

退休金的精算数学  
基本概念与商务应用  
从死亡率到资产负债表

translated from

Actuarial Mathematics for Pensions  
Basics and Concepts applied to Business  
From Mortality to Balance Sheet  
ISBN 978 90 465 9740 8



退休金的精算数学  
基本概念与商务应用  
从死亡率到资产负债表

童舟莎 ZHOUSHA TONG

王思尹 SZU-YIN WANG

许毓恒 YUHENG XU

屠立雯 LI-WEN TU

童舟莎 ZHOUSHA TONG  
王思尹 SZU-YIN WANG  
许毓恒 YUHENG XU  
屠立雯 LI-WEN TU

多明尼克 贝克尔斯 DOMINIQUE BECKERS  
© 2024 Pensionmatters  
E-mail: [info@pensionmatters.be](mailto:info@pensionmatters.be)

保留所有权利，未经出版商事先书面许可，不得以任何形式或通过任何方式电子、机械、摄影、录音或其他方式复制、存储或传播本出版物的任何部分。

All rights reserved, no part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photographic, recording or otherwise, without the prior written permission of the Publisher.

# 目录

## 序言

### 第一章

死亡率表及其对退休金的影响  
比利时的原始死亡率和生命表

### 第二章

退休金的贴现、筹资和准备金  
比利时团体保险的成本结构

### 第三章

既有的退休金权利  
比利时的既有利益赋予  
比利时的资金募集不足

### 第四章

偿付能力、资产负债表与退休金  
简化压力测试的实际应用范例

中英对照表

常用的退休金精算公式  
参考文献和资料

# 序言

## 退休金 - 从死亡率到资产负债表

本书旨在为渴望更清晰理解退休金基本原理的每一个人提供指导，且重点关注的是当前退休金业务实践中的精算基础和概念。

退休金有时被认为很复杂。

如何建立一个系统为遥远的未来做出承诺？更重要的是：如何在投资的人中维持对这个系统的信任？投资人希望，在他们生命的后期阶段，当其创造收入的能力大大减少时，能够从一个退休金中受益，直至生命终结——这意味着他们能在老年时期有足够的收入来维持体面的生活水平。这只是退休金有关社会可持续性的一个方面。

从精算的角度来看，退休金问题至少包括四个需要仔细验证的主题。

**死亡率计算：** 死亡率是如何计算的？人们如何预测预期寿命以及退休金应支付的时间？目前，精算师已经开发了解决这种不确定性的“生命表”（Life Tables）。

在解释这些计算时，极度的警觉性是必要的，它们可以被用来——实际上已经被用来——发展退休金计算的基石：一个人未知的生命时长内的退休金的现值。相关概念取自精算标准，在第一章中举例进行了解释说明。

**资金筹集体系：** 今天应该留出多少钱，以便随着时间的推移能筹集足够的退休金？目前，精算师已经开发了资金筹集技术，这个技术将成本分摊到一段时间内，同时避免超额筹集或资金不足。这些当今常用的技术在第二章中有定义、解释并通过实际应用范例进行了说明。

**既有利益之赋予（Vesting）：** 退休金应该归预定接受退休金的那些人。这意味着，当（退休金计划）成员/受益人在法律上获得了对当前或未来收益的即时、固定权利时，可以说退休金是“既定”的。既定规则通常由法律规定，它们在退休金的社会可持续性中起着重要作用。在第

三章中，对既定退休金追属权进行了解释、定义和举例说明。为了读者的便利，使用了和前几章一样的示例。

**偿付能力 (Solvency)：** 假设资金完全足够，既定退休金追属权是被社会认可的。那么如何确保退休金承诺的可信，以及退休金在未来相当长的一段时间内能够得到兑现呢？我们如何确信退休金的提供者和计划发起人有足够的实力，能够保证退休金基金或（团体）人寿保险的主要基金的财力呢？

金融、工业和商业世界变幻莫测，退休金却需要时间慢慢累积。在这个过程中，经济环境或许会变化，极端事件也有可能发生。在退休金系统中，资本累积是形成其储备的基本方式，系统需要有足够的自有资金来保护（退休金计划）成员和受益人免受破产的威胁。退休金基金需要持有足够的自有资金，以应对极端事件的损失和市场的波动。精算师们不断地开发技术来衡量这种不确定性，并向参与退休金累积的企业及成员/受益人提供相关信息。

**从死亡率到资产负债表：** 提出了衡量有关退休金的死亡率、资金筹备、既定退休金追属权和偿付能力的技术方法，同时也介绍了这些因素如何影响退休金机构的资产负债表。为了让读者充分的理解，这些被强调的基本概念都通过简单的实际应用范例进行了举例说明。

# 第一章 死亡率表及其对退休金的影响

- I.1. 退休金的定义
- I.2. 死亡率和预期寿命的计算
- I.3. 生命表
- I.4. 计算死亡率时保持审慎的必要性
- I.5. 生命表（例）
- I.6. 货币的时间价值
- I.7. 退休金计算的第一基石：生存保险
- I.8. 退休金计算的第二基石：基于单一生命体的终身年金
- I.9. 单一被保险人的定期年金
- I.10. 双重利率的年金
- I.11. 终身年金及退休金的可逆性
- I.12. 退休前/后的死亡保险
- I.13. 精算方程的简化计算

## 比利时的原始死亡率和生命表



# 第一章 死亡率表及其对退休金的影响

## I. 1. 退休金的定义

退休金可以定义为只要受益人（退休金领取者）还活着并且符合特定的资格条件，（相关机构）就会定期定额地支付给受益人的一定数额的资金。这些特定的资格条件可能包括年龄（可领取退休金的年龄或退休年龄）和工龄（就业年数）。退休金也可以一次性支付。

退休金可通过多个系统累积。

对于这些系统，直观的理解是描绘柱形图，其中退休者的最终退休金数额是一个或多个柱形图的退休金之和，具体取决于筹资方法。

通常，在第一支柱，退休金由政府累积，并且对所有（工作的）公民都是强制性的。在第二支柱，退休金与职业活动相关，由雇主、员工所属的行业组织或自雇人员的公司累积。在第三支柱，退休金是个人通过主动的长期储蓄累积的。

在第二章中，当我们观察退休金构成阶段（退休金筹资）并检查确保筹资充足所需的精算结构时，将重新讨论这个退休金的定义。

退休金业务的一个重要基石是开始领取退休金的年龄（或退休年龄）。这个年龄在过去常常是一个固定的、官方的时刻，它明确地划分了职业生涯进行与结束。对于西欧国家，这个年龄通常是 65 岁左右。

如今，这个领取退休金的时刻不再是一个固定的时间点，而更像是一个过渡期，在此期间允许工作和退休的状态混合存在。精算师制定了稳固且可持续的机制从而将这种灵活性融入退休金定义并且确定受益阶段开始时间点。

## 1.2. 死亡率和预期寿命的计算

退休金通常是“在受益人存活期间”支付的，至少在计算退休金的价值时会考虑到这一支付期间。讨论这个期间需要“预期寿命（Life Expectancy）”的概念。

预期寿命可以定义为一个特定年龄的人平均还将活多少年。基于当前的医学和统计技术，预期寿命永远不能被认为是个体指标，而是一个聚合指标，表示一个人可能期望的寿命，前提是他或她属于一个具有特定特征的群体，并且该群体的死亡率已经被测量。这些群体的特征可以包括年龄、性别、职业、生活方式、居住地区、种族、教育水平、婚姻状况等。

测量死亡率的基本形式是计算一个群体中发生的死亡次数。这种计数通常由政府组织执行，这些组织也会收集有关死亡原因和情况的信息及统计数据。

有关人类死亡率的原始数据可以在人类死亡率数据库（[www.mortality.org](http://www.mortality.org)）中找到。该网站支持开放式的国际访问，同时提供多个国家的人口和死亡率数据。

原始输入可以表示为：

- $Rl_x$ ：在某一特定日期，观察到的活着的  $x$  岁人的数量。
- $Rd_x$ ：在  $x$  岁（包括）到  $x+1$  岁（不包括）的时间间隔内死亡的观察数量。

原始死亡系数  $RM_x$ ，这是一个纯频率函数，可以定义为：

$$\text{(公式 I.1)} \quad RM_x = Rd_x / Rl_x$$

$RM_x$  可以被看作是一个统计近似值，表示一个人在给定观察期间活到  $x$  岁这 1 年的死亡概率。这个 1 年死亡概率通常用  $q_x$  表示。因此，

$$\text{(公式 I.2)} \quad q_x \approx RM_x$$

然而，这个原始死亡系数（ $RM_x$ ）对于即时退休金计算来说较不理想，因为它通常在连续几年内表现出非连续性行为。因此，简单的认为死

亡率随着年龄的增长而增加，以此进行退休金计算结果（保费、贡献和福利）看起来似乎违反直觉。

这在图 I.5 和图 I.6（“比利时的原始死亡率（Raw Mortality）和生命表”）中得到证实，这些图将比利时人口的  $RM_x$  作为年龄（ $x$ ）的函数。

过去，精算行业建议通过引入和使用生命表来平滑这个原始死亡系数，以便于计算。

### I.3. 生命表

在其基础形式中，精算生命表代表了一系列年龄  $x$ ，一个  $x$  岁的人在他或她下一个生日之前死亡的概率。这个概率的精算符号是  $q_x$ 。

$q_x$  是一个人在  $X$  岁时的 1 年内的死亡概率，前提是这个人在年初活着。

生命表可以用各种方式构造，主要依赖于人口（或“一个群体”）的基础原始数据和将数据平滑为精算函数以进行计算的技术。

一个生命表可以表现为以下列表：

基础数据： $x, l_x$

衍生数据： $d_x, q_x, p_x, L_x, TL_x, e_x$

- $x$ ：表示个体的年龄，从 0 到最后一名幸存者的年龄。
- $l_x$ ：表示在  $x$  岁时还活着的人数，其中 0 岁时的人数被认为是一个任意大的数字，通常是 100,000 或 1,000,000。 $l_x$  也被称为生存函数
- $d_x$ ：表示在  $x$ （包括）到  $x+1$ （不包括）之间死亡的人数，对于在  $x$  岁时还活着的个体，有以下公式（定义）：

$$\text{(公式 I.3)} \quad d_x = l_x - l_{x+1}$$

- $q_x$ ：表示在  $x$  岁的人在一年内死亡的概率，有以下公式（定义）：

$$\text{(公式 I.4)} \quad q_x = d_x / l_x$$

- $p_x$ : 表示  $x$  岁的人在一年内仍活着的概率，有以下公式（定义）：

$$(公式 I.5) \quad p_x = l_{x+1}/l_x \text{ 或 } p_x = 1 - q_x$$

$l_x$ : 一个群体从  $x$  到  $x+1$  活过的总人数。

“1 个人/年” (1 Person-Year) 等于 1 人活了 1 年的时间。

如果一个人恰好在年中死亡，则每个  $l_{x+1}$  个人计为“1 个人/年”， $d_x$  个人计为“0.5 个人/年”，这得出方程

$$(公式 I.6) \quad L_x = l_{x+1} + 0.5 d_x$$

(公式 I.6) 假设某人恰好于年中死亡。这个假设对于刚出生的（在生命表的开始）和最老的幸存者（在表的末尾）是一个糟糕的近似。这两种假设通常都被用在退休金的计算过程中：（生命表的）早些年在退休金计算中并不太重要，（生命表的）末尾年份会应用特殊的“关闭技术” (Closing Techniques)，因此误差也是被允许的。

这些生命表关闭方法中的有一种是强制性关闭，在这种方法下，会在一个可接受的老年年龄  $w$ ，也被称为最终年龄（例如  $w = 105$  岁）假定死亡率等于 1。这些结算技巧对于与商业相关的退休金事务的重要性较低。

- $TL_x$ : 表示从  $x$  岁开始，一个群体的成员依然存活的总“1 个人/年”数 (1 Person-Year)，直到该群体的所有成员都已去世，用下面的方程表示：

$$(公式 I.7) \quad TL_x = \sum_{j=0}^{w-x} L_{x+j}$$

该公式可推导预期寿命，假设是在一年的中间去世：

$$(公式 I.10) \quad e_x = TL_x / l_x$$

注意：根据假设的死亡情况，人们还可以在精算文献中找到以下方程的预期寿命定义。

(公式 I.11) 
$$e_x = \sum_{k=1}^{w-x} {}_k p_x$$

其中  ${}_k p_x$  是有条件的一年内生存概率的乘积（由  $p_x$  表示），前提是该人在期初是活着的：

(公式 I.12) 
$${}_k p_x = \prod_{j=0}^{k-1} p_{x+j}$$

生命表可能由一个或多个前述精算值的序列表示： $x, l_x, d_x, q_x, L_x, TL_x, e_x$ .

生命表通常是针对整数年龄设立的。非整数年龄的精算值可以通过插值计算得出。

构建生命表的基础原始数据由该表可能使用的人口或群体确定。通常会作出以下区分：

- 人口表：用于一个区域、地区或国家的（总）人口
- 性别表：用于特定人口中的特定性别
- 经验表：用于由特定（组别的）退休金机构保险/覆盖的人口（这可能仅用于统计目的，因为并非总是合法的）
- 法定表：法律规定用于寿险业务中的特定应用
- .....

所依赖的平滑技术可以是参数性的或非参数性的。在相关的精算文献中，已经开发和讨论了许多技术。在“参考文献和资料”中包括了许多参考文献。

#### I. 4. 计算死亡率时保持审慎的必要性

生命表的一个必要且极为可取的特性是，它们在统计上是健全的，并且能够代表真实的生活经验。而目前的医学知识以及统计技术本身不能预测特定个体的预期寿命。死亡率或长寿可能依赖于许多因素，因此很难完全反映现实。

死亡率并非随时间恒定，是使用过去数据预测死亡率的主要障碍之一  
参考表 I.1:

	t	t+1	t+2	...
x	$l_{x,t}$	$l_{x,t+1}$	$l_{x,t+2}$	...
x+1	$l_{x+1,t}$	$l_{x+1,t+1}$	$l_{x+1,t+2}$	...
x+2	$l_{x+2,t}$	$l_{x+2,t+1}$	$l_{x+2,t+2}$	...
...	...	...	...	...

表 I.1  $l_x$  的原始/平滑数据 (年龄/时间公式)

表 I.1 代表一个矩阵，其中包含 (部分) 人口或群体的原始或平滑  $l_x$ ，这些人的年龄是  $x, x+1, x+2, \dots$  (纵轴) 在不同的时间间隔  $t, t+1, t+2, \dots$  (横轴) 进行测量或计数。

关于死亡率的经典观点使用垂直方法，在给定时间点，监测所有个体，并在每个年龄组中计算死亡人数。这种类型基于横截面数据的表被称为期间表。该表是基于对所有年龄组在 (较短的) 时间段内所作的观察而构建的。当这种表用于当前和未来的退休金计算时，需假设随时间推移死亡率是稳定的。

关于死亡率的较新观点考虑了随时间推移监测的群体/年龄组的死亡人数或死亡概率。因此，它采取了对角线方法。在某种程度上考虑了随时间推移死亡率的演变。这种表被称为队列表或纵向方法。这种方法的主要缺点是，在该群体的队列表完成之后 (即只有在较长的时间段后) 才知道该表的情况。

所有这些表都是基于死亡率的过去观察构建的回顾性表。这诱发了系统性风险。