Handboek Wiskunde voor middelbaar onderwijs klas 1 t/m 3.

Eerste druk 2024

ISBN   9789464929409

Eventuele op- en aanmerkingen over de inhoud van deze uitgave kunt u via e-mail richten aan de auteur.

Ook suggesties met betrekking op ontbrekende leerstofonderdelen zijn van harte welkom.

JJAC van Dongen
e-mailadres: jjacvandongen2@gmail.com

Woord vooraf.

Het handboek dat voor u ligt sluit aan op het "Handboek voor rekenen in de basisschool". Ook dit Handboek is bedoeld voor reken- en wiskundedocenten in de basisschool en het voortgezet onderwijs. De leraren van de basisschool kunnen via dit boek kennismaken met de leerstof die hun leerlingen, met betrekking tot het rekenen en algebra in de onderbouw van de middelbare school, te wachten staat. Wiskundeleraren in de bovenbouw vinden in dit handboek een aantal didactische handvatten waarmee ze hiaten in de kennis van hun leerlingen kunnen wegwerken. Ook ouders van leerlingen in het voortgezet onderwijs kunnen aan de hand van uitgewerkte voorbeelden kennis opdoen om hun kinderen te helpen.
Extra aandacht is besteed aan de bewerking "Het tegengestelde bepalen" in combinatie met de bewerkingen optellen en aftrekken.
De introductie van negatieve getallen in de onderbouw van het voortgezet onderwijs vereist een uitgebreidere definitie van de bewerkingen vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen. De regels zoals "plus en min is min" en dergelijke die bij het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen in zwang zijn worden aan de hand van eenvoudige voorbeelden uit het dagelijkse leven verklaard.

De communicatie tussen de docent en leerling verloopt soepeler wanneer beide op de hoogte zijn van de betekenis van de gebruikte benamingen. Zo worden de woorden formule, functie, vergelijkingen en dergelijke nauwkeurig gedefinieerd. Ook worden voorstellen gedaan voor nieuwe benamingen. Zo wordt de opdracht "haakjes verdrijven" vervangen door "vrijmaken van gebonden termen en factoren". Het omgekeerde van "haakjes verdrijven" bestaat in de huidige leerboeken niet, het voorstel is om deze actie te benoemen als: het binden van vrije termen en factoren.
Ook wordt in dit handboek het gebruik van het triple-bar-teken "≡" aangemoedigd. Dit teken is de codering van de opmerking: "is te vervangen door".
Kijk bijvoorbeeld naar de veel gebruikte notatie $a(b + c) = ab + ac$. Als men het " = "-teken leest als "*is gelijk aan*" dan klopt dit niet want het linkerlid is een vermenigvuldiging en het rechterlid is een optelling.
De notatie met de triple – bar, $a(b + c) \equiv ab + ac$ geeft duidelijker aan wat de bedoeling is: hier staat $a(b + c)$ *is te vervangen* door $ab + ac$.
Verder komen nieuwe begrippen als Hoi-Hoi vergelijkingen, Husseleigenschappen en transformaties aan de orde.
De uitgebreide lijst van trefwoorden geeft de mogelijkheid om snel door het handboek te navigeren.
Het voornaamste doel te komen tot een eensluidende benaming van getallen, bewerkingen en symbolen. De betekenis van en de samenhang tussen begrippen wordt door middel van voorbeelden verduidelijkt.
Opgaven zijn bewust niet opgenomen. Het internet is een welhaast onuitputtelijke bron van opgaven met bijbehorende uitkomsten. die kan worden aangeroepen.

Ik wil mijn zonen Bas en Pim en mijn dochter Kathelijn bedanken voor hun enthousiaste aanmoedigingen om door te gaan op de ingeslagen weg. Verder wil ik Margreet Warta en Jos Fianen bedanken voor hun adviezen op taalkundig gebied.

Sjef van Dongen. (e-mail adres: jjacvandongen2@gmail.com)

Inhoud

1 – Prioriteitsregels

De prioriteitsregels zijn te vergelijken met de algemene regels in het verkeer. Algemene regels zoals rechts rijden, geen voetgangers op de rijbaan en dergelijke maken een groot aantal verkeersborden overbodig. Bij het noteren van rekenopgaven stellen de prioriteitsregels de algemene regels voor en de haakjes zijn de verkeersborden.
De prioriteitsregels bepalen welke rekenkundige bewerkingen voorrang hebben boven de andere en beperken zo het aantal haakjes in rekenopdrachten. Staat een rekenopdracht tussen haakjes dan moet die eerst worden uitgerekend voordat met de uitkomst verder gerekend kan worden. En openingshaakje " (" in een rekenopdracht kan gelezen worden als*: de uitkomst van.* Bedoeld is de uitkomst van de berekeningen tussen de openings-sluitingshaak.
Bijvoorbeeld: Lees 12 : (2 + 4) als twaalf gedeeld door **de uitkomst van** twee erbij vier.
De aankomende brugklasleerling heeft in de basisschool kennis gemaakt met de vier belangrijkste rekenkundige bewerkingen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.
Bij deze bewerkingen zijn steeds twee getallen betrokken. Verschillende soorten getallen zijn al aan de orde geweest: natuurlijke getalen, kommagetallen, rationale getallen en priemgetallen. Ook de codering van rekenopdrachten en de uitwerking ervan is veelvuldig aan de orde gekomen. In de brugklas wordt de codering van de opdrachten structureel aangepakt. **Haakjes** worden geïntroduceerd en meerdere rekenopdrachten worden op één regel geschreven. Niet alle beginnende brugklasleerlingen zijn het gebruik van haakjes al eerder tegengekomen. Zij weten nog niet dat haakjes de verplichting aangeven dat eerst de rekenopdracht tussen twee bij elkaar horende haakjes (......) uitgerekend moet worden. Als de prioriteitsregels, met uitzondering van de regel "berekeningen tussen haakjes worden het eerst uitgevoerd", niet zouden bestaan dan zou de volgende rekenopdracht met het gebruik van 5 paar haakjes leiden tot het gewenste antwoord 45:

$$
\begin{aligned}
(12 \times (9-(8 \div 2)))-((6 \div 2) \times 5) &= (12 \times (9-4))-((6 \div 2) \times 5) \equiv \\
&= (12 \times 5)-((6 \div 2) \times 5) \\
&= (12 \times 5)-((6 \div 2) \times 5) \\
&= 60-((6 \div 2) \times 5) \\
&= 60-(3 \times 5) \\
&= 60 - 15 \\
&= 45
\end{aligned}
$$

Het gebruik van haakjes garandeert dat het rekenwerk precies de gewenste uitkomst oplevert. De hoeveelheid haakjes maakt de codering van de rekenopdracht echter onoverzichtelijk. Door prioriteitsregels (voorrangsregels) af te spreken kan het gebruik van haakjes verminderd worden.

Hieronder is de rekenopdracht $12 \times (9-8 \div 2)-6 \div 2 \times 5$ uitgevoerd onder 3 verschillende prioriteitsafspraken.

De **eerste** set afspraken: (is nooit een gangbare afspraak geweest).

A: Begin met het getal uiterst links van de codering.

B: Voer de rekenbewerking, +, – , x of : , uit die er direct op volgt. Gebruik daarbij het getal dat direct achter de code van de bewerking staat. Staat er achter de rekenbewerking een haakje, bereken dan eerst de uitkomst van de rekenopdracht tussen dit openingshaakje en het bijbehorende sluitingshaakje. Gebruik deze uitkomst bij de bewerking.

C: Schrijf de uitkomst van de bewerking op en begin weer bij A:

Voorbeeld:
$$
\begin{aligned}
12 \times (9-8 \div 2)-6 \div 2 \times 5 &= 12 \times (1 \div 2)-6 \div 2 \times 5 \\
&= 12 \times 0{,}5-6 \div 2 \times 5 \\
&= 6-6 \div 2 \times 5 \\
&= 0 \div 2 \times 5 \\
&= 0 \times 5 = 0
\end{aligned}
$$

De **tweede** set afspraken: (is rond 1990 uit alle nieuwe wiskundemethoden verdwenen)

Deze verouderde afspraak staat bekend als: Meneer **V**an **D**alen wacht **O**p **A**ntwoord.
Dat zou betekenen: **V**ermenigvuldigen gaat voor **D**elen. Zowel **V**ermenigvuldigen als **D**elen gaan voor **O**ptellen en **A**ftrekken, en **O**ptellen gaat voor **D**elen.
Ook hier geldt ook de regel: Berekeningen tussen haakjes gaan voor.
Op basis van deze afspraken zou de uitkomst van de bovengenoemde rekenopdracht als volgt berekend worden:

$$\begin{aligned} 12 \times (9 - 8 \div 2) - 6 \div 2 \times 5 &= 12 \times (9 - 4) - 6 \div 2 \times 5 \\ &= 12 \times 5 - 6 \div 2 \times 5 \\ &= 60 - 6 \div 10 \\ &= 60 - 0{,}6 \\ &= 9{,}54 \end{aligned}$$

De **derde** set afspraken: (<u>is de huidige standaard</u>)

Bij de éénregelige gecodeerde rekenopdrachten zijn de afspraken:

1: Berekeningen tussen haakjes worden als eerste uitgerekend.
2: Vermenigvuldigen en delen hebben dezelfde hogere prioriteit en worden uitgevoerd van in de volgorde waarin ze gelezen worden, van links naar rechts.
Voorbeeld: 8 x 4 : 5 = 32 : 5 = 6,4 en 8 : 4 x 5 = 2 x 5 = 10
3: Optellen en aftrekken hebben dezelfde lagere prioriteit en worden ook uitgevoerd van in de volgorde waarin ze gelezen worden, van links naar rechts.
Voorbeeld: 8 + 4 – 5 = 12 – 5 = 7 en 8 – 4 + 5 = 4 + 5 = 9

<u>Vanaf hier gebruiken we voortaan altijd deze derde afspraak.</u> Rekenopdrachten worden stap voor stap uitgevoerd van links naar rechts. Berekeningen tussen haakjes worden eerst uitgevoerd.
Elk getal in een rekenopdracht, met uitzondering van het eerste en het laatste getal, wordt vooraf gegaan en gevolgd door een rekencode, +, – , x , : . Zo lijkt elk getal bij twéé bewerkingen te horen. Ga steeds na, aan de hand van de prioriteitenafspraken, welke van de twéé bewerkingen de hoogste prioriteit heeft. Gebruik het getal bij de bewerking met de hoogste prioriteit en begin weer opnieuw van links naar rechts op zoek naar het volgende getal om de bewerking uit te voeren.

Ezelsbruggetje: **H**andige **T**ieners **v**inden **d**ie **o**plossingen **a**ardig.
Handige **T**ieners **d**ie **v**inden **a**ardige **o**plossingen.

H : berekeningen tussen haakjes gaan voor (hoogste prioriteit)
T : tegengestelde bepalingen (komt later aan de orde)
v d : vermenigvuldigen en delen
o a : optellen en aftrekken

Voorbeeld: De berekening van de rekenopdracht: $12 \times (9 - 8 \div 2) - 6 \div 2 \times 5$.

Achter het eerste getal 12 staat de bewerking vermenigvuldigen. Bij deze vermenigvuldiging horen de getallen 12 en, vanwege de haakjes, de uitkomst van $9 - 8 \div 2$. De uitkomst hiervan moet dus eerst, stap voor stap, berekend worden. Het eerste getal 9 hoort bij de bewerking "eraf". Deze bewerking "eraf" lijkt betrekking te hebben op de getallen 9 en 8, maar achter het getal 8 staat de tweede bewerking "delen". Bij het getal 8 lijken de twee bewerkingen "aftrekken" en "delen" te horen. "Delen" heeft een hogere prioriteit dan "aftrekken". De deling door 8 : 2 heeft dus voorrang op de aftrekking 9 – 8 . Het getal 2 is het laatste getal van de rekenopdracht tussen de haakjes. De deling 8 : 2 wordt dus als eerste uitgevoerd. Deze deling is de éérste uitgevoerde opdracht.

1^e stap: $12 \times (9 - \mathbf{8} \div \mathbf{2}) - 6 \div 2 \times 5 = 12 \times (9 - \mathbf{4}) - 6 \div 2 \times 5$

Begin na uitvoeren van de 1^e stap opnieuw van links naar rechts. De tussen haakjes geplaatste aftrekking blijkt de 2^e uit te voeren opdracht te worden. De uitkomst van 9 – 4 is 5. De haakjes kunnen worden weggelaten omdat de uitkomst van de berekening tussen de haakjes bekend is.

2^e stap: $12 \times (\mathbf{9} - \mathbf{4}) - 6 \div 2 \times 5 = 12 \times \mathbf{5} - 6 \div 2 \times 5$

Begin de 3^e stap weer van links naar rechts. Het lijkt dat 12 vermenigvuldigd moet worden met 5, maar het getal 5 lijkt ook bij een aftrekking te horen. Vermenigvuldigen heeft een hogere prioriteit dan aftrekken, dus 12 x 5 wordt eerst berekend.

3^e stap $\mathbf{12} \times \mathbf{5} - 6 \div 2 \times 5 = \mathbf{60} - 6 \div 2 \times 5$

Begin de 4^e stap opnieuw van links naar rechts. Het getal 6 lijkt van 60 afgetrokken te moeten worden, maar 6 lijkt ook betrokken te zijn bij een deling . Delen heeft een hogere prioriteit dan aftrekken. Het getal 6 wordt het deeltal van de deling. Het getal 2 zou de deler van de deling worden, maar kijk altijd bij welke bewerking het getal 2 nog meer betrokken is. In dit geval is dat een vermenigvuldiging. Vermenigvuldigen en delen hebben dezelfde prioriteit. Van links naar rechts komen we delen als eerste tegen, dus de deling door 2 komt daarom als eerste aan de orde.

4^e stap $60 - \mathbf{6} \div \mathbf{2} \times 5 = 60 - \mathbf{3} \times 5$

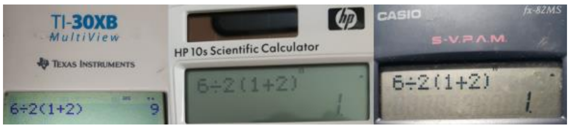
Begin de 5^e stap weer links. De aftrekking met 3 lijkt aan de orde, maar 3 lijkt ook bij een vermenigvuldiging te horen. De vermenigvuldiging heeft een hogere prioriteit dan de aftrekking en wordt dus als eerste uitgevoerd, omdat het getal 5 niet bij een tweede bewerking is betrokken.

5^e stap $60 - \mathbf{3} \times \mathbf{5} = 60 - \mathbf{15}$

De zesde stap bestaat uit de uitvoering van de aftrekking en levert de uitkomst op van de totale rekenopdracht.

6^e stap **60 – 15** = **45**

Naast de **éénregelige** rekenopdrachten kennen we ook de **tweéregelige** opdrachten. Bijvoorbeeld: $\frac{3 \times 6 - 4}{5 - 6 : 2}$. De afspraak hierbij is: bereken eerst de uitkomsten van beide regels met gebruikmaking van de hiervoor genoemde afspraken en bereken daarna de uitkomst van de deling.



Figuur 1

Bij het letter-rekenen komt de volgende afspraak aan de orde: stellen de letters a en b getallen voor dan kan de vermenigvuldiging van a en b voorgesteld worden als a x b, a·b of ab . M.a.w. staat er geen code tussen de (letter)factoren a en b dan wordt een vermenigvuldiging bedoeld.
De opdracht: bereken ab als a = 4 en b = 5 levert als uitkomst 4 x 5 = 20

Let op:

Op basis van de genoemde prioriteitsregels en de afspraak bij letter-rekenen geldt:

$$6 : 2(1 + 2) = 6 : 2 \times (1 + 2) = 9.$$

Sommige rekenmachines geven helaas als antwoord echter 1. Zie figuur 1.

2 - Nieuwe getallen

2.A - Negatieve getallen

Geschiedenis

Negatieve getallen verschijnen voor het eerst in de geschiedenis in *De negen hoofdstukken over de rekenkunde* (Jiu zhang suan-shu) dat in zijn huidige vorm uit de periode van de Han-dynastie 202 v.Chr. - 220 n.Chr. komt.

Negatieve getallen werden in de 7e eeuw na Christus in India gebruikt om schulden weer te geven terwijl positieve getallen gaven bezittingen weergaven. Tegenwoordig komt men negatieve getallen ook tegen als maatgetallen bij grootheden die tegengestelde waarden kunnen aannemen. Bijvoorbeeld: elektriciteit, saldo, toename, enz..

De relatie tussen getallen wordt vaak grafisch afgebeeld met behulp van een getallenlijn. Voorbeelden van getallenlijnen zijn in figuur 1a te zien. In de basisschool zijn alleen de positieve getallen aan de orde geweest. Die vindt je rechts van de 0 op deze getallenlijn. Als de getallenlijn ook links van de 0 wordt getekend dan ontstaat er plaats voor de zogenaamde negatieve getallen. Let op: het getal 0 is géén negatief en ook géén positief getal.
Om onderscheid te maken tussen positieve en negatieve getallen gebruikt men het plusteken en het minteken: + en – . Als je een positief getal bedoelt kun je bijvoorbeeld schrijven als +3 . Een negatief getal, links van 0 op de getallenlijn, kun je schrijven –3. Je leest " –3 " als negatief drie en "+3 " als positief drie. Het getal 3 noemt men de absolute waarde van de getallen –3 en +3
Omdat het codeteken " – " meerdere betekenissen heeft wordt een negatief getal in Belgische leerboeken vaak tussen haakjes geplaatst. De + en - tekens worden in deze context in België "**toestandstekens**" genoemd.
De ongeschreven afspraak in Nederlandse wiskunde boeken is dat bij het benoemen van een positief getal de + als toestandsteken en het woord positief wordt weggelaten. Helaas wordt in Nederlandse leerboeken een negatief getal niet tussen haakjes geplaatst.

Coderen van een optelling in Nederland: –5 + 3 lees als: negatief vijf erbij drie.
In België: (–5) + 3 lees als: negatief vijf erbij positief drie.

Coderen van een aftrekking in Nederland: –5 – –3 lees als: negatief vijf eraf negatief drie.
In België: (–5) – (–3) lees als: negatief vijf eraf negatief drie.

Hoe groter het getal hoe verder het getal naar rechts op de getallenlijn is te vinden.

De afspraak is: als het getal (P) groter is dan het getal (Q) dan wordt het getal (P) op de getallenlijn afgebeeld rechts van de plaats waar het getal (Q) is afgebeeld.

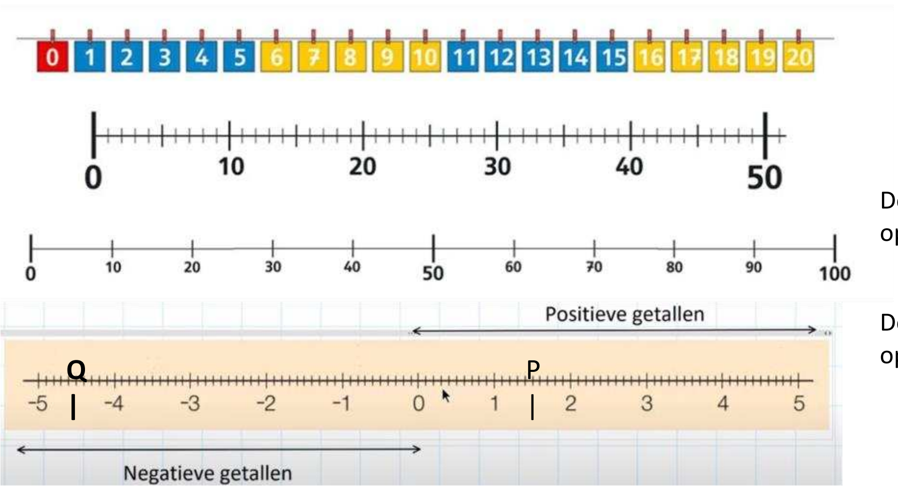
Op de getallenlijn in figuur 1a is het getal 1,5 (op de plaats P) en het getal –4,5 op de plaats Q afgebeeld. 1,5 ligt rechts van –4,5 , dus het getal 1,5 is groter dan het getal –4,5.
Uiteraard is het ook waar als men schrijft: –4,5 is kleiner dan 1,5.

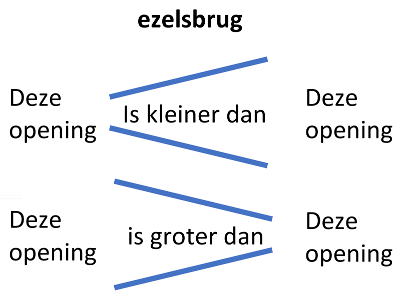
Gecodeerd: 1,5 > –4,5 . Lees: 1,5 is groter dan negatief 4,5.

Gecodeerd: –4,5 < 1,5 . Lees: negatief 4,5 is kleiner dan 1,5.

Zie de ezelsbrug in figuur 1b voor het lezen van de tekens > en <.

Verderop zal blijken dat het, na de invoering van negatieve getallen, mogelijk is geworden grotere getallen van kleinere getallen af te trekken. Het antwoord zal dan een negatief getal worden.





Figuur 1a getallenlijnen

figuur 1b

Om onderscheid te kunnen maken tussen de " – " van de bewerking "aftrekken" en de " – " bij het noteren van negatieve getallen zal een negatief getal hierna in een rekenopdracht steeds tussen haakjes worden genoteerd, behalve als het negatieve getal de einduitkomst is van een rekenopdracht of in een situatie dat er geen vergissing mogelijk is. Bijvoorbeeld als opgemerkt wordt dat de temperatuur –2 graden Celsius is.

2.B - Tegengestelde getallen

In veel vakgebieden wordt het begrip "tegengestelde" gebruikt, omdat in die vakgebieden gebruik wordt gemaakt van grootheden waarbij ook een vergelijkbare tegengestelde grootheid bestaat.
Zie figuur 2.
Onder een grootheid verstaat men een eigenschap die te meten valt.
En met "meten" bedoelt men: vergelijken met een afgesproken eenheid.
Het resultaat van een meting schrijft men op als een combinatie van een maatgetal en een eenheid. De meting van de grootheid "winst" van een onderneming kan opleveren 300 euro. Hierbij is het **maatgetal** 300 en de **eenheid** is één euro.
Het optellen van 2 meetresultaten bestaat uit het optellen van de maatgetallen.
Optellen van maatgetallen is echter alleen zinvol als beide meetresultaten 'betrekking hebben op dezelfde grootheid en zijn bepaald met dezelfde eenheden.

Twee voorbeelden:
Bereken de totale winst van een "onderneming" in twee achtereenvolgende weken als gegeven is:

Situatie A: de winst in de 1^e week 14 euro en in de 2^e week de winst 6 dollar was.
Situatie B: de winst in de 1^e week 14 euro en in de 2^e week het verlies 6 euro was.

Grootheid	Tegengestelde grootheid	eenheid
winst	verlies	Euro, dollar etc.
bezit	schuld	Euro, dollar etc.
positieve elektrische lading	negatieve elektrische lading	Coulomb
groei	krimp	Meter
toename	afname	Procenten
temperatuurstijging	temperatuurdaling	Graden Celsius
verkoop	inkoop	Auto of .....

Figuur 2

In beide situaties heeft het optellen van de maatgetallen 14 en 6 géén zin.
In situatie A zijn de grootheden (winst) gelijk maar de eenheden (euro en dollar) niet.
In situatie B zijn de grootheden (winst en verlies) niet gelijk maar de eenheden (euro) wel.

Wil een zinvolle optelling mogelijk worden dan moet in situatie A naar dezelfde eenheid gewerkt worden. De dollar moet omgerekend worden in de euro of omgekeerd.
In situatie B moeten de grootheden gelijk worden, ofwel de grootheid winst moet vervangen worden door de grootheid verlies of omgekeerd.
Hiertoe zou je kunnen afspreken dat bij het vervangen van een grootheid door zijn tegengestelde grootheid het nieuwe maatgetal het tegengestelde wordt van het oorspronkelijke maatgetal.
Dat wil zeggen: "6 euro verlies" komt overeen met "het tegenstelde van 6 euro winst".
"Het tegengestelde bepalen" van een getal is een rekenkundige bewerking die uitgevoerd wordt met dat getal als uitgangpunt.
Het getal waarop een bewerking wordt uitgevoerd wordt een **"argument"** genoemd.
Dit is vergelijkbaar met de bewerking: "de wortel bepalen" van een getal. De bewerking "de wortel bepalen" wordt gecodeerd met het symbool " $\sqrt{\ }$ " .

Elke bewerking heeft zijn specifieke code. Voor de bewerking “het tegengestelde bepalen” heeft men de code “ – ” gekozen. Helaas lijkt dit symbool erg op de symbolen die al gekozen zijn voor de bewerking “aftrekken” en voor het woord “negatief”.

De opmerking: “6 euro verlies” komt overeen met “het tegenstelde van 6 euro winst” is op deze manier te vervangen door de codering “– 6 euro winst”.
Meetresultaten waarvan zowel de maatgetallen als de gebruikte eenheden tegengesteld zijn, zijn gelijke meetresultaten:

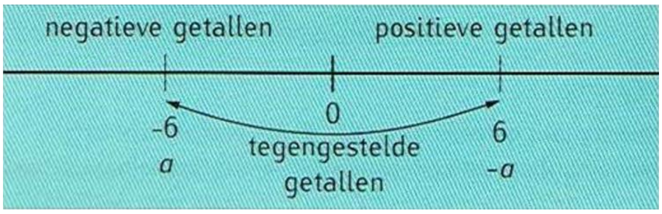
Bijv.: 6 procent groei is te vervangen door – 6 procent krimp.

De berekening van de winst in situatie B gaat nu als volgt:

De winst = 14 euro + – 6 euro = (14 + – 6) euro .

Opmerking: lees hier – 6 nog als tegengestelde van zes en niet als negatief zes! De code “ – ” verwijst naar de opdracht tegengestelde bepalen en “ 6 “ is het argument. Nadat de betekenis van de bewerking “tegengestelde bepalen” is vastgelegd kun je – 6 lezen als negatief zes: “ – ” is het toestandsteken en 6 is de absolute waarde van de uitkomst van de bewerking “tegengestelde bepalen”.

De uitkomst van de bewerking “het tegenstelde van 6” vind je op de getallenlijn aan de andere kant van 0 maar op dezelfde afstand van 0 als de afstand van 6 naar 0. Het tegengestelde van 6 is dus negatief zes. En het tegengestelde van negatief 6 is positief 6 of 6.Zie figuur 3.



Figuur 3

Regel 01

Eigenschap: Het tegengestelde van het tegengestelde van een getal is gelijk aan het getal. Gecodeerd: – (– getal) = getal

Eigenschap: een getal erbij het tegengestelde van dat getal = 0
Gecodeerd: getal + (– getal) = 0

3 - Bewerkingen optellen en aftrekken

3.A - Optellen, aftrekken met positieve en negatieve getallen.

In de basisschool hebben de leerlingen al geleerd wat het verband is tussen de bewerkingen optellen en aftrekken.

Regel 02

Optellen en aftrekken zijn elkaars tegenovergestelde bewerkingen.

Dat betekend dat als je bij een willekeurig getal eerst iets optelt en van het resultaat direct hetzelfde getal er van aftrekt dan is de uitkomst gelijk aan het oorspronkelijke getal.

Voorbeeld: 251 + 3,75 – 3,75 = 251
764 – 354 + 354 = 764

Aan de hand van de voorraadadministratie van een autobedrijf (zie figuur 4) komen we een toepassing tegen van de bewerking "het tegengestelde bepalen" van een getal.

Het verband tussen de bewerkingen: tegengestelde bepalen, optellen en aftrekken.

In figuur 4 zijn van de autohandel "On the road" de volgende drie gegevens bekend: de voorraad auto's op 1 januari 2019, het netto resultaat in het eerste kwartaal en het netto resultaat in het tweede kwartaal.
Met deze gegevens is de voorraad op 1 juli 2019 te berekenen. De berekeningen in de rijen 1, 2 en 3 van de tabel zijn verschillend maar alle gebaseerd op dezelfde gegevens.
In rij 1 is uitgegaan van het feit dat een positieve inkoop een vergroting van de voorraad betekent en dat een positieve verkoop een daling van de voorraad betekent.
De grootheid **inkoop** is gekoppeld aan de bewerking **optellen** en de grootheid **verkoop** is gekoppeld aan de bewerking **aftrekking.**
Aangezien inkoop en verkoop tegengestelde grootheden zijn kunnen we een positieve verkoop van 50 auto's vervangen door een inkoop van negatief 50 (-50) auto's.

In de 2^{e} rij kunnen we de voorraad in juli berekenen door middel van de gedane inkopen in de eerste twee kwartalen, dus met behulp van alleen optellingen.

In de 3^{e} rij wordt de voorraad in juli berekend door middel van gedane verkopen. De inkoop van 25 auto's in het 1-ste kwartaal wordt daartoe vervangen door een verkoop van negatief 25 (-25) auto's. De voorraad in juli wordt in de 3^{e} rij berekend met alleen aftrekkingen.

Magazijn gegevens van Autohandel "On the road"				
rij	Voorraad 1-1-2019	1-ste kwartaal	2-de kwartaal	Voorraad 1 juli 2019
1	200 auto's	Inkoop 25 auto's	Verkoop 50 auto's	200 + 25 – 50 = 175 auto's
2	200 auto's	Inkoop 25 auto's	Inkoop -50 auto's	200 + 25 + (-50) = 175 auto's
3	200 auto's	Verkoop -25 auto's	Verkoop 50 auto's	200 – (-25) – 50 = 175 auto's

Figuur 4

De laatste kolom van figuur 4 leert ons het volgende : (lees daarbij het symbool " ≡ " als "is te vervangen door")

$$200 + 25 \mathbf{- 50} \equiv 200 + 25 \mathbf{+ (-50)} \qquad 200 \mathbf{+ 25} - 50 \equiv 200 \mathbf{- (-25)} - 50$$

Wat opvalt is: erbij negatief 50 ≡ eraf 50 en eraf negatief 25 ≡ erbij 25.

Regel 03
De aftrekking van een getal is te vervangen door de optelling van het tegengestelde van dat getal.
Gecodeerd: .... – a ≡ .... + – a de letter a is de vervanging van "het getal"
De optelling van een getal is te vervangen door de aftrekking van het tegengestelde van dat getal.
Gecodeerd: .... + a ≡ ..... – – a

Toepassingen van de bewerking "het tegengestelde bepalen":
1: Berekeningen met aftrekkingen zijn vaak lastig. Met regel 3 zijn aftrekkingen te vervangen door optellingen.
2: Verderop leren we dat "het tegengestelde bepalen" van een getal te vervangen is door "vermenigvuldiging van dat getal met negatief een (-1)" en omgekeerd.

3.B - Husselen bij optellen en aftrekken.

In de basisschool is de brugklasleerling veelvuldig gedwongen om een serie rekenopdrachten bestaande uit vele optellingen en aftrekkingen te verwerken.
Daartoe aangespoord door opdrachten als: reken handig of slim uit .

Bijvoorbeeld: 950 + 347 – 124 = 900 + 50 + 300 + 40 + 7 – 100 – 20 – 4
= 900 + 300 – 100 + 50 + 40 – 20 + 7 – 4
= 1100 + 70 + 3
= 1173

Zonder commentaar wordt deze gang van zaken door de leerling geaccepteerd. Als wiskundige zou je hier graag een bewijsvoering bij zien. Voor de motivatie van de rekenaar in de dop echter is zo'n bewijsvoering waarschijnlijk dodelijk. Een manier om deze herindeling van het rekenwerk acceptabel te maken is door het toepassen van regel 3. In de basisschool is duidelijk geworden dat de volgorde waarin **termen**** worden opgeteld geen invloed heeft op de uitkomst. Regel 3 geeft de mogelijkheid om een aftrekking te vervangen door een optelling. Het gegeven voorbeeld kan dus worden herschreven als een serie optellingen, die zonder nadere uitleg van volgorde gewisseld kunnen worden. De termen kunnen bij een serie optellingen gehusseld worden zonder dat het invloed heeft op de uitkomst. Na het husselen kunnen, eveneens met regel 3, de optellingen met negatieve getallen weer worden omgezet in aftrekkingen met positieve getallen.

950 + 347 – 124 = 900 + 50 + 300 + 40 + 7 – 100 – 20 – 4
= 900 + 50 + 300 + 40 + 7 + (-100) + (-20) + (-4)
= 900 + 300 + (-100) + 50 + 40 + (-20) + 7 + (-4)
= 900 + 300 – 100 + 50 + 40 – 20 + 7 – 4
= 1100 + 70 + 3
= 1173

** **Termen** zijn getallen waarmee wordt opgeteld of afgetrokken.

Werken we in een rekenopdracht **alléén met optellingen en aftrekkingen** dan hoort bij elke term één rekenopdracht. We werken bij een uitgebreide rekenopdracht altijd van links naar rechts. En aangezien optellen en aftrekken dezelfde prioriteit hebben zal de opdracht links van het getal aangeven wat met het getal moet gebeuren. anders gezegd: aan elke term is één rekenopdracht , optellen of aftrekken, gekoppeld.
Bij de meeste termen is meteen te zien welke rekenopdracht dat is. Bij het voorgaande voorbeeld is duidelijk dat aan de term 347 een optelling is gekoppeld en aan het getal 124 is een aftrekking gekoppeld. Bij het eerste getal 950 is dat onduidelijk. Duidelijkheid wordt op de volgende manier geschapen.

Het is vanzelfsprekend bij optellingen te starten met het getal 0. Maar het is helaas ook vanzelfsprekend geworden die 0 vervolgens niet te noteren. Daardoor is het bij het getal 950 niet meteen duidelijk dat er een optelling bij hoort. In het geval dat we de 0 niet vergeten zou het voorbeeld worden: **0 +** 950 + 347 – 124 . Hierdoor zou het duidelijk worden dat aan de term 950 een optelling is gebonden.
Zonder daar verder op in te gaan stellen we dat de genoemde husseleigenschap en ook de hierna te behandelen eigenschappen ook gelden wanneer negatieve en positieve kommagetallen worden gebruikt.

Regel 04 De husseleigenschap bij optellen en aftrekken

Husselen van optellingen en aftrekkingen ofwel het verwisselen van termen samen met hun bijbehorende opdracht heeft geen invloed op de uitkomst.

950 + 347 – 124 ≡ 0 + 950 + 347 – 124
≡ 0 + 347 – 124 + 950
≡ 0 – 124 + 950 + 347
≡ – 124 + 950 + 347

Figuur 5

* Uit het voorgaande kan de conclusie worden getrokken dat als het minteken het éérste teken is van een serie optellingen en/of aftrekkingen dan kan dat minteken gelezen worden als: eraf. Met de veronderstelling dat er weer een 0 aan vooraf gaat.
Bijvoorbeeld: – 7 + 9 ≡ 0 – 7 + 9 ≡ 0 + 9 – 7 = 2
** De husseleigenschap is ontstaan op het moment dat de oudere afspraak “meneer van dalen wacht op antwoord” werd vervangen door de moderne prioriteitsregels.

4 - Bewerkingen Vermenigvuldigen en Delen

4.A - Vermenigvuldigen met positieve en negatieve getallen.

4.A.1 - Vermenigvuldigen met positieve kommagetallen.

3	x	8	=	24
Vermenigvuldiger		vermenigvuldigtal		product
Multiplier		multiplicant		product

Figuur 6

In de basisschool is de vermenigvuldiging ingevoerd als de vervanging van een herhaalde optelling. Dit is in principe alleen mogelijk als de vermenigvuldiger een natuurlijk getal voorstelt. De vermenigvuldiger geeft immers het aantal herhalingen van het vermenigvuldigtal aan. Met het begrip aantal is altijd een natuurlijk getal bedoeld. Bij het vermenigvuldigen met kommagetallen werd in de basisschool elk kommagetal vervangen door een natuurlijk getal gecombineerd met een **decimale factor**, zoals .... ; 1000 ; 100 ; 10 ; 0,1 ; 0,01; 0,001 ; ... . Bijvoorbeeld: 31,46 wordt vervangen door 3146 x 0,01. De natuurlijke getallen werden vervolgens gebruikt om te vermenigvuldigen. Op deze manier kan de vermenigvuldiging immers weer als een herhaalde optelling gezien worden. De komma, die nog aan het gevonden product van de natuurlijke getallen moet worden toegevoegd, wordt op de juiste plaats gezet door de regel toe te passen dat bij elke deling door 10 de komma een plaats naar links en bij elke vermenigvuldiging met 10 de komma een plaats naar rechts werd geschoven.
Bijvoorbeeld: 0,75 x 2,4 = 75 : 100 x 24 :10 =75 x 24 : 100 : 10 = 1800 : 10 : 10 :10 = 1,8 .
2400 x 0,075 = 24 x 100 x 75 : 1000 = 24 x 75 x 100 : 1000 = 1800 x 100 : 1000 = 180