -25\sqrt{5})$

De gevraagde snijpunten S_1, S_2 en S_3 (zwarte stippen in de figuur), van l' en f zijn dan:
$\boldsymbol{S_1} = (\sqrt{5}; 25\sqrt{5}) + T(3, -50) = \boldsymbol{(\sqrt{5} + 3, 25\sqrt{5} - 50)}$
$\boldsymbol{S_2} = (0{,}0) + T(3, -50) = \boldsymbol{(3, -50)}$
$\boldsymbol{S_3} = (-\sqrt{5}, -25\sqrt{5}) + T(3, -50) = \boldsymbol{(3 - \sqrt{5}, \; -25\sqrt{5} - 50}$

NB: Hiermee zijn de snijpunten van f: $y = (x-3)^5 - 50$ en l: $y = 25x$ *exact bepaald,* via de translatietransformatie T (3, –50), waarmee de *vijfdegraadsvergelijking*: $(x-3)^5 - 25x = 50$ *exact* is opgelost. Het nut van transformaties van functies blijkt duidelijk uit dit voorbeeld.

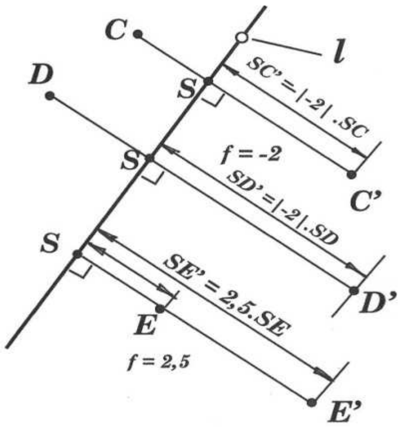
Transformaties door vermenigvuldiging



vermenigvuldiging t.o.v. P

Ook bestaan transformaties *van figuren* door *vermenigvuldiging*. We kennen daarbij::
a - vermenigvuldiging *ten opzichte van een punt*
b - vermenigvuldiging *ten opzichte van een lijn*

a. Gedefinieerd is het *product* van een punt *A* ***ten opzichte van een punt P*** *en een* ***factor f*** als volgt: Bij een *positieve factor f , ligt het beeld* punt *A'* op de lijn *PA*, waarbij geldt dat
PA' = f × PA.
Zo is ook de rechthoek ***Q'*** het beeld van ***Q*** bij vermenigvuldiging t.o.v. *P* met de factor *f* = + 2
Bij een *negatieve fac*tor ***f*** ligt het beeldpunt *A″* van punt *A* *op de lijn AP* ***aan de andere kant van P*** *dan A* en wel zo dat ***PA″ = |f | × PA,***
hier PA″ = | -3 | × *PA*

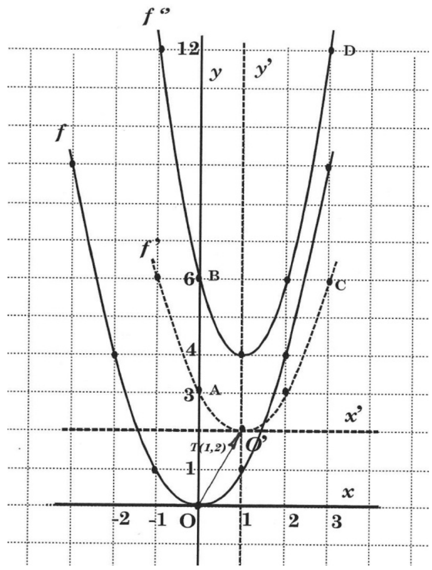


vermenigvuldiging t.o.v. lijn l

b. Bij vermenigvuldiging van een punt *E* ***ten opzichte van een lijn l*** met een *positieve factor f* ontstaat het beeldpunt *E'* door vanuit *E* een *loodlijn op l* neer te laten en vanuit het *voetpunt S* van die loodlijn een afstand *SE'* zo af te passen, dat ***SE'= f × SE,*** in de figuur is ***f* = 2,5** dus ***SE'= 2,5 × SE***

Bij een *negatieve* factor ***f*** ligt het beeldpunt *D'* van punt *D* *op de lijn DS* ***aan de andere kant van S als D,*** en wel zo dat ***SD' = |f| × SD,*** dus in de figuur met *f* = −2: ***SD' =| -2 | × SD***
Zo is ook C' het beeldpunt van C bij vermenigvuldiging van C t.o.v. *l met de factor f = −2, zodat* ***SC'=| −2 |× SC***

Toepassing:



Teken de grafiek van de functie *g:* $y = \mathbf{2}x^2 - 4x + 6$.

Omdat de *coëfficiënt van* $x^2 \neq \mathbf{1}$ heeft *g* niet de vorm van de *standaardparabool* $y = x^2$ zoals de grafieken van alle functies $y = \mathbf{1}\,x^2 + b\,x + c$. Met alleen de translatietransformatie kan je deze opgave dus niet oplossen. Ga daarom als volgt te werk:

1^0 Pas kwadraatafsplitsing toe, dus schrijf: *g:* $y = 2x^2 - 4x + 6$
$\Rightarrow\ y = 2(x^2 - 2x + 3) = 2\{(x^2 - 2x + 1) + 2\} = \mathbf{2\,(x-1)^2 + 4}$

2^0 Pas *de* ***translatie*** *T*(1,2) toe op de punten van de standaardgrafiek *f : y* = x^2 zodat het beeld ontstaat van de grafiek $f' = (x-1)^2 + 2$ (volgens de *translatietransformatie-regel*).

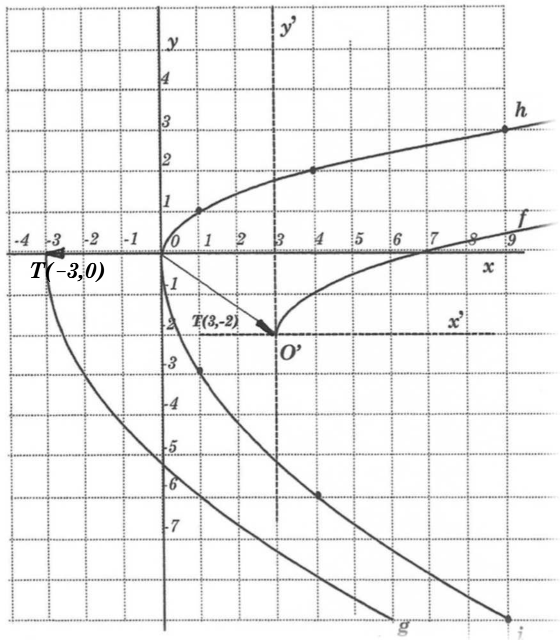
3^0 *Vermenigvuldig* dit beeld *f ' ten opzichte van de x-as met* + 2 (notatie *P (x –as,* 2*)*.
Dit geeft: ***f ″ :*** $\mathbf{y = 2.\,(x-1)^2 + 4 = 2x^2 - 4\,x + 6}$, de gevraagde parabool ***g*** **,** want uit de definitie van vermenigvuldiging t.o.v. een lijn (hier de *x*-as) volgt direct de eigenschap:

Bij de vermenigvuldiging P (x -as, a) gaat een functie y = f(x) over in y = a. f (x)

- *Transformaties van wortelvormen*

Ook de grafieken van *wortelvormen* (*machtsfuncties* met gebroken exponent) kunnen via translatie en/of vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as, afgeleid worden van uit hun standaardvorm $y = \sqrt{x} = \boldsymbol{x}^{\frac{1}{2}}$.

Voorbeelden:



a. Schets de grafieken van de functies
f: $y = \sqrt{x-3} - 2$ en *g:* $y = -3\sqrt{x+3}$
b. Geef de coördinaten van het beginpunt van elk.
c. Geef domein en bereik aan van beide functies.

a. Teken de standaardgrafiek *h:* $y = \sqrt{x}$.
Deze heeft als startpunt het punt (0,0) en gaat verder door de roosterpunten (1,1), (4,2), (9,3),…
- Pas nu op h de translatie T (3,−2) toe dan ontstaat volgens de translatietransformatie-regel de gevraagde grafiek ***f:*** $\boldsymbol{y = \sqrt{x-3} - 2}$

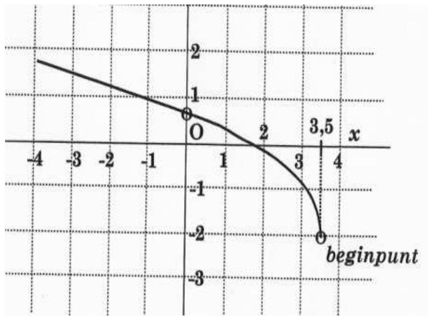
- Uitgaande van de standaardgrafiek *h:* $y = \sqrt{x}$ *vermenigvuldig* je deze *t.o.v. de x-as* met de factor **– 3**, waaruit de grafiek ***i:*** $\boldsymbol{y = -3\sqrt{x}}$ ontstaat.
Pas hierop de translatie T (0,−3) toe, dan vind je de grafiek van ***g:*** $\boldsymbol{y = -3\sqrt{x+3}}$ welke werd gevraagd.

b. In de figuur zie je direct dat het *beginpunt van* ***f:*** $y = \sqrt{x-3} - 2$ het ***beeldpunt O'*** $\boldsymbol{(3,-2)}$ is van het origineel (0,0) van *h:* $y = \sqrt{x}$ bij de translatie $T(3, -2)$.
Zo is het beeldpunt $\boldsymbol{(-3, 0)}$ het ***beginpunt van*** *g:* $y = -3\sqrt{x+3}$.

c. De linkergrens van het *domein* van de ***standaardgrafie***k ***h:*** $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$ is $x = 0$ in *het punt O* (0,0), de rechtergrens is ∞, dus $\boldsymbol{D_h}$ **= [0, → ⟩** De linkergrens van het *bereik* van h *is* de waarde $y = 0$, de rechtergrens is y = + ∞ dus $\boldsymbol{B_h}$ = [0 **, →** ⟩**.** Daaruit volgt dan:
De linkergrens van het ***domein*** van ***f*** *is* $x = 3$, de rechtergrens is $x = +\infty$, dus $\boldsymbol{D_f}$**=** [**3, →** ⟩
linkergrens van het ***bereik*** van ***f*** *is* $y = -2$, de rechtergrens is $y = +\infty$, dus $\boldsymbol{B_f}$**= [−2, →** ⟩
De linkergrens van het *domein* van ***g*** *is* $x = -3$, de rechtergrens is $x = +\infty$, dus $\boldsymbol{D_g}$**= [−3, →** ⟩
linkergrens van het *bereik* van ***g*** is $\boldsymbol{y} = 0$, de rechtergrens is $y = -\infty$, dus $\boldsymbol{B_g}$ = ⟨ ← **, 0].**

NB: Het is in het algemeen *niet direct* mogelijk om *wortelvormen* betrouwbaar *te 'plotten' in de GR*. Als voorbeeld de functie $f(x) = y = -2 + \sqrt{7-2x}$:
- Voer in $y = -2 + \sqrt{7-2x}$ en kies via [WINDOW] $X_{min} = -4$; $X_{max} = 4$; $Y_{min} = -2$; $Y_{max} = 2$
.Andere waarden in WINDOW 1 laten, en in TBLSET TblStart en Δ Tbl op 1 instellen..
De ***tabel*** [TABLE] van de grafiek geeft *vanaf* ***X* = 4** 'ERROR' omdat daarvoor dan $\sqrt{7-2x}$ $= \sqrt{-1}$ niet bestaat.
Verander je via [TBLSET] Δ Tbl in 0.1 dan geeft de GR 'ERROR' *vanaf* ***X* = 3,6.**
Een eenduidig 'beginpunt' van de grafiek, vindt de GR niet omdat de *'trace-cursor'* met een vaste stapgrootte werkt.

Zo'n beginpunt, hier van $y = -2 + \sqrt{7-2x}$ moet dan handmatig worden bepaald: $7 - 2x \geq 0$, dus $2x \leq 7 \Rightarrow x \leq 3{,}5$, dus is *het* ***startpunt*** $\boldsymbol{x = 3{,}5}$ waarbij dan $\boldsymbol{y} = -2 + \sqrt{7-2x} = \boldsymbol{-2}$.
***Beginpunt van f**:* $y = -2 + \sqrt{7-2x}$ *is dus het punt* **(3.5 , −2)**.
Het domein van de functie is ⟨← , 3. 5], het bereik is dan [−2 , → ⟩
Voer in: $y = -2 + \sqrt{7-2x}$ en kies TblStart 3.5, Δ Tbl = −0.5.
Verdere punten van de grafiek kan je dan in [TABLE} op je GR aflezen:



x	3,5	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4
y	−2, 00	−1,00	−0,27	0,24	0,65	1,00	1,32	1,61	1,87

***Voorbeelden van veel gebruikte transformati**es*

1. Bij *de translatie* (0, *a*) *tel je a op bij de functiewaarde y* (*x* blijft onveranderd)

$y = 2^{x+1} - 3 \xrightarrow{\text{translatie } (0,5)} \boldsymbol{y = 2^{x+1} + 2}$

2. Bij *de translatie (b. 0) vervang je x door x − b* (*y* blijft onveranderd)
$y = x^2 - 3x \xrightarrow{\text{translatie } (2,0)} \boldsymbol{= (x-2)^2 - 3(x-2) = x^2 - 7x + 10}$

3. Bij *de vermenigvuldiging* met *c* **t.o.v.** ***de x-as*** *vermenigvuldig je* ***y* met *c***
$y = \dfrac{x-1}{2x-3} \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } 4} \boldsymbol{y = 4 \cdot \dfrac{x-1}{2x-3} = \dfrac{4x-4}{2x-3}}$

4. Bij *de vermenigvuldiging* met *d* **t.o.v.** ***de y-as*** *vermenigvuldig je* ***x* met** $\boldsymbol{\frac{1}{d}}$

$y = 4 + \sqrt{2x-1} \xrightarrow{\text{verm. y-as, } 3} \boldsymbol{y = 4 + \sqrt{2.\tfrac{1}{3}x - 1} = 4 + \sqrt{\tfrac{2}{3}x - 1}}$

5. Bij *spiegeling in de lijn y* = *x* vervang *je x* door *y* en *y* door *x*
$2x - 3y = 4 \xrightarrow{\text{spiegeling in } y = x} 2y - 3x = 4 \Rightarrow \boldsymbol{y = \tfrac{3}{2}x + 2}$
$y = 3\ln(x) \xrightarrow{\text{spiegeling in } y = x} x = 3\ln(y)$ ofwel $\ln(y) = \tfrac{1}{3}x \Rightarrow \boldsymbol{y = e^{\frac{1}{3}x}}$

5. *Exponentiële functies*

Naast de *machtsfunctie* $f(x) = x^a$ met *vaste exponent a en variabel grondtal x*, bestaat 'omgekeerd' een ***exponentiële functie f(x) = a^x*** met *vast grondtal a en variabele exponent x.*

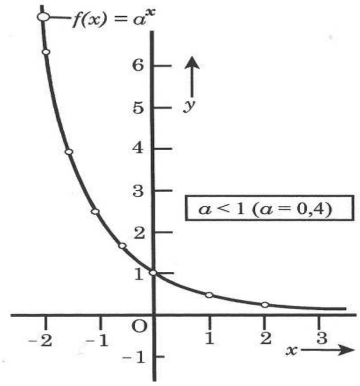
> *Functies waarvan de exponent x de variabele is en een positief grondtal de constante heten exponentiële functies. Algemene vergelijking*: $y = f(x) = a^x$ ($a > 0$ en $a \neq 1$)

Voor $\boldsymbol{a \leq 0}$ is de functie *niet gedefinieerd.*
Immers als $a = 0$ dan is $a^x = 0$ voor elke x dus is a^x *geen functie.*
Als $\boldsymbol{a < 0}$ dan *bestaat* a^x *niet* voor *elke waarde van x.*
Zo zijn bijvoorbeeld $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; $a^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{a})^3$; $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$; ….*ongedefinieerd* als *a negatief* is.

Bij elke exponent x, is de waarde van a^x (**$a > 0$**) steeds positief want:
- als $x > 0$ dan $a^x > 0$ omdat per definitie $a^x = a.\ a.\ a.\ \dots\ a...$ (x- keer) dus weer positief.
- als $x < 0$ dan $a^x = 1 / a^{-x}$ dus zeker positief omdat a^{-x} dan positief is.

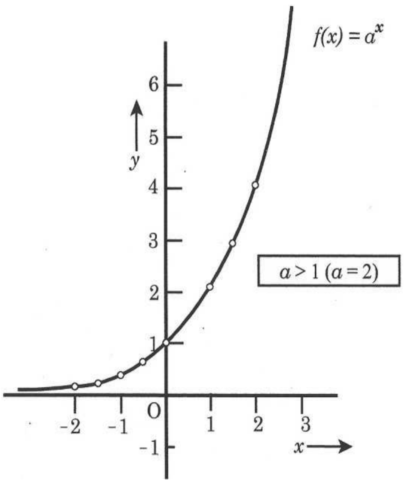
Alle grafieken van $y = f(x) = a^x$ liggen dus *in het eerste en tweede kwadrant.*
Omdat $a^0 = 1$ voor iedere a gaan *alle* grafieken *door het punt* (0,1).
Beschouw nu de *functie* **$f(x) = a^x$** voor waarden van a, met **$0 < a < 1$** en die als **$a > 1$**.

1. $f(x) = a^x$ *met* $0 < a < 1$



Voor $0 < a < 1$ is de functie ***monotoon dalend***, dus bij *toenemende x* neemt *y af*. Immers als $f(x) = a^x$ dan is $f(x+1) = a^{x+1} = a.\ a^x$ en daar $a < 1$ is $a.\ a^x < a^x$ dus **$a^{x+1} < a^x$** zodat $f(x) = a^x$ *monotoon daalt.*
Bij *onbepaald grote toename van x,* dus *als x tot oneindig nadert*, notatie $x \to \infty$, dan daalt a^x onbepaald dicht tot nul omdat **$0 < a < 1$**. De waarde nul wordt nooit bereikt, want er bestaat geen reële x waarvoor a^x ($a \neq 0$) gelijk is aan nul, zodat bij toenemende x de grafiek steeds dichter tot de *positieve x-as* (rechts van O) nadert *zonder hem ooit te raken*:
De x-as heet dan een (*horizontale*) ***asymptoot*** van de grafiek van $f(x) = a^x$.

2. $f(x) = a^x$ *met* $a > 1$



Als $a > 1$ dan is de functie ***monotoon stijgend***, want: als $f(x) = a^x$ dan is $f(x+1) = a^{x+1} = a.\ a^x$ en daar $a > 1$ is dan $a.\ a^x > a^x$ dus **$a^{x+1} > a^x$** $\Rightarrow$ **$f(x) = a^x$** is dan *monotoon stijgend.*
Bij *afname van de waarde van x* wordt de waarde van a^x steeds kleiner want $a^{x-1} = \frac{a^x}{a} < a^x$ omdat $a > 1$.
Bij onbepaald grote afname van x, als x tot $-\infty$ nadert, dan nadert a^x onbepaald dicht tot nul. De waarde nul wordt nooit bereikt, omdat er geen reële x bestaat met $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = 0$ dus hier zal bij afnemende x de grafiek steeds dichter tot de *negatieve x-as* naderen.
Ook hier is de x-as dus een ***horizontale asymptoot***.

- *Exponentiële groei*

In onderstaande tabel wordt de groei weergegeven van de bevolking van Latijns- Amerika in de vierjaarlijkse perioden tussen 1950 en.1970

jaar	1950	1954	1958	1962	1966	1970
aantal $\times 10^6$	164	183	203	227	254	282

Elke periode blijkt de bevolking met een *factor* van *circa* 1,11 te zijn toegenomen, want:
$\frac{183}{164} \approx \frac{203}{183} \approx \frac{227}{203} \approx \frac{254}{227} \approx \frac{282}{254} \approx 1{,}11.$
De factor 1,11 heet in dit geval de ***groeifactor***. Het ***groeipercentage*** is dan 11%.

Werk je met de groeifactor de bevolkingsaantallen in de onderste rij uit, dan vind je:

aantal $\times 10^6$	**164**	**183** = 1,11 × 164	**203** = 1,11 × 1,11 × 164	**227** = 1,11 × 1,11 × 1,11 × 164	**254** = 1,11 × 1,11 × 1,11 × 1,11 × 164	**282** = 1,11 × 1,11 × … × … 164
	$1{,}11^0 \times 164$	$1{,}11^1 \times 164$	$1{,}11^2 \times 164$	$1{,}11^3 \times 164$	$1{,}11^4 \times 164$	$1{,}11^5 \times 164$

Je ziet dan dat bij de *groeifactor* 1,11 *na* ***t*** *perioden van* 4 *jaar* (t = 0, 1, 2, 3, 4) de *beginwaarde* 164 (dus het inwonertal na $t = 0$ perioden) ongeveer met $1{,}11^{\mathbf{1}}$ **,** $1{,}11^{\mathbf{2}}$ **,** $1{,}11^{\mathbf{3}}$**,** $1{,}11^4$ $1{,}11^{\mathbf{5}}$ *is toegenomen.* Na ***t*** *perioden vanaf de startwaarde* 164 is de beginwaarde dan toegenomen tot $\mathbf{1,11^t \times 164}$**.**

Deze toename wordt ***exponentiële groei*** genoemd.

Noem je de ***startwaarde*** 164 = ***N* (0)** en de *groeifactor per periode* 1,11 **=** ***g*** dan is na t perioden: $\boldsymbol{N(t) = N(0) \cdot g^t}$. $N(t)$ is dus een *exponentiële functie van t.*

Bij exponentiële groei waarbij de groeifactor g in gelijke perioden constant is, is na t perioden: $N(t) = N(0) \cdot g^t$ ($N(0)$ = *startwaarde*)

***Toepassingen*:**

1. Een zekere hoeveelheid neemt *elk kwartier* met 12% toe. Bereken:
a. de groei*factor* per kwartier
b. de groeifactor en het groei*percentage* per uur
c. het groeipercentage per *vijf minuten*

a. Na een kwartier is de hoeveelheid gegroeid tot 1,12 × de startwaarde (= 1).
De *groeifactor per kwartier* is dan **1,12.**
b. De *groeifactor per uur* (4 × 1 kwartier) is $1{,}12^4 = \mathbf{1,574}$; het *groeipercentage* is **57,4%**
c. De groeifactor in vijf minuten (= 1/3 kwartier) is $1{,}12^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1{,}12} \approx 1{,}0385$
dus het groeipercentage per vijf minuten is ≈ **3,85%**

2. Een bacteriecultuur groeit exponentieel.
Op $t = 4$ zijn er 50.000 bacteriën, op $t = 8$ zijn er 130.000 bacteriën als t de tijd is in uren.
Bereken groeifactor en groeipercentage per uur en de groeifactor per dag in 3 decimalen.

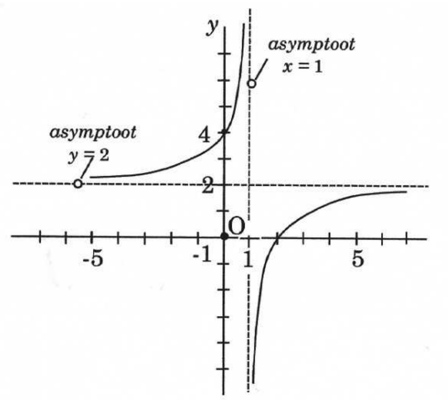
$N(8) = N(0) \cdot g^8$; $N(4) = N(0) \cdot g^4 \Rightarrow \frac{N(8)}{N(4)} = \frac{N(0) \cdot g^8}{N(0) \cdot g^4} \Rightarrow \frac{130.000}{50.000} = g^4 = 2{,}6$

De *groeifactor g* is in *vier* uur is dan 2,6, dus *per uur* $(2{,}6)^{\frac{1}{4}} = (\mathbf{1,2698\ldots})$
Het *groeipercentage* per uur is ≈ **0,270 %**
Per dag is de groeifactor $(\mathbf{1,2698\ldots})^{24} \approx \mathbf{308,916}$**.** (Niet eerder afronden!)

6. *Gebroken rationale functies*

Gebroken rationale functies zijn functies van de vorm f (x) = $\frac{g(x)}{h(x)}$
waarin $g(x)$ *en* $h(x)$ *polynomen zijn met reële coëfficiënten.*

De grafieken van deze functies kunnen verschillende *hyperbolische* vormen aannemen.
Hiervan een voorbeeld $f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$
De functie is niet gedefinieerd in het punt met $x = 1$, omdat voor die waarde de *noemer gelijk aan nul* wordt en dus de bijbehorende functiewaarde onbepaald is.
De functie heet dan ***discontinu i***n het punt met $x = 1$.
Verder volgt uit $\boldsymbol{x = 0} \Rightarrow \boldsymbol{y = 4}$ en uit $\boldsymbol{y = 0} \Rightarrow 2x - 4 = 0$
dus $\boldsymbol{x = 2}$ dus de grafiek snijdt de x-as in (2,0) en de y-as in (0,4).



Plot je de functie in de GR, dan blijkt de grafiek te bestaan uit twee krommen die je na *kegelsneden* zult herkennen als de *twee takken* van *een gelijkzijdige hyperbool.*
Je ziet dat *bij toenemende* $|x|$ (dus x naar rechts of naar links toenemend), *rechter- en linkertak naderen tot de lijn* $y = 2$ hetgeen als volgt is te bewijzen:

Deel je teller en noemer van $f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$ door x, dan ontstaat $f(x) = \frac{2-\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}}$ …(1)

Als x in (1) tot oneindig nadert, dan naderen $\frac{4}{x}$ en $\frac{1}{x}$ tot nul zodat (1) overgaat in

$f(x) = \frac{2-\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{2-0}{1-0} = 2$. In wiskundige termen: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-4}{x-1} = \mathbf{2.}$

De lijn y = 2 heet nu een ***horizontale asy***mptoot van de functie $\boldsymbol{y = f(x)} = \frac{\mathbf{2x-4}}{\mathbf{x-1}}$
Zo is ook aan te tonen dat *bij toenemende* $|y|$ beide takken *naderen tot de lijn* $x = 1$.
Neem voor $y \to \infty$ de reële waarde $y = 10^{100}$ dan is $y = \frac{2x-4}{x-1} = 2.\ 10^{100} - 4 /\ 10^{100} - 1$
waarvan je de uitkomst = 1 mag stellen. *)
De functie heeft dus ook een ***verticale asymptoot x = 1.*** (Gr .'symptootos' = samenvallend).

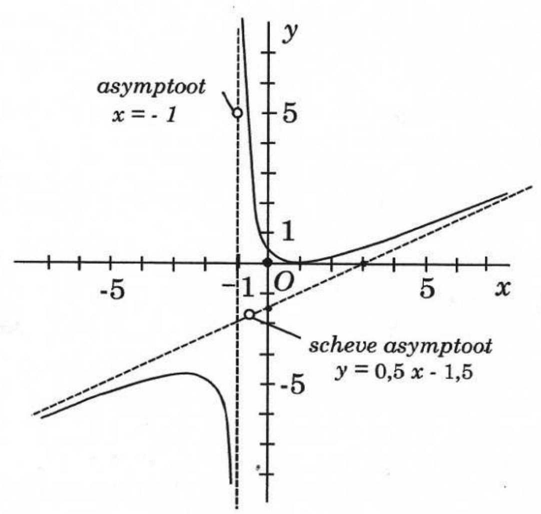
Voorbeelden van asymptoten

Een *asymptoot van een functie* is dus in het algemeen een *lijn* $y = ax + b$ waartoe de kromme $y = f(x)$ steeds dichter nadert, zonder hem ooit te raken. We onderscheiden ***horizontale, verticale en scheve asymptoten.*** Hoe dichter x en of y tot *oneindig naderen* , hoe dichter de (grafiek van) $y = f(x)$ tot de *lijn* $y = ax + b$ nadert. *)
In het geval hierboven zijn dus de *horizontale lijn* $\boldsymbol{y = 2}$ en de *verticale lijn* $\boldsymbol{x = 1}$ respectievelijk een horizontale en verticale asymptoot van de functie $\boldsymbol{y = f(x)} = \frac{\mathbf{2x-4}}{\mathbf{x-1}}$.
In de volgende opgave wordt ook een *scheve asymptoot* berekend.

1. $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{0{,}5\,(x-1)^2}}{\mathbf{x+1}}$

*) *Op blz.36 e.v. zullen de begrippen ' Limiet van een functie' en 'Asymptoten' wiskundig worden gedefinieerd.*

Omdat de noemer van de breuk bij $x = -1$ de waarde nul aanneemt, is de functie voor dat punt niet gedefinieerd. Je ziet dan ook dat de grafiek van $f(x)$ ***niet bestaat*** in $x = -1$.
De functie heet daarom ***discontinu*** in $x = -1$.



- Het *snijpunt met de y-as* is het punt met $x = 0$ en $y = \dfrac{0{,}5\,(0-1)^2}{0+1} = 0{,}5$ dus is het punt (0; 0,5).

- Een *snijpunt met de x-as* is het punt met $y = 0$, dus als $\dfrac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1} = 0$ ofwel:
$0{,}5\,(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ (dubbeltellend)
twee *samenvallende punten* **$x = 1$.**
Punt (1, 0) is dan *raakpunt* van $f(x)$ aan de x-as.

1⁰. De grafiek heeft een verticale asymptoot in het punt met $x = -1$. Bewijs:
Als ***x* *van links*** **nadert tot** -1 dan nadert de *noemer* van $f(x) = \dfrac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1}$ tot 0
en nadert de waarde van $f(x) = \dfrac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1}$ tot $-\infty$.
$x = -1$ is dus *een (verticale) asymptoot van de linkertak van de hyperbool.*

2⁰. Ook van de rechtertak is de lijn $x = -1$ een asymptoot want als ***x van rechts nadert*** **tot** -1 dan nadert de noemer van $f(x) = \dfrac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1}$ tot 0.
De waarde van $f(x) = \dfrac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1}$ nadert dan ***van rechts*** tot $+\infty$ dus $x = -1$ *is tevens asymptoot van de rechtertak van de hyperbool.*

- Omdat een eventuele limiet van $f(x) = \frac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1}$ als x ***tot plus of min oneindig nadert*** niet direct is te berekenen, herleiden we de functie: door een *staartdeling* uit te voeren:

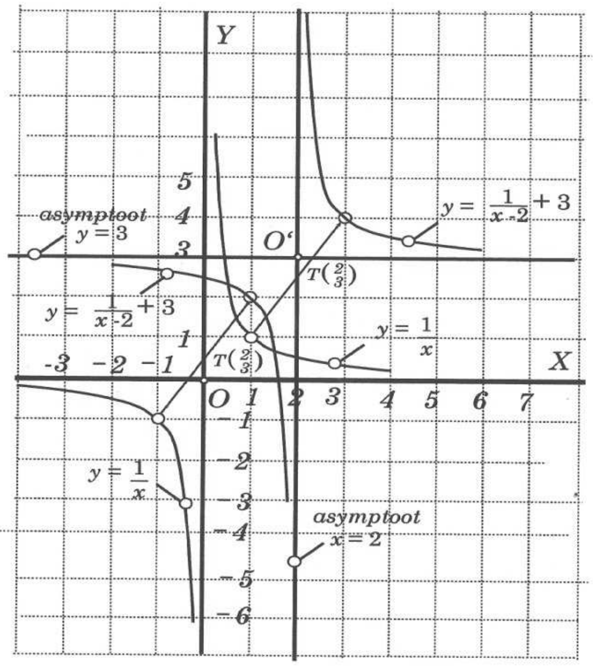
$$
\begin{array}{rl}
x + 1 \,/\, 0{,}5\,x^2 - x + 0{,}5 \,\backslash & 0{,}5\,x - 1{,}5 \\
\underline{0{,}5\,x^2 + 0{,}5\,x \qquad\quad} & \\
-1{,}5\,x + 0{,}5 & \\
\underline{-1{,}5\,x - 1{,}5} & \\
2 &
\end{array}
$$

dus is de gegeven functie gelijkwaardig met:
$$\boldsymbol{y = 0{,}5\,x - 1{,}5 + \frac{2}{x+1}}.$$

De limiet hiervan als x tot $\pm\infty$ nadert is dan $y = 0{,}5\,x - 1{,}5$ want $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2}{x+1} = 0$.
De lijn met vergelijking $\boldsymbol{y = 0{,}5\,x - 1{,}5}$ heet dan *een* ***scheve asymptoot*** van de gegeven functie.

De functie $f(x) = \dfrac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1}$ heeft dus een verticale asymptoot $x = -1$ en een scheve asymptoot $y = 0{,}5\,x - 1{,}5$.

2. $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$



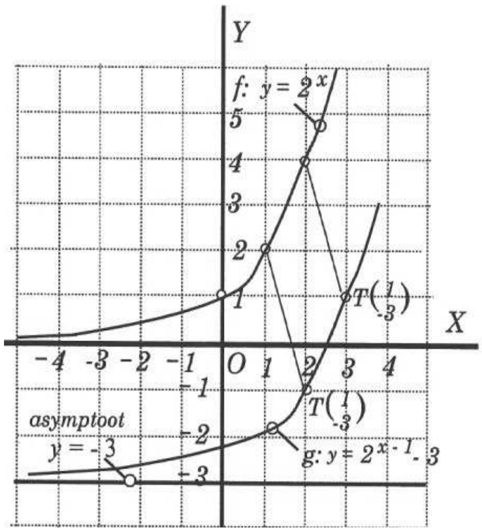
De grafiek van deze gebroken rationale functie (dus een hyperbool) ontstaat door de translatie ***T* (2,3)** toe te passen op de *standaardhyperbool g:* $y = \frac{1}{x}$ volgens de translatietransformatie-regel.

Horizontale asymptoot van ***g:*** $y = \frac{1}{x}$ is de x-as met vergelijking $\boldsymbol{y = 0}$, verticale asymptoot is de y-as met vergelijking $\boldsymbol{x = 0}$.

Bij de translatie $T(2,3)$ gaat de oorsprong O over in O' dus de vergelijking $\boldsymbol{y} = 0$ over in $y = 0 + 3 = \boldsymbol{3}$ en de vergelijking $x = 0$ in $\boldsymbol{x} = 0 + 2 = \boldsymbol{2}$

Van $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$ is de lijn $\boldsymbol{y = 3}$ dan een *horizontale asymptoot en* $\boldsymbol{x = 2}$ de *verticale asymptoot* .

7. *Grafieken van exponentiële functies*



1. $f(x) = 2^{x-1} - 3$

Deze exponentiële functie ontstaat uit de standaardfunctie g: $y = 2^x$ via de translatie ***T* (1,−3).** (blz.11)

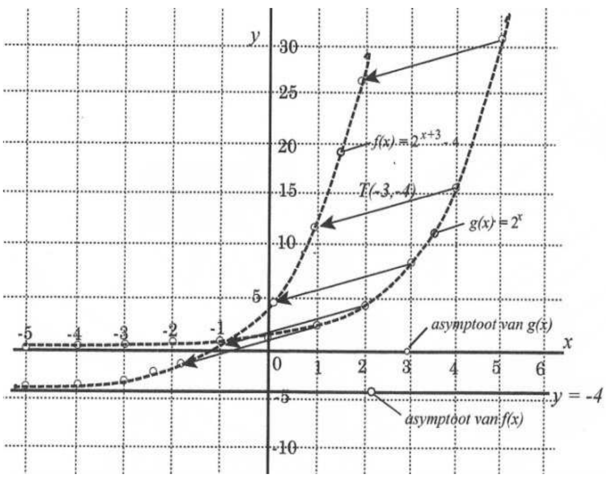
Horizontale asymptoot van f: $y = 2^x$ is de x-as, dus de lijn $y = 0$, de *horizontale asymptoot* van g: $y = 2^{x-1} - 3$ is dan: $\boldsymbol{y} = 0 - 3 = \boldsymbol{-3}$.

Er is geen verticale asymptoot want $\lim_{x\to\infty} 2^x$ bestaat niet.

Het *domein* van f (alle waarden van x waarvoor de functie 2^x is gedefinieerd) is $\mathbb{R}$, dus is $\mathbb{R}$ ook het *domein van g.*

Het bereik van f (alle functiewaarden die 2^x kan aannemen) is (0,→), dus is ⟨**−3**, →⟩het *bereik van g***.**

2. $f(x) = 2^{x+3} - 4$



a. Hoe ontstaat de grafiek van f uit de standaardgrafiek van een exponentiële functie?
b. Bepaal het domein en het bereik van f .

De exponentiële functie $f(x) = 2^{x+3} - 4$ ontstaat uit de standaardfunctie $g(x) = 2^x$ via de translatie $T(-3,-4)$.
Volgens voorgaande opgave is het domein van $g(x) = 2^x = \mathbb{R}$ dus is ook $\mathbb{R}$ **het *domein van f***
: $y = 2^{x+3} - 4$
Het bereik van $g(x) = 2^x$ is ⟨**0**,→⟩
$f: y = 2^{x+3} - 4$ is het ***bereik*** ⟨**− 4**,→⟩

Logaritmische functies

a. Logaritme van een getal

Exponentiële vergelijkingen zoals bij voorbeeld $17^x = 500$ kan je na voorgaande theorie nog niet algebraïsch oplossen. Men heeft voor dit probleem de *logaritme van een getal* ingevoerd. De Engelse wiskundige Henry Briggs (1561-1630) besloot alle *positieve getallen* als een ***macht van tien*** te schrijven. De *exponenten* van deze machten noemde hij ***logaritmen,*** dus de *logaritme* van een getal a is de *exponent p waarbij* $10^p = a$.Definitie: ***log a = p* als $\mathbf{10^p = a}$.**

Zo is bijvoorbeeld $100 = 10^2$ dus de logaritme van 100 = 2. Notatie: *log* 100 = 2.
1000 = dus *log* 1000 = 3; $1 = 10^0 \Rightarrow$ *log* 1 = 0; $0{,}001 = 10^{-3} \Rightarrow$ *log* 0,001 = − 3
De logaritmen van getallen ***a*** met ***a* ≤ 0 *bestaan niet*** want er is *geen getal p* waarvoor $10^p = a$ als $a \leq 0$. (Immers: Elke positieve of negatieve macht van 10 is groter dan 0, 'zelfs' $10^{-1000} = 1 / 10^{1000} > 0$).
Briggs berekende de logaritmen van alle viercijferige getallen en verzamelde ze in 'logaritmetafels'. Zo ontstonden de ***Briggse logaritmen***, met als ***grondtal*** het getal **10** *)

Niet alleen het getal tien kan als *grondtal g* voor logaritmen dienen, maar in feite *elk* ***positief reëel*** *getal* **mits ≠ 1.**
Omdat bijvoorbeeld $9 = 3^2$ kan men met *als grondtal* 3 zeggen ^{3}*log* 9 = 2.

Zo is ^{5}*log* 125 = 3 omdat $5^3 = 125$; $^{1/3}$ *log* $\frac{1}{27} = 3$, want $(1/3)^3 = \frac{1}{27}$, etc.
Men definieert dan: ***^{g} log a = x als $g^x = a$*** ($g > 0$ als grondtal van een exponentiële functie).
Omdat $g > 0$ is dan ook $a > 0$ dus **als *a* ≤ 0 *dan bestaat ^{g} log a niet.***

Definitie:

> *De ^{g} logaritme van een getal a is gedefinieerd door*: ***^{g} log a = x*** als ***$g^x = a$*** (*a en g* > 0, *g* ≠ 1)

De wiskundige John Napier (1707-1783) voerde veel later voor *het grondtal **g*** van de logaritmen het '***Getal van Euler' = e*** in. ($e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2{,}718281828\ldots$)
Logaritmen met dit grondtal noemt men ***natuurlijke logaritmen*** omdat de waarde ervan een rol speelt in veel natuurprocessen.
Notatie voor logaritmen *met grondtal e* is ***ln x***, dus ***ln x = ^{e} log x.***

> *Log x is de Briggse logaritme van x met* 10 *als grondtal, dus log x = ^{10} log x,*
> *ln (x) is de natuurlijke logaritme van x met e als grondtal dus ln x = ^{e} log x.*
> *Als log x = p, dan is* $10^p = x$ *, als ln x = p dan is* $e^p = x$.

De logaritme met grondtal g van een getal x is dus de ***exponent*** *van de exponentiële functie g^y . Als ^{g} log x = y* dan is *$g^y = x$ dus ^{g} log x* en *g^y* zijn ***elkaars inverse functies***.

---

*) *Zo berekende Briggs handmatig* 27 *wortels uit* 10: *De wortel uit* 10 *daarna de wortel uit de uitkomst daarvan en daaruit weer de wortel et cetera. Alles in zestien decimalen nauwkeurig!. Omdat* $\sqrt{10} = 10^{0,5} = 3{,}16227766\ldots$, *is log* $3{,}16227766\ldots = 0{,}5$; $\sqrt{3{,}16277766} = \sqrt{\sqrt{10}} = 10^{0,25} = 1{,}77827941\ldots$ *dus log* 1,77827941… = 0,25 *enz..*
En dat was nog maar een begin…

b. Eigenschappen van logaritmen

Voor elk positief grondtal g en alle positieve waarden voor a en b gelden de regels:

1. ${}^{g}log\, ab \quad = {}^{g}log\, a + {}^{g}log\, b$
2. ${}^{g}log\,\frac{a}{b} \quad = {}^{g}log\, a - {}^{g}log\, b$
3. ${}^{g}log(a^n) \quad = n.\,{}^{g}log\, a$
4. $4^a\ {}^{g}log(g^x) = x \qquad 4^b\ g^{{}^{g}log\, x} = x$

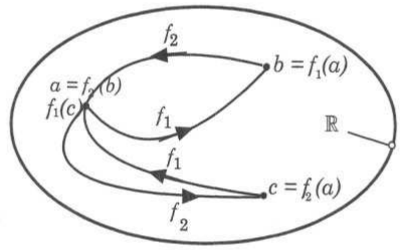
Bewijs:

1. Noem ${}^{g}log\, a = p$ en ${}^{g}log\, b = q$ dan is per definitie $g^p = a$ en $g^q = b$ met gevolg: $\boldsymbol{ab} = g^p.\, g^q = \boldsymbol{g^{p+q}}$, zodat ${}^{g}log\, ab = p + q$ dus: $\boldsymbol{{}^{g}log\, ab = {}^{g}log\, a + {}^{g}log\, b}$.
2. Noem ${}^{g}log\, a = p$ *en* ${}^{g}log\, b = q$ dan is $g^p = a$, $g^q = b$ dus $\frac{a}{b} = \frac{g^p}{g^q} = g^{\,p-q}$ zodat ${}^{g}\log\frac{a}{b} = p - q \Rightarrow \boldsymbol{{}^{g}log\ \frac{a}{b}\ =\ {}^{g}log\, a - {}^{g}log\, b}$.
3. *Als* ${}^{g}log\, a = p$ *dan* $g^p = a$ *en* $a^n = (g^p)^n = g^{n.p} \Rightarrow {}^{g}log(a^n) = n.\ p = n.{}^{g}log\, a$ dus $\boldsymbol{{}^{g}log(a^n)\ =\ n.\ {}^{g}log\, a}$

4^a. ${}^{g}log(g^x) = x\, .{}^{g}log\, g$ (volgens 3) $= x\, .\ 1 = x$ (want ${}^{g}log\, g = 1$ omdat $\mathbf{g^1 = g}$) $\Rightarrow$ $\boldsymbol{{}^{g}log(g^x) = x}$

4^b. Noem ${}^{g}log\, x = p$ dan is $g^{\,p} = x$ zodat $g^{\,glog\, x} = g^{\,p} = x \Rightarrow \boldsymbol{g^{\,glog\, x} = x}$

c. *Inverse functies*



Punt ***a*** wordt in de figuur door de functie f_1 afgebeeld op het punt b dus $\boldsymbol{b = f_1\ (a)}$.
Stel nu dat het f_1 *beeld* b van a *, dus* $= f_1$ ***(a)*** door een functie f_2 wordt 'terug' afgebeeld op a, dan is $\boldsymbol{a = f_2(\,b) = f_2\ (f_1\ (a))}$ …(1)
Door de functie $\boldsymbol{f_2}$ wordt het punt a afgebeeld op c, zodat $\boldsymbol{c =\ f_2\ (a)}$.
Stel nu dat ook dit $\boldsymbol{f_2}$ *-beeld* c van a door de functie f_1 weer wordt 'terug' afgebeeld op a, dan is dus is a = $\boldsymbol{f_1\ (c) = f_1\ (f_2\ (a))}$ …(2)
Volgens (1) en (2) geldt dan voor de functies f_1 en $\boldsymbol{f_2}$ dat $\boldsymbol{f_2\ (\ f_1(a)) =\ f_1\ (f_2\ (a)) = a}$.
Als dit geldt voor alle punten x = a binnen het domein van f_1 en $\boldsymbol{f_2}$ dan zijn $\boldsymbol{f_1}$ en $\boldsymbol{f_2}$ elkaars ***inverse functies.***

Zijn f en g twee functies in $\mathbb{R}$ waarbij voor elk element x geldt dat $f\,(g(x)) = g\,(f(x)) = x$ dan zijn f en g elkaars inverse functies

Zo zijn machtsverheffen $f(x) = x^p$ en worteltrekken $g(x) = \sqrt[p]{x}$ elkaars inverse functies, want voor elk getal x is $\boldsymbol{f\,(g(x))} = f\,(\sqrt[p]{x}\,) = (\sqrt[p]{x}\,)^p = \boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{g\ (f(x))} = g(x^p) = \sqrt[p]{x^p} = \boldsymbol{x}$.
Hierbij geldt dan ook steeds als $f\,(b) = a$ dan is $g\,(a) = b$ dus als $f\,(x) = \boldsymbol{f\ (4) = 4^{\,p}}$ dan is $g\,(x) = \mathbf{g\ (4^{\,p})} = \sqrt[p]{4^{\,p}} = \mathbf{4}$.

Eigenschap: *De logaritmische functie $f(x) = {}^{g}log\, x$ en de exponentiële functie $g(x) = g^x$ zijn elkaars inverse functies*

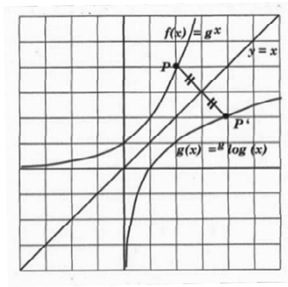
Bewijs:

Noem $f(x) = {}^g log\, x$ en $g(x) = g^x$ dan is: $\boldsymbol{f(g(x)) = f(g^x) = {}^g log\,(g^x) = x}$ (eig.4^a) ...(1)
Ook is $\boldsymbol{g(f(x)) = g({}^g log\, x) = g^{{}^g log\, x} = x}$ (eig 4^b) ...(2)
Uit (1) en (2) volgt dan $\boldsymbol{f(g(x)) = g(f(x)) = x}$ dus zijn $f(x) = {}^g \boldsymbol{log\, x}$ en $h(x) = \mathbf{g^x}$
per definitie elkaars ***inverse functies.***

Algemene eigenschap van inverse functies

Twee functies f en g waarvan de grafieken elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn y = x zijn elkaars inverse functies.

Bewijs:
Noem $\boldsymbol{f: y = e^x}$ dan is daarvan volgens eerdere regel *het spiegelbeeld in de lijn* $y = x$ $\boldsymbol{g: x = e^y}$ (x en y omwisselen). (blz.15).
Uit g: $x = e^y$ volgt ${}^e log\, x = y$, zodat nu de voorwaarde geldt:
$f(g(x)) = e^{{}^e log\, x} = \mathbf{e}^y = x$ en $g(f(x)) = e^{{}^e log\, x} = x$, dus:
f en g zijn elkaars inverse functies



Voorbeeld **(** Uit examenopgave vwo-B)

Toon aan dat $f(x) = 5 - \frac{6}{x+2}$ en $g(x) = \frac{2x-4}{5-x}$ elkaars inverse functies zijn:

Ga uit van $f(x) = y = 5 - \frac{6}{x+2}$ en *verwissel x en y*
Je krijgt dan dat $x = 5 - \frac{6}{y+2}$ *het spiegelbeeld is van* $y = 5 - \frac{6}{x+2}$ in de lijn $y = x$.
Uit $x = 5 - \frac{6}{y+2}$ volgt $\frac{6}{y+2} = 5 - x \Rightarrow y + 2 = \frac{6}{5-x} \Rightarrow y = \frac{6}{5-x} - 2$, dus
De inverse van $f(x) = \frac{6}{5-x} - 2 = \frac{6}{5-x} - 2.\frac{5-x}{5-x} = \frac{6-10+2x}{5-x} = \boldsymbol{\frac{2x-4}{5-x} = g(x)}$

Hiermee is aangetoond dat f en g elkaars inverse functies zijn.

Opgaven

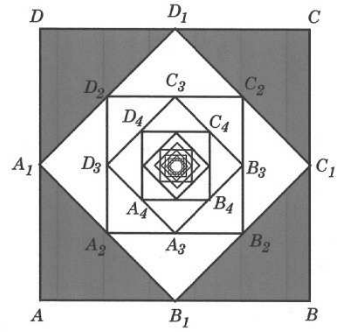
1. Bewijs dat algemeen geldt: ${}^g log\, x = \frac{log\ x}{log\ g}$. *(eigenschap 5)*

Noem ${}^g log\, x = p$ dan is $\boldsymbol{x = g^p}$. Noem $\log x = q$ dan is $\boldsymbol{x = 10^q}$ zodat $\boldsymbol{g^p = 10^q = x}$ ...(1)
Noem $\log g = r$, dan $g = 10^r$ dus $g^p = (10^r)^p = \boldsymbol{10^{rp} = 10^q}$ volgens (1).
Gevolg: $r.\,p = q \Rightarrow p = \frac{q}{r}$ ofwel $\boldsymbol{{}^g log\, x = \frac{\log x}{\log g}}$.

Met deze eigenschap kunnen logaritmen met *elk willekeurig grondtal g* met de GR TI-83/84 via Briggse logaritmen (grondtal = 10) berekend worden.
(Bij gebruik van de Casio kan je ${}^g log\, x$ voor willekeurig grondtal g direct bepalen).

Voorbeelden: ${}^3 log\, 17 = \frac{\log 17}{\log 3} \approx \mathbf{2{,}5789}$; ${}^{1/3} log\ 52 = \frac{\log 52}{\log 1/3} \approx \mathbf{-3{,}5966}$

2. De middens van de zijden van een vierkant $ABCD$ zijn de hoekpunten van vierkant $A_1B_1C_1D_1$. De middens van $A_1B_1C_1D_1$ zijn weer de hoekpunten van vierkant $A_2B_2C_2D_2$ en zo verder volgens onderstaande figuur. De zijde van $ABCD = 8$.
Bij welke index n zal de oppervlakte van vierkant $A_nB_nC_nD_n$ kleiner zijn dan 0,001?



De oppervlakte van $ABCD = 8^2 = 64$, de oppervlakte van $A'B'C'D'$ $= ½ \times O_{ABCD} = ½ \times 64$ en ook van *elk volgend vierkant* is de oppervlakte steeds de helft van die van het vorige vierkant.
Van $A_nB_nC_nD_n$ is dan de oppervlakte $O = 64 \times (½)^n$.
Je berekent nu bij welke waarde van n geldt dat
$64 \times (½)^n = 0{,}001$ dus wanneer $\mathbf{\log (64 \times (½)^n) = \log 0{,}001 = -3}$..(1)
$\log ab = \log a + \log b$ en $\log a^n = n. \log a$ dus volgt uit (1):
$\log 64 + n. \log ½ = -3 \Rightarrow 1{,}80617 + n. -0{,}30103 = -3 \Rightarrow$
$4{,}80617 = 0{,}30103\ n \Rightarrow \mathbf{n = 15{,}9658} \Rightarrow$
De oppervlakte van $\boldsymbol{A_{16}B_{16}C_{16}D_{n16}}$ is dus kleiner dan 0,001 vanaf de **index** n = **16**.
(*Controle*: $64 \times (½)^{16} = 0{,}000976$ en $64 \times (½)^{15} = 0{,}001953$).

9. *Goniometrische functies*

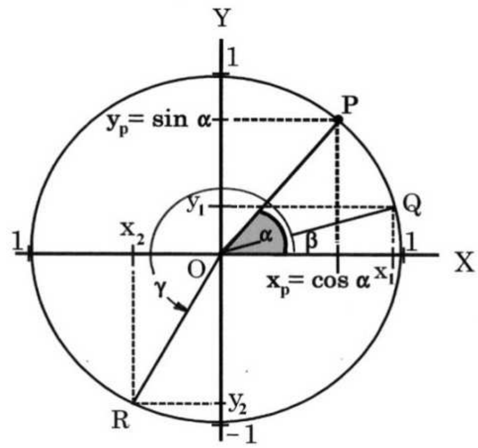
a. Definities in de eenheidscirkel

In de *driehoeksmeetkunde* werden *sinus, cosinus* en *tangens* van ***hoeken*** **< 90°** gedefinieerd als de *verhoudingen van twee zijden in een rechthoekige Δ:*

sinus α (sin α) == $\dfrac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{schuine zijde}}$, ***cosinus*** α(cos α) = $\dfrac{\textit{aanliggende rechthoekszijde}}{\textit{schuine zijde}}$

en ***tangens*** α (tan α) = $\dfrac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{aanliggende rechthoekszijde}}$.

Om sinus en cosinus te kunnen definiëren voor een ***willekeurige hoek*** α heeft men de '***eenheidscirkel***' ingevoerd: een cirkel met ***straal*** ***R* = 1** en middelpunt O in de oorsprong van het XOY stelsel.
Een hoek α wordt voorgesteld door de hoek XOP die het *'**vaste been**'* OX maakt met het ***bewegende been*** (de '***voerstraal'***) OP van $\angle XOP$.
Zo is dan α = 0 als voerstraal OP *samenvalt met OX.*
Als α **> 0** dan wordt OP vanuit OX om O *over de hoek* α *geroteerd* ***in tegenwijzerzin***; als α **< 0**, dan wordt OP om O *over de hoek* α *geroteerd* ***in wijzerzin.***
Sin α **en cos** α zijn nu gedefinieerd als *de coördinaten van het eindpunt* $P(x_p, y_p)$ van de voerstraal OP en wel zo dat $\boldsymbol{x_p} = \mathbf{cos}$ α en $\boldsymbol{y_p} = \mathbf{sin}$ α
Omdat nu α *elke reële waarde* **α + 2 *k*.π (*k*∈ℤ)** kan aannemen is het *domein* van sin α en cos α = ℝ, het *bereik* is $[-1, 1]$.



Sinus α *en cosinus* van $\angle XOP$ = α *zijn gedefinieerd in de eenheidscirkel, als de lengte van de projecties* y_p, x_p *van het eindpunt P van de voerstraal OP op respectievelijk de y-as en de x-as*

Voorbeelden: Van $\angle XOP$ = α is **sin** α = $\boldsymbol{y_p}$ en **cos** α = $\boldsymbol{x_p}$; **cos** $\angle XOQ$ = cos β = $\boldsymbol{x_1}$,
sin $\angle XOQ$ = sin β = $\boldsymbol{y_1}$**;** cos $\angle XOR$ = cos γ = $\boldsymbol{x_2}$, sin $\angle XOR$ = sin γ = $\boldsymbol{y_2}$.
Lees ook af: sin 90 = 1, cos 90° = 0, sin 180° = 0, cos 180° = −1, sin 270° = sin (−90°) = −1, cos 270° = cos (−90°) = 0, sin 360° = sin 0° = 0, cos 360° = cos 0° = 1.