Wiskunde voor het MLO – Deel 4

Differentiëren / limieten

Jan Lips
Arjo Riemslag

Tweede druk

Syntax Media – Utrecht

Voorwoord

Aan de gebruiker

Wiskunde voor het MLO deel 4 is bestemd voor studenten, die na hun studie op het middelbaar beroepsonderwijs verder gaan studeren aan een opleiding voor hoger beroeps onderwijs.
Op dit moment is het nog zo dat een mbo-diploma recht geeft op toegang tot een willekeurige hbo-opleiding. Bij een technische opleiding op hbo-niveau wordt er vanuit gegaan, dat je de theorie over limieten en differentiëren beheerst, daar dit ook onderdeel van het HAVO examen is. Dit boek voorziet in het oplossen van dit hiaat. Het boek is zo geschreven dat je in staat zou moeten zijn om het zelfstandig door te werken en, al doende, leer je dan zelf met deze materie om te gaan. De hoofdstukken zijn zo samengesteld, dat aan de hand van kleine stukken theorie, afgewisseld met opgaven, de stof eigen gemaakt wordt. Elk hoofdstuk wordt afgesloten met oefenopgaven waarvan de antwoorden achterin het boek staan, zodat getest kan worden of de behandelde lesstof begrepen is.

Hoewel we bij sommige onderwerpen, om onderwijskundige redenen, wel erg lang blijven stilstaan, moet je steeds voor ogen houden dat we bezig zijn met **onderzoek van grafieken van verbanden**. Hoe kun je snel van een verband een schets maken, zonder alle punten (van de grafiek) uit te rekenen? Wat doet het verband, als je oneindig grote waarden van x neemt? Hoe weet je zeker dat de grafiek blijft stijgen en niet meer afbuigt?

In het laatste hoofdstuk komt alles samen en moet je van een gegeven verband, op efficiënte wijze, een schets kunnen maken.

Bij de herziening van dit boek zijn storende fouten verbeterd. Op- of aanmerkingen van gebruikers stellen wij zeer op prijs.

Januari 2014

Jan Lips en Arjo Riemslag

Inhoud

Natuurlijk is ook hiervoor een notatie in gebruik. De limiet bepalen vanaf *links* met steeds *groter* wordende waarden, levert in het voorbeeld de volgende limietnotatie op (je gaat richting een hogere x-waarde): $\lim\limits_{x \uparrow 2} \dfrac{3(x-2)}{x-2} = 3$

De notatie voor benadering komend van rechts af naar $x = 2$ ziet er als volgt uit (je gaat richting een lagere x-waarde): $\lim\limits_{x \downarrow 2} \dfrac{3(x-2)}{x-2} = 3$

Opgave 9 Gegeven de functie f: $f(x) = \dfrac{3x-6}{x-2}$

a. Bepaal $\lim\limits_{x \downarrow 2} \dfrac{3(x-2)}{x-2}$

Maak weer een tabel rond de x-waarde 2.

b. Bepaal $\lim\limits_{x \uparrow 2} \dfrac{3(x-2)}{x-2}$

c. Bestaat de limiet? Met andere woorden is de uitkomst van a gelijk aan de uitkomst van b?
d. Teken de grafiek van f.

Opgave 10 Gegeven de functie f: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

a. Voor welke x-waarde bestaat er geen functiewaarde?
b. Maak een tabel met x-waarden rondom deze waarde met de bijbehorende functiewaarden.
c. Bepaal $\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{1}{x}$
d. Bepaal $\lim\limits_{x \uparrow 0} \dfrac{1}{x}$
e. Bestaat deze limiet?
f. Teken de grafiek van f.

Even tijd voor het invoeren van een nieuw begrip: oneindig, notatie: ∞
In de wiskunde kan met ∞ niet zomaar gerekend worden als met 'normale' getallen.

$\dfrac{\infty}{\infty}$ is niet gelijk aan 1, maar de uitkomst is onbepaald! Dit wil zeggen 'niet te bepalen', ofwel er is geen uitkomst.

Ook geldt $\infty \cdot \infty = \infty$ en niet ∞^2!
Als je elk willekeurig getal, behalve ∞, deelt door ∞ dan komt er 0 uit!
$\infty + 2 = \infty$ maar ook $\infty - \infty = \infty$!
Een erg raar begrip dus, maar je zult er aan moeten wennen, ∞ keert in dit boek veelvuldig terug.

Opgave 11 Maak een tabel van de functie f: $f(x) = \dfrac{1}{x+5}$

Neem nu ook waarden voor x die naar $+\infty$ en $-\infty$ gaan.

Beschouw tabel 2-2.

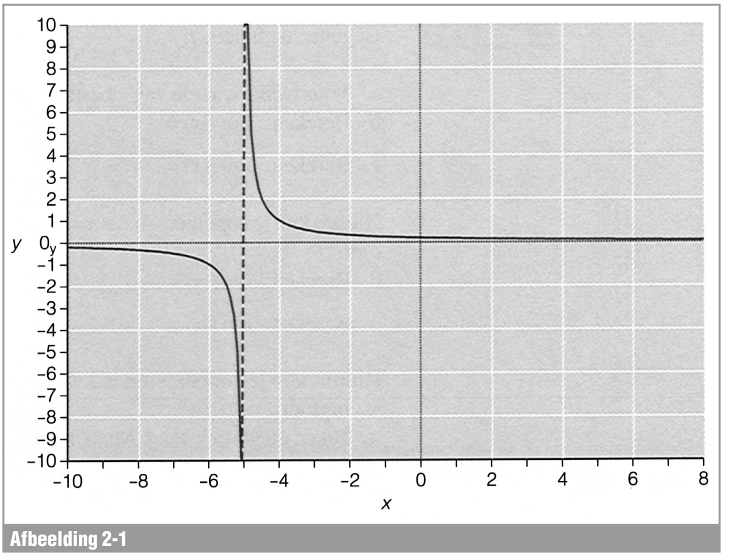
Tabel 2-2

$x \to +\infty$	$f(x)$	$x \to -\infty$	$f(x)$
1		–1	
10		–10	
100		–100	
1000		–1000	
$1 \cdot 10^4$		$-1 \cdot 10^4$	
$1 \cdot 10^5$		$-1 \cdot 10^5$	
∞		$-\infty$	

Merk het volgende op:

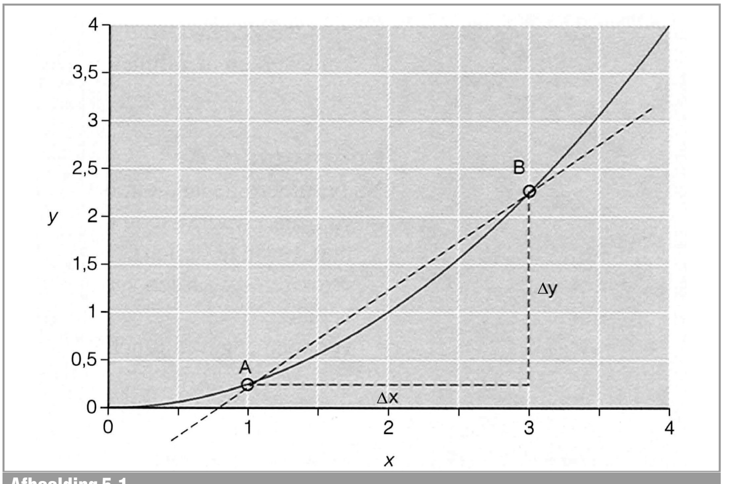
1. Voor waarden van x die naar $-\infty$ gaan, komt er 0 uit als functiewaarde.
   Notatie: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
2. Ook voor waarden van x die naar $+\infty$ gaan, komt er 0 uit als functiewaarde.
   Notatie: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
3. Voor waarden van x die van de linkerkant naar –5 gaan, volgt $-\infty$ als resultaat.
   Notatie: $\lim\limits_{x \uparrow -5} f(x) = -\infty$
4. Voor waarden van x die van de rechterkant naar -5 gaan, volgt $+\infty$ als resultaat.
   Notatie: $\lim\limits_{x \downarrow -5} f(x) = \infty$
5. De grafiek gaat bij $y = \dfrac{1}{5}$ door de y-as.

In een schets levert dit de grafiek van afbeelding 2-1 op.



Afbeelding 2-1

In hoofdstuk 1 is het begrip differentiequotiënt behandeld. Het quotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wordt ook wel de helling van een functie genoemd. In opgave 11 is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ onderzocht op het interval [1,3]. Hiervan is de grafiek getekend in afbeelding 5-1. Daarmee krijg je een beeld wat grafisch met zo'n differentiequotiënt bedoeld wordt.



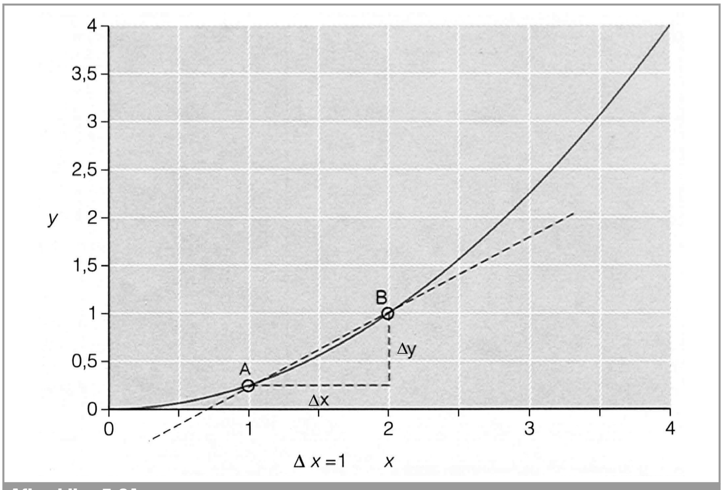
Afbeelding 5-1

Het differentiequotiënt van $f(x)$ op [1,3]

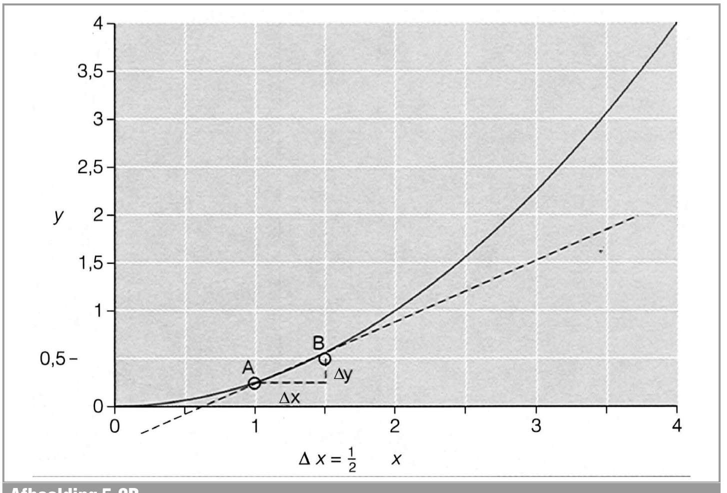
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{4\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

In de grafiek is aangegeven, dat deze helling gelijk is aan de richtingscoëfficiënt van de lijn AB.

Met de limiet nog in gedachten, kunnen we de lengte van het interval (Δx) steeds kleiner maken. Hier is Δx gelijk aan $3 - 1 = 2$. Hetzelfde kan gedaan worden met $\Delta x = 1$, op het interval [1,2], $\Delta x = \frac{1}{2}$ op $[1, 1\frac{1}{2}]$, $\Delta x = \frac{1}{4}$ op $[1, 1\frac{1}{4}]$ enzovoort (zie afbeelding 5-2).



Afbeelding 5-2A



Afbeelding 5-2B

Bij de laatste grafiek is Δx erg klein geworden. Omdat Δx nadert tot nul, kunnen we dit als een limiet beschouwen, waarmee $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ wordt:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

In de grafiek wordt dan niet meer over een snijlijn AB gesproken, maar over een raaklijn in een punt aan de grafiek. De limiet is dan de richtingscoëfficiënt die de raaklijn aan de grafiek bij die x-waarde heeft.

Er geldt:

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

$f'(x) = 8 \dfrac{1}{\cos^2 5x} \cdot 5 \cdot \sin 3x + 8 \tan 5x \cdot \cos 3x \cdot 3$

Begin nu aan de volgende opgaven. Als je er niet meer uitkomt, bekijk dan nog eens de voorgaande voorbeelden of de opgaven die je al eerder gemaakt hebt.

Opgave 25

Differentieer:

a. $f(x) = (x^2 - 3x)^3$

b. $f(x) = 3 \cdot \sin x^2$

c. $f(x) = \cos^3 5x$

d. $f(x) = 2 \cdot \cos a^2$

e. $f(x) = \dfrac{1}{(4x^2 + 7)^3}$

f. $f(x) = 3x \cdot \sin x^2$

g. $f(x) = \dfrac{2x + 5}{x + 1}$

h. $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{x}$

Opgave 26

Differentieer:

a. $f(x) = e^{2x}$

b. $f(x) = \ln 2x$

c. $f(x) = e^x \cdot \ln x$

d. $f(x) = \log x$

e. $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$

f. $f(x) = \ln^2 x$

g. $f(x) = \ln (2x - 1)^3$

Opgave 27

Bereken de afgeleide van de volgende functies:

a. $y = x \cdot \sin x$

b. $y = x \cdot \cos x - \sin x$

c. $y = (2 - x^2) \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x$

d. $y = x^2 \cdot \tan$

e. $y = \sin x \cdot \cos x$

f. $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} \sin x \cdot \cos x$

g. $y = \sin^2 x$

h. $y = \sin 2x$

i. $y = \cos 2x$

j. $y = \cos x \cdot \tan x$

k. $y = \dfrac{1}{\tan x}$

l. $y = \dfrac{1}{\cos x}$

m. $y = \dfrac{1}{\sin x}$

n. $y = \dfrac{\sin x}{x}$

o. $y = \dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$

Opgave 28

Differentieer:

a. $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

b. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \cdot \ln x + \dfrac{1}{2x^2}$

c. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x} + 3$

d. $f(x) = \dfrac{-1}{2 \cdot \ln^2 x}$

e. $f(x) = \ln 3x$

f. $f(x) = \ln x^2$

g. $f(x) = \ln^2 \sqrt[3]{x^2}$

h. $f(x) = \ln x^3$

Samenvatting

De afgeleide van een *constante functie* is altijd nul:
$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$

De afgeleide van een *lineaire functie* is altijd gelijk aan de richtingscoëfficiënt:
$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$

Voor een *machtsfunctie* geldt:
$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

De afgeleide van een *constante* maal een *functie* = de constante maal de afgeleide van de functie
$f(x) = c \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$

De *somregel* luidt: de afgeleide van een som = de som van de afgeleiden.
$f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Bij de *productregel* is: de afgeleide van een product van twee functies = de afgeleide van de eerste functie maal de tweede functie *plus* de eerste functie maal de afgeleide van de tweede functie.
$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Voor de *quotiëntregel* geldt: de afgeleide van een quotiënt van twee functies = de afgeleide van de teller maal de noemer *min* de teller maal de afgeleide van de noemer *gedeeld door* de noemer in het kwadraat.

Als $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$

De *kettingregel* luidt:
$f(x) = f(u)$ met u: $u(x) \Rightarrow f'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$