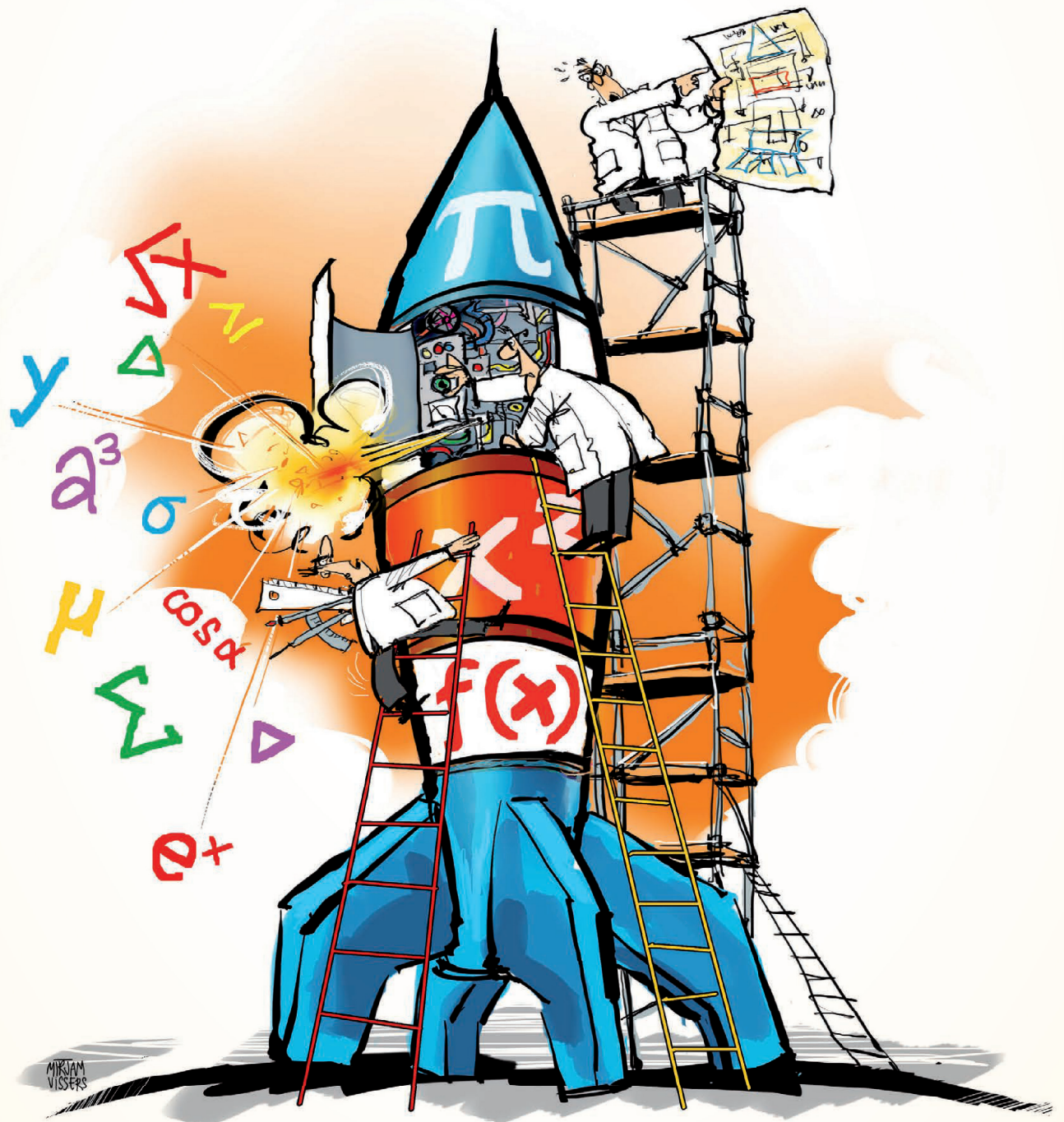


Startrekenen Wiskit

Leerwerkboek deel 1 – Functies

Basisvaardigheden wiskunde



SANDER HEEBELS • ROB LAGENDIJK • JELTE FOLKERTSMA •
JASPER VAN ABSWOUDE • CYRIEL KLUITERS • RIEKE WYNIA

uitgeverij
~deviant

Inhoudsopgave

Deel 1 Functies

Hoofdstuk 1 – Functies en grafieken	7
Hoofdstuk 2 – Lineaire vergelijkingen	33
Hoofdstuk 3 – Lineaire functies	57
Hoofdstuk 4 – Kwadratische functies	85
Hoofdstuk 5 – Kwadratische vergelijkingen	109
Hoofdstuk 6 – Ongelijkheden	149
Hoofdstuk 7 – Andere functies	167
Hoofdstuk 8 – Differentiëren	189
Appendix	211

Trefwoordenregister

abc-formule	130	Macht	220
Afgeleide functie	197	Ongelijkheid	150
Assenstelsel	13	Oorsprong	13
Asymptoot	177	Parabool	86
Beginwaarde	183	Productregel	203
Bergparabool	87	Quotiënt	216
Coördinaten	14	Quotiëntregel	204
Dalparabool	87	Raaklijn	190
Derdemachtsfunctie	168	Raakpunt	190
Differentiëren	197	Rekenregels	8
Discriminant	130	Richtingscoëfficiënt	190
Domein (van een functie)	172	Somfunctie	77
Domein (van een grafiek)	27	Somregel	202
Exponent	220	Startgetal	58
Exponentiële functie	183	Top	87
Extreme waarde	94	Uitdrukking	212
Functie	18	Variabele	18, 212
Gebroken functie	177	Vergelijking	34
Grafiek	18	Verschilfunctie	78
Grondtal	183, 220	Wortel	234
Hellinggrafiek	196	Wortelfunctie	172
Hellingsgetal	58	x-as	13
Herleiden	212, 216	y-as	13
Hyperbool	177		
Kwadraat	220		
Kwadratische functie	86		
Lineaire functie	22		

Aan de deelnemer

Voor je ligt **deel 1 - Functies** van de methode *Startrekenen Wiskit*. Je moet op 2F-niveau kunnen rekenen om in dit leerwerkboek aan de slag te kunnen. Als je deel 1 hebt afgerond, kun je verder werken in **deel 2A - Statistiek** en/of **deel 2B - Meetkunde**.

Hoe werk je met de methode?

Startrekenen Wiskit deel 1 - Functies is opgebouwd uit acht hoofdstukken en een appendix. Elk hoofdstuk is onderverdeeld in verschillende paragrafen. Elke paragraaf behandelt een hapklaar deel lesstof. Op die manier maak je stap voor stap kennis met wiskunde. De paragrafen zijn steeds op dezelfde manier opgebouwd.

De appendix behandelt onderwerpen waarvan de kans bestaat dat je ze al eerder gezien hebt. De stof in de appendix vormt een basis die je in verschillende hoofdstukken nodig hebt.

De opbouw van een paragraaf

De paragraaf begint met een leerdoelenkader, waarin de volgende vragen worden beantwoord:

- ▶ **Leerdoel** Wat leer je in deze paragraaf?
- ▶ **Voorkennis** Welke paragrafen moet je beheersen voordat je met deze paragraaf kunt beginnen? Hierbij kan ook worden verwezen naar paragrafen in de appendix.

T

Na het leerdoelenkader volgt een blokje **Theorie**. In de theorie wordt het onderwerp geïntroduceerd en kort uitgelegd. Je herkent een theorieblok aan de **T** in de kantlijn.

V₁

Na een theorieblok volgen verschillende **Voorbeelden** waarin de besproken theorie wordt toegelicht aan de hand van een voorbeeldopgave. De opgave wordt stapsgewijs uitgewerkt. Je herkent de voorbeelden aan de genummerde **V** in de kantlijn en aan het blauwe kader.

V₂

Op de uitgebreide voorbeelden volgen één of meerdere beknopte voorbeeldoplossingen, zonder uitleg. Uit deze voorbeelden kun je afleiden hoe je zelf zo'n opgave moet uitwerken. Ook deze voorbeelden herken je aan een genummerde **V** in de kantlijn.

O

Opdracht 1

Elke paragraaf bevat een aantal **Oefenopdrachten** die aansluiten bij de theorie en de voorbeelden. Om de oefenopdrachten te maken, kun je het beste een schrift met ruitjes van 0,5 cm × 0,5 cm gebruiken. Je kunt zelf of in overleg met de docent bepalen hoeveel oefenopdrachten je moet maken. De oefenopdrachten herken je aan de **O** in de kantlijn.

K

Kernopdracht

Elke paragraaf wordt afgesloten met een **Kernopdracht**. De kernopdracht toetst de stof uit de paragraaf. De opdracht staat op een pagina met ruitjespapier. Dit is de uitwerkrimte voor de kernopdracht. Je maakt de kernopdracht dus altijd in je boek. Op deze manier kun je later terugkijken hoe je bepaalde opdrachten hebt uitgewerkt en kan je docent de opgaven nakijken. Je bouwt op deze manier bovendien een portfolio op in je boek. De kernopdracht herken je aan de **K** in de kantlijn en aan het oranje kader.

Lineaire vergelijkingen

§ 2.1	Vergelijkingen oplossen met een grafiek	34
	Vergelijkingen oplossen door een snijpunt af te lezen.	
§ 2.2	Vergelijkingen oplossen zonder grafiek	39
	De oplossing van een lineaire vergelijking berekenen.	
§ 2.3	Herleiden oplossen	43
	Herleiden en oplossen van lineaire vergelijkingen.	
§ 2.4	Vergelijkingen met gebroken getallen	48
	Vergelijkingen met gebroken getallen herleiden en oplossen.	
§ 2.5	Snijpunten berekenen	53
	Coördinaten van een snijpunt van lineaire functies berekenen.	



§ 5.6 De abc-formule 2

- **Leerdoel** Kwadratische vergelijkingen met 2, 1 of 0 oplossingen oplossen met behulp van de abc-formule.

T

Een kwadratische vergelijking kan 2, 1 of 0 oplossingen hebben. Je kunt aan de waarde van D zien hoeveel oplossingen de vergelijking heeft.

- $D > 0$

De abc-formule geeft twee oplossingen:

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{of} \quad x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

- $D = 0$

De abc-formule geeft:

$$x = \frac{-b + \sqrt{0}}{2a} \quad \text{of} \quad x = \frac{-b - \sqrt{0}}{2a}$$

$$\sqrt{0} = 0$$

0 ergens bij optellen of van aftrekken geeft dezelfde uitkomst:

$$\frac{-b + 0}{2a} = \frac{-b - 0}{2a}$$

De oplossing van de vergelijking is:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Een kwadratische vergelijking met $D = 0$ heeft dus maar één oplossing.

- $D < 0$

De abc-formule geeft: $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ of $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

$D < 0$ betekent dat D een negatief getal is. Je kunt geen wortel nemen van een negatief getal.

$\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ kun je in dit geval niet uitrekenen; $\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ kun je dan ook niet uitrekenen.

Een kwadratische vergelijking met $D < 0$ heeft dus geen oplossingen.

De algemene regel is:

$D > 0$ → 2 oplossingen;

$D = 0$ → 1 oplossing;

$D < 0$ → 0 oplossingen.

V₁Los op: $9x^2 + 12x + 4 = 0$.**Stap 1** Schrijf de waarden van a , b en c op.

$$a = 9, b = 12, c = 4$$

Stap 2 Reken D uit.

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4$$

$$D = 144 - 144$$

$$D = 0 \quad \rightarrow \quad \text{de vergelijking heeft 1 oplossing.}$$

Stap 3 Los op door de abc-formule verder in te vullen.

$$x = \frac{-12 + \sqrt{0}}{2 \cdot 9}$$

$$x = \frac{-12 + 0}{18}$$

$$x = \frac{-12}{18}$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

Stap 4 Controleer de oplossing.

$$9x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$\text{Vul } x = -\frac{2}{3} \text{ in.}$$

$$9 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 12 \cdot -\frac{2}{3} + 4 = 0$$

$$9 \cdot \frac{4}{9} - 8 + 4 = 0$$

$$4 - 8 + 4 = 0$$

$$9x^2 + 12x + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{2}{3}$$

V₂Los op: $2x^2 + 5x + 4 = 0$.**Stap 1** Schrijf de waarden van a , b en c op.

$$a = 2, b = 5, c = 4.$$

Stap 2 Reken D uit.

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4$$

$$D = 25 - 32$$

$$D = -7$$

$$D < 0 \quad \rightarrow \quad \text{de vergelijking heeft geen oplossingen.}$$

 $2x^2 + 5x + 4 = 0$ heeft geen oplossingen.

0

Opdracht 1Bekijk de vergelijking: $-2x^2 - 5x - 2 = 0$.

- Schrijf de waarden van a , b en c op.
- Bereken de discriminant en bepaal hoeveel oplossingen de vergelijking heeft.
- Los op door de abc-formule verder in te vullen.
- Controleer de oplossingen door deze in te vullen in de vergelijking.

Opdracht 2

Los op.

- | | | |
|-------------------------|------------------------|-------------------------|
| a. $-x^2 - 8x - 7 = 0$ | e. $x^2 + 3x + 2 = 0$ | i. $4x^2 + x - 5 = 0$ |
| b. $2x^2 - 5x + 4 = 0$ | f. $x^2 + 4x + 4 = 0$ | j. $2x^2 - 3x + 9 = 0$ |
| c. $-3x^2 + 5x - 2 = 0$ | g. $2x^2 + 5x - 7 = 0$ | k. $2x^2 + 7x - 4 = 0$ |
| d. $2x^2 + 4x + 2 = 0$ | h. $x^2 - 2x - 3 = 0$ | l. $-x^2 + 8x - 16 = 0$ |

Opdracht 3Bekijk de vergelijking: $x^2 - \frac{7}{6}x - \frac{1}{3} = -\frac{4}{6}$.

- Herschrijf de vergelijking.
- Schrijf de waarden van a , b en c op.
- Bereken de discriminant en bepaal hoeveel oplossingen de vergelijking heeft.
- Los op door de abc-formule verder in te vullen.
- Controleer de oplossingen door deze in te vullen in de vergelijking.

Opdracht 4

Los op.

- | | |
|---------------------------------|---|
| a. $x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 4$ | e. $3x^2 + 7x + 1 = x^2 + 5$ |
| b. $3(x^2 - x) = 1$ | f. $16x^2 = 2x(2x + 7) - 2$ |
| c. $5x^2 - 2 = 3x$ | g. $x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ |
| d. $9x + 5 = -4x^2$ | h. $1 = 3x^2 + 2x - 7$ |

K**Kernopdracht**

Los op.

a. $5x^2 + 2x + 16 = 0$

c. $\frac{3}{5}x^2 - 2\frac{4}{5}x = 1$

b. $\frac{x^2}{16} = \frac{1}{2}x - 1$

d. $-1 - 9x = 14x^2$

§ 5.8 Snijpunten berekenen

► **Leerdoel** Coördinaten van snijpunten met kwadratische functies berekenen.

T

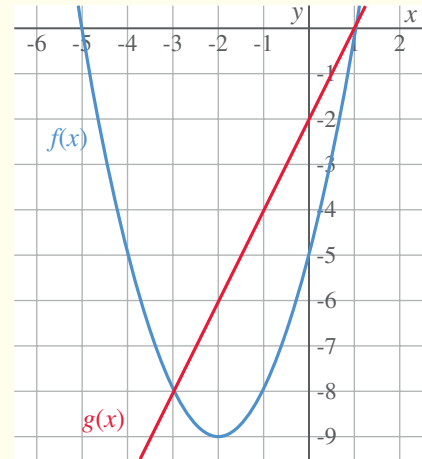
Om de coördinaten van een snijpunt te berekenen, moet je de vergelijking oplossen die bij het snijpunt hoort. De oplossing van de vergelijking is de x -coördinaat van het snijpunt. Je vult daarna de oplossing in de functies in om de y -coördinaat van het snijpunt te berekenen.

V₁

Je ziet de grafieken van $f(x) = x^2 + 4x - 5$ en $g(x) = 2x - 2$. Bereken de coördinaten van de snijpunten van $f(x)$ en $g(x)$.

Stap 1 Los de vergelijking op om de x -coördinaten te berekenen.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^2 + 4x - 5 &= 2x - 2 \\ x^2 + 4x - 3 &= 2x \\ x^2 + 2x - 3 &= 0 \\ (x + 3)(x - 1) &= 0 \\ x &= -3 \text{ of } x = 1 \end{aligned}$$



Stap 2 Bereken de y -coördinaten door de oplossingen in te vullen.

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^2 + 4 \cdot -3 - 5 = 9 - 12 - 5 = -8 & g(-3) &= -3 \cdot 2 - 2 = -6 - 2 = -8 \\ f(1) &= 1^2 + 4 \cdot 1 - 5 = 1 + 4 - 5 = 0 & g(1) &= 2 \cdot 1 - 2 = 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Stap 3 Schrijf de coördinaten van de snijpunten op.

De grafieken van $f(x)$ en $g(x)$ snijden elkaar in de punten $(-3; -8)$ en $(1; 0)$.

De coördinaten van de snijpunten van $f(x)$ en $g(x)$ zijn $(-3; -8)$ en $(1; 0)$.

V₂

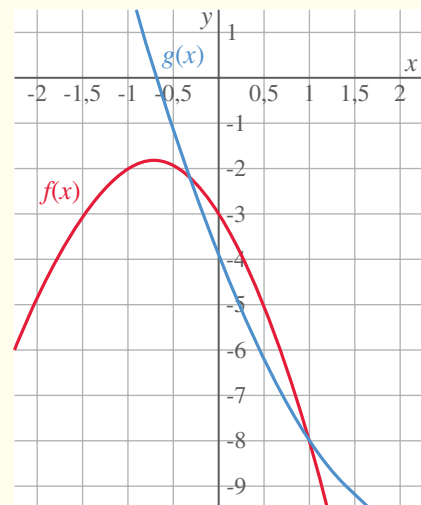
Je ziet de grafieken van $f(x) = -2x^2 - 3x - 3$ en $g(x) = x^2 - 5x - 4$.

Stap 1 Los de vergelijking op.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ -2x^2 - 3x - 3 &= x^2 - 5x - 4 \\ -3x^2 + 2x + 1 &= 0 \\ a \neq 1, b \neq 0 \text{ en } c \neq 0 &\rightarrow \text{gebruik de abc-formule} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 2^2 - 4 \cdot -3 \cdot 1 \\ D &= 4 + 12 \\ D &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 + \sqrt{16}}{-6} & \text{of} & & x &= \frac{-2 - \sqrt{16}}{-6} \\ x &= -\frac{1}{3} & \text{of} & & x &= 1 \end{aligned}$$



Stap 2 Vul x in beide functies in.

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 3 \cdot -\frac{1}{3} - 3 = -\frac{2}{9} + 1 - 3 = -2\frac{2}{9} \quad g\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 5 \cdot -\frac{1}{3} - 4 = \frac{1}{9} + 1\frac{2}{3} - 4 = -2\frac{2}{9}$$

$$f(1) = -2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 3 = -2 - 3 - 3 = -8 \quad g(1) = 1^2 - 5 \cdot 1 - 4 = 1 - 5 - 4 = -8$$

Stap 3 Schrijf de coördinaten van de snijpunten op de juiste wijze op.

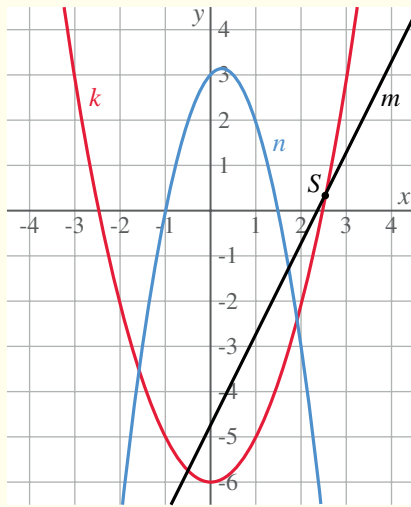
$f(x) = g(x)$ heeft twee oplossingen.

$f(x)$ en $g(x)$ hebben dus 2 snijpunten: $\left(-\frac{1}{3}; -2\frac{2}{9}\right)$ en $(1; -8)$.

De coördinaten van de snijpunten van $f(x)$ en $g(x)$ zijn $\left(-\frac{1}{3}; -2\frac{2}{9}\right)$ en $(1; -8)$.

V₃

Je ziet de grafieken van $f(x) = x^2 - 6$ en $g(x) = -2x^2 + x + 3$ en $h(x) = 2x - 4\frac{3}{4}$.



Bereken de coördinaten van het snijpunt S .

Stap 1 Bepaal welke vergelijking je op moet lossen.

S is het snijpunt van k en m .

m is een rechte lijn \rightarrow m is de grafiek van de lineaire functie $h(x) = 3x - 1$.

k is een dalparabool \rightarrow k is de grafiek van $f(x) = x^2 + 5$.

De vergelijking die je op moet lossen is: $f(x) = h(x)$.

Stap 2 Los de vergelijking op.

$$f(x) = h(x)$$

$$x^2 - 6 = 2x - 4\frac{3}{4}$$

$$x^2 - 2x - 1\frac{1}{4} = 0$$

$$\downarrow \cdot 4 \quad \downarrow \cdot 4$$

$$4x^2 - 8x - 5 = 0$$

$a \neq 1, b \neq 0$ en $c \neq 0 \rightarrow$ gebruik de abc-formule

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot -5$$

$$D = 64 + 80$$

$$D = 144$$

$$x = \frac{8 + \sqrt{144}}{8}$$

of $x = \frac{8 - \sqrt{144}}{8}$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

of $x = -\frac{1}{2}$

§ A.1 Som en verschil

► **Leerdoel** Optellen en aftrekken van variabelen.

T

In de wiskunde worden letters gebruikt om een variabele of onbekend getal weer te geven. Zo'n letter noem je daarom een **variabele** of onbekende. Met een variabele kun je op dezelfde manier rekenen als met een ander getal.

Een wiskundige bewerking met variabelen noem je een **uitdrukking**. Je schrijft in de uitdrukking geen vermenigvuldigingsteken (\cdot) tussen een variabele en een cijfer.

V₁

$$x + 5$$

x is een variabele.
 $x + 5$ is een uitdrukking.

V₂

$2a$ betekent $2 \cdot a$.

a is een variabele.
 $2a$ is een uitdrukking.
 De \cdot laat je weg tussen een cijfer en een variabele.
 Je schrijft $2 \cdot a$ als $2a$.

T

Een uitdrukking met variabelen moet je zo ver mogelijk **herleiden**. Herleiden betekent dat je de uitdrukking herschrijft met zo min mogelijk variabelen en bewerkingen.

Een uitdrukking met een som of verschil van gelijke variabelen kun je herleiden. Je kunt de gelijke variabelen optellen of aftrekken.

V₃

Herleid: $2a + 3a$.

Dit is een som van twee gelijke variabelen. Je kunt de variabelen dus optellen.

Stap 1 Schrijf de variabelen als product.

$$2a = 2 \cdot a$$

$$3a = 3 \cdot a$$

Stap 2 Schrijf de uitdrukking opnieuw op.

$$2a + 3a = 2 \cdot a + 3 \cdot a$$

Stap 3 Tel de producten op.

$$2 \cdot a + 3 \cdot a = (2 + 3) \cdot a = 5 \cdot a = 5a$$

$$2a + 3a = 5a$$

V₄Herleid: $5x + x$.**Stap 1** Schrijf de variabelen als product.

$$5x = 5 \cdot x$$

$$x = 1 \cdot x$$

Stap 2 Schrijf de uitdrukking opnieuw op.

$$5x + x = 5 \cdot x + 1 \cdot x$$

Stap 3 Tel de producten op.

$$5 \cdot x + 1 \cdot x = (5 + 1) \cdot x = 6 \cdot x = 6x$$

$$5x + x = 6x$$

V₅Herleid: $b - \frac{1}{6}b$.**Stap 1** Schrijf de variabelen als product.

$$b = 1 \cdot b$$

$$\frac{1}{6}b = \frac{1}{6} \cdot b$$

Stap 2 Schrijf de uitdrukking opnieuw op.

$$b - \frac{1}{6}b = 1 \cdot b - \frac{1}{6} \cdot b$$

Stap 3 Trek de producten af.

$$1 \cdot b - \frac{1}{6} \cdot b = \frac{5}{6} \cdot b = \frac{5}{6}b$$

$$b - \frac{1}{6}b = \frac{5}{6}b$$

V₆Herleid: $-2a + 3,5a$.**Stap 1** Schrijf de variabelen als product.

$$-2a = -2 \cdot a$$

$$3,5a = 3,5 \cdot a$$

Stap 2 Schrijf de uitdrukking opnieuw op.

$$-2a + 3,5a = -2 \cdot a + 3,5 \cdot a$$

Stap 3 Tel de producten op.

$$-2 \cdot a + 3,5 \cdot a = 1,5 \cdot a = 1,5a$$

$$-2a + 3,5a = 1,5a$$

V₇Herleid: $-x - 4x$.**Stap 1** $-x = -1 \cdot x$

$$4x = 4 \cdot x$$

Stap 2 $-x - 4x = -1 \cdot x - 4 \cdot x$ **Stap 3** $-1 \cdot x - 4 \cdot x = -5 \cdot x = -5x$

$$-x - 4x = -5x$$

T

Verschillende variabelen kun je **niet** bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken.

V₈

Herleid: $2b - 3a$.

b en a zijn verschillende variabelen. Ze kunnen een verschillende waarde hebben. Je kunt de variabelen niet optellen.

$2b - 3a$ kun je niet verder herleiden.

V₉

Herleid: $3x + y - 2x$.

Stap 1 Herschrijf de uitdrukking zodat de gelijke variabelen bij elkaar staan.

$$3x + y - 2x = 3x - 2x + y$$

Stap 2 Schrijf de gelijke variabelen als product.

$$3x - 2x + y = 3 \cdot x - 2 \cdot x + y$$

Stap 3 Herleid de gelijke variabelen.

$$3 \cdot x - 2 \cdot x + y = 1 \cdot x + y = x + y$$

$$3x + y - 2x = x + y$$

0

Opdracht 1

$$5a + 2b + 8a$$

- Herschrijf de uitdrukking zodat de gelijke variabelen bij elkaar staan.
- Herleid de uitdrukking.

Opdracht 2

Herleid.

a. $x + 2x$

b. $5a - 2a$

c. $3x + 6x$

d. $x - 5x$

e. $2x + 3y$

f. $-3b + 4b$

g. $-2a - 3a$

h. $-4x + x$

i. $3a + 3b$

j. $2x + (-5x)$

k. $-3x + 4$

l. $2x - 2x + 2$

Opdracht 3

Herleid.

a. $3b + 2a - 4a$

b. $2x + 2y - 3x$

c. $-3x + 2y - 4x$

d. $a + 5 - a$

e. $a - 3b - a + 2b$

f. $2b - 3,5b - 1,5b$

g. $2,5a + 0,5a$

h. $\frac{1}{3}b + \frac{2}{3}b$

i. $0,2x - x + 0,4$

j. $0,7y - 0,3x + 1,3y$

k. $-\frac{5}{6}a + \frac{1}{6}a$

l. $-1,8x - 0,5a + 1,5a - 1,2x$

K**Kernopdracht**

Herleid.

a. $3x - 7x$

c. $3a + \frac{1}{3}a$

e. $5a + 5 - 2a$

b. $5a - 3x + 2a$

d. $-2b + 2a$

f. $0,5x - 1,1y + 0,1x - 0,8y$

Basisvaardigheden wiskunde

Startrekenen Wiskit is een methode waarmee jij je wiskundige kennis kunt bijspijkeren en opfrissen. De methode is uitermate geschikt om je basisvaardigheden wiskunde te trainen, waardoor je beter aansluiting hebt op een hbo-opleiding.

Je moet op 2F-niveau kunnen rekenen om in *Startrekenen Wiskit* aan de slag te kunnen gaan. Wiskundige voorkennis is niet vereist.

Deel 1 Functies

In dit deel van *Startrekenen Wiskit* wordt de absolute basis van de wiskunde behandeld. De nadruk ligt op het gebruiken van functies en het oplossen van vergelijkingen.

Opbouw van het leerwerkboek

Het leerwerkboek bestaat uit een aantal hoofdstukken die zijn onderverdeeld in korte paragrafen. Elke paragraaf behandelt een specifiek wiskundig onderwerp. Elke paragraaf begint met een leerdoel zodat je weet wat je gaat leren in een paragraaf.

Elke paragraaf is in drie trappen opgebouwd:

1. **theorie**: korte uitleg van de stof in begrijpelijk taal;
2. **voorbeelden**: de theorie wordt ondersteund met één of meerdere uitgebreide en stapsgewijze voorbeeldoplossingen;
3. **opdrachten**: een aantal oefenopdrachten die je maakt in een schrift, en een kernopdracht die je uitwerkt in het leerwerkboek.

ISBN 978-94-90998-370



9 789490 998370