Wiskunde voor bachelor en master

Deel 1 Basiskennis en basisvaardigheden

Anne Kaldewaij

Arjen Valstar

2015, Syntax Media, Utrecht

Over de serie

Er is behoefte aan een degelijke wiskundekennis in tal van studies op hogescholen en universiteiten. Studenten dienen te beschikken over wiskundig inzicht waarmee zij ook wiskundige toepassingen aankunnen die in andere vakken worden gebruikt.

Met de serie *Wiskunde voor bachelor en master* leer je hoe je in de praktijk met wiskunde omgaat. Dit zie je terug in de aanpak: veel uitleg met toepassingen en weinig bewijzen in strikt wiskundige zin. Elk deel bevat veel voorbeelden en heeft een grote verzameling opgaven, waaruit de docent een gerichte keus kan maken.

De eerste twee delen vormen de basis van de serie:

Deel 1 Basiskennis en basisvaardigheden
Deel 2 Differentiaalrekening en integraalrekening

De overige delen sluiten hier naadloos op aan, maar zijn gericht op meer specifieke onderwerpen. Hiervan zijn reeds verschenen:

Deel 3 Differentiaalvergelijkingen en dynamische systemen
Deel 4 Vectorrekening en matrixrekening

De volgende delen zijn voorzien:

- De Laplace-transformatie
- Fouriertheorie en systeemtheorie
- Actuariële wiskunde
- De wiskunde van het programmeren

De vervolgdelen kunnen onafhankelijk van elkaar worden gebruikt. Sommige passen in de bachelorfase en andere bij specifieke masters.

Op de website van de uitgever *www.syntaxmedia.nl/wiskunde* staan uitgebreide uitwerkingen van alle opgaven en zijn ook diagnostische toetsen te vinden.

Over dit deel

Door de komst van de grafische rekenmachine is de aandacht voor rekenvaardigheid in het voortgezet onderwijs afgenomen. Wiskundige vaardigheden zijn echter onmisbaar voor een succesvolle studie binnen het hoger onderwijs. Dat betreft niet alleen bètastudies en technische studies, maar ook bij opleidingen als Economie komen wiskundige technieken en methoden aan bod.

Dit eerste deel van de serie *Wiskunde voor bachelor en master* is specifiek gericht op die algemene wiskundige basiskennis en basisvaardigheden. Het boek begint op een eenvoudig niveau en kan geheel zelfstandig worden doorgewerkt. Het gebruik van de grafische rekenmachine is minimaal: inzicht en vaardigheid zijn belangrijker.

Omdat de nadruk ligt op vaardigheden zijn veel opgaven opgenomen om te kunnen oefenen. Alle stof wordt toegankelijk uitgelegd en toegelicht. Achter in het boek zijn antwoorden van de opgaven opgenomen. De volledige uitwerkingen van de opgaven zijn beschikbaar op de website *www.syntaxmedia.nl/wiskunde* van de uitgever.

Waar bij de andere delen uit de serie de toepassingen van de wiskunde een belangrijker rol spelen, gaat het in dit eerste deel vooral om het goed kunnen omgaan met elementaire wiskunde. Aan bod komen het vlot en foutloos rekenen met getallen en letters, het oplossen van vergelijkingen, het tekenen van grafieken, goniometrie, machten, exponentiële functies, logaritmen, differentiëren en het gebruik van vectoren.

Deel 1 kan het best in het begin van het eerste studiejaar als specifiek blok of in het eerste trimester worden behandeld. Het kan ook in het eerste jaar als zelfstudie naast deel 2 worden gebruikt. Dit eerste deel is tevens geschikt als materiaal bij een zomercursus (een voorbereidende instapcursus) om deficiënties weg te werken of als extra voorbereiding op het wiskunde-B-eindexamen.

Onze dank gaat uit naar dr. Jan van Tiel voor zijn commentaar en suggesties, naar ir. Caroline van der Meulen van Redactie & zo voor de uitstekende eindredactie en naar drs. Elisabeth de Ligt van uitgeverij Syntax Media voor de bijzonder prettige samenwerking.

voorjaar 2015

dr. Anne Kaldewaij

drs. Arjen Valstar

Inhoud

6.3.1 Opgaven

1. Los de volgende vergelijkingen op:

a.	$x^2 - 4x + 2 = 0$	d.	$a^2 + a + 1 = 0$
b.	$t^2 - 8t + 14 = 0$	e.	$x^2 + 7x + 12 = 0$
c.	$r^2 = 6r + 1$	f.	$h^2 - 7h + 12 = 0$

2. Los x op uit:

a.	$x^2 - 4x = A$	d.	$x^2 + 2\omega x + 1 = 0$
b.	$x^2 - 8x = \omega^2$	e.	$x^2 + 4x + h^2 = 0$
c.	$x^2 = 6x + B$	f.	$x^2 - 2px - 2p^2 = 0$

6.4 De abc-formule

De derde manier om tweedegraadsvergelijkingen op te lossen, is met behulp van een formule die de *abc-formule* heet, omdat het de volgende vergelijking betreft:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Hierbij is $a \neq 0$. De abc-formule ziet er als volgt uit:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Het is een korte aanduiding van de oplossingen x_1 en x_2, voor zover deze bestaan:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

In de abc-formule komt de uitdrukking $b^2 - 4ac$ onder het wortelteken voor. Als $b^2 - 4ac < 0$ zijn er *geen* oplossingen. Als $b^2 - 4ac = 0$ dan is er één oplossing ($x_1 = x_2$). Als $b^2 - 4ac > 0$ dan zijn er twee verschillende oplossingen. In een schema:

$$\boxed{\begin{array}{ll} b^2 - 4ac > 0 & \Rightarrow \text{ twee verschillende oplossingen} \\ b^2 - 4ac = 0 & \Rightarrow \text{ één oplossing} \\ b^2 - 4ac < 0 & \Rightarrow \text{ geen oplossingen} \end{array}}$$

De uitdrukking $b^2 - 4ac$ geeft dus aan of de vergelijking geen, één of twee oplossingen heeft en wordt daarom de *discriminant* van de vierkantsvergelijking genoemd.

Voorbeelden

1. $x^2 + 3x = 4$. Herleiden op nul levert $x^2 + 3x - 4 = 0$. Er geldt $a = 1$, $b = 3$ en $c = -4$, dus $b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25$.

   De oplossingen zijn $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = -1\frac{1}{2} \pm 2\frac{1}{2}$, dus $x_1 = 1$ en $x_2 = -4$.

2. $3x^2 - 10 = 0$. In dit geval is $a = 3$, $b = 0$ en $c = -10$, dus $b^2 - 4ac = 0 + 120 = 120$.

   De oplossingen zijn $x_{1,2} = \dfrac{\pm\sqrt{120}}{6} = \pm\dfrac{2\sqrt{30}}{6}$, dus $x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{30}$ en $x_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{30}$.

3. $2x^2 + 6x - 7 = 0 \quad (a = 2,\ b = 6 \text{ en } c = -7)$

   $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 + 56}}{4} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{92}}{4} = \dfrac{-6 \pm 2\sqrt{23}}{4}$

   De oplossingen zijn $x_1 = -1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{23}$ en $x_2 = -1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{23}$.

4. $2x^2 + 6x = -7$. Herleiden op nul levert $2x^2 + 6x + 7 = 0$ en de abc-formule geeft:

   $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 56}}{4} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{-20}}{4}$

   De discriminant is negatief en de vergelijking heeft dus geen oplossingen.

5. $x^2 + 3x\sqrt{2} - 8 = 0$

   $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-3\sqrt{2} \pm \sqrt{18 + 32}}{2} = \dfrac{-3\sqrt{2} \pm 5\sqrt{2}}{2}$

   De oplossingen zijn $x_1 = \sqrt{2}$ en $x_2 = -4\sqrt{2}$.

6. $5x^2 - 3x = 0$

   $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 0}}{10} = \dfrac{3 \pm 3}{10}$

   De oplossingen zijn $x_1 = \frac{3}{5}$ en $x_2 = 0$.

De abc-formule biedt altijd uitkomst, maar vaak gaat het sneller met ontbinden in factoren of met kwadraatafsplitsen (kijk maar naar voorbeeld 6).

Wanneer niets wordt vermeld, dan bestaat het domein uit alle waarden van x waarvoor $f(x)$ bestaat. Voor functies als $f(x) = 2x + 4$ en $f(x) = x^2 - 2$ is het domein $\mathbb{R}$, de verzameling van alle reële getallen.

Vaak volgt bij een toepassing welk domein aan de orde is: een elektrische weerstand is niet negatief, een signaal begint vaak op $t = 0$ en bestaat dan alleen voor $t \geq 0$, in een driehoek is de lengte l van een zijde positief ($l > 0$), de temperatuur T in graden Celsius is meer dan het absolute nulpunt ($T > -273{,}15°$).

Soms kun je het domein uit het functievoorschrift bepalen. De functie $f(x) = \dfrac{1}{x}$ heeft als domein alle reële getallen, uitgezonderd 0, want delen door 0 kan niet.

De functie $g(x) = \sqrt{x}$ heeft als definitiegebied de niet-negatieve reële getallen.

Voor een domein of een bereik wordt vaak een *intervalnotatie* gebruikt:

$[a, b]$	alle x met $a \leq x \leq b$
$\langle a, b\rangle$	alle x met $a < x < b$
$[a, b\rangle$	alle x met $a \leq x < b$
$\langle a, b]$	alle x met $a < x \leq b$

voor $a \leq b$. Dit zijn intervallen met lengte $b - a$. Er zijn ook onbegrensde intervallen, die we aangeven met behulp van het symbool ∞ ('oneindig'):

$[a, \infty\rangle$	alle x met $x \geq a$
$\langle a, \infty\rangle$	alle x met $x > a$
$\langle -\infty, b]$	alle x met $x \leq b$
$\langle -\infty, b\rangle$	alle x met $x < b$

Zo bevat $[0, \infty\rangle$ alle niet-negatieve getallen en $\langle -\infty, -3\rangle$ alle getallen kleiner dan -3. De verzameling $\mathbb{R}$ wordt in de intervalnotatie aangegeven met $\langle -\infty, \infty\rangle$.

Het symbool ∞ stelt *geen* getal voor.

9.4.1 Opgaven

1. Bepaal het bereik van de volgende functies:

   a. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ op $[0, 2]$

   b. $f(x) = \dfrac{0{,}4x - 1}{3}$ op $\langle 0, 3]$

   c. $f(x) = 2x + 1$ op $[0, 7\rangle$

   d. $f(x) = x^2 + 1$ op $[2, \infty\rangle$

   e. $f(x) = 1 - 2x$ op $\langle -\infty, 0]$

   f. $f(x) = -x^2 + 10$ op $\mathbb{R}$

9.5 Gebroken functies

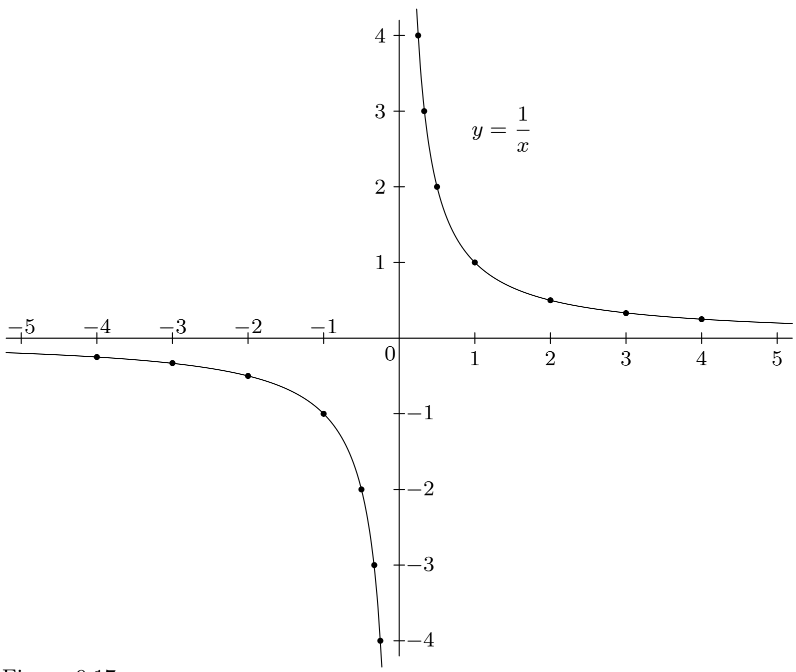
Een gebroken functie heeft als voorschrift een breuk waarbij de variabele in de noemer voorkomt. De eenvoudigste vorm is:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Voor $x = 0$ bestaat $f(x)$ niet, want $\frac{1}{0}$ bestaat niet. Het domein van f is $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, de verzameling reële getallen met daaruit de waarde 0 weggelaten. De onderstaande tabel levert punten van de grafiek van f, die in figuur 9.17 is weergegeven.

x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	-4		4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

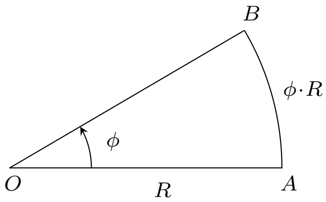
Neem je steeds kleinere positieve waarden voor x dan krijg je steeds grotere positieve waarden voor $\frac{1}{x}$. We zeggen dat $\frac{1}{x}$ naar *oneindig* gaat als x naar 0 daalt.



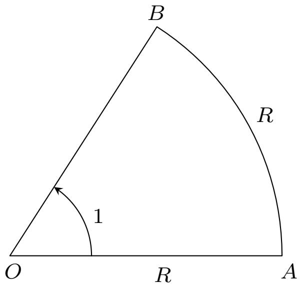
Figuur 9.17

Hoeken worden in het vervolg altijd in radialen gegeven

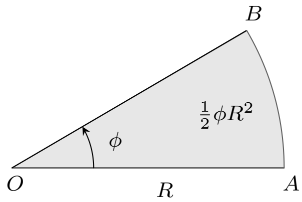
De aanduiding 'rad' laten we meestal achterwege, we hebben het gewoon over een hoek van $\frac{1}{6}\pi$ en je mag daar natuurlijk best 30° bij denken. Als je een gegeven hoek wilt tekenen met behulp van je geodriehoek is ook een omrekening naar graden nodig.



Figuur 10.16



Figuur 10.17



Figuur 10.18

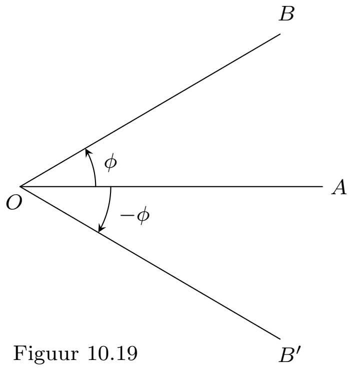
In figuur 10.16 is nog eens aangegeven dat de lengte van boog AB gelijk is aan het product van de middelpuntshoek ϕ en de straal R. In figuur 10.17 is een hoek van 1 getekend ($\approx 57{,}3°$). In dat geval is de booglengte AB gelijk aan R.

De oppervlakte van een cirkel met straal R is gelijk aan πR^2 en daarbij hoort een middelpuntshoek van 2π. De oppervlakte van sector OAB in figuur 10.18 is dus gelijk aan $\dfrac{\phi}{2\pi} \cdot \pi R^2 = \frac{1}{2}\phi R^2$.

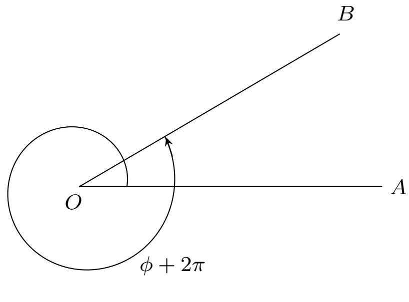
We zetten de belangrijkste resultaten in een overzicht:

> Een hoek ter grootte ϕ komt overeen met $(\dfrac{180}{\pi} \cdot \phi)^\circ$.
>
> Andersom geldt $\alpha^\circ = \dfrac{\alpha}{180} \cdot \pi$ rad.
>
> Voor een cirkelsector met straal R en middelpuntshoek ϕ geldt:
>
> de booglengte is $\phi \cdot R$
>
> de oppervlakte van de cirkelsector is $\frac{1}{2}\phi R^2$.

We onderscheiden *positieve* en *negatieve hoeken*. Een positieve hoek gaat tegen de wijzers van de klok in en een negatieve hoek gaat met de wijzers van de klok mee.



Figuur 10.19



Figuur 10.20

In figuur 10.19 is $\angle AOB$ positief en $\angle AOB'$ negatief: van OA naar OB is tegen de klok in en van OA naar OB' is met de klok mee. In dit geval geldt:

$$\angle AOB' = -\angle AOB = -\phi$$

met ϕ een positief getal. In een tekening is de draairichting met een pijltje aangegeven.

Hoeken kunnen ook groter zijn dan 2π door nog één of meer keer rond te gaan. In figuur 10.20 is een hoek met grootte $\phi + 2\pi$ aangegeven, waarbij $\angle AOB$ weer gelijk aan ϕ is.

Op deze manier hoort bij elk reëel getal een hoek. Zo is 11π de hoek die je krijgt door vijfenhalf keer linksom rond te gaan en -7π door drieënhalf keer rechtsom rond te gaan (je komt beide keren uit op dezelfde lijn).

10.4.1 Opgaven

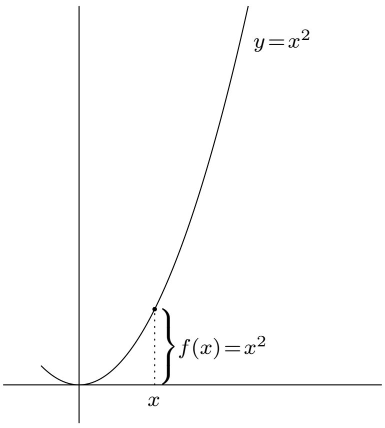
1. Teken de volgende hoeken in één figuur:

   a. $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ b. $\beta = \frac{2}{3}\pi$ c. $\gamma = -3\frac{1}{6}\pi$

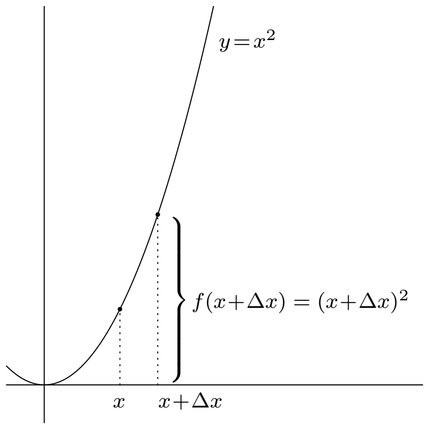
2. Doe dit ook voor de volgende hoeken:

   a. $\alpha = 0{,}5$ b. $\beta = -2$ c. $\gamma = 8$

3. Gegeven is een cirkelsector met middelpuntshoek $\frac{1}{3}\pi$ en straal 3 cm. Teken deze sector en bepaal de lengte van de boog en de grootte van de sectoroppervlakte.



Figuur 12.1a



Figuur 12.1b

De waarde van f in het punt $x+\Delta x$ is:

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

Als Δx klein is, dan is $(\Delta x)^2$ zeer klein, zo is $0{,}01^2 = 0{,}0001$. Je kunt daarom de term $(\Delta x)^2$ verwaarlozen ten opzichte van Δx:

$$(x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \approx x^2 + 2x\Delta x$$

Dus voor de *toename* van x^2 op het kleine interval $[x, x+\Delta x]$ geldt:

$$(x+\Delta x)^2 - x^2 \approx 2x\Delta x$$

In woorden uitgedrukt: neemt x met Δx toe, dan neemt x^2 met ongeveer $2x\Delta x$ toe.

Hoe kleiner Δx des te beter is deze benadering. We zeggen dat *de snelheid waarmee f in x toeneemt* gelijk is aan $2x$.

De snelheid waarmee f toeneemt heet de *afgeleide* van f en wordt genoteerd als f'.

In het geval van $f(x) = x^2$ geldt:

$$f'(x) = 2x$$

Zo geldt voor $x = 3$ een *toenamesnelheid* $f'(3) = 2\cdot 3 = 6$; de functie stijgt in $x = 3$. Voor $x = 0$ is de toenamesnelheid $f'(0) = 2\cdot 0 = 0$; de functie 'staat in $x = 0$ even stil'.
In $x = -3$ is de toenamesnelheid $f'(-3) = 2\cdot -3 = -6$; de functie daalt in $x = -3$ en er is in feite sprake van een *afnamesnelheid* 6.

Als de afgeleide positief is, dan neemt de functie toe en als de afgeleide negatief is dan neemt de functie af. Is de afgeleide 0 dan spreken we van een *stationair punt*.

De functie $f(x) = x^2$ heeft als afgeleide $f'(x) = 2x$, dus $f(x) = x^2$ daalt voor $x < 0$, stijgt voor $x > 0$ en is stationair voor $x = 0$.

We laten nu een andere manier zien waarop je de afgeleide van $f(x) = x^2$ kunt vinden.

Je kunt $(x + \Delta x)^2 \approx x^2 + 2x\Delta x$ schrijven als:

$$\frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \approx 2x$$

Links van $\approx$ staat de *gemiddelde snelheid* waarmee x^2 verandert op $[x, x+\Delta x]$ en rechts van $\approx$ staat de *snelheid* waarmee x^2 verandert *in* het punt x.

Als je die linkerkant uitwerkt, dan krijg je:

$$\frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Hierbij mag je door Δx delen, omdat $\Delta x \neq 0$. Uit deze berekening volgt:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

En zo vinden we de afgeleide van $f(x) = x^2$ terug.

Deze berekening is de basis voor de *formele definitie van de afgeleide* van de functie f:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Uit deze definitie volgt dat voor kleine Δx geldt: $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \approx f'(x)$.

Dit kun je herschrijven tot:

$$\boxed{f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x}$$

Dit is de vorm die aangeeft dat $f'(x)$ de toenamesnelheid is in x.

12.6 De kettingregel

De laatste rekenregel van het differentiëren staat bekend onder de naam *kettingregel*.

De kettingregel hoort bij *samengestelde functies*.

Een voorbeeld hiervan is $y = \sin(2x + 1)$, een voorschrift dat je kunt lezen als:

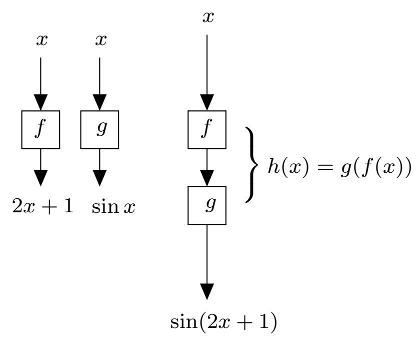
- bereken eerst $2x + 1$
- neem van het resultaat de sinus.

In figuur 12.6 is dit weergegeven:

Functie f transformeert x in $2x + 1$.
Functie g transformeert x in $\sin x$.

De samengestelde functie h van f en g (*eerst* f toepassen en *daarna* g) is dan:

$$h(x) = g(f(x)) = \sin(2x + 1)$$



Figuur 12.6

Let erop dat eerst f wordt toegepast en daarna g.

Voorbeelden

1. $y = \sqrt{x^2 + 1}$ is de samengestelde functie van $f(x) = x^2 + 1$ en $g(x) = \sqrt{x}$.
2. $y = 2\sin^3 x - 1$ is de samengestelde functie van $p(x) = \sin x$ en $q(x) = 2x^3 - 1$.
3. $y = \sin(1 + \sqrt{x})$ is de samenstelling van $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ en $g(x) = \sin x$.
4. $y = 2^{3x-1}$ is de samenstelling van $f(x) = 3x - 1$ en $g(x) = 2^x$.
5. Een voorwerp beweegt over de parabool $y = x^2$.
   Het blijkt dat op tijdstip t de x-coördinaat van het voorwerp gelijk is aan $3t$.
   Dan is op tijdstip t de y-coördinaat gelijk aan $y = (3t)^2 = 9t^2$.
   In dit voorbeeld geldt: $y = x^2$ en $x = 3t$. De samenstelling hiervan is $y = (3t)^2$.

De *kettingregel* geeft aan hoe je de afgeleide van $y = g(f(x))$ uit de afgeleiden van f en g kunt berekenen. Deze regel luidt:

$$\boxed{\text{Als } y = g(f(x)) \text{ dan is } y' = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

In deel 2 wordt uitgelegd waarom de kettingregel juist is. In dit deel lichten we het gebruik toe aan de hand van voorbeelden.

Voorbeelden

1. $y = (1 + \sin x)^3$. De afgeleide bepaal je met de kettingregel:
   y is de samengestelde functie van $f(x) = 1 + \sin x$ en $g(x) = x^3$.
   Nu is $g'(x) = 3x^2$ en de kettingregel zegt dat je $g'(f(x))$ moet nemen.
   Dat is $3(1 + \sin x)^2$ en deze moet je vermenigvuldigen met $f'(x) = \cos x$.
   Het resultaat is:
   $$y' = 3(1 + \sin x)^2 \cdot \cos x = 3 \cos x(1 + \sin x)^2$$
   Je schrijft dat zo op:
   $$\begin{aligned} y = (1 + \sin x)^3 \quad \Rightarrow \quad y' &= 3(1 + \sin x)^2 \times (\text{de afgeleide van } 1 + \sin x) \\ &= 3(1 + \sin x)^2 \cdot \cos x = 3 \cos x(1 + \sin x)^2 \end{aligned}$$
2. $y = \sqrt{x^2 - 1}$. De afgeleide bepaal je met de kettingregel:
   $$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \times (\text{de afgeleide van } x^2 - 1) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot 2x \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$
3. $y = \cos(8x^4 + 2x + 1)$. Voor de afgeleide werk je 'van buiten naar binnen':
   Als eerste kom je cos tegen met afgeleide $-\sin$:
   $$\begin{aligned} y' &= -\sin(8x^4 + 2x + 1) \times (\text{de afgeleide van } 8x^4 + 2x + 1) \\ &= -\sin(8x^4 + 2x + 1) \cdot (32x^3 + 2) \\ &= -(32x^3 + 2) \sin(8x^4 + 2x + 1) \end{aligned}$$