

# Inhoud

Voorwoord	7
1. Vingers en tenen vormden een vroeg telraam	11
2. Nul is een even getal	21
3. Hackers hebben een bloedhekel aan priemgetallen	31
4. Cirkels hebben hoeken	41
5. De som van de hoeken van een driehoek is níét altijd 180 graden	51
6. Sommige vormen krijg je met geen mogelijkheid op papier	63
7. Je hebt een taart altijd verkeerd gesneden	75
8. We zijn slecht in kansberekening	87
9. Een vel papier 103 keer dubbelgevouwen is groter dan het heelal	99
10. Er zijn verschillende soorten oneindigheid	109
Dankwoord	120

## Voorwoord

*‘Alles heeft zijn getal.’*

– Pythagoras

Voor veel mensen is wiskunde een ver-van-mijn-bedshow. Ze vinden het maar saai, vervelend en inspiratieloos. Wiskunde wordt regelmatig gekozen tot het minst favoriete vak op school en vaak ook nog met een overweldigende meerderheid. Sommige volwassenen hebben er nog steeds nachtmerries van.

Voor mij is dat nooit zo geweest. Ik zat als kind voor het raam en maakte staafdiagrammen van de kleuren van de auto's die langs ons huis reden. Ik kon eindeloos schriften vullen door ellenlang getallen bij elkaar op te tellen en van elkaar af te trekken, of ze met elkaar te vermenigvuldigen en te delen. Ik stoeide onafgebroken met een rekenmachine en herinner me nog hoe opgewonden ik was toen ik voor het eerst ontdekte dat je de decimale punt naar links of naar rechts kon verplaatsen door simpelweg door tien te delen of met tien te vermenigvuldigen. Ik genoot van vormen en reeksen.

Wat niet wegneemt dat wiskunde ook frustrerend kan zijn. Op de universiteit schreef ik twee bladzijden vol met vergelijkingen om de druk in het binnenste van een ster te berekenen, toen

ik er op het eind achterkwam dat ik ergens halverwege de eerste bladzijde een plus in plaats van een min had gebruikt. Net als bij een verkeerd gebreid kledingstuk moest ik er met terugwerkende kracht alle verkeerde steken weer uit halen.

Wiskunde is uiteindelijk een taal en net als bij elke taal moet je oefenen voordat je die vloeiend beheerst. Getallen worden werkwoorden of bijvoeglijke of zelfstandige naamwoorden; plussen en minnen nemen de plaats in van komma's en punten.

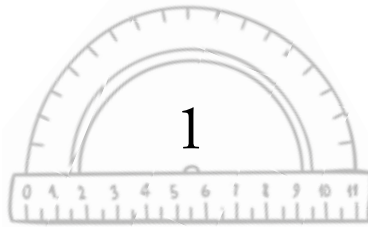
Net als woorden beschikken getallen over expressiviteit en elegantie. Ze vertonen muzikaliteit en ritme. Ze kunnen je ook onsterfelijk maken. Bewijs iets in de wiskunde en er valt, in tegenstelling tot andere disciplines in de wetenschap, niets meer tegen in te brengen. Hele steden kunnen op hun grondvesten wankelen, het is en blijft waar. Op de volgende bladzijden komen enkele van die bewijzen uitgebreider aan bod en hopelijk herken je in deze wiskundige juweeltjes evenveel schoonheid als in een muziekstuk van Beethoven of een schilderij van Botticelli. Wiskunde is misschien wel de meest ondergewaardeerde kunstvorm.

Ook zal blijken dat getallen onze wereld blijvend verrijkt hebben zodat we die in al haar complexiteit kunnen begrijpen en hanteren. Getallen vormen de onzichtbare draden die onze levens en onze verworvenheden met elkaar verbinden. En het is de toenemende vaardigheid met getallen die ten grondslag ligt aan alle technologische vooruitgang die de afgelopen eeuw is geboekt. Die vaardigheid zou bovendien weleens precies datgene kunnen zijn wat ons de komende eeuw gaat redden.

## Voorwoord

We zullen zien hoe we tot deze wiskundige vaardigheid zijn gekomen. Onze reis begint tienduizenden jaren geleden, toen we voor het eerst gingen tellen, en we sluiten af met de vraag of het aantal getallen eindig is. Onderweg zul je zien dat sommige van de wiskundige ‘regels’ die je op school hebt geleerd niet altijd even efficiënt en onwrikbaar zijn als je destijds te horen kreeg. Maar bovenal zul je ontdekken hoe leuk en verrassend getallen kunnen zijn, en hoe nuttig ze zijn voor het dagelijks leven.

Hopelijk deel je op het eind van dit boek mijn mening dat wiskunde niet ver van het grote theater van het leven af staat, maar er juist iets essentieels aan toevoegt.



Vingers en tenen vormden  
een vroeg telraam

Het Lebombobergebergte vormt de scheidslijn tussen het bekende Kruger National Park en Mozambique dat daar ten oosten van ligt. In de jaren 70 van de vorige eeuw deed de archeoloog Peter Beaumont een ongelooflijke vondst in deze 800 kilometer lange strook van hoge pieken en golvende dalen door het scheenbeen van een baviaan te vinden.

Op het eerste gezicht leek dit niet zo'n opvallende vondst, maar bij nadere beschouwing bleek dat er 29 inkepingen in het bot waren gekerfd. Uit later onderzoek bleek bovendien dat het bot minstens 43.000 jaar oud was. Dit was het vroegste bewijs van ons vermogen om te tellen. Mogelijk werd het vervaardigd door een vroege astronoom die de stand van de maan wilde bijhouden (een cyclus die zich om de 29,5 dag herhaalt) of door een vrouw die haar menstruatiecyclus op de voet wilde volgen.<sup>1</sup>

Het is overigens geen unieke vondst. Een soortgelijk bot werd in de regio Ishango in de huidige Democratische Republiek Congo gevonden. Dat bot dateert van 20.000 jaar geleden. Het lijkt er dus op dat we ruim twintig millennia lang bij het tellen apenbotten zijn blijven gebruiken. Al was ons vermogen om met getallen om te gaan in de tussentijd wel complexer geworden. De inkepingen waren in dit tweede geval namelijk gerangschikt in groepen, waarvan een aan-

---

1 Het bot is gebroken, dus misschien waren er meer inkepingen en berust het aantal van 29 op toeval.

tal met louter oneven getallen. Vandaar dat hier volgens sommige onderzoekers sprake is van een vroege poging om een talstelsel te vormen.

Het talstelsel dat we tegenwoordig gebruiken, plaatst getallen nog steeds in groepen. Het wordt het decimale stelsel genoemd omdat het gebruikmaakt van tien symbolen (nul tot en met negen) om getallen weer te geven. We gebruiken geen compleet nieuw symbool als we bij de tien zijn. In plaats daarvan combineren we twee bestaande symbolen (de één en de nul) om tien te schrijven. Waarom tien? We hebben tien vingers. Het is geen toeval dat ze in het Engels voor de symbolen om getallen aan te duiden de term *digits* gebruiken, wat tevens ‘vingers’ betekent. Als kind leren we nog steeds om op onze vingers te tellen, waarbij we voor elk cijfer één vinger gebruiken. Vandaar dat we zeggen dat we in het tientalig stelsel tellen. Hadden we acht of twaalf vingers gehad, dan zouden we waarschijnlijk in het achttalig (oftewel octaal) of in het twaalf-talig (oftewel duodecimaal) stelsel tellen.

Elk getal in een bepaald talstelsel is gerelateerd aan zijn basis. Dertien is eigenlijk ‘drie plus tien’ en eenentwintig is ‘één plus twee tien’. En hoe zit het dan met elf en twaalf? Waarom zeggen we niet ‘ééntien’ of ‘tweetien’? De woorden elf en twaalf komen van de Oudengelse woorden *endleofan* en *twelf*. Op hun beurt zijn deze woorden weer afgeleid van de Germaanse woorden *ainlif* en *tvalif*, die respectievelijk ‘rest één’ en ‘rest twee’ betekenen. Dat verwijst naar wat er overblijft als je er tien weghaalt. Het staat voor het aantal vingers dat een tweede persoon moet ophouden om de desbe-

treffende getallen weer te geven als de eerste persoon beide handen ophoudt. We groeperen getallen in sets van tien.

De reden waarom elf en twaalf taalkundig afwijken, heeft misschien ook te maken met het feit dat we regelmatig hebben geflirt met afwijkingen van het decimale stelsel. De Romeinse kalender had oorspronkelijk tien maanden (oftewel ‘maantijden’), maar er zijn meestal twaalf volle manen in een kalenderjaar. Dus werden januari en februari toegevoegd, en de vijfde en zesde maand (die bekendstonden als Quintilis en Sextilis) werden juli en augustus, naar Julius Caesar en diens opvolger Augustus. Het toevoegen van die twee maanden aan het begin van het jaar heeft ertoe geleid dat de benaming van de laatste vier maanden een beetje in het ongereede is geraakt. September, oktober, november en december (zo genoemd omdat ze oorspronkelijk de zevende, de achtste, de negende en de tiende maand waren) werden de negende, tiende, elfde en twaalfde maand. (Zonder dat iemand ooit de moeite nam ze een andere naam te geven.)

Het opdelen in groepen van twaalf kwam ook elders veel voor. Een Engelse voet bestaat uit twaalf inches, en vóór de decimalisering van de Britse munt in 1971 kreeg je twaalf penny's voor één shilling. Het was een ingewikkeld systeem omdat er ook twintig shillings in een pond gingen, wat dan weer verwijst naar een twintigtalig oftewel vigesimaal stelsel.

Vigesimaal tellen komt trouwens vaker voor dan je denkt. Want waarom zou je alleen je vingers gebruiken als je ook tenen hebt? Vigesimaal is het voorkeurstelsel in veel Keltische talen, waaronder



het Cumbrisch, het Cornisch en het Oudwelsh. Je komt het bijvoorbeeld tegen bij een methode om schapen te tellen die van oudsher vooral in het noorden van Engeland wordt gebruikt. Ze heet *yan tan tethera*, naar de gebruikelijke woorden voor één, twee en drie. Zodra de herders bij de twintig zijn (meestal aangeduid met *jiggít* of een variant daarop<sup>2</sup>) stoppen ze een steentje in hun zak of ze verplaatsen hun hand naar een andere markering op hun stok. Op het eind tellen ze hoeveel twintigtallen ze hebben.

De Keltische invloed in Frankrijk is misschien de reden waarom het tellen in modern Frans een mengelmoes is van twee verschillende talstelsels. Veertig (*quarante*), vijftig (*cinquante*) en zestig (*soixante*) volgen nog hetzelfde patroon als in het Engels en Nederlands, maar tachtig is opeens vier keer twintig (*quatre-vingts*) in plaats van acht keer tien. Het is een overblijfsel van het vigesimale stelsel. Maar het Frans is niet de enige taal met een gecombineerd talstelsel. In het Bukiyúp op Papoea-Nieuw-Guinea worden het drietallig en het viertallig stelsel naast elkaar gebruikt: kokosnoten en vissen worden met behulp van het eerste stelsel geteld, noten en bananen met het tweede.

Het Oksapmin-volk op Nieuw-Guinea gebruikt meer dan alleen vingers en tenen. In hun septemvigesimale (27-tallig) systeem kun je getallen aanduiden door naar 27 afzonderlijke plekken op je boven-

---

2 In Wensleydale, waar tot voor kort mijn schoonouders woonden, zijn de eerste twintig getallen: *yain, tain, eddero, peddero, pitts, tayter, later, overro, coverro, disc, yain disc, tain disc, eddero disc, peddero disc, bumfitt, bumfitt yain, bumfitt tain, bumfitt eddero, bumfitt peddero* en *jiggít*.

lichaam te wijzen. Je begint te tellen bij de duim van je rechterhand (1) en vervolgens ga je via de vingers van je rechterhand en langs je rechterarm naar je rechterschouder (10), via de nek en langs het rechteroor (12) over het rechteroog (13), de neus (14) en het linkeroog (15), waarna je langs de andere kant van je nek naar je linkerschouder gaat (18). Dan loopt het tellen door over je andere arm en eindig je bij de linkerpink met 27.

Het gebruik van zo'n hoog basisgetal (27) doet misschien onhandig aan, maar zelf gebruik je zonder erbij na te denken vaak het 60-tallig (sexagesimaal) stelsel. Een uur is bij ons immers opgedeeld in 60 minuten, die elk weer 60 seconden duren. We hebben dit systeem te danken aan de oude Sumeriërs, die zo'n 6000 jaar geleden in het zuiden van Mesopotamië woonden, een gebied dat delen van het huidige Irak, Iran, Turkije, Syrië en Koeweit besloeg.

Bij tijd en wijle hebben we ook andere systemen voor het indelen van de tijd uitgetprobeerd. Zo werd in 1793, vier jaar na het uitbreken van de Franse Revolutie, de Franse republikeinse kalender ingevoerd. Deze hield zich met bewonderenswaardige inzet aan het decimale stelsel. Men hield weliswaar 12 maanden aan, maar verdeelde die in 3 weken die elk 10 dagen in beslag namen. Elke dag duurde 10 uur, waarbij elk uur uit 100 minuten bestond en elke minuut uit 100 seconden. Met als gevolg dat een decimaal uur 2,4 keer zo lang duurde als de uren die wij gewend zijn. Rest nog te vermelden dat dit systeem niet echt aansloeg en dat het na 12 jaar alweer werd afgeschaft (het was misschien consequenter geweest om dat na 10 jaar te doen).

Het is in meerde opzichten logisch om voor het meten van de tijd het grondtal 60 te gebruiken. Het is het kleinste getal dat deelbaar is door de eerste 6 getallen en daarnaast ook nog eens door 10, 12, 15, 20, 30 en 60. Met al die manieren om 60 te delen kun je een uur makkelijk in allerlei delen opsplitsen.

Bovendien zien we de zon in een niet-schrikkeljaar 365 keer opkomen. De Egyptenaren, die het sexagesimale systeem overnamen van de Sumeriërs, benaderden dit aantal zonsopgangen door er 360 van te maken, oftewel 6 keer 60 (365 kan alleen gedeeld worden door 1, 5, 73 en 365). Daarom zeggen we ook nog steeds dat er in een cirkel 360 graden zitten (= een trecentosexagesimaal oftewel 360-talig stelsel), een maatverdeling die ervoor zorgt dat de zon elke dag ongeveer 1 graad aan de hemel verschuift. Bovendien wordt 1 graad onderverdeeld in 60 boogminuten die op hun beurt uit 60 boogseconden bestaan, dit naar analogie van hoe we onze uren in minuten en seconden opdelen.

Wellicht heeft ons zwak voor het sexagesimale stelsel ook iets met onze handen te maken. Kijk naar je linkerhand, met de handpalm naar boven en negeer je duim. De resterende 4 vingers bestaan elk uit 3 botdelen, de zogeheten vingerkootjes. Dit resulteert in een totaal van 12 onderdelen. Als je met de duim van je rechterhand om beurten naar die afzonderlijke onderdelen wijst, dan kun je van 1 tot 12 tellen. Dat zou mede kunnen verklaren waarom we ooit besloten hebben de omlooptijd van de aarde op te delen in 24 uur: 12 uur voor overdag en 12 voor de nacht.