

**WISKUNDE**  
**voor alle niveaus**  
**Update 2024**

*Algebra-analyse-meetkunde-statistiek-kansrekening*

*vectoralgebra-grafen-matrices-rijen-reeksen*

*dynamische modellen-logica-perspectief-*

*Lorentzfactor-Poissonverdeling-complexe getallen*

***Bij deze nieuwe uitgave***

Deze uitgave is een herziening van eerdere uitgaven van 'Wiskunde voor alle vwo-niveaus' Meer dan in vorige versies is gedateerde stof weggelaten en zijn figuren, teksten en uitwerkingen van opgaven hier en daar verbeterd en/of aangevuld.

Theorie en opgaven betreffende, na vele jaren, in onbruik geraakte onderwerpen van het vwo zijn weggelaten. Wel zijn meer recente examenopgaven en uitwerkingen in dit boek opgenomen

De steeds geheel uitgewerkte opgaven en toepassingen zijn hoofdzakelijk bedoeld ter ondersteuning van de eraan voorafgaande theorie.

Hun aantal is beperkt gehouden zodat u zich in betrekkelijk korte tijd veel stof (weer) kunt 'eigen maken'. De lezer raakt daarbij niet gedemotiveerd omdat '*Het allemaal niet opschieft*' wegens de grote hoeveelheden oefenopgaven die gemaakt moeten worden, zoals in alle gangbare lesmethoden noodzakelijk is vanwege een andere opbouw van de leerstof. Elk hoofdstuk wordt steeds als compleet geheel op eind-vwo-niveau behandeld, dus niet volgens de structurele, concentrische opbouw van de bekende wiskundemethoden, waarbij onderwerpen in de opvolgende leerjaren herhaald en uitgebreid worden volgens het beproefde, didactisch model van de bekende onderwijsspecialist professor Herbarts. Door de opzet van dit leerboek en een zeer gedetailleerde inhoudsopgave en trefwoordenregister, kunnen de voor u interessante onderdelen, ook volgens de exameneisen bij uw profiel snel worden gevonden.

Aan het gebruik van de grafische rekenmachine (GR) wordt, geïntegreerd in de opgaven en toepassingen, alle nodige aandacht besteed. Wij kozen eerder voor de TI-83 van Texas Instruments, die vrijwel identiek is met de latere, en iets handzamer TI-84.

De nieuwste GR van Casio is overigens naar mijn mening gemakkelijker in het gebruik. Ik hoop dat ook deze uitgave aan de verwachtingen voldoet en houd mij voor opbouwende kritiek graag aanbevelen.

***Over de schrijver***

Wim Gronloh begon zijn loopbaan als scheepswerktuigkundige bij de Nederlandse Koopvaardij en was na negen jaar vaartijd ruim 35 jaar werkzaam als leraar wis- en natuurkunde in het lager- en middelbaar technisch en voortgezet onderwijs.

Publiceerde in 1997 de wiskundemethode 'Basislijn' voor lbo-mavo en havo-vwo waarvan in 2023 een vernieuwde versie werd uitgegeven.

Sedert 2006 verschenen van zijn hand regelmatig geüpdatete versies van "Wiskunde A,B,C en D voor het vwo"

Bussum, december 2024

**Inhoud**

I. FUNCTIES, GRAFIEKEN, EN FUNCTIEVERGELIJKINGEN	1- 44
1. Het begrip functie	1
2. Lineaire functies	2
3. Kwadratische functies	5
a. Nulpunten van een kwadratische functie	7
b. Ontbinden van kwadratische functies	8
4. Machtsfuncties	10
a. Grafieken van machtsfuncties	12
b. Transformaties	12
- Transformaties door translatie	14
- Transformaties door vermenigvuldiging	14
- Transformaties van wortelvormen	15
5. Exponentiële functies	16
- Exponentiële groei	17
6. Gebroken rationale functies	19
7. Asymptoten	19
8. Logaritmische functies	22
a. Logaritme van een getal	22
b. Eigenschappen van logaritmen	23
c. Inverse functies	23
9. Goniometrische functies	25
a. Definities in de eenheidscirkel	25
b. De eenheid radiaal	26
c. Herleidingformules	26
- sinus en cosinus van som en verschil	27
- verdubbeling- en halveringsformules	28
- formules van Simpson	28
d. Exacte waarden cirkel van de standaardhoeken	29
e. Sinus- en cosinusregel	29
- sinusregel	29
- cosinusregel ('Uitgebreide stelling van Pythagoras')	29
10. Periodieke functies	33
a. Sinusfunctie	33
b. Cosinusfunctie	34
c. Tangensfunctie	35
d. Sinusoïden	37
11. Limieten en continuïteit van functies	39
a. Continuïteit van een functie	39
b. Perforaties van functies	40

## IV

c. Rekenregels voor limieten	41
d. Rechter- en linkerlimieten	41
e. Existentie van limieten	41
II. OPLOSSEN VAN VERGELIJKINGEN EN ONGELIJKHEDEN	45- 63
1. Gelijkheden en ongelijkheden	46
2. Oplossen van vergelijkingen	48
a. Lineaire stelsels	48
b. Tweedegraads vergelijkingen	50
- ontbinden in factoren	50
- kwadraatafsplitsing	51
- de $abc$ -formule	51
c. Hogeregraads vergelijkingen	52
- de vergelijking $x^3 = 1$	52
- de vergelijking $x^3 = -1$	53
d. Exponentiële vergelijkingen	53
e. Logaritmische vergelijkingen	55
f. Logaritmische ongelijkheden	56
g. Goniometrische vergelijkingen	58
- $\sin A = p, \cos A = p$	58
- $\sin A = \sin B, \cos A = \cos B$	59,60
- $\sin A = \cos B$ of $\cos A = \sin B$	60
h. Parametervoorstellingen en bewegingsvergelijkingen	61
III. DIFFERENTIËREN EN AFGELEIDE FUNCTIES	64-78
1. Groeisnelheid	64
2. Differentiaalquotiënt en afgeleide functie	65
3. Differentieerbaarheid en continuïteit	66
4. Kenmerken van functies via hun afgeleiden	67
a. Stijgende en dalende functies	68
b. Convexe en concave kromming	68
c. Extreme waarden	68
- voorwaarden voor een lokaal extreem	69
d. Buigpunten	69
5. Regels bij het differentiëren	71
a. Factorregel	71
b. Somregel	71
c. Productregel	72
d. Quotiëntregel	72
6. Afgeleiden van elementaire functies	73
a. Afgeleide van een machtsfunctie	73
b. Afgeleiden van goniometrische functies	74
- afgeleide van sinus $x$ , cosinus $x$ en tangens $x$	75

c. Afgeleiden van $e$ -machten	76
d. De kettingregel	76
e. Afgeleiden van exponentiële- en logaritmische functies	77
- exponentiële functies	77
- logaritmische functies	78
f. Afgeleiden van samengestelde functies	79
7. Praktische toepassingen van differentiëren	80
IV. INTEGREREN EN PRIMITIEVE FUNCTIES	82- 98
1. Oppervlakte en integraal	82
2. Integreren en stamprimitieven	84
a. Integreren	84
b. Stamprimitieven	85
c. Rekenregels bij het integreren	86
d. Bepaalde- en onbepaalde integralen	88
3. Substitutiemethode en partieel integreren	90
a. Substitutiemethode	88
b.. Partiële integratie	89
4. Toepassingen in de meetkunde	90
a. Lengte van een kromme	91
b. Oppervlakte tussen twee krommen	91
c. Inhoud van een omwentelingslichaam	92
- inhoud van een cilinder	92
- inhoud van een kegel	92
- inhoud van een bol	93
- inhoud van een omwentelingsellipsoïde	93
d. Oppervlakte van een omwentelingslichaam	96
- oppervlakte van een bol	97
-	
V. COMBINATORIEK EN KANSREKENING	99- 116
1. Driehoek van Pascal	99
- Binomium van Newton	101
- Routes in een rooster	102
2. Kansexperimenten	103
a. Somregel	103
b. Productregel	103
c. Complementregel	104
3. Permutaties, variaties en combinaties	105
a. Permutaties	105
b. Variaties	105
c. Combinaties	106

## VI

4. Onderscheid bij kansproblemen	107
a. Trekkingen zonder terugleggen	107
b. Trekkingen met terugleggen	108
c. Binomiale kansverdelingen	109
5. Verwachtingswaarden	112
VI. STATISTIEK EN KANSREKENING	117- 140
1. Centrummaten	117
a. Gemiddelde	117
b. Modus	117
c. Mediaan	117
d. Kwartielsafstand, spreidingsbreedte en boxplot	118
2. Klassenindelingen	118
a. Klassenmidden	118
b. Modale klasse en klassenmediaan	119
3. Frequentiepolygonen	119
a. Cumulatieve frequenties	119
b. Relatieve cumulatieve frequenties	120
4. Beelddiagrammen	121
- geclusterd staafdiagram	121
- histogram	123
- reepdiagram	123
- gecombineerd beelddiagram	124
5. Spreidingsmaten	125
a. Standaardafwijking	126
- berekening van de standaardafwijking	126
- betekenis van de standaardafwijking	126
- standaardafwijking van een frequentieverdeling	127
b. Spreidingsmaten van binomiale kansverdelingen	129
- verwachtingswaarde	129
- variantie	130
- standaardafwijking	130
- de wortel- $n$ wet	130
6. Normale verdelingen	134
Eigenschappen van de normaalkromme	135
a. Berekening van standaardscores	136
b. Standaardiseren	137
VII . PLANIMETRIE	141- 172
1. Driehoeken	141
a. Stelling van Pythagoras	142
b. Goniometrische verhoudingen	142

## VII

- Bijzondere lijnstukken in een driehoek	143
1. Zwaartelijnen	143
2. Bissectrices	143
3. Hoogtelijnen	145
4. Middelloodlijnen	145
5. Rechte van Euler	145
2. Vierhoeken	146
- koordenvierhoek	147
3. Regelmatige veelhoeken	147
a. De ‘Guldensnede’ en het getal phi	148
b. Regelmatige tienhoek	149
c. Verdubbelingsformule	150
d. Rij van Fibonacci	151
4. De cirkel	151
a. Hoeken in een cirkel	152
- middelpuntshoek	152
- omtrekshoek	152
- binnenhoek van een cirkel	153
- buitenhoek van een cirkel	153
- hoek tussen een koorde en een raaklijn	154
b. Cirkels om, in, en aan een driehoek	154
- omgeschreven cirkel	154
- ingeschreven cirkel	155
c. Omtrek van een cirkel	155
- Getal van Archimedes en pi	156
d. Oppervlakte van een cirkel	157
e. Meetkundige vraagstukken	158
5. Kegelsneden	161
a. De cirkel	162
b. De ellips	162
c. De parabool	163
d. De hyperbool	165
6. Transformaties	166
a. Assentransformaties	167
- transformatie door assentranslatie	167
- transformatie door assenrotatie	167
b. Transformaties door vermenigvuldiging	168
- vermenigvuldiging ten opzichte van een punt	168
- vermenigvuldiging ten opzichte van een lijn	169
- oppervlakte van een ellips	170
c. Poolcoördinaten	171
- Spiraal van Archimedes	171
- De Cardioïde	172

## VIII

VIII. STEREOMETRIE	173- 188
1. Meetkundige lichamen	173
a. Het prisma	173
b. De piramide	173
c. De cilinder	174
d. De kegel	174
e. De bol	174
2. Oppervlakte en inhoud van lichamen	174
a. Oppervlakte van prisma en piramide	174
b. Inhoud van een prisma	174
c. Inhoud en oppervlakte van een cilinder	175
d. Inhoud van een piramide	176
e. Inhoud en oppervlakte van een kegel	176
- oppervlakte van een afgeknotte kegel	177
f. Inhoud van een bol naar Archimedes	178
3. Oppervlakte en inhoud van boldelen	179
a. Bolsegment	179
- Inhoud en oppervlakte van een bolsegment	179
4. Regelmatige en halfregelmatige vlakvullingen en	181
a. Regelmatige patronen	181
b. Halfregelmatige patronen	182
5. Veelvlakken	182
a. Platonische veelvlakken	183
- dualiteit van veelvlakken	184
- dualiteit van kubus en octaëder	185
b. Archimedische veelvlakken	185
- mogelijke configuraties	185
- knooppunten van de derde orde	186
- knooppunten van de vierde orde	187
- knooppunten van de vijfde orde	187
IX. VECTORALGEBRA	189 - 214
1. Het begrip vector	189
2. Basisbewerkingen van vectoren	190
a. Meetkundige som en verschil van twee vectoren	190
b. Meetkundig scalair product	190
3. Vectorcoördinaten en kentallen	191
a. Plaatsvectoren in het platte vlak	191
b. Vectoren in de driedimensionale ruimte	192
4. Algebraïsche bewerkingen van vectoren	192
a. De lengte van een vector	193
b. Algebraïsche som van twee vectoren	193
c. Algebraïsch scalair product	194



## IX

5. Inwendig product van twee vectoren	192
6. Meetkunde met vectoren	197
7. Vectorvoorstellingen en vectorvergelijkingen	199
a. Vectorvoorstelling van een punt	199
b. Vectorvergelijking van een lijn	199
c. Normaalvergelijking van een lijn	200
d. Vectorvergelijking van een vlak	201
e. Normaalvergelijking van een vlak	201
8. Hoeken en afstanden	203
a. Vectorrotaties over $90^\circ$	203
b. Hoek tussen twee lijnen	203
c. Afstanden van punten en lijnen	204
9. Vectorproducten en determinanten	204
a. Uitwendig product en blokproduct	204
- eigenschappen van het uitproduct	205
- kentallen van het uitproduct	206
b. Determinanten	209
- Regel van Sarrus	209
- rekenregels voor vierkante determinanten	210
c. Uitproduct en blokproduct als determinanten	213
- het uitproduct	213
- het blokproduct	213
<b>X. ANALYTISCHE MEETKUNDE MET VECTOREN</b>	<b>215-224</b>
1. Afstanden in vectorruimten	215
a. Afstand van een punt tot een lijn	215
b. Afstand tussen twee evenwijdige lijnen	216
c. Afstand tussen twee elkaar kruisende lijnen	216
d. Afstand van een punt tot een vlak	217
2. Hoeken tussen lijnen en vlakken	218
a. Hoek tussen twee lijnen	218
b. Hoek tussen een lijn en een vlak	219
c. Hoek tussen twee elkaar snijdende vlakken	219
- snijlijn van twee vlakken	221
<b>XI. GRAFEN EN MATRICES</b>	<b>225- 248</b>
1. Werken met grafen en matrices	225
a. Voorstellingen van een graaf	225
b. Gelijkwaardige grafen	225
c. Tekenpuzzels	226
d. Gebouw(d) voor Gerard	227

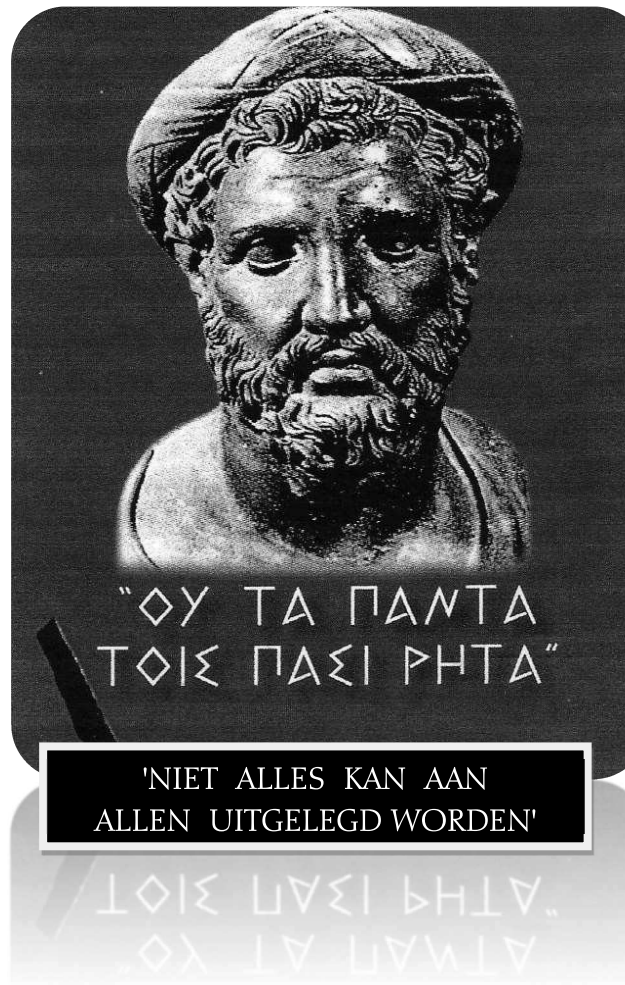
- Graaf en matrix	228
- Het 'Handelsreizigersprobleem'	229
2. Maximale en minimale verbondenheid van een graaf	230
3. Bewerkingen met matrices	231
a. Som en verschil van twee matrices	231
b. Scalair product van een matrix en een reëel getal	232
c. Product van twee matrices	232
4. Overgangsmatrices	236
a. Toepassingen op diverse deelgebieden	236
b. Groei van populaties	238
c. Markowketens	239
d. Stabilisatie	240
5. Populatievoorspellingen volgens Leslie	242
a. Voorbeelden van een Leslie-graaf	242
- leeftijdsopbouw en totale populatie	243
b. Exponentiële groei	244
c. Bijzondere populatiegroei	244
d. Bevolkingsgroei in China	245
e. Natuurbeheer	248
XII. RIJEN EN REEKSEN	249- 274
1. Getallenrijen	249
2. Speciale rijen	250
a. Rekenkundige rij	250
b. Meetkundige rij	251
c. Rij van Fibonacci	253
3. Convergentie en divergentie van rijen	254
4. Reeksen	255
- Convergentie en divergentie van reeksen	255
- Quotiëntencriterium van d' Alembert	256
- Regel van Leibniz	257
5. Convergentie van standaardreeksen	258
a. Rekenkundige reeks	258
b. Meetkundige reeks	258
c. Harmonische reeks	259
d. Alternerende harmonische reeks	260
6. Machtreeksen	260
a. Eigenschappen van machtreeksen	261
b. Convergentie van machtreeksen	262
- meetkundige reeks	263
- alternerende machtreeks	263

7. Machtreeksontwikkelingen volgens Taylor en MacLaurin	264
a. de functie $f(x) = e^x$	266
b. $f(x) = \sin(x)$	266
c. $f(x) = \cos(x)$	267
d. $f(x) = \tan^{-1}(x)$	267
e. $f(x) = \ln(x)$	268
8. Resttermen	270
- Resttermformule van Taylor	271
- Formule van Lagrange	271
9. Het Getal van Euler en het getal pi	271
a. Het Getal $e$ van Euler	271
- definitieformule van $e$	272
b. Het getal pi	273
XIII. DYNAMISCHE MODELLEN EN DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN	275-286
1. Differentiaalvergelijkingen	275
a. Voorbeelden	275
b. Lijnelementenvelden	276
c. Methode van Euler	279
d. Voorbeelden van continu dynamische modellen	281
XIV SPECIFIEKE ONDERWERPEN NAAR NIVEAU EN PROFIEL	287- 357
A. Perspectief	287
1. Beelden via een glasplaat	287
2. Perspectiefbeelden van objecten	288
a. Perspectiefbeeld van een lijn	288
b. Beeld van evenwijdige lijnen in het grondvlak	289
c. Beeld van lijnen evenwijdig met het tafereel	290
d. Beeld van een punt in het grondvlak	290
e. Beeld van een tegelpatroon	291
3. Ware gedaante van het perspectiefbeeld	291
- ware perspectiefbeeld van tegelvloeren	293
4. Eenpuntperspectief	293
a. Kubus en vierkante balk	294
b. Tegelpaden van vierkante tegels	298
5. Tweepuntperspectief	299
- 'La Grande Arche'	303
B. Exacte logica	305
1. Conjunctie, disjunctie, implicatie	305
2. Waarheidstabellen	306
a. Waarheidstabellen van $p \Rightarrow q$ , $p \wedge q$ en $p \vee q$	306
b. De ontkenning niet $A$ ( $\neg A$ )	307

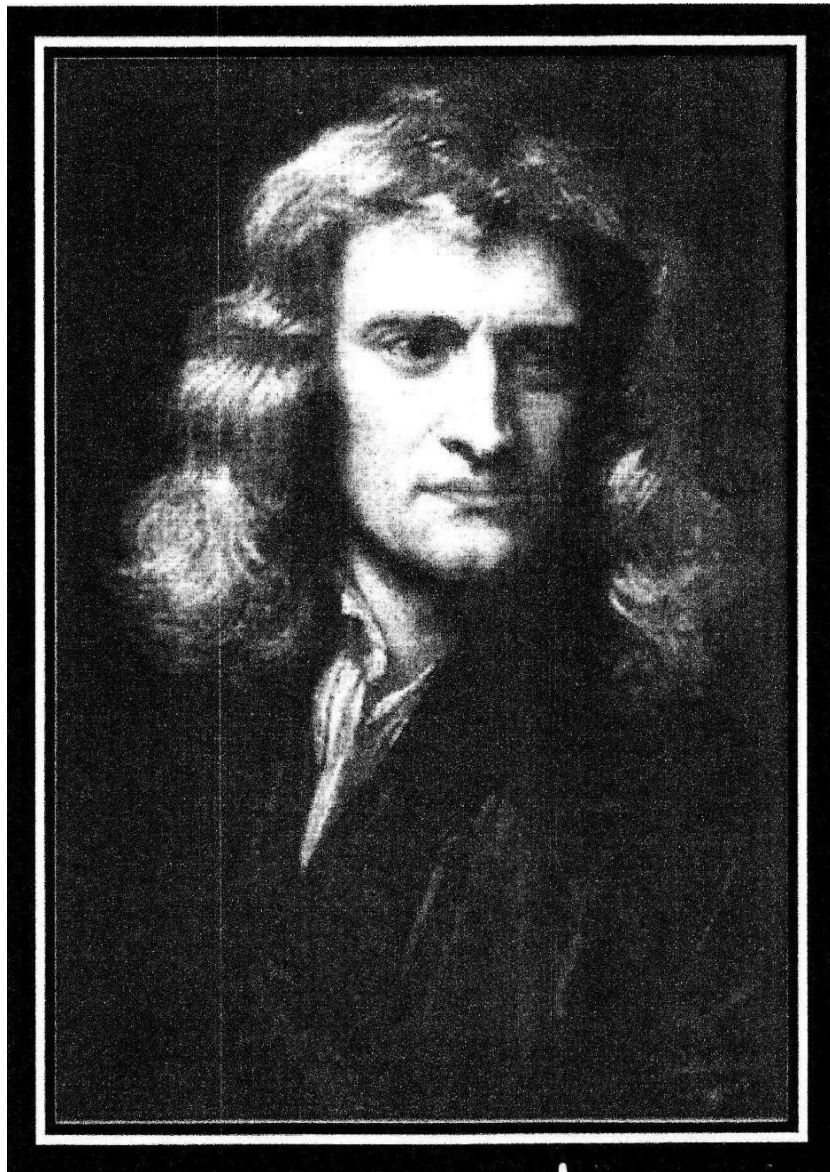
## XII

c. Equivalenties	308
- De Prinses en de tijger	310
3. Bijzondere proposities	312
a. Bewerkingsvolgorden	312
b. Modus ponens, modus tollens, 'modus nonsens'	312
4.. Logische puzzels	314
a. De vier tegels	314
b. Het inslikken van olifanten	315
c. De vijf slavinnen van de kalief	316
d. De zeven bordjes	317
5. Algebra van Boole	318
a. Eigenschappen van de logische operatoren	318
- distributieve eigenschap	318
b. Speciale eigenschappen	319
C. Projectieve meetkunde	320
Kegelsneden in projectie	320
a. De ellips	321
- ware gedaante van de doorsnede	322
b. De parabool	323
- ware gedaante van de doorsnede	324
c. De hyperbool	324
- gelijkzijdige hyperbool	324
- ongelijkzijdige hyperbool	325
D. De Lorentzfactor	326
E. Beslissingen na steekproeven	328
a. Normale toetsen	328
- onderzoek naar de werking van een vulmachine	328
- toetsing van beweringen	332
b. Binomiale toetsen	333
c. Tekentoetsen	335
F. Poisson-verdeling	337
G. Complexe getallen	342
a. Rekenen met complexe getallen	342
- Som, product en quotiënt	342
- Het complexe vlak	343
- Absolute waarde van een complex getal	343
- Complexe getallen en poolcoördinaten	343
- Complexe getallen als vectoren	344
b. Meetkunde in de complexe vectorruimte	344
- De cirkel	344
- De eenheidscirkel met sinus $z$ en cosinus $z$	346
- Product van twee getallen op de eenheidscirkel	346
- Formules van Euler	346
- De polaire of $(r,\varphi)$ - notatie	347

c. De complexe functie $e^z$	351
- de complexe functies cosinus $z$ en sinus $z$	352
d. Wortels en polynomen	352
- $n^{\text{de}}$ machtswortels en $n^{\text{de}}$ graadspolynomen	353
Hoofdstelling van de Algebra	354
f. Reële polynomen	356
Gebruikte symbolen en uitdrukkingen	358,359
Trefwoordenregister	360-363



*Pythagoras, geboren op Samos (eiland in de Egeïsche Zee) circa 572 jaar v. Chr. Richtte omstreeks 530 jr. v. Chr. in Croton de school van de Pythagoreeërs op. Zij bewezen de beroemdste stelling uit de klassieke wiskunde: In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de schuine zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de twee rechthoekszijden. De Babyloniërs kenden de eigenschap al ca. 1000 jr. v. Chr. De Egyptische 'harpedonaptaï' (touwspanners) pasten de stelling ca. 3000 jr. v. Chr. toe om rechte hoeken uit te zetten via knopentouwen (knopen op afstanden 3-4-5; 5-12-13; 8-15-17,.. (de later zogenoemde 'Pythagoras-triples').*



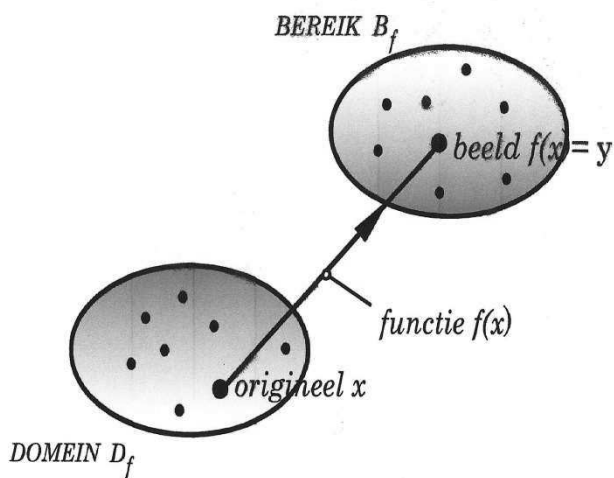
*Sir Isaac Newton, geboren in 1642 te Woolsthorp, overleden in 1727 te Kensington. Engels wis- en natuurkundige, astronoom, natuurfilosoof, alchemist, officieel muntmeester en theoloog. Publiceerde de differentiaal- en integraalrekening in zijn meesterwerk 'Principia' in 1687 betreffende zwaartekracht, banen van hemellichamen, grondwetten van de dynamica, .. De Britse 'Royal Society' beschouwde Newton in 2005 als de grootste geleerde uit de wetenschap ooit.*

## I. FUNCTIES, GRAFIEKEN EN FUNCTIEVERGELIJKINGEN

Als je rustig wandelend per uur 4 km aflegt dan is de afgelegde afstand in  $2\frac{1}{2}$  uur dus 10 km. De lengte van de **afgelegde weg bij die snelheid** is afhankelijk van de **tijd** ofwel: de afstand is een **functie** van de tijd. Zo bestaan er talrijke grootheden die afhankelijk zijn van *één of meer* andere grootheden waarbij het verband tussen die grootheden in een functie is vastgelegd via een zeker **functievoorschrift**.

Als je in bovenstaand geval ook rekening wilt houden met een *wisselende snelheid*, dan is de lengte van de afgelegde weg een functie van *de tijd en de gemiddelde snelheid*.

### 1. Het begrip functie



Is bijvoorbeeld een functie  $f$  gegeven door het functievoorschrift:

‘vermenigvuldig met drie’ dan is  $f(3) = 9$ ,  $f(-7) = -21$  en  $f(a) = 3a$ .

De functie wordt dan geschreven als:

$$f(x) = 3 \cdot x \text{ of korter } y = 3x$$

De getallen 3, -7 en  $a$  heten de **originelen** van de functie  $f(x) = 3x$ , de getallen 9, -21 en  $3a$  zijn de bijbehorende **beelden** ofwel **functiewaarden van  $f$** .

De verzameling *originelen* van  $f$  heet het **domein  $D_f$** , de verzameling *beelden* heet het **bereik  $B_f$** .

In het plaatje hiernaast zijn de originelen in het domein en de beelden in het bereik met zwarte stippen aangegeven.

Als *geen speciaal domein of bereik is aangegeven*, wordt ervan uitgegaan dat *alle originelen en hun beelden* elementen zijn van de **verzameling reële getallen  $\mathbb{R}$** .

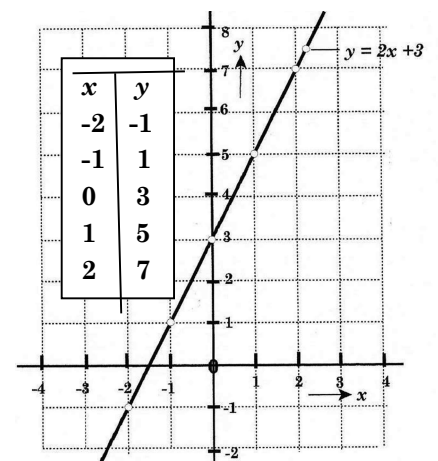
### ONTHOUD:

Een functie van  $x$  is een zeker voorschrift  $f$ , ( $g$ ,  $h$ ,  $i$ , ...) dat bij elk origineel  $x$  uit het domein  $D_f$ , precies één beeldt  $f(x) = y$  uit het bereik  $B_f$  bepaalt

Vaak worden origineel  $x$  en beeld  $y$  van een functie getekend als punten  $P(x, y)$  van een grafiek in een rechthoekig coördinatenstelsel: het *origineel  $x$*  op een horizontale  $x$ -as, het beeld  $y = f(x)$  op de verticale  $y$ -as. Het snijpunt van de assen is de **oorsprong  $O$** .

In bijgaande figuur is vanuit de  $x$ - $y$ -tabel de **grafiek** getekend van de functie:  $f(x) = y = 2x + 3$ .

Maak in opgaven steeds goed onderscheid tussen een **functie  $f(x)$**  en de **grafiek van die functie  $f(x)$** .



## 2. Lineaire functies

Voor elk tweetal punten  $P$  en  $Q$  van een *lineaire functie* geldt dat de **verhouding** tussen een zekere toename  $\Delta x = x_Q - x_P$  van  $x$  en de *bijbehorende* toename  $\Delta y = y_Q - y_P$  van  $y$  steeds een **vaste waarde** heeft.

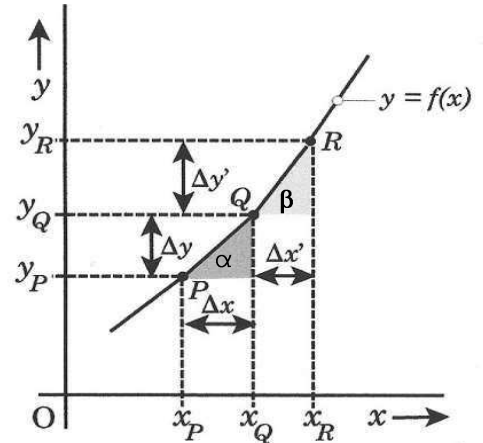
De betekenis hiervan is als volgt:

Stel  $P$  en  $Q$  zijn twee zeer naburige punten op de grafiek van een lineaire functie  $y = f(x)$  waarbij  $P = (x_P, y_P)$  en  $Q = (x_Q, y_Q)$ .

De *verhouding*  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  bepaalt de grootte van de **hoek**  $\alpha$  die het *lijnstukje*  $PQ$  maakt met de horizontale lijn door  $P$  dus **bepaalt**  $\alpha$  **de richting van  $PQ$** . ... (1)

Stel verder dat  $R(x_R, y_R)$  een *volgend zeer naburig punt* van  $Q$  is op de grafiek van  $y = f(x)$ .

De *verhouding*  $\frac{\Delta y'}{\Delta x'}$  bepaalt de grootte van de **hoek**  $\beta$  die nu het *lijnstukje*  $QR$  maakt met de horizontale lijn door  $Q$  dus **bepaalt**  $\alpha$  **de richting van  $QR$** . ... (2)



**Volgens de definitie** heeft de verhouding  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  bij een lineaire functie een vaste waarde zodat

er geldt:  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$  dus is volgens (1) en (2) de *richting*  $\alpha$  van lijnstukje  $PQ$  gelijk aan de richting  $\beta$  van lijnstukje  $QR$ , ofwel:

$PQ$  en  $QR$  liggen in elkaars verlengde dus  **$P, Q$  en  $R$  liggen op een rechte lijn.**

(Dit verklaart de naam **lineaire functie**).

Voor de lijn  $l$  tussen twee willekeurige punten  $P = (x_P, y_P)$  en  $Q = (x_Q, y_Q)$  geldt nu dat

de factor  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$  ( $x_Q \neq x_P$ ) de **richting bepaalt** van lijn  $l$ . \*)

De waarde  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$  heet daarom de **richtingscoëfficiënt**  $a$  van  $l$ . ... (3)

We bepalen nu een *vergelijking* van lijn  $l$ , dus een betrekking tussen de waarden  $x$  en  $y$  waaraan alle punten  $P(x, y)$  van lijn  $l$  ( $l$  niet evenwijdig met de  $y$ -as) voldoen:

Kies het punt  $P = (x_P, y_P) = (0, b)$  van  $l$  op de  $y$ -as en een punt  $Q = (x_Q, y_Q) = (x, y)$  op  $l$

Uit  $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$  ( $\frac{\Delta y}{\Delta x} \neq 0$ ) ... (1) volgt  $a = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{y - b}{x - 0} = \frac{y - b}{x} \Rightarrow ax = y - b \Rightarrow y = ax + b$ .

Omdat een *lineaire functie* dus voldoet aan de vergelijking  $f(x) = y = ax + b$  noemt men deze meestal een **eerstegraads functie** (want  $x$  komt hoogstens tot de eerste macht voor).

ONTHOUD:

De grafiek van een lineaire functie is een (rechte) lijn  $l$  met vergelijking  $y = ax + b$  waarin  $a$  de richtingscoëfficiënt is van  $l$  en  $b$  de  $y$ -coördinaat van het snijpunt van  $l$  met de  $y$ -as.

\*) Als  $l \parallel y$ -as dan is bij elke  $y : x_P = x_Q$  dus  $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$  bestaat dan niet omdat

$x_Q - x_P = 0$ . Bij elke  $y$  is dan  $x = x_P = x_Q$  dus is  $x = x_P (= x_Q)$  de vergelijking van  $l$  ( $l \parallel y$ -as).



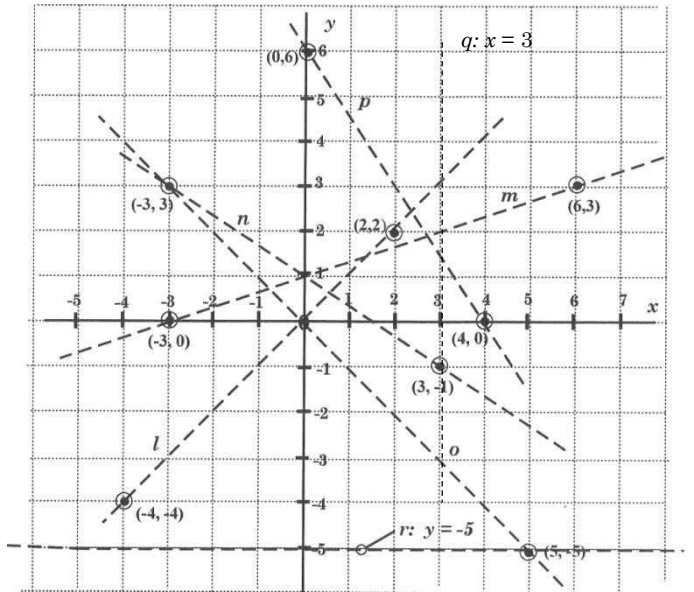
**Voorbeelden**

1. In deze figuur zijn de lijnen  $l, m, n, o$  en  $p$  getekend door twee gegeven, omcirkelde punten in een **orthonormaal coördinatenstelsel**  $XOY$ .

Een orthonormaal stelsel bestaat uit twee onderling loodrechte coördinaatassen.

De eenheden op de assen hebben daarbij de standaardlengte 1.

- Bepaal van elke lijn de vergelijking
- Bepaal de vergelijking van de X-as en de Y-as.
- Hoe lopen de lijnen  $q$  en  $r$  als:  
 $q: x = 3$  en  $r: y = -5$ ?



De grafiek van een eerstegraads functie  $y = f(x) = ax + b$ , is een rechte lijn  $l$  waarin  $a$  de richtingscoëfficiënt is van  $l$ , en  $b$  de  $y$ -coördinaat van het snijpunt van  $l$  met de  $y$ -as.

Ga bij elke lijn uit van de twee omcirkelde punten op die lijn.

Noem het hoogste punt van een lijn steeds  $P(x_p, y_p)$  en het laagste punt  $Q(x_q, y_q)$

a: 1. Van lijn  $l$ :  $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{2 - (-4)}{2 - (-4)} = 1$  en  $b = 0$  want ook  $O(0, 0)$  ligt op lijnstuk

$(-4, 4) \cdot (2, 2)$ . dus de vergelijking is  $l: y = 1 \cdot x + 0 \Rightarrow l: y = x$ .

2. Voor  $m$  geldt  $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{3 - 0}{6 - (-3)} = \frac{1}{3}$  en  $b = 1$

dus wordt de vergelijking:  $m: y = \frac{1}{3}x + 1$

3. Voor  $n$  geldt  $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{-1 - 3}{3 - (-3)} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$  en  $b = 1$

dus is de vergelijking is  $n: y = \frac{-2}{3}x + 1$

4. Voor  $o$  geldt  $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{-5 - 3}{5 - (-3)} = \frac{-8}{8} = -1$  en  $b = 0$

dus de vergelijking is:  $o: y = -x$

5. Voor  $p$  geldt  $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{0 - 6}{4 - 0} = -\frac{3}{2}$  en  $b = 6$

dus de vergelijking is:  $p: y = -\frac{3}{2}x + 6$

- b- Voor alle punten op de  $x$ -as geldt:  $y = 0$ .

De vergelijking van de  $x$ -as is dan:  $y = 0$ .

Zo geldt voor alle punten van de  $y$ -as:  $x = 0$  dus is de vergelijking van de  $y$ -as  $x = 0$

- c - Alle punten  $(x, y)$  van de lijn  $q$  met vergelijking  $x = 3$ , zijn hebben als coördinaten  $\{3, y\}$  de vorm  $(3, y)$ , waarin  $y$  elk reëel getal kan zijn.

Het is dan de **lijn, evenwijdig met de  $y$ -as door het punt  $(3, 0)$** .

Zo is de lijn  $r: y = -5$  de **lijn evenwijdig met de  $x$ -as door het punt  $(0, -5)$** .

Nog even populair samengevat: *Elke lineaire (eerstegraads) functie  $y = f(x)$  heeft als vergelijking  $y = ax + b$  waarin  $a$  ( $\neq 0$ ) en  $b$  steeds reële getallen zijn.*

*De grafiek van  $y = ax + b$  is een rechte lijn  $l$ . Hierin is  $a$  de richtingscoëfficiënt van lijn  $l$ , en  $b$  is het stuk (positief of negatief) dat de  $y$ -as van lijn  $l$  afsnijdt.*

2. - a. Bepaal de vergelijking van de lijn  $l$  door de punten  $A = (3, 4)$  en  $B = (-4, -2)$   
 - b. Bepaal het snijpunt van de lijn  $l$  met de lijn  $m: y = 2x - 3$

a. In  $l: y = ax + b$  volgt de richtingscoëfficiënt

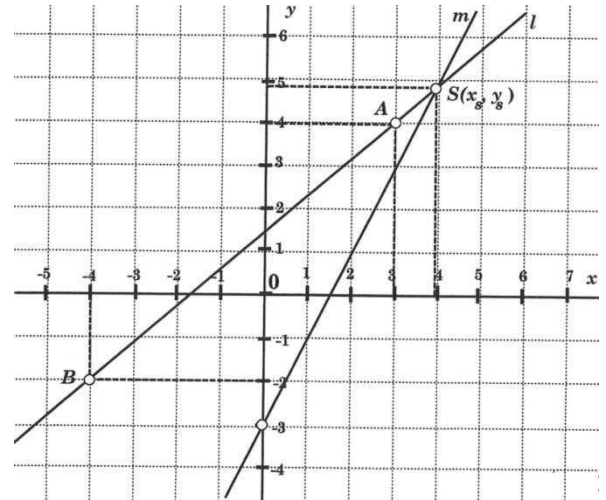
$$\text{van } l \text{ uit: } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 4}{-4 - 3} = \frac{-6}{-7} = \frac{6}{7}$$

Lijn  $l$  heeft dan als vergelijking:  $l: y = \frac{6}{7}x + b$ .

Hierin de coördinaten van  $A = (3, 4)$  (of  $B = (-4, -2)$ )

ingevuld geeft  $4 = \frac{6}{7} \cdot 3 + b \Rightarrow b = \frac{10}{7}$  zodat de

vergelijking is  $l: y = \frac{6}{7}x + \frac{10}{7}$  \*)



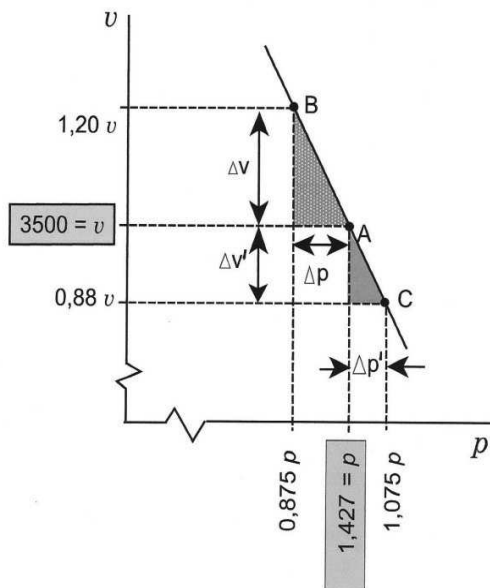
b. Het snijpunt  $S(x_s, y_s)$  van de lijnen  $l$  en  $m$  ligt zowel op  $l$  als op  $m$ , dus voldoen de coördinaten  $x_s$  en  $y_s$  aan de vergelijking:

$$l: y = \frac{6}{7}x + \frac{10}{7} \text{ en aan } m: y = 2x - 3, \text{ zodat dan } \frac{6}{7}x_s + \frac{10}{7} = 2x_s - 3 \Rightarrow \frac{8}{7}x_s = \frac{31}{7} \Rightarrow x_s = \frac{31}{8}$$

$$\text{Uit } y_s = 2x_s - 3 = -\frac{1}{2}x_s + \frac{9}{2} \text{ volgt dan } y_s = 2 \cdot \frac{31}{8} - \frac{24}{8} = \frac{38}{8} = \frac{19}{4}$$

Het snijpunt van  $l$  en  $m$  is dus het punt  $S\left(\frac{31}{8}, \frac{19}{4}\right)$ .

3. Bij een 'witte pomp' in Vreemdeuiden verkoopt men gemiddeld per dag 3500 liter 'Euro-95' benzine als de literprijs € 1,427 bedraagt. (punt A in de grafiek).  
 Verlaagt men de prijs met 12,5 % dan stijgt de verkoop met 20% (punt B).  
 Verhoogt men de prijs met 7,5% dan daalt de verkoop met 12%.(punt C).



- a. Bewijs dat de punten  $A, B$  en  $C$  op een rechte lijn liggen.  
 b. Toon aan dat op het traject  $BC$  de toename van de verkoop bij prijsdaling evenredig is met de afname van de verkoop bij prijsstijging.

a. De richtingscoëfficiënt van  $AB$  is:

$$\frac{\Delta v}{\Delta p} = \frac{v - 1,20v}{p - 0,875p} = \frac{-0,20v}{0,125p} = -1,6 \cdot \frac{v}{p}$$

De richtingscoëfficiënt van  $CA$  is

$$\frac{\Delta v'}{\Delta p'} = \frac{0,88v - v}{1,075p - p} = \frac{-0,12v}{0,075p} = -1,6 \cdot \frac{v}{p}$$

De richtingen van  $AB$  en  $CA$  zijn dus gelijk  $\Rightarrow$   
 **$A, B$  en  $C$  liggen op een rechte lijn.**

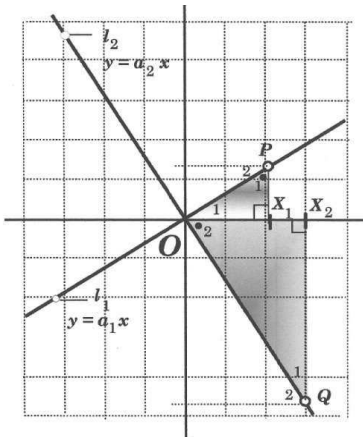
\*) Met de grafische rekenmachine TI-83 gaat dit als volgt: Voer de lijsten in {3, -4} [STO] L1 en {4, -2} [STO] L2. Druk op [STAT] [CALC] en kies optie 4 [ENTER]: LinReg ( $ax + b$ ) [ENTER] De waarden van  $a$  en  $b$  worden direct getoond: LinReg  $y = ax + b: a \approx .85714... = \frac{6}{7}; b \approx 1.42857... = \frac{10}{7}$

b. De uitkomst van a. betekent dat op het traject  $BC$  de *verhouding* :  
*prijsstijging* : *verkoopdaling*  $(-1,6)$  gelijk is aan de verhouding  
*prijzdaling* : *verkoopstijging*  $(-1,6)$ .

De *verkoopdaling* bij toenemende prijs is dan *evenredig* met de *verkoopstijging*  
 bij dalende prijs, want een *evenredigheid* is een *gelijkheid van twee verhoudingen*.

**Eigenschap:**

Als twee lijnen  $l_1$  en  $l_2$  loodrecht op elkaar staan dan is het product van hun richtingscoëfficiënten  $a_1$  en  $a_2$  gelijk aan  $-1$ , dus  $a_1 \cdot a_2 = -1$  en ook omgekeerd.



**Bewijs:** In de figuur is vanuit een punt  $P$  op  $l_1$  een loodlijn  $PX_1$  op de  $x$ -as neergelaten en ook een loodlijn  $QX_2$  vanuit een punt  $Q$  van  $l_2$  op de  $x$ -as.

De richtingscoëfficiënten van  $l_1$  en  $l_2$  zijn respectievelijk:

$$a_1 = \frac{PX_1}{OX_1}; a_2 = \frac{-QX_2}{OX_2}, \text{ dus } a_1 \cdot a_2 = - \frac{PX_1}{OX_1} \cdot \frac{QX_2}{OX_2} \quad \dots(1)$$

Van de  $\Delta \Delta OPX_1$  en  $OQX_2$  is  $\angle O_2 + \angle O_1 = 90^\circ$  (gegeven).

Ook is in  $\Delta OPX_1$ :  $\angle P_1 + \angle O_1 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

dus is  $\angle P_1 = \angle O_2$ . (met zwarte stip).

De  $\Delta \Delta OPX_1$  en  $OQX_2$  zijn gelijkvormig omdat ze rechthoekig zijn en

$\angle P_1 = \angle O_2 \Rightarrow PX_1 : OX_1 = OX_2 : QX_2$  dus ook:

$$-PX_1 : OX_1 = -OX_2 : QX_2 \quad (2)$$

(2) in (1) gesubstitueerd geeft dan  $a_1 \cdot a_2 = - \frac{OX_2}{QX_2} \cdot \frac{QX_2}{OX_1} = -1$  zoals was te bewijzen.

De stelling geldt ook omgekeerd: Als  $a_1 \cdot a_2 = -1$  dan staan  $l_1$  en  $l_2$  loodrecht op elkaar. Om dit te bewijzen lees je bovenstaand bewijs van achteren naar voren.

**3. Kwadratische functies**

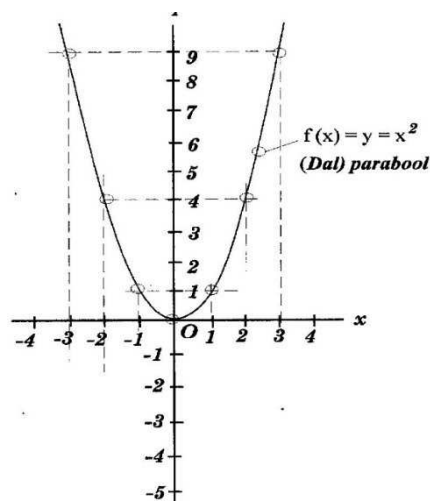
Een kwadratische- ofwel tweedegraadsfunctie, is een functie  $f(x)$  van de vorm  $f(x) = ax^2 + bx + c$  waarin  $a, b$  en  $c$  reële getallen zijn en  $a \neq 0$

Hieronder zie je de grafiek van de standaard kwadratische functies  $y = x^2$  dus met  $a = 1, b = c = 0$ .

Kijk nu naar de

$y = x^2$	
x	y
0	0
-1	1
-2	4
-3	9
1	1
2	4
3	9

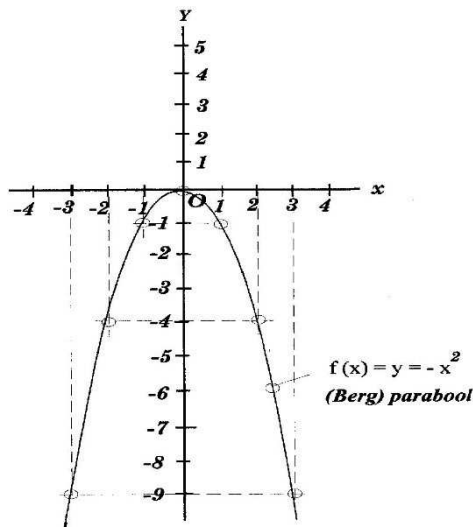
dus



Voor de  $x$ -waarden  $x = 0, -1, -2, -3,$   
 $g: 0, 1, 2, 3$  vind je de  $y$ -waarden in  
 k de tabel. Omdat  $x^2 = -x^2$  zijn de  $y$ -  
 n waarden bij  $1, 2, 3$  gelijk aan die van  $-1, -2, -3$ . Hierdoor is de ontstane kromme symmetrisch in de  $y$ -as. Het laagste punt van de kromme heet **de top**, de kromme zelf heet **parabool**, de  $y$ -as heet **de as** van de parabool. Hoe groter de absolute waarden op de  $x$ -as, hoe groter natuurlijk de  $y$ -waarden. De populaire naam: **Dalparabool** is daarom duidelijk

Kijk nu naar de grafiek van de standaard kwadratische functie  $y = -x^2$ , dus met  $a = -1$ ,  $b = c = 0$

$y = -x^2$	
x	y
-1	-1
-2	-4
-3	-9
1	-1
2	-4
3	-9



Van de x-waarden  $x = 0, -1, -2, -3, 0, 1, 2, 3$  vind je de y-waarden in de tabel. Omdat  $x^2 = -x^2$  zijn de y-waarden bij 1, 2, 3 gelijk aan die van  $-1, -2, -3$ . Hierdoor is ook hier de ontstane kromme symmetrisch in de y-as. Het hoogste punt van de kromme heet **de top**, de kromme zelf is weer de parabool. De y-as heet **de as** van de parabool. Hoe groter de absolute waarden op de x-as, hoe kleiner de y-waarden. De naam: '**bergparabool**' ligt dan ook hier voor de hand.

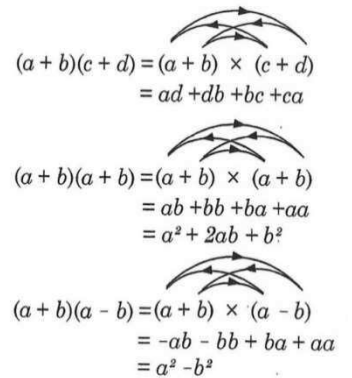
**Eigenschappen en rekenregels van kwadratische functies**

Voor het onderzoek naar de eigenschappen van tweedegraadsfuncties, herleiden we eerst de algemene vorm door middel van '**kwadraatplitsing**': \*)

Uit de onderbouw:  
'Papegaaimethode' voor producten

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
 &= a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + a \cdot \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\
 &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)
 \end{aligned}$$

ofwel:  $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$  waarin  $D = b^2 - 4ac$ .



De functie  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) is gelijkwaardig met de tweedegraadsfunctie:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} \text{ waarin } D = b^2 - 4ac.$$

\*) In deze kwadraatplitsing is gewerkt naar de vorm  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}$ , een toepassing van het 'merkwaardig product'  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ . In het tekst-vak is dit met de 'papegaaimethode' gedemonstreerd evenals het merkwaardig product:  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ .

Substitueer je  $x_T = -\frac{b}{2a}$  in de algemene formule  $f(x) = y = a(x + (\frac{b}{2a}))^2 - \frac{D}{4a}$   
dan vind je  $y_T = -\frac{D}{4a}$ . (Even nagaan!)

Dit betekent dat het punt  $(x, y) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$  een punt is **van elke kwadratische functie**  
 $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

Noem je dit punt  $T$ , dan is dus  $T(x_T, y_T) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$  ...**(a)**

We bewijzen nu dat het punt  $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$  een *uiterste waarde (extreem)* is  
van de tweedegraadsfunctie  $f(x)$ . Neem een willekeurige waarde  $y$  ongelijk aan  $y_T$ .

Als  $a > 0$  dan is  $a(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ , want ook  $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ .

Dit betekent dat  $y - y_T > 0$  ( $y > y_T$ ) zodat elke waarde van  $y$  in  $y = ax^2 + bx + c$  groter dan of  
gelijk is aan  $y_T$ , dus is het punt  $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$  een *minimum van de grafiek*  
.. van de functie  $f(x)$ . ...**(b)**

Op eenzelfde manier blijkt uit (b) dat als  $a < 0$  steeds geldt

$y - y_T < 0$  ( $y < y_T$ ) ofwel:  $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$  is een *maximum* van de grafiek van  $y = ax^2 + bx + c$

Het punt  $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ , *minimum of maximum, afhankelijk van  $a$* , heet de *top* van de  
kwadratische functie  $f(x)$ .

**ONTHOUD:**

De grafiek van de kwadratische- ofwel tweedegraadsfunctie:  $f(x) = ax^2 + bx + c$   
waarin  $a \neq 0$  en  $b$  en  $c$  reële getallen zijn, is een parabool  
met **verticale as**:  $x = -\frac{b}{2a}$  en een pint  $T = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$  **als top**.  
Als  $a > 0$  dan is  $T$  een minimum ("dalparabool"), als  $a < 0$  dan is  $T$  een maximum

### **a. Nulpunten van een kwadratische functie**

Eventuele snijpunten van de parabool  $y = ax^2 + bx + c$  met de  $x$ -as ( $y = 0$ ) moeten voldoen  
aan de vergelijking  $y = ax^2 + bx + c$  **en aan  $y = 0$**  dus zijn de **oplossingen** van de vergelijking  
 $ax^2 + bx + c = 0$ . Ze worden ook **nulpunten** of **wortels** van  $f(x)$  genoemd.

Voor de oplossing van de vergelijking  $ax^2 + bx + c = 0$  wordt meestal de '**abc-formule**'  
gebruikt:

### **Afleiding van de abc-formule**

Schrijf je de vergelijking  $ax^2 + bx + c = 0$  in de vorm van de *kwadraat-afplitsing*, dan vind je:  
 $a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} = 0$ .

Hieruit  $x$  oplossen gaat dan als volgt:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a} \Rightarrow \frac{1}{a} \cdot a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a} \cdot \frac{D}{4a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}$$

$$\text{met gevolg: } x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

*Nulpunten van  $f(x) = ax^2 + bx + c$  zijn oplossingen van de vergelijking*

$$y = ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad (D = b^2 - 4ac)$$

De waarde van  $D$  hierin bepaalt het *aantal oplossingen*, dus het *aantal wortels* van  $ax^2 + bx + c = 0$ . Men noemt daarom  $D$  de **discriminant** van deze vergelijking:

1<sup>o</sup>. Als  $D = b^2 - 4ac > 0$  dan bestaat  $\sqrt{D}$  en heeft de vergelijking *twee verschillende wortels*:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ en } x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

De parabool snijdt dan de  $x$ -as in de punten  $x_1$  en  $x_2$ .

2<sup>o</sup>. Als  $D = 0$  dan is  $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$  dus volgt uit  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b + 0}{2a} = -\frac{b}{2a}$  en

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - 0}{2a} = -\frac{b}{2a} \text{ dus heeft de vergelijking slechts één ('dubbel tellende')}$$

$$\text{wortel } x = -\frac{b}{2a}.$$

In top  $T$  van de parabool zijn de punten  $x_1$  en  $x_2$  samengevallen op de  $x$ -as tot één '**raakpunt**'

3<sup>o</sup>. Als  $D < 0$  dan bestaat  $\sqrt{D}$  niet in  $\mathbb{R}$  dus zijn er *geen reële oplossingen* (wel twee *imaginaire oplossingen* in  $\mathbb{C}$ ).

De parabool snijdt de  $x$ -as niet. Er zijn *geen reële nulpunten*. \*)

## **b. Ontbinden van kwadratische functies**

ONTHOUD:

*De functie  $f(x) = x^2 + bx + c$  met nulpunten  $x = x_1$  en  $x = x_2$  is te schrijven als  $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$*

**Bewijs::**

De nulpunten  $x_1, x_2$  van de vierkantsvergelijking  $y = ax^2 + bx + c$  met  $a = 1$  zijn volgens de

$$\text{abc-formule: } x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2} \text{ en } x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2} \text{ met } D = b^2 - 4c \text{ en } a = 1.$$

\*) In het volgende hoofdstuk worden imaginaire oplossingen van vierkantsvergelijkingen besproken in geval  $D < 0$ . In Hoofdstuk XIV worden expliciet voor wiskunde  $D$  de complexe getallen uitgebreid behandeld.

Het **product**  $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$  is dan  $\left\{ x - \frac{-b + \sqrt{D}}{2} \right\} \cdot \left\{ x - \frac{-b - \sqrt{D}}{2} \right\}$  dus:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = \left( \frac{2x + b - \sqrt{D}}{2} \right) \cdot \left( \frac{2x + b + \sqrt{D}}{2} \right) = \frac{4x^2 + 4bx + b^2 - D}{4} = \frac{4x^2 + 4bx + 4c}{4} \text{ want } D = b^2 - 4ac \text{ en } a = 1 \text{ dus } b^2 - D = 4c \text{ zodat } (x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 + bx + c \quad \dots(1)$$

Met de gelijkheid  $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$  is de term  $x^2 + bx + c$  volgens (1) **ontbonden in twee factoren**  $(x - x_1)$  en  $(x - x_2)$  als  $x_1$  en  $x_2$  de *nulpunten* van  $f(x)$  zijn.

Uitgewerkt geeft dit:  $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) \equiv x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2$   
waarin dus  $(x_1 + x_2) = -b$  en  $x_1 \cdot x_2 = c$ . ... (2)

Op deze eigenschap berust een methode om de wortels  $x_1$  en  $x_2$  van  $f(x) = 1x^2 + bx + c = 0$  snel te kunnen vinden:

**Voorbeeld:** Bepaal de wortels van de vergelijking  $x^2 - 11x + 28 = 0$ ,

Ontbind het linkerlid in factoren, dus schrijf  $x^2 - 11x + 28 = (x - p)(x - q) = x^2 - (p + q)x + p \cdot q$ . (Steeds mogelijk als  $D \geq 0$  is, omdat er dan één of twee nulpunten  $p, q$  zijn, dus regel (1) van toepassing is.)

Hiervoor geldt dan  $p + q = 11$  en  $p \cdot q = 28$ , waaruit direct volgt  $p = 4$  en  $q = 7$  zodat  $x^2 - 11x + 28 = (x - 4) \cdot (x - 7)$  dus volgen de nulpunten uit:  
 $x^2 - 11x + 28 = 0 \Rightarrow (x - 4) \cdot (x - 7) = 0 \Rightarrow x - 4 = 0 \vee x - 7 = 0 \Rightarrow \mathbf{x = 4 \vee x = 7}$

**Opgaven: 1.** Bereken de nulpunten van  $f(x) = x^2 - x - 12$

Schrijf  $x^2 - x - 12 = (x - p) \cdot (x - q) = x^2 - (p + q)x + p \cdot q$ , dan is  $p + q = 1$  en  $p \cdot q = -12$ .  
Hieraan voldoen  $p = 4$  en  $q = -3$  dus als  $x^2 - x - 12 = 0$ , dan is  $(x - p) \cdot (x - q) = (x - 4) \cdot (x + 3) = 0$  zodat  $x - 4 = 0 \vee x + 3 = 0 \Rightarrow \mathbf{x = 4 \vee x = -3}$   
De nulpunten zijn dan  $\mathbf{x = 4 \text{ en } x = -3}$ .

**2.** Los op:  $x^2 + 2x - 143 = 0$

Stel  $x^2 + 2x - 143 = (x - p) \cdot (x - q) = x^2 - (p + q)x + p \cdot q$ , dan is  $p + q = -2$  en  $p \cdot q = -143$  dus  $p = -13$  en  $q = 11$ , dus als  $x^2 + 2x - 143 = 0$ , dan is  $(x - (-13)) \cdot (x - 11) = 0$  zodat  $x + 13 = 0 \vee x - 11 = 0 \Rightarrow \mathbf{x = 11 \vee x = -13}$

**3.** Gegeven is de parabool  $f(x) = x^2 - 4x + 1 = 0$

a. Bepaal de top van de parabool.

Uit kwadraatplitsing volgt dat voor de parabool geldt:  $y = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3$ .  
Omdat voor elke  $x$ :  $(x - 2)^2 \geq 0$  is steeds  $y \geq -3$  dus geldt voor de coördinaten van top  $T$  (minimum van de dalparabool omdat  $a > 0$ ):  $y_T = -3$  en  $y_T = (x_T - 2)^2 - 3 \Rightarrow \mathbf{x_T = 2}$ .

De top is dus het punt  $T(2, -3)$ . (Volgt ook direct uit  $x_T = -\frac{b}{2a}$ ,  $y_T = \frac{-D}{4a}$  (blz. 6)).

b. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de parabool in het punt  $(1, -2)$ .

Het punt  $P(1, -2)$  ligt op de parabool  $y = x^2 - 4x + 1$  want  $-2 = 1^2 - 4 \cdot 1 + 1$  dus voldoet aan de vergelijking.

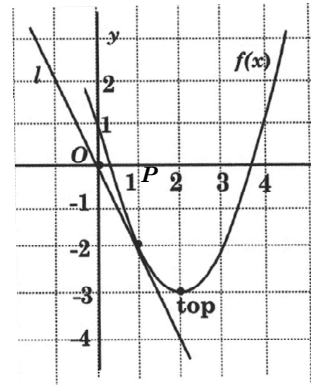
Noem de raaklijn  $l: y = ax + b$ , dan geldt voor het raakpunt op  $l$   
 $P(1, -2) = a \cdot 1 + b \Rightarrow a + b = -2 \Rightarrow a = -2 - b$  ... (1)

Omdat het raakpunt zowel op de parabool als op de raaklijn  $l$  ligt geldt:  $y = x^2 - 4x + 1 = (-2 - b)x + b \Rightarrow$   
 $x^2 - 4x + 1 = -2x - bx + b \Rightarrow x^2 - 2x + bx + 1 - b = 0 \Rightarrow$   
 $x^2 + (b - 2)x + (1 - b) = 0$

De discriminant  $D$  van deze tweedegraadsvergelijking moet nul zijn omdat de vergelijking één wortel heeft, dus is

$$b^2 - 4 \cdot ac = (b - 2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - b) = 0 \Rightarrow b^2 - 4b + 4 - 4 + 4b = 0 \Rightarrow b = 0 \quad \dots (2)$$

Uit (1) en (2) volgt dan:  $b = 0$  en  $a = -2$ , dus is de raaklijn  $l: y = ax + b \Rightarrow y = -2x$ .



#### 4. Machtsfuncties

*De functie  $y = f(x) = x^n$  is een machtsfunctie van  $x$ , waarin de exponent  $n$  een constante is en het grondtal  $x$  een variabele*

Enkelvoudige machtsfuncties zijn van het type  $y = f(x) = x^n$  met  $n \in \mathbb{R}$ .

Samengestelde machtsfuncties zijn van de vorm  $y = f(x) = ax^p + bx^q + cx^r + \dots$   
 ( $a, b, c$  en  $p, q, r \in \mathbb{R}$ ). Deze noemt men meestal **polynomen**.

Uitgaand van de definitie van een natuurlijke macht van  $x$ :

$x^1 = x$ ,  $x^2 = x \cdot x$ ,  $x^3 = x \cdot x \cdot x$ ,  $x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$  of algemeen:  $x^n = \overbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}^{n \text{ keer}}$  volgen direct de regels:  $x^p \cdot x^q = x^{p+q}$ ,  $\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$  en  $(x^p)^q = x^{p \cdot q}$ ,

zodat dan  $\frac{x^p}{x^p} = x^{p-p} = x^0$  en ook  $\frac{x^p}{x^p} = 1$ , dus  $x^0 = 1$ .

**Gevolgen:**  $\frac{1}{x^p} = \frac{x^0}{x^p} = x^{0-p} = x^{-p}$  en  $\sqrt[p]{x} = x^{\frac{1}{p}}$  omdat  $(x^{\frac{1}{p}})^p = x^{\frac{1}{p} \cdot p} = x^1 = x$ .

Zo ook:  $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

ONTHOUD:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad (a^p)^q = a^{p \cdot q} \quad a^{-p} = \frac{1}{a^p} \quad a^0 = 1$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \quad (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p \quad \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}} \quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

**Per definitie** gelden deze rekenregels ook voor machten met **reële exponenten**:

Voorbeelden:

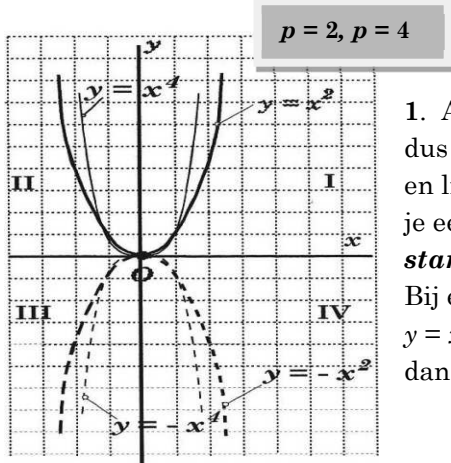
$$3^7 \cdot 3^{-9} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}, \quad 5^{-2\frac{1}{2}} = \frac{1}{5^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5^5}}, \quad 7^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{7^3}, \quad 12^{-0,38} \approx 0,389 \text{ (GR)}$$

*Machtsfuncties waarin  $x$  hoogstens tot de macht  $n$  voorkomen, heten  $n^{\text{de}}$  graads machtsfuncties.*



**a. Grafieken van machtsfuncties**

Aan de *graad van enkelvoudige machtsfunctie* kun je globaal de grondvorm van hun grafieken afleiden. We onderzoeken hier de grafieken in de vier kwadranten I, II, III en IV van machtsfuncties  $f(x) = y = x^p$  bij verschillende waarden van  $p$ .

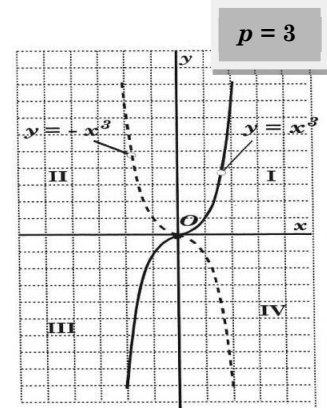


1. Als  $p$  in  $y = x^p$  een **positief, even getal** is, dus  $p = 2, 4, 6, \dots$  dan zijn alle  $y$ -waarden van  $y = x^p$  positief en ligt de grafiek geheel in I en II. In de grondvorm herken je een **dalparabool**, die als  $p = 4, 6, 8, \dots$  'puntiger' is dan de **standaard dalparabool**  $y = x^2$  dus met  $p = 2$ . Bij eenzelfde waarde van  $p$  is  $y = -x^p$  het spiegelbeeld van  $y = x^p$  in de  $x$ -as (gestreept) en zie je daarin als grondvorm dan ook de **bergparaboloïden**.

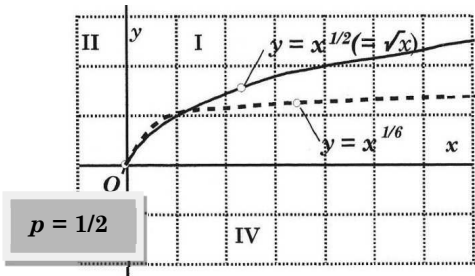
2. Is  $p$  in  $y = x^p$  een **positief, oneven, geheel getal  $\neq 1$** , dus  $p = 3, 5, 7, \dots$  dan bestaan er in tegenstelling tot de *even* machten van  $x$  ( $x^2, x^4, x^6, \dots$  die steeds  $\geq 0$  zijn), ook **negatieve  $y$  waarden**. Bijvoorbeeld  $(-3)^3 = -27 = -(3^3)$ .

Hierdoor heeft  $y = x^p$  bij *oneven*  $p$  dan ook waarden in het eerste kwadrant (I) en het derde kwadrant (III).

Omdat  $(-x)^p = -(x^p)$  is de grafiek van  $y = x^p$  als  $p$  negatief is, een spiegeling in de oorsprong van  $y = -(x^p)$



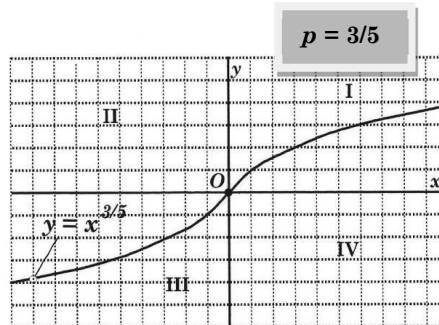
3. Als  $p$  in  $y = x^p$  een **positieve breuk** is, waarvan de **teller oneven is en de noemer even**, zoals in  $y = x^{\frac{1}{2}}$  ( $= \sqrt{x}$ ) en  $x^{\frac{1}{6}}$  dan bestaan *geen reële  $y$ -waarden bij negatieve  $x$* . Zo is bij  $y = x^{\frac{1}{2}}$  als  $x = -1$  gelijk aan  $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$  en is  $y = (-x)^{\frac{1}{6}}$  bij  $x = -1$  gelijk aan  $(-1)^{\frac{1}{6}} = ((-1)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$  dus bestaan niet in  $\mathbb{R}$ . (zijn imaginair).



Omdat bij een **positieve waarde van  $x$**  ook alle machten van  $x$  positief zijn, liggen alle waarden van  $y = x^p$  in I.

positieve breuk is, met **oneven** dan bestaan er *negatieve  $x$* , die dan ook dus in III liggen.

van  $x = -4$  in  $y = x^{\frac{3}{5}}$  :  
 $\sqrt[5]{-64} \approx -2,297$ .  
 ligt dus in I en III. \*)



4. Als  $p$  in  $y = x^p$  een **teller en noemer** ook reële  $y$  waarden bij zelf negatief zijn, en Zo is hier de  $y$  waarde  $y = (-4)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-4)^3} =$   
 De grafiek van  $y = x^{\frac{3}{5}}$

\*) Met de GR TI-83/84 zijn alle grafieken direct te 'plotten'. VB: Voer in:  $Y1 = X^{3 \div 5}$  ENTER. Druk op WINDOW en kies Xmin = -5, Xmax = 5, Ymin = -5, Ymax = 5. Kies Xscl = 1 en Yscl = 1 ENTER. Druk op Graph en de grafiek uit voorbeeld 4 verschijnt op je scherm.

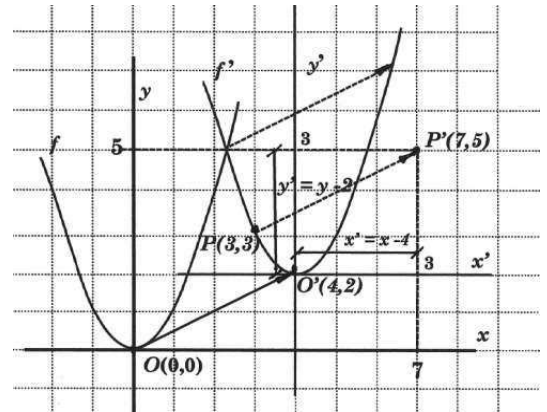
**b. Transformaties**

Uit de grafieken van *standaardfuncties* zoals  $y = x^2$ ,  $y = x^3$ ,  $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$  kan je via *transformaties* vaak formules afleiden van meer gecompliceerde functies.

Bij een **congruentietransformaties** als *translatie* ('*evenwijdige verschuiving*') ontstaat uit een functie  $f(x)$  een functie  $f'(x)$  waarvan de grafiek congruent is met die van  $f(x)$ .

**- Transformaties door translatie**

Hiernaast is in een  $XOY$ -stelsel de grafiek  $f$  getekend van de '*standaardparabool*'  $y = x^2$ . De top ligt in de oorsprong  $O$ . Via een **translatie  $T(4,2)$**  verschuiven alle punten over +4 eenheden naar rechts (*positieve x-richting*) en +2 eenheden omhoog (*positieve y-richting*), waardoor een **met  $f$  congruente** grafiek  $f'$  ontstaat. De oorsprong  $O(0,0)$  = top van  $f$ , wordt nu afgebeeld op het punt  $O'(4,2)$ , de oorsprong van het verschoven assenstelsel  $x'O'y'$ .



Een *willekeurig* punt  $P(x,y)$ , (in de figuur  $P(3,3)$ ), wordt door de translatie  $T(4,2)$  afgebeeld op het punt

$P'(x+4, y+2)$ , (in de figuur  $P'(7,5)$ ).

Ten opzichte van het  $x'O'y'$ -stelsel geldt dan dat  $x' = x - 4$  en  $y' = y - 2$  ... (1)

De vergelijking van de verschoven parabool  $f'$  is  $f': y' = (x')^2$  want de top van  $f'$  ligt in de oorsprong  $O'$  dus geldt hier de *topvergelijking* ten opzichte van het stelsel  $x'O'y'$ .

Substitutie hierin van de waarden  $x' = x - 4$  en  $y' = y - 2$  uit (1) geeft als vergelijking van de parabool  $f'$ :  $y' = (x')^2$ :  $y - 2 = (x - 4)^2 \Rightarrow y = (x - 4)^2 + 2$ . ... (2)

Noem je de *translatie*  $T(4,2)$  nu algemeen  $T(a, b)$ , dan volgt direct uit (2):

$f: y = x^2 \Rightarrow T(a, b) \Rightarrow f': y = (x - a)^2 + b$  ... (3)

Deze transformatieregel werd voor de duidelijkheid afgeleid via de functie  $f(x) = y = x^2$  door op het translatiebeeld  $y' = x'^2$  de *algemeen geldende betrekkingen bij translaties* toe te passen. De regel geldt onvoorwaardelijk ook voor elke andere functie  $y = f(x)$  zoals  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = \ln(x)$ ,  $y = \sin(x)$ , ... dus:

ONTHOUD:

Bij de translatie  $T(a,b)$  geldt voor het beeld  $f'(x)$ :  $y = f(x - a) + b$

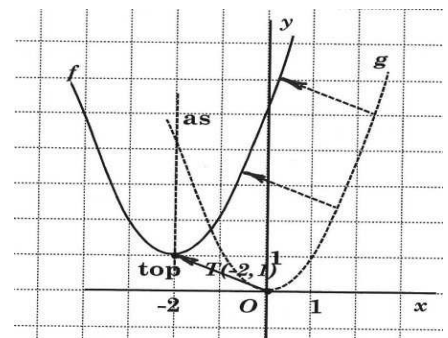
**Voorbeelden:**

1. Schets de grafiek van de functie  $f: y = (x + 2)^2 + 1$

Volgens de definitie gaat bij een translatie  $T(a, b)$  de grafiek  $g$  van  $y = f(x) = x^2$  over in  $f: y = (x - a)^2 + b$ . In  $f: y = (x + 2)^2 + 1$  is dan  $a = -2$  en  $b = 1$  dus ontstaat de functie  $f: y = (x + 2)^2 + 1$  uit de translatie  $T(-2, 1)$  van  $y = f(x) = x^2$ .

In de figuur is de grafiek van  $f$  getekend.

De **top** is dan het punt  $(-2, 1)$ , de **as** is de lijn  $x = -2$ .

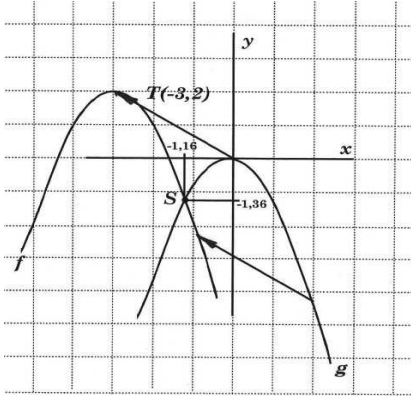


2. Schets de grafiek van de functie  $f: y = -x^2 - 6x - 7$  en bepaal het snijpunt van  $f$  en de parabool  $g: y = -x^2$

Door *kwadraatsplitsing* herleid je eerst de gegeven functie  $f: y = -x^2 - 6x - 7$  tot:

$$f: (-x^2 - 6x - 9) + 2 = -(x+3)^2 + 2.$$

Volgens de translatietransformatie-regel is dit de grafiek van de functie die ontstaat uit de standaardfunctie  $g: y = -x^2$  door de **translatie**  $T(-3, 2) = T(a,b)$ .



De **top** van (berg) parabool  $f$  is dan het punt  $(-3, 2)$  de **as** is de lijn met  $x = -3$ .

Het **snijpunt**  $S(x, y)$  van de grafieken  $f$  en  $g$  volgt uit:

$$\begin{aligned} y &= -x^2 - 6x - 7 \wedge y = -x^2 \text{ dus uit } -6x - 7 = 0 \text{ zodat} \\ x &= -\frac{7}{6} \approx -1,16 \text{ en } y = -x^2 = -\left(-\frac{7}{6}\right)^2 - 6 \cdot -\frac{7}{6} - 7 \\ &= -\frac{49}{36} \approx -1,36 \end{aligned}$$

Het gevraagde snijpunt is dan  $S(-1,16, -1,36)$ .

3. Schets de grafiek van de functie  $f: y = (x - 3)^5 - 50$  en bepaal de coördinaten van de snijpunten van  $f$  met de lijn  $l: y = 25x$ .

De grafiek van de functie  $f: y = (x - 3)^5 - 50$  ontstaat uit  $f: y = x^5$  door de **translatie**  $T(3, -50)$ .

De snijpunten van de lijn  $l: y = 25x$  met de grafiek van  $f$  bereken je in het  $x' O' y'$ -stelsel omdat daarin geldt  $f': y' = (x')^5$  en  $l': y' = \frac{50}{2} x' = 25x'$ , want  $l' \parallel l$  gaat door  $O$ .

Voor de snijpunten van  $l'$  en  $f'$  geldt dan  $(x')^5 = 25x'$  dus  $x' = 0 \vee (x')^4 = 25 \Rightarrow x' = \pm \sqrt[4]{25} = \pm \sqrt{5}$   
 Uit  $y' = 25x'$  volgt dan  $y' = 0 \vee y' \approx \pm 25 \cdot \sqrt{5}$

De snijpunten van  $f': y = (x - 3)^5 - 50$  en  $l: y = 25x$  zijn  $S_1', S_2'$  en  $S_3'$  (witte stippen in de figuur), met:

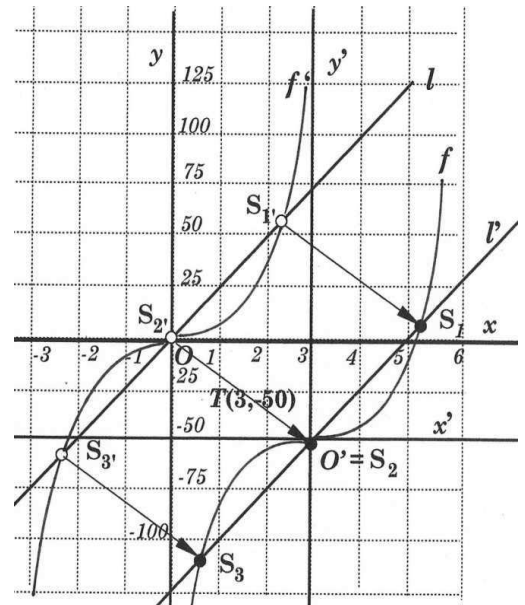
$$S_1' = (\sqrt{5}, 25\sqrt{5}); S_2' = (0, 0); S_3' = (-\sqrt{5}, -25\sqrt{5})$$

De gevraagde snijpunten  $S_1, S_2$  en  $S_3$  (zwarte stippen in de figuur), van  $l'$  en  $f$  zijn dan:

$$S_1 = (\sqrt{5}, 25\sqrt{5}) + T(3, -50) = (\sqrt{5} + 3, 25\sqrt{5} - 50)$$

$$S_2 = (0, 0) + T(3, -50) = (3, -50)$$

$$S_3 = (-\sqrt{5}, -25\sqrt{5}) + T(3, -50) = (3 - \sqrt{5}, -25\sqrt{5} - 50)$$



**NB:** Hiermee zijn de snijpunten van  $f: y = (x - 3)^5 - 50$  en  $l: y = 25x$  exact bepaald, via de translatietransformatie  $T(3, -50)$ , waarmee de *vijfdegraadsvergelijking*:  $(x - 3)^5 - 25x = 50$  exact is opgelost. De grote betekenis van transformaties van functies blijkt duidelijk uit dit voorbeeld.

**Transformaties door vermenigvuldiging**

We gaan even uit van de transformaties van figuren door vermenigvuldiging.

We kennen daarbij:

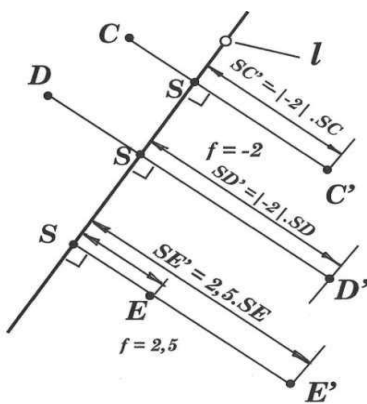
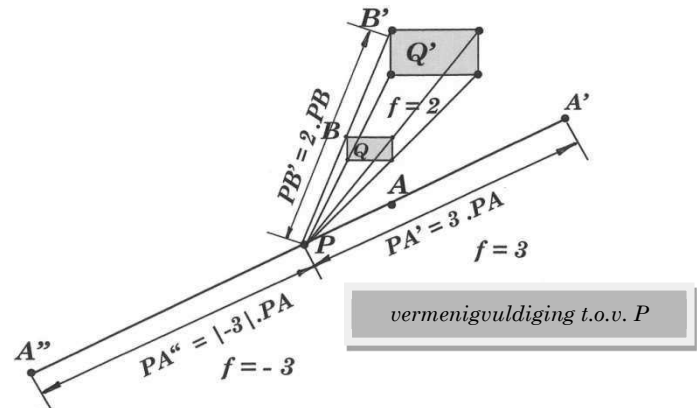
- a - vermenigvuldiging ten opzichte van een punt
- b - vermenigvuldiging ten opzichte van een lijn

a. Gedefinieerd is het *product* van een punt A ten opzichte van een punt P en een factor f als volgt: Bij een *positieve* factor f, ligt het beeld punt A' op de lijn PA, waarbij geldt dat

$PA' = f \times PA$ . In de figuur is het beeld A' getekend van  $3 \times PA$

Zo is ook de rechthoek Q' het beeld van Q bij vermenigvuldiging t.o.v. P met de factor  $f = +2$

Bij een *negatieve* factor f ligt het beeldpunt A'' van punt A op de lijn AP aan de andere kant van P als A en wel zo dat  $PA'' = |f| \times PA$ , hier  $PA'' = |-3| \times PA$



b. Bij vermenigvuldiging van een punt E ten opzichte van een lijn l met een *positieve* factor f ontstaat het beeldpunt E' door vanuit E een loodlijn op l neer te laten en vanuit het voetpunt S van die loodlijn een afstand SE' zo af te passen, dat  $SE' = f \times SE$ , in de figuur is  $f = 2,5$  dus  $SE' = 2,5 \times SE$

Bij een *negatieve* factor f ligt hier het beeldpunt D' van punt D op de lijn DS aan de andere kant van S als D, en wel zo dat  $SD' = |f| \times SD$ , dus in de figuur met  $f = -2$ :  $SD' = |-2| \times SD$   
 Zo is ook C' het beeldpunt van C bij vermenigvuldiging van C t.o.v. l met de factor  $f = -2$ , zodat  $SC' = |-2| \times SC$

**Toepassing:**

Teken de grafiek van de functie g:  $y = 2x^2 - 4x + 6$ .

Omdat de *coëfficiënt* van  $x^2 \neq 1$  heeft g niet de vorm van de *standaardparabool*  $y = x^2$  zoals alle grafieken van de functies  $y = 1x^2 + bx + c$ . Met alleen de *translatietransformatie* kan je deze opgave dus niet oplossen. Ga daarom als volgt te werk:

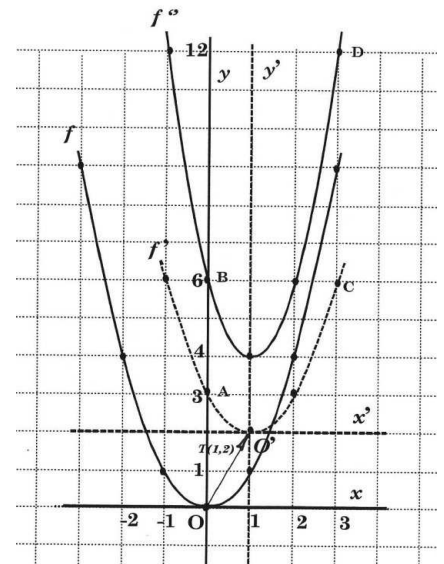
1<sup>o</sup> Pas kwadraatafsplitsing toe, dus schrijf:  $g: y = 2x^2 - 4x + 6$

$\Rightarrow y = 2(x^2 - 2x + 3) = 2\{(x^2 - 2x + 1) + 2\} = 2(x - 1)^2 + 4$

2<sup>o</sup> Pas de *translatie* T(1,2) toe op de punten van de standaardgrafiek  $f: y = x^2$  zodat het beeld ontstaat van de grafiek  $f' = (x - 1)^2 + 2$  (volgens de *translatietransformatie-regel* blz.12).

3<sup>o</sup> *Vermenigvuldig* dit beeld f' ten opzichte van de x-as met +2 (*notatie* P(x-as, 2)).

Dit geeft:  $f'': y = 2 \cdot (x - 1)^2 + 4 = 2x^2 - 4x + 6$ , de gevraagde parabool g, want uit de definitie van vermenigvuldiging t.o.v. een lijn (hier de x-as) volgt direct de eigenschap:



**ONTHOUD:**

Bij de vermenigvuldiging P(x-as, a) gaat een functie  $y = f(x)$  over in  $y = a \cdot f(x)$

**- Transformaties van wortelvormen**

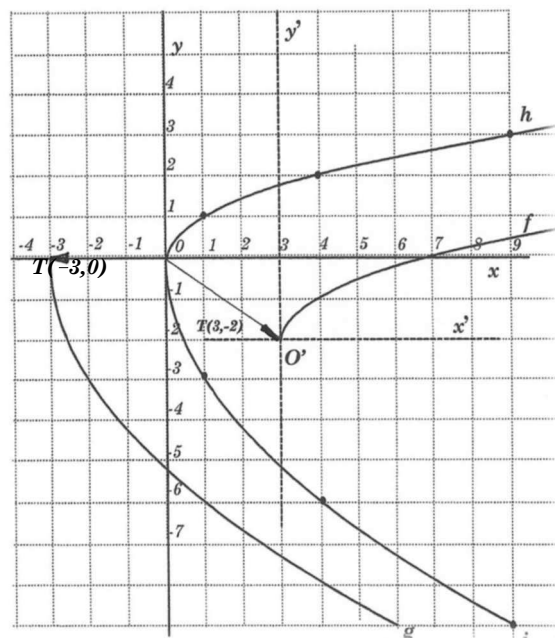
Ook de grafieken van *wortelvormen* (*machtsfuncties* met gebroken exponent) kunnen via translatie en/of vermenigvuldiging ten opzichte van de *x*-as, afgeleid worden uit hun standaardvorm  $y = \sqrt{x} = x^{0,5}$

**Voorbeelden:**

Typ hier uw vergelijking.

- a. Schets de grafieken van de functies  
 $f: y = \sqrt{x-3} - 2$  en  $g: y = -3\sqrt{x+3}$
- b. Geef de coördinaten van het beginpunt van elk.
- c. Geef domein en bereik aan van beide functies.

- a. Teken de standaardgrafiek  $h: y = \sqrt{x}$ .  
 Deze heeft als startpunt het punt (0,0) en gaat verder door de roosterpunten (1,1), (4,2), (9,3),...  
 - Pas nu op  $h$  de translatie  $T(3,-2)$  toe dan ontstaat volgens de translatietransformatie-regel de gevraagde grafiek  $f: y = \sqrt{x-3} - 2$
- Uitgaande van de standaardgrafiek  $h: y = \sqrt{x}$  *vermenigvuldig* je deze *t.o.v. de x-as* met de factor  $-3$ , waaruit de grafiek  $i: y = -3\sqrt{x}$  ontstaat.  
 Pas hierop de translatie  $T(0,-3)$  toe, dan vind je de grafiek van  $g: y = -3\sqrt{x+3}$  welke werd gevraagd.



b. In de figuur zie je direct dat het *beginpunt* van  $f: y = \sqrt{x-3} - 2$  het *beeldpunt*  $O'(3,-2)$  is van het origineel (0,0) van  $h: y = \sqrt{x}$  bij de translatie  $T(3, -2)$ .  
 Zo is het beeldpunt  $(-3, 0)$  het *beginpunt* van  $g: y = -3\sqrt{x+3}$ .

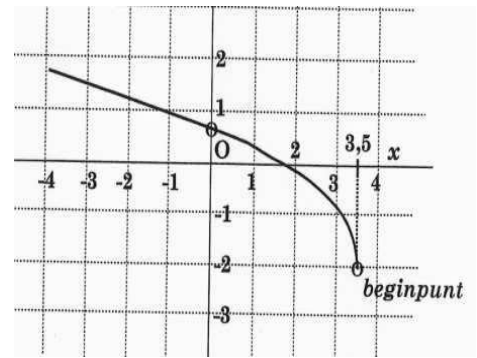
- c. De linkergrens van het *domein* van de **standaardgrafiek**  $h: y = \sqrt{x}$  is  $x = 0$  in *het punt*  $O(0,0)$ , de rechtergrens is  $\infty$ , dus  $D_h = [0, \rightarrow)$  De linkergrens van het *bereik* van  $h$  is de waarde  $y = 0$ , de rechtergrens is  $y = +\infty$  dus  $B_h = [0, \rightarrow)$ . Daaruit volgt dan:  
 De linkergrens van het *domein* van  $f$  is  $x = 3$  de rechtergrens is  $x = +\infty$ , dus  $D_f = [3, \rightarrow)$ ,  
 linkergrens van het *bereik* van  $f$  is  $y = -2$  de rechtergrens is  $y = +\infty$ , dus  $B_f = [-2, \rightarrow)$ .  
 De linkergrens van het *domein* van  $g$  is  $x = -3$ , de rechtergrens is  $x = +\infty$ , dus  $D_g = [-3, \rightarrow)$ ,  
 linkergrens van het *bereik* van  $g$  is  $y = 0$ , de rechtergrens is  $y = -\infty$ , dus  $B_g = \langle \leftarrow, 0]$ .

**NB:** Het is in het algemeen *niet direct* mogelijk om *wortelvormen* betrouwbaar te 'plotten' in de GR. Als voorbeeld de functie  $f(x) = y = -2 + \sqrt{7-2x}$  :

- Voer in  $y = -2 + \sqrt{7-2x}$  en kies via [WINDOW]  $X_{min} = -4$ ;  $X_{max} = 4$ ;  $Y_{min} = -2$ ;  $Y_{max} = 2$ .  
 Andere waarden in WINDOW 1 laten, en in TBLSET TblStart en  $\Delta$  Tbl op 1 instellen..  
 De **tabel** [TABLE] van de grafiek geeft *vanaf*  $X = 4$  'ERROR' omdat daarvoor dan  $\sqrt{7-2x} = \sqrt{-1}$  niet bestaat.
- Verander je via [TBLSET]  $\Delta$  Tbl in 0.1 dan geeft de GR 'ERROR' *vanaf*  $X = 3,6$ .
- Een eenduidig 'beginpunt' van de grafiek, vindt de GR niet omdat de 'trace-cursor' met een vaste stapgrootte werkt.

Zo'n beginpunt moet dan handmatig worden bepaald:  $7 - 2x \geq 0$ , dus  $2x \leq 7 \Rightarrow x \leq 3,5$ , dus is van het **startpunt**  $x = 3,5$  waarbij dan  $y = -2 + \sqrt{7 - 2x} = -2$ .

**Beginpunt van f:**  $y = -2 + \sqrt{7 - 2x}$  is dus het punt **S (3,5 ; -2)**. Het domein van de functie is  $\langle \leftarrow; 3,5 \right]$ , het bereik is dan  $[-2, \rightarrow)$ .



Verdere punten van de grafiek volgen uit de tabel hieronder:

$x$	3,5	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
$y$	-2,00	-1,00	-0,27	0,24	0,65	1,00	1,32	1,61	1,87

## Exponentiële functies

Naast de *machtsfunctie*  $f(x) = x^a$  met **vaste exponent**  $a$  en **variabel grondtal**  $x$ , bestaat 'omgekeerd' een **exponentiële functie**  $f(x) = a^x$  met **vast grondtal**  $a$  en **variabele exponent**  $x$ .

Voor  $a \leq 0$  is de functie *niet gedefinieerd*.

Immers als  $a = 0$  dan is  $a^x = 0$  voor elke  $x \neq 0$  dus is  $a^x$  *geen functie*.

Als  $a < 0$  dan *bestaat*  $a^x$  *niet voor elke waarde van*  $x$ .

Zo zijn:  $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ ;  $a^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{a})^3$ ;  $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ ; ....*ongedefinieerd* als  $a$  *negatief* is.

Bij elke exponent  $x$ , is de waarde van  $a^x$  ( $a > 0$ ) steeds positief want:

- als  $x > 0$  dan  $a^x > 0$  omdat per definitie  $a^x = a \cdot a \cdot a \dots a \dots$  ( $x$ - keer) dus weer positief.

- als  $x < 0$  dan  $a^x = 1 / a^{-x}$  dus zeker positief omdat  $a^{-x}$  dan positief is.

Alle grafieken van  $y = f(x) = a^x$  liggen dus *in het eerste en tweede kwadrant*.

Omdat  $a^0 = 1$  voor iedere  $a$  gaan *alle grafieken door het punt* (0,1).

Beschouw nu de *functie*  $f(x) = a^x$  voor waarden van  $a$ , met  $0 < a < 1$  en die als  $a > 1$ .

### 1. $f(x) = a^x \wedge 0 < a < 1$

Voor  $0 < a < 1$  is de functie **monotoon dalend**, dus bij

*toenemende*  $x$  neemt  $y$  *af*. Immers als  $f(x) = a^x$  dan is

$f(x+1) = a^{x+1} = a \cdot a^x$  en daar  $a < 1$  is  $a \cdot a^x < a^x$  dus

$a^{x+1} < a^x$  zodat  $f(x) = a^x$  *monotoon daalt*.

Bij *onbepaald grote toename van*  $x$ , dus *als*  $x$  *tot oneindig*

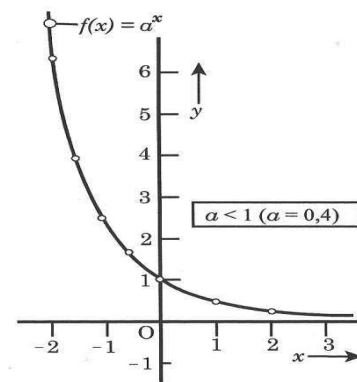
*nadert*, notatie  $x \rightarrow \infty$ , dan daalt  $a^x$  onbepaald dicht tot nul

omdat  $0 < a < 1$ . De waarde nul wordt nooit bereikt, want er

bestaat geen reële  $x$  waarvoor  $a^x$  ( $a \neq 0$ ) gelijk is aan nul, zodat

bij toenemende  $x$  de grafiek steeds dichtter tot de *positieve x-as*

(rechts van  $O$ ) *nadert zonder hem ooit te raken*:

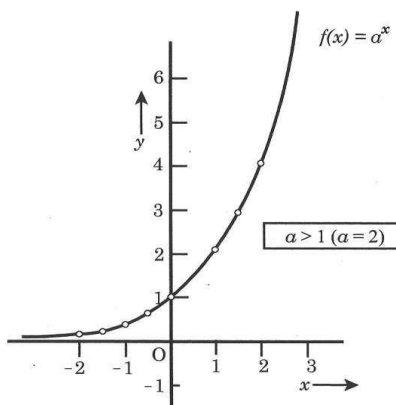


*Functies waarvan de exponent  $x$  de variabele is en een positief grondtal een constante heten exponentiële functies. Algemene vergelijking:  $y = f(x) = a^x$  ( $a > 0$  en  $a \neq 1$ )*

De  $x$ -as heet dan een (*horizontale*) '**asymptoot**' van de grafiek van  $f(x) = a^x$ . ( $0 < a < 1$ )

2.  $f(x) = a^x \wedge a > 1$

Als  $a > 1$  dan is de functie **monotoon stijgend**, want: als  $f(x) = a^x$  dan is  $f(x+1) = a^{x+1} = a \cdot a^x$  en daar  $a > 1$  is dan  $a \cdot a^x > a^x$  dus  $a^{x+1} > a^x$



$\Rightarrow f(x) = a^x$  is dan **monotoon stijgend**.

Bij **afname van de waarde van x** wordt de waarde van  $a^x$  steeds kleiner want  $a^{x-1} = \frac{a^x}{a} < a^x$  omdat  $a > 1$ .

Bij **onbepaald grote afname** van  $x$ , als  $x$  **tot  $-\infty$  nadert**, dan nadert  $a^x$  onbepaald dicht tot nul.

De waarde nul wordt nooit bereikt, omdat er geen reële  $x$  bestaat met  $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = 0$  dus hier zal bij afnemende  $x$  de grafiek steeds dichterbij tot de **negatieve x-as** naderen:

De  $x$ -as is dus ook hier een **horizontale asymptoot**.

- **Exponentiële groei**

In onderstaande tabel wordt de groei weergegeven van de bevolking van Latijns- Amerika in de vierjaarlijkse perioden tussen 1950 en 1970.

Elke periode blijkt de bevolking met een *factor* van *circa* 1,11 te zijn toegenomen, want:

$$\frac{183}{164} \approx \frac{203}{183} \approx \frac{227}{203} \approx \frac{254}{227} \approx \frac{282}{254} \approx 1,11.$$

<i>jaar</i>	1950	1954	1958	1962	1966	1970
<i>aantal</i> $\times 10^6$	164	183	203	227	254	282

De factor 1,11 heet in zo'n geval de **groefactor**. Het **groeipercentage** is dan 11%.

Werk je met de groefactor de bevolkingsaantallen in de onderste rij uit, dan vind je:

<i>aantal</i> $\times 10^6$	<b>164</b>	<b>183</b> = 1,11 $\times$ 164	<b>203</b> = 1,11 $\times$ 1,11 $\times$ 164	<b>227</b> = 1,11 $\times$ 1,11 $\times$ 1,11 $\times$ 164	<b>254</b> = 1,11 $\times$ 1,11 $\times$ 1,11 $\times$ 164	<b>282</b> = 1,11 $\times$ 1,11 $\times$ ... $\times$ ... 164
	$1,11^0 \times 164$	$1,11^1 \times 164$	$1,11^2 \times 164$	$1,11^3 \times 164$	$1,11^4 \times 164$	$1,11^5 \times 164$

Je ziet dan dat bij de **groefactor** 1,11 na  $t$  perioden van 4 jaar ( $t = 0, 1, 2, 3, 4$ ) de **beginwaarde** 164 (dus het inwonertal na  $t = 0$  perioden) met een factor  $1,11^1, 1,11^2, 1,11^3, 1,11^4, 1,11^5$  is toegenomen, dus  $t$  perioden na de **startwaarde** 160 is die waarde toegenomen tot  $1,11^t \times 164$ . Deze toename wordt **exponentiële groei** genoemd.

Noem je de **startwaarde**  $164 = N(0)$  en de **groefactor per periode**  $1,11 = g$  dan is na  $t$  perioden:  $N(t) = N(0) \cdot g^t$ .  $N(t)$  is dus een **exponentiële functie van  $t$ , dus algemeen**:

ONTHOUD:

Bij exponentiële groei waarbij de groefactor  $g$  constant is, is na  $t$  perioden:  $N(t) = N(0) \cdot g^t$  ( $N(0) =$  startwaarde)

**Toepassingen:**

1. Een zekere hoeveelheid neemt *elk kwartier* met 12% toe. Bereken:

- a. De *groefactor* per kwartier
  - b. De *groefactor* en het *groeipercentage* per uur
  - c. Het *groeipercentage* per *vijf minuten*
- a. Na een kwartier is de hoeveelheid gegroeid tot  $1,12 \times$  de startwaarde (= 1).  
De *groefactor* per kwartier is dan  $1,12 : 1 = 1,12$ .
  - b. De *groefactor* per uur ( $4 \times 1$  kwartier) is  $1,12^4 = 1,574$ ; het *groeipercentage* is **57,4%**
  - c. De *groefactor* in vijf minuten (=  $1/3$  kwartier) is  $1,12^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1,12} \approx 1,0385$   
dus het *groeipercentage* per vijf minuten is  $\approx 3,85\%$

2. Een bacteriecultuur groeit exponentieel.

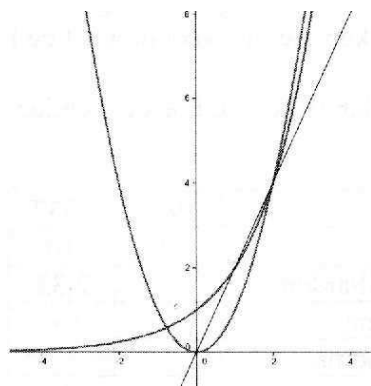
Op  $t = 4$  zijn er 50.000 bacteriën, op  $t = 8$  zijn er 130.000 bacteriën als  $t$  de tijd is in uren.  
Bereken *groefactor* en *groeipercentage* per uur en de *groefactor* per dag.

$$N(8) = N(0) \cdot g^8, \quad N(4) = N(0) \cdot g^4 \Rightarrow \frac{N(8)}{N(4)} = \frac{N(0) \cdot g^8}{N(0) \cdot g^4} \Rightarrow \frac{130.000}{50.000} = g^4 = 2,6$$

De *groefactor*  $g$  is in vier uur is dan 2,6, dus *per uur*  $(2,6)^{\frac{1}{4}} = (1,2698.....)$

Het *groeipercentage* per uur is  $\approx 1,27\%$

Per dag is de *groefactor*  $(1,2698.....)^{24} \approx 308,916$ .



3. In deze figuur zijn de grafieken weergegeven van de functies:  $y = 2x$ ,  $y = x^2$  en  $y = 2^x$ .

Onderzoek de verandering van elke grafiek voor  $-4 \leq x \leq 4$  Neem steeds als stapgrootte 1.

Hieronder zie je de  $x, y$  tabel van elk.

$y = 2x$	$x = -4$	$x = -3$	$x = -2$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$
$y =$	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
$y = x^2$	$x = -4$	$x = -3$	$x = -2$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$
$y =$	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$y = 2^x$	$x = -4$	$x = -3$	$x = -2$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$
$y =$	1/16	1/27	1/4	1/2	1	2	4	8	16

$y = 2x$  is een **lineair** verband; de verandering is constant:  $\Delta y / \Delta x = 2$

$y = x^2$  is een **kwadratisch** verband; de veranderingen  $\Delta y$  verlopen parabolisch.

$y = 2^x$  is een **exponentieel** verband:  $\Delta y$  wordt vanaf  $x = -2$  steeds  $2 \times$  zo groot.

Omdat de functiewaarden van  $f = 2x$ ,  $x^2$  en  $y = 2^x$  bij toenemende  $x$  steeds toenemen, zijn de functies voorbeelden van **Groevormen**



## 6. Gebroken rationale functies

Gebroken rationale functies zijn functies van de vorm  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$   
waarin  $g(x)$  en  $h(x)$  polynomen zijn met reële coëfficiënten.

De grafieken van deze functies kunnen verschillende *hyperbolische* vormen aannemen.

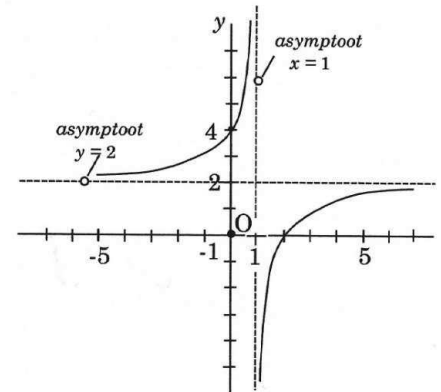
Hiervan een voorbeeld  $f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$

De functie is niet gedefinieerd in het punt met  $x = 1$ , omdat voor die waarde de *noemer gelijk aan nul* wordt en dus de bijbehorende functiewaarde onbepaald is.

De functie heet dan **discontinu** in het punt met  $x = 1$ .

Verder volgt uit  $x = 0 \Rightarrow y = 4$  en uit  $y = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0$

dus  $x = 2$  dus de grafiek snijdt de  $x$ -as in  $(2,0)$  en de  $y$ -as in  $(0,4)$ .



Plot je de functie in de GR, dan blijkt de grafiek te bestaan uit twee krommen die je na *kegelsneden* zult herkennen als de *twee takken van een gelijkzijdige hyperbool*.

Je ziet dat *bij toenemende*  $|x|$  (dus  $x$  naar rechts of naar links toenemend), *rechter- en linkertak naderen tot de lijn*  $y = 2$  hetgeen als volgt is te bewijzen:

Deel je teller en noemer van  $f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$  door  $x$ , dan ontstaat  $f(x) = \frac{\frac{1}{x}(2x-4)}{\frac{1}{x}(x-1)} = \frac{2-\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}}$  ... (1)

Als  $x$  in (1) tot **oneindig nadert**, dan naderen  $\frac{4}{x}$  en  $\frac{1}{x}$  tot nul zodat (1) overgaat in

$f(x) = \frac{2-\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{2-0}{1-0} = 2$ . In wiskundige termen:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-4}{x-1} = 2$  (Volgt verder op blz. 37).

De lijn  $y = 2$  heet nu een **horizontale asymptoot** van de functie  $y = f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$

Zo is ook aan te tonen dat *bij toenemende*  $|y|$  beide takken *naderen tot de lijn*  $x = 1$ .

De functie heeft dus ook een **verticale asymptoot**  $x = 1$ . (Gr. 'symptootos' = samenvallend).

## 7. Asymptoten

Een *asymptoot van een functie* is in het algemeen een *lijn*  $y = ax + b$  waartoe de kromme  $y = f(x)$  steeds dichterbij nadert, **zonder hem ooit te raken**. We onderscheiden **horizontale, verticale en scheve asymptoten**. Hoe dichterbij  $x$  en of  $y$  tot *oneindig naderen*, hoe dichterbij de (grafiek van)  $y = f(x)$  tot de *lijn*  $y = ax + b$  nadert.

In het geval hierboven zijn dus de *horizontale lijn*  $y = 2$  en de *verticale lijn*  $x = 1$

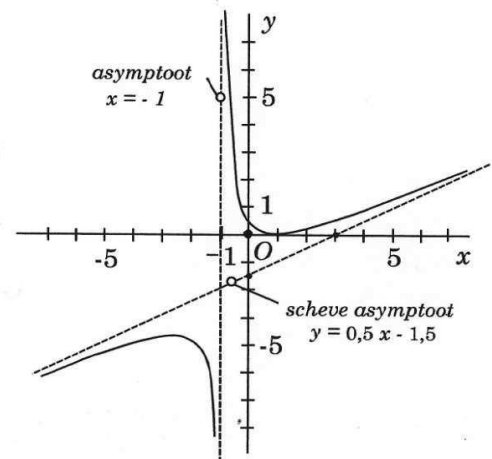
respectievelijk een horizontale en verticale asymptoot van de functie  $y = f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$ .

In de volgende opgave bespreken we de **scheve asymptoot**.

1.  $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$

Omdat de noemer van de breuk bij  $x = -1$  de waarde nul aanneemt, is de functie voor dat punt *niet gedefinieerd*.

Je ziet dan ook dat de grafiek van bij  $x = -1$  zowel naar een *oneindig grote waarde* ( $+\infty$ ) als naar een oneindig kleine waarde ( $-\infty$ ) gaat.  $f(x)$  **bestaat dus niet** in  $x = -1$ . De functie heet daarom **discontinu** in  $x = -1$ .



Het *snijpunt met de y-as* is het punt met  $x = 0$

en  $y = \frac{0,5(0-1)^2}{0+1} = 0,5$  dus is het punt **(0; 0,5)**.

- Een *snijpunt met de x-as* is het punt met

$y = 0$ , dus als  $\frac{0,5(x-1)^2}{x+1} = 0$  ofwel:

$0,5(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$  (dubbeltellend)

twee *samenvallende punten*  $x = 1$ .

Punt (1, 0) is dan **raakpunt** van  $f(x)$  aan de  $x$ -as.

1<sup>o</sup>. De grafiek heeft een verticale asymptoot in het punt met  $x = -1$ .

Bewijs:

Als  $x$  **van links nadert tot**  $-1$  dan nadert de *noemer* van  $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$  tot 0 waarbij

de waarde van  $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$  tot  $-\infty$  nadert.

$x = -1$  is dus een (verticale) asymptoot van de linkertak van de hyperbool.

2<sup>o</sup>. Ook van de rechtertak is de lijn  $x = 1$  een asymptoot want als  $x$  **van rechts**

**nadert tot**  $-1$  dan nadert de noemer van  $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$  tot  $\delta$  dus tot 0. \*)

De waarde van  $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$  nadert dan **van rechts** tot  $+\infty$  dus  $x = -1$  is *tevens* asymptoot van de rechtertak van de hyperbool.

- Omdat een eventuele limiet van  $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$  als  $x$  **tot plus of min oneindig nadert** niet direct is te berekenen, herleiden we de functie: door een *staartdeling* uit te voeren:

$$\begin{array}{r} x + 1 \overline{) 0,5x^2 - x + 0,5} \\ \underline{0,5x^2 + 0,5x} \phantom{0,5} \\ -1,5x + 0,5 \\ \underline{-1,5x - 1,5} \\ 2 \end{array}$$

dus is de gegeven functie gelijkwaardig met:

$$y = 0,5x - 1,5 + \frac{2}{x+1}$$

De limiet hiervan als  $x$  tot  $\pm\infty$  nadert is dan  $y = 0,5x - 1,5$  omdat  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x+1} = 0$ .

De lijn met vergelijking  $y = 0,5x - 1,5$  heet dan een **scheve asymptoot** van de gegeven functie. De richting is immers niet horizontaal en niet verticaal.

\*) Het getal  $\delta$  wordt in de wiskunde vaak gebruikt om een kleine, tot nul naderende, positieve waarde, aan te geven.

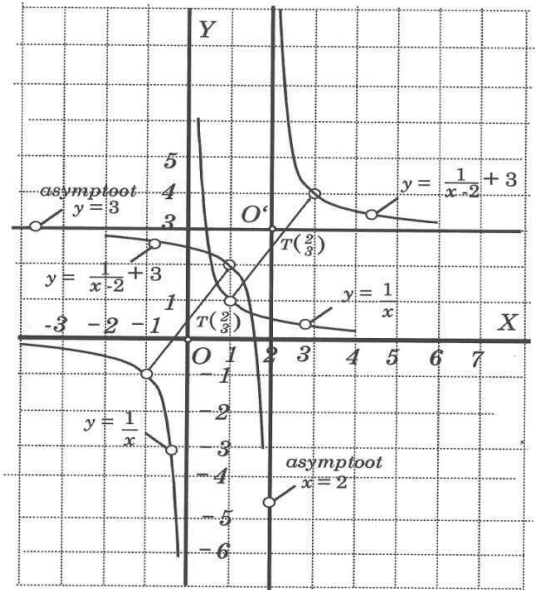
2.  $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$

De grafiek van deze gebroken rationale functie (dus een hyperbool) ontstaat door de translatie  $T(2, 3)$  toe te passen op de *standaardhyperbool*  $g: y = \frac{1}{x}$  volgens de *translatietransformatie-regel*.

Horizontale asymptoot van  $g: y = \frac{1}{x}$  is de  $x$ -as met vergelijking  $y = 0$ , verticale asymptoot is de  $y$ -as met vergelijking  $x = 0$ .

Bij de translatie  $T(2,3)$  gaat de oorsprong  $O$  over in  $O'$  dus de vergelijking  $y = 0$  over in  $y = 0 + 3 = 3$  en de vergelijking  $x = 0$  in  $x = 0 + 2 = 2$

Van  $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$  is de lijn  $y = 3$  dan *horizontale asymptoot* en  $x = 2$  de *verticale asymptoot*.



**Oefenopgaven uit de examenbundel vwo-wiskunde B 2022/ 2023**

Bereken algebraïsch (dus zonder gebruikmaken van de grafische rekenmachine) de oplossing van onderstaande vergelijkingen en controleer je antwoorden.

1.  $x + \sqrt{x + 8} = 4$

Oplossing:  $\sqrt{x + 8} = 4 - x$  dus  
 $x + 8 = (4 - x)^2 = 16 - 8x + x^2$   
 $x^2 - 9x + 8 = 0 \Rightarrow (x-1) \cdot (x-8) = 0$   
 $x = 1 \vee x = 8$ . Alleen  $x = 1$  voldoet.

2.  $x\sqrt{x + 1} + 2\sqrt{x + 1} = 0$

Oplossing:  $x\sqrt{x + 1} = -2\sqrt{x + 1}$   
 Dit is juist als  $x + 1 = 0$  dus als  $x = -1$   
 Als  $x + 1 \neq 0$ , dan mag je links en rechts door  $x + 1$  delen en vind je  $x = -2$ .  $1 \Rightarrow x = -2$ . **Alleen  $x = -1$  voldoet**  
 (want de wortel uit  $-1$  is geen reëel getal)

3.  $\frac{(4x-1) \cdot 3 - 3 - (3x+1) \cdot (2x-1)}{(x+1)^2} = 0$

Oplossing: Zoek waarden van  $x$  waarvoor de **teller = 0** en de **noemer  $\neq 0$**  dus los op:  $(4x-1) \cdot 3 - 3 - (3x+1) \cdot (2x-1) = 12x - 3 - (6x^2 - x - 1) = -6x^2 + 13x - 2 = 0$ , dus op gelost met abc-formule:  
 $x = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot (-6) \cdot (-2)}}{-12} = \frac{-13 \pm 11}{-12} = \frac{1}{6} \vee \frac{-13 - 11}{-12} = 2$   
 Ga na dat beide waarden voldoen.

## 8. Logaritmische functies

### a. Logaritme van een getal

Exponentiële vergelijkingen zoals bij voorbeeld  $17^x = 500$  kan je na voorgaande theorie nog niet algebraïsch oplossen. Men heeft daarom de *logaritme van een getal* ingevoerd.

De Engelse wiskundige Henry Briggs (1561-1630) besloot alle *positieve getallen* als een **macht van tien** te schrijven. De *exponenten* van deze machten noemde hij **logaritmen**, dus de *logaritme* van een getal  $a$  is de *exponent*  $p$  waarbij  $10^p = a$ .

Definitie:  **$\log a = p$  als  $10^p = a$ .**

Zo is bijvoorbeeld  $100 = 10^2$  dus de *logaritme* van  $100 = 2$ . Notatie:  $\log 100 = 2$ .

$1000 = 10^3$  dus  $\log 1000 = 3$ ;  $1 = 10^0 \Rightarrow \log 1 = 0$ ;  $0,001 = 10^{-3} \Rightarrow \log 0,001 = -3$

De *logaritmen* van getallen  $a$  met  $a \leq 0$  **bestaan niet** want er is *geen getal*  $p$  waarvoor  $10^p = a$  als  $a \leq 0$ . (Immers: Elke *positieve* of *negatieve* macht van 10 is groter dan 0)

Briggs berekende de *logaritmen* van alle *viercijferige* getallen en verzamelde ze in 'logaritmetafels'. Zo ontstonden de **Briggse logaritmen**, met als **grondtal** het getal **10** \*)

Niet alleen het getal tien kan als *grondtal*  $g$  voor *logaritmen* dienen, maar in feite **elk positief reëel getal mits  $\neq 1$** .

Omdat bijvoorbeeld  $9 = 3^2$  kan men met *als grondtal* 3 zeggen  ${}^3 \log 9 = 2$ .

Zo is  ${}^5 \log 125 = 3$  omdat  $5^3 = 125$ ;  ${}^{1/3} \log \frac{1}{27} = 3$ , want  $(1/3)^3 = \frac{1}{27}$ , etc.

Men definieert dan:  **${}^g \log a = x$  als  $g^x = a$**  ( $g > 0$ ) als *grondtal* van een exponentiële functie.

Omdat  $g > 0$  is dan ook  $a > 0$  dus **als  $a \leq 0$  dan bestaat  ${}^g \log a$  niet.**

Definitie:

De  ${}^g$  *logaritme* van een getal  $a$  is gedefinieerd door:  **${}^g \log a = x$  als  $g^x = a$**  ( $a$  en  $g > 0$ ,  $g \neq 1$ )

De wiskundige John Napier (1707-1783) voerde veel later voor *het grondtal*  $g$  van de *logaritmen* het '**Getal van Euler**' =  $e$  in. ( $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2,718281828\dots$ )

*Logaritmen* met dit *grondtal* noemt men **natuurlijke logaritmen** omdat de waarde ervan een grote rol speelt in veel *natuurprocessen*.

Notatie voor *logaritmen* met *grondtal*  $e$  is  **$\ln x$** , dus  **$\ln x = {}^e \log x$** .

ONTHOUD:

*Log  $x$  is de Briggse *logaritme* van  $x$  met 10 als *grondtal*, dus  $\log x = {}^{10} \log x$ ,  
 $\ln(x)$  is de *natuurlijke* *logaritme* van  $x$  met  $e$  als *grondtal* dus  $\ln x = {}^e \log x$ .*

*Als  $\log x = p$ , dan is  $10^p = x$ , als  $\ln x = p$  dan is  $e^p = x$ .*

*Dus ook algemeen: Als  ${}^g \log x = p$  dan is  $g^p = x$*

\*) Zo berekende Briggs handmatig 27 wortels uit 10: De wortel uit 10 daarna de wortel uit de uitkomst daarvan en daaruit weer de wortel et cetera. Alles in zestien decimalen nauwkeurig! .Omdat  $\sqrt{10} = 10^{0,5} = 3,16227766\dots$ , is  $\log 3,16227766\dots = 0,5$ ;  $\sqrt{3,16227766} = \sqrt{\sqrt{10}} = 10^{0,25} = 1,77827941\dots$  dus  $\log 1,77827941\dots = 0,25$  en zo verder. En dat was nog maar een begin...

**b. Eigenschappen van logaritmen**

Voor elk positief grondtal  $g$  en alle positieve waarden voor  $a$  en  $b$  gelden de regels:

ONTHOUD:

1.  ${}^g \log ab = {}^g \log a + {}^g \log b$
2.  ${}^g \log \frac{a}{b} = {}^g \log a - {}^g \log b$
3.  ${}^g \log(a^n) = n \cdot {}^g \log a$
- 4<sup>a</sup>  ${}^g \log(g^x) = x$  en 4<sup>b</sup>  $g^{{}^g \log x} = x$

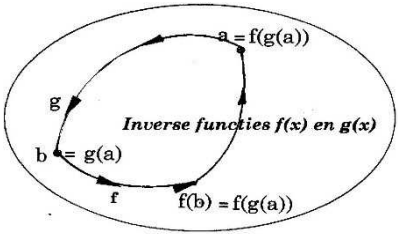
Bewijs:

1. Noem  ${}^g \log a = p$  en  ${}^g \log b = q$  dan is per definitie  $g^p = a$  en  $g^q = b$  met gevolg:  $ab = g^p \cdot g^q = g^{p+q}$ , zodat  ${}^g \log ab = p + q$  dus:  ${}^g \log ab = {}^g \log a + {}^g \log b$ .
2. Noem  ${}^g \log a = p$  en  ${}^g \log b = q$  dan is  $g^p = a$ ,  $g^q = b$  dus  $\frac{a}{b} = \frac{g^p}{g^q} = g^{p-q}$  zodat  ${}^g \log \frac{a}{b} = p - q \Rightarrow {}^g \log \frac{a}{b} = {}^g \log a - {}^g \log b$ .
3. Als  ${}^g \log a = p$  dan  $g^p = a$  en  $a^n = (g^p)^n = g^{n \cdot p} \Rightarrow {}^g \log(a^n) = n \cdot p = n \cdot {}^g \log a$  dus  ${}^g \log(a^n) = n \cdot {}^g \log a$
- 4<sup>a</sup>  ${}^g \log(g^x) = x \cdot {}^g \log g$  (volgens 3)  $= x \cdot 1 = x$  (want  ${}^g \log g = 1$  omdat  $g^1 = g$ )  $\Rightarrow {}^g \log(g^x) = x$ .
- 4<sup>b</sup> Noem  ${}^g \log x = p$  dan  $g^p = x$  zodat  $g^{g \log x} = g^p = x \Rightarrow g^{g \log x} = x$

**c. Inverse functies**

Het origineel  $x$  van een functie  $f(x)$  kan zelf een functie  $g(x)$  van  $x$  zijn. In dat geval is dan  $f(x) = f(g(x))$ .

Punt  $a$  wordt in de figuur door een functie  $g$  afgebeeld op punt  $b$ , dus  $b = g(a)$ . Stel nu dat door een functie  $f$  het beeld  $b = g(a)$  weer terug wordt afgebeeld op punt  $a$  dan is  $f(b) = a$  ofwel  $f(g(a)) = a$ .



In feite is het origineel  $a$  na een rondreisje weer op zichzelf teruggeworpen.

Als je het goed snapt en je keert alle pijlen even om, dan zie je dat punt  $a$  nu via het reisje  $g(f(b))$  weer terugkomt in  $a$ .

Je mag dan zeggen:  $f(g(a)) = g(f(a)) = a$  of kortweg  $f g(a) = g f(a) = a$

Als deze eigenschap geldt voor alle elementen binnen het domein van de functies  $f$  en  $g$  dan heten  $f$  en  $g$  elkaars **inverse functie**. Dus:

Zijn  $f$  en  $g$  twee functies waarbij voor elk element binnen hun gemeenschappelijk domein geldt:  $f g(x) = g f(x) = x$ , dan heten  $f$  en  $g$  elkaars inverse functie

Zo zijn machtsverheffen  $f(x) = x^p$  en worteltrekken  $g(x) = \sqrt[p]{x}$  elkaars inverse functies, want voor elk getal  $x$  is  $f(g(x)) = f(\sqrt[p]{x}) = (\sqrt[p]{x})^p = x$  en  $g(f(x)) = g(x^p) = \sqrt[p]{x^p} = x$ .

Algemeen geldt dan ook: Als  $f$  en  $g$  elkaars inverse functie zijn, dan geldt ook steeds:

als  $f(a) = b$  dan is  $g(b) = a$ , dus hier bijvoorbeeld: Omdat  $2^3 = 8$  is  $\sqrt[3]{8} = 2$

Eigenschap: De logaritmische functie  $f(x) = {}^g \log x$  en de exponentiële functie  $g(x) = g^x$  zijn elkaars inverse functie

**Bewijs:**

Noem  $f(x) = {}^g \log x$  en  $g(x) = g^x$  dan is:  $f(g(x)) = f(g^x) = {}^g \log(g^x) = x$  (eig. 4<sup>a</sup>) ... (1)

Ook is  $g(f(x)) = g({}^g \log x) = g^{{}^g \log x} = x$  (eig 4<sup>b</sup>) ... (2)

Uit (1) en (2) volgt dan  $f(g(x)) = g(f(x)) = x$  dus zijn

$f(x) = {}^g \log x$  en  $h(x) = g^x$  per definitie elkaars **inverse functies**.

**Algemene eigenschap van inverse functies**

Twee functies  $f$  en  $g$  waarvan de grafieken elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn  $y = x$  zijn elkaars inverse functies en omgekeerd.

**Bewijs:**

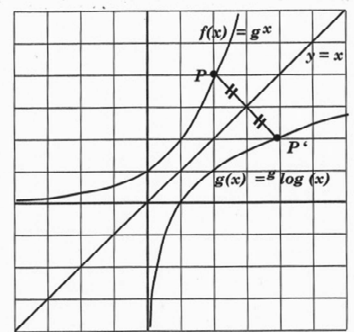
Eerder leerde je: Bij spiegeling **in de lijn  $y = x$**  vervang je  $x$  door  $y$  en  $y$  door  $x$ , als bijvoorbeeld:  $2x - 3y = 4$  spiegeling in  $y = x$   $2y - 3x = 4$

Neem  $f: y = e^x$  dan is daarvan het spiegelbeeld in de lijn  $y = x$ :  $g: x = e^y$

Uit  $g: x = e^y$  volgt  $e \log x = y$ , zodat nu de voorwaarde geldt:

$f(g(x)) = e^{e \log x} = x$  en  $g(f(x)) = e^{\log e^x} = x$ , dus:

**$f$  en  $g$  zijn elkaars inverse functies**



**Voorbeeld** (Uit examenopgave vwo-B)

Toon aan dat  $f(x) = 5 - \frac{6}{x+2}$  en  $g(x) = \frac{2x-4}{5-x}$  elkaars inverse functies zijn:

a. Ga uit van  $y = 5 - \frac{6}{x+2}$  en verwissel  $x$  en  $y$

Je ziet dan dat  $x = 5 - \frac{6}{y+2}$  het spiegelbeeld is van  $y = 5 - \frac{6}{x+2}$  in de lijn  $y = x$ .

b. Maak  $y$  vrij in  $x = 5 - \frac{6}{y+2}$

Er komt dan  $\frac{6}{y+2} = 5 - x \Rightarrow y + 2 = \frac{6}{5-x} \Rightarrow y = \frac{6}{5-x} - 2$

Dus  $f^{inv}(x) = \frac{6}{5-x} - 2 = \frac{6}{5-x} - 2 \cdot \frac{5-x}{5-x} = \frac{6-10+2x}{5-x} = \frac{2x-4}{5-x} = g(x)$

Het spiegelbeeld van  $f(x) = 5 - \frac{6}{x+2}$  in de lijn  $y = x$  is dus gelijk aan  $g(x) = \frac{2x-4}{5-x}$ .

Hiermee is aangetoond dat  $f$  en  $g$  elkaars inverse functies zijn.

**Opgaven**

1. Bewijs dat algemeen geldt:  ${}^g \log x = \frac{\log x}{\log g}$ . (eigenschap 5)

Noem  ${}^g \log x = p$  dan is  $x = g^p$ . Noem  $\log x = q$  dan is ook  $x = 10^q$

zodat  $g^p = 10^q = x$  ... (1)

Noem  $\log g = r$ , dan  $g = 10^r \Rightarrow x = g^p = (10^r)^p = 10^{rp} = 10^q$  volgens (1)

dus  $r \cdot p = q \Rightarrow p = \frac{q}{r}$  ofwel  ${}^g \log x = \frac{\log x}{\log g}$ .

**NB:** Dankzij deze eigenschap kunnen logaritmen met *elk willekeurig grondtal  $g$*  via *Briggse logaritmen* (grondtal = 10) berekend worden met de GR TI-83/84

Voorbeelden:  ${}^3 \log 17 = \frac{\log 17}{\log 3} \approx 2,5789$ ;  ${}^{1/3} \log 52 = \frac{\log 52}{\log 1/3} \approx -3,5966$