Wiskunde voor bachelor en master

Deel 2 Differentiaalrekening en integraalrekening

Anne Kaldewaij

Arjen Valstar

2016, Syntax Media, Utrecht

Over de serie

Er is behoefte aan een degelijke wiskundekennis in tal van studies op hogescholen en universiteiten. Studenten dienen te beschikken over wiskundig inzicht waarmee zij de wiskundige toepassingen aankunnen die in andere vakken worden gebruikt.

Met de serie *Wiskunde voor bachelor en master* leer je hoe je in de praktijk met wiskunde omgaat. Dit zie je terug in de aanpak: veel uitleg met toepassingen en weinig bewijzen in strikt wiskundige zin. Elk deel bevat veel voorbeelden en heeft een grote verzameling opgaven, waaruit de docent een gerichte keus kan maken.

De eerste twee delen vormen de basis van de serie:

Deel 1 Basiskennis en basisvaardigheden
Deel 2 Differentiaalrekening en integraalrekening

De overige delen sluiten hier naadloos op aan, maar zijn gericht op meer specifieke onderwerpen. Zij komen in de loop van de komende jaren uit.

De volgende delen zijn voorzien:

- Matrixrekening
- Vectorrekening
- Differentiaalvergelijkingen
- Actuariële wiskunde
- De Laplace-transformatie
- Fourier- en systeemtheorie

Deze delen kunnen onafhankelijk van elkaar worden gebruikt. Sommige passen in de bachelorfase en andere bij specifieke masters.

Over deel 2

Wiskundige vaardigheden zijn onmisbaar voor tal van studies binnen het hoger onderwijs. Dat betreft niet alleen bètastudies en technische studies, maar ook bij opleidingen als Economie spelen wiskundige technieken en methoden een belangrijke rol.

Dit tweede deel sluit prima aan op de wiskundekennis van het voortgezet onderwijs, eventuele lacunes kunnen met deel 1 van deze serie worden aangevuld.

Deel 2 van de serie *Wiskunde voor bachelor en master* betreft de basiskennis van de differentiaalrekening en integraalrekening. Samen met deel 1 van de serie vormt het een uitstekend fundament voor verdere specialisaties die in de vervolgdelen aan bod komen. Naast differentiëren en integreren komen meer geavanceerde onderwerpen aan de orde, zoals functies van meer variabelen, dubbelintegralen, werken met poolcoördinaten en complexe getallen.

De kernstof betreft de hoofdstukken 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 en 9. Hoofdstuk 5 kan desgewenst op een later moment worden behandeld. Voor studies waar in een vroeg stadium gebruik wordt gemaakt van de complexe rekenwijze kan hoofdstuk 10 ook eerder, bijvoorbeeld direct na hoofdstuk 3 of na hoofdstuk 6 worden behandeld.

Het boek bevat veel opgaven. Het geeft docenten de mogelijkheid hierin zelf een keuze te maken en zo de diepgang te bepalen. De opgaven die zijn bedoeld als training in technieken zijn vaak opgedeeld in onderdeel a tot en met f. Het is voor de meeste studenten voldoende om hiervan a, b en c te maken.

Alle stof wordt toegankelijk uitgelegd en toegelicht. In het boek zijn antwoorden van de opgaven opgenomen. Volledige didactische uitwerkingen van alle opgaven staan in het unieke uitwerkingenboek dat via de website van de uitgever (*www.syntaxmedia.nl*) of bij de boekhandel kan worden besteld.

zomer 2016

dr. Anne Kaldewaij

drs. Arjen Valstar

Inhoud

Over de serie **v**

Over deel 2 **vi**

Notaties **vii**

1 Functies en relaties **1**

1.1 Inleiding 1

1.1.1 Opgaven 3

1.2 Inverse functies 4

1.2.1 Opgaven 6

1.3 Goniometrische functies 7

1.3.1 Het hoekbegrip 7

1.3.2 Sinus, cosinus en tangens 8

1.3.3 Gonioformules 11

1.3.4 Opgaven 12

1.4 De functies arcsin, arccos en arctan 14

1.4.1 Opgaven 18

1.5 Relaties 20

1.5.1 Opgaven 22

2 Differentiëren **23**

2.1 De afgeleide 23

2.1.1 Opgaven 27

2.2 De afgeleide als snelheid 28
2.2.1 Opgaven 30
2.3 De afgeleide als helling 32
2.3.1 Opgaven 33
2.4 Extremen 34
2.4.1 Opgaven 38
2.5 Buigpunten en hogere afgeleiden 40
2.5.1 Opgaven 42
2.6 Differentialen 43
2.6.1 Opgaven 45
2.7 Rekenen met differentialen 46
2.7.1 Opgaven 48
2.8 De formule $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 1$ 50
2.8.1 De afgeleiden van arcsin, arccos en arctan 51
2.8.2 Opgaven 52
2.9 Impliciet differentiëren 53
2.9.1 Opgaven 55
2.10 Gemengde opgaven 56

3 De e-macht en de natuurlijke logaritme 59
3.1 Exponentiële functies 59
3.1.1 Opgaven 60
3.2 Logaritmische functies 61
3.2.1 Opgaven 63
3.3 Het getal e 64
3.3.1 Opgaven 67
3.4 De natuurlijke logaritme 68
3.4.1 De afgeleiden van $\ln x$, ${}^a\log x$, a^x 70
3.4.2 Opgaven 73

4 Rijen, reeksen en benaderingen 75
4.1 Rijen 75
4.1.1 Opgaven 76

4.2 Rekenkundige rijen 77
4.2.1 Opgaven 78
4.3 Meetkundige rijen 78
4.3.1 Opgaven 81
4.4 Benaderingen 82
4.4.1 Opgaven 85
4.5 Taylorreeksen 86
4.5.1 Opgaven 89
4.6 Gemengde opgaven 90

5 Het berekenen van limieten 91
5.1 Limieten 91
5.1.1 Opgaven 93
5.2 De regel van l'Hôpital 94
5.2.1 Opgaven 97
5.3 Een bijzondere limiet 98
5.4 Machten, exponentiële functies en logaritmen 100
5.4.1 Opgaven 102
5.5 Gemengde opgaven 104

6 Integreren 105
6.1 Een oppervlaktebepaling 105
6.2 Het begrip 'primitieve' 107
6.2.1 Opgaven 108
6.3 De integraalnotatie 109
6.3.1 De bepaalde integraal 109
6.3.2 De oppervlakte tussen twee grafieken 112
6.3.3 De onbepaalde integraal 113
6.3.4 Opgaven 114
6.4 De integraal als limiet van een som 116
6.4.1 Opgaven 120
6.5 Omwentelingslichamen 122
6.5.1 Opgaven 124

6.6 Differentiëren versus integreren 125
6.6.1 Opgaven 127
6.7 Gemengde opgaven 129

7 Integratietechnieken 131
7.1 De substitutiemethode 131
7.1.1 Achter de d brengen 131
7.1.2 Opgaven 133
7.1.3 De substitutie 'u als functie van x' 133
7.1.4 Opgaven 135
7.1.5 De substitutie 'x als functie van t' 136
7.1.6 Opgaven 139
7.2 Partieel integreren 141
7.2.1 Opgaven 142
7.3 Breuksplitsen 144
7.3.1 De basisvorm 144
7.3.2 Opgaven 147
7.3.3 Algemene vormen van breuken met veeltermen 147
7.3.4 Opgaven 150
7.4 Oneigenlijke integralen 151
7.4.1 Opgaven 152
7.5 Toepassingen 153
7.5.1 Traagheidsmoment 153
7.5.2 Magnetisch veld 155
7.5.3 Booglengte 156
7.5.4 Opgaven 157

8 Functies van meer variabelen 159
8.1 Functies van twee variabelen 159
8.2 Partiële afgeleiden 161
8.2.1 Opgaven 165
8.3 De totale differentiaal 166
8.3.1 Opgaven 168

8.4 Niveaulijnen, de gradiënt en krommen in het vlak 169

8.4.1 Niveaulijnen en de gradiënt 169

8.4.2 Krommen in het vlak 172

8.4.3 Opgaven 175

8.5 Functies van drie variabelen 177

8.5.1 Niveauvlakken 177

8.5.2 Differentialen 179

8.5.3 Opgaven 181

8.6 Kettingregels 182

8.6.1 Een eenvoudige kettingregel 182

8.6.2 Het gebruik van diagrammen 184

8.6.3 Opgaven 186

8.7 Poolcoördinaten 187

8.7.1 Opgaven 189

9 Dubbelintegralen 191

9.1 Integreren over een rechthoek 191

9.1.1 Opgaven 194

9.2 Andere integratiegebieden 194

9.2.1 Opgaven 197

9.3 Toepassingen 198

9.3.1 Opgaven 203

9.4 Integreren met poolcoördinaten 204

9.4.1 Opgaven 207

10 Complexe getallen 209

10.1 Wat zijn complexe getallen? 209

10.1.1 De verzameling $\mathbb{C}$ 210

10.1.2 Notaties 211

10.1.3 Opgaven 212

10.2 Het complexe vlak 214

10.2.1 Modulus en argument 215

10.2.2 Opgaven 218

10.3 Regels voor vermenigvuldigen en delen 219
10.3.1 De formule van De Moivre 221
10.3.2 Opgaven 222
10.4 De complexe e-macht 223
10.4.1 Opgaven 225
10.5 De vergelijking $z^n = \alpha$ 226
10.5.1 Opgaven 229
10.6 Toepassing bij periodieke functies: trillingen 230
10.6.1 Fase en faseverschil 231
10.6.2 De complexe rekenwijze bij trillingen 232
10.6.3 Opgaven 233
10.6.4 Rekenen met complexe wisselsignalen 234
10.6.5 Opgaven 237
10.7 Toepassing binnen de elektrotechniek: impedanties 239
10.7.1 Opgaven 243
10.8 Gemengde opgaven 245

Antwoorden opgaven 247

Index 271

2.7 Rekenen met differentialen

In de praktijk blijkt het rekenen met differentialen heel effectief te zijn. Daarbij gebruik je een aantal rekenregels die lijken op de regels voor differentiëren. De eerste betreft de constante functie. Als $f(x) = c$, dan geldt $f'(x) = 0$, dus ook $f'(x)\,\mathrm{d}x = 0$ en in termen van differentialen betekent dit:

$$\mathrm{d}c = 0 \;\text{ voor constante } c$$

(in woorden: de differentiaal van een constante is nul).
Zijn u en v functies van x, dan geldt voor hun som:

$$\mathrm{d}(u+v) = (u+v)'\mathrm{d}x = (u'+v')\mathrm{d}x = u'\mathrm{d}x + v'\mathrm{d}x = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v$$

Voor het product vind je:

$$\mathrm{d}(uv) = (uv)'\mathrm{d}x = (vu'+uv')\mathrm{d}x = vu'\mathrm{d}x + uv'\mathrm{d}x = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$$

Voor het quotiënt geldt:

$$\mathrm{d}(\frac{u}{v}) = \left(\frac{u}{v}\right)'\mathrm{d}x = (\frac{vu'-uv'}{v^2})\,\mathrm{d}x = \frac{vu'\mathrm{d}x - uv'\mathrm{d}x}{v^2} = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$$

Samengevat zijn de basisregels voor differentialen:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{d}c = 0\\ &\mathrm{d}(c\cdot u) = c\cdot\mathrm{d}u\\ &\mathrm{d}(u+v) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v\\ &\mathrm{d}(u-v) = \mathrm{d}u - \mathrm{d}v\\ &\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v\\ &\mathrm{d}(\frac{u}{v}) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2} \end{aligned}}$$

Is $y = f(x)$ en $x = g(t)$, dan geldt:

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x = f'(x)\,\mathrm{d}g(t) = f'(x)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Delen door dt geeft $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f'(x)g'(t)$. Met $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en $g'(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ volgt:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

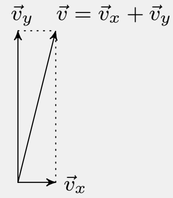
Dit is het bewijs van de kettingregel, uitgedrukt in termen van differentialen.

Je mag met differentiaalquotiënten dus rekenen alsof het breuken zijn, maar je moet goed weten wat de relatie tussen de functies is.

Voorbeelden

1. $\mathrm{d}(t\sin t) = t\,\mathrm{d}\sin t + \sin t\,\mathrm{d}t = t\cos t\,\mathrm{d}t + \sin t\,\mathrm{d}t = (t\cos t + \sin t)\,\mathrm{d}t$
2. $\mathrm{d}(\dfrac{x}{1-x}) = \dfrac{(1-x)\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}(1-x)}{(1-x)^2} = \dfrac{(1-x)\mathrm{d}x - x\cdot{-1}\,\mathrm{d}x}{(1-x)^2} = \dfrac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2}$
3. $\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{y^2}\right) = \dfrac{y^2\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y^2}{y^4} = \dfrac{y^2\mathrm{d}x - 2xy\mathrm{d}y}{y^4} = \dfrac{y\mathrm{d}x - 2x\mathrm{d}y}{y^3}$
4. Een auto beweegt zich over een weg die we ons in het xy-vlak denken.
   De vorm van de weg is de parabool $y = x^2$ en op tijdstip t wordt de positie van de x-coördinaat van de auto gegeven door $x = t^3$ (t in uur en x en y in km).
   Gevraagd wordt de snelheid in de y-richting $(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})$ op tijdstip $t = 2$.
   Er geldt $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x\cdot 3t^2$.
   Op tijdstip $t = 2$ geldt $x = 2^3 = 8$, dus dan geldt $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2\cdot 8\cdot 3\cdot 2^2 = 192$ km/u.
   De snelheid in de x-richting op $t = 2$ is $\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=2} = 3\cdot 2^2 = 12$ km/u.
   De 'gewone snelheid' van de auto op $t = 2$ is samengesteld uit de snelheid in de x-richting en die in de y-richting: (figuur 2.18)

   $$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{12^2 + 192^2} \approx 192{,}4 \text{ km/u}$$

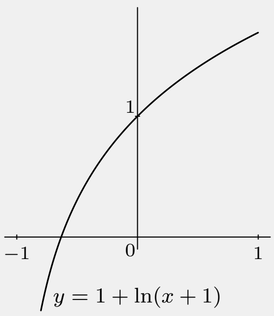


Figuur 2.18

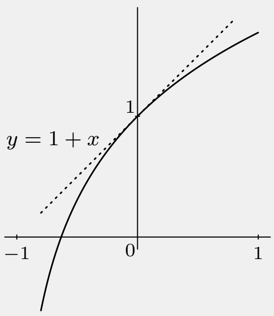
De tweede-orde-benadering is:

$$f(x) \approx 1 + x - \tfrac{1}{2}x^2$$

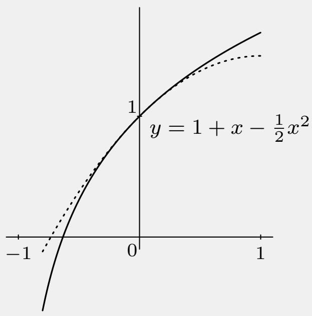
Dit is een parabool door $(0, 1)$ met dezelfde raaklijn. De grafiek van f staat in figuur 4.1 en in figuur 4.2 en 4.3 staan de benaderingen gestippeld weergegeven.



Figuur 4.1



Figuur 4.2



Figuur 4.3

2. Als $y = \sin x$, dan geldt $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$ en $y^{(4)} = \sin x$. Daarna herhaalt deze rij zich. Invullen van $x = 0$ levert:

   $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = -1$, $y^{(4)}(0) = 0$, enzovoort.

   De vijfde-orde-benadering van $\sin x$ in 0 is dus:

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 = x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5$$

3. De vijfde-orde-benadering van $\cos x$ in 0 kun je net als in het vorige voorbeeld bepalen, maar je kunt ook de afgeleide van het vorige resultaat nemen:

$$\cos x \approx 1 - \tfrac{3}{6}x^2 + \tfrac{5}{120}x^4 = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4$$

4. Voor $y = \mathrm{e}^x$ geldt $y' = \mathrm{e}^x$ en dus ook $y^{(k)} = \mathrm{e}^x$. Dit levert $y^{(k)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1$.

   De n-de-orde-benadering van e^x in 0 wordt dan ook gegeven door:

$$\mathrm{e}^x \approx 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

4.4.1 Opgaven

1. Bepaal de lokale derde-orde-benadering in 0 van:

a. $\sin 2x \approx$

b. $\mathrm{e}^x + \cos x \approx$

c. $x - \sin x \approx$

d. $\sqrt{1+x} - \frac{1}{2}x \approx$

e. $1 - \cos x \approx$

f. $\arcsin x \approx$

2. Bekijk de functie $f(x) = x\mathrm{e}^x$.

a. Toon aan dat $f^{(k)}(0) = k$.

b. Bepaal de n-de-orde-benadering in 0 van f.

c. Controleer het resultaat door de n-de-orde-benadering in 0 van e^x met x te vermenigvuldigen.

3. Gegeven is de functie $f\colon \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}$ met $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

a. Bepaal $f^{(k)}(x)$.

b. Bepaal de n-de-orde-benadering in 0 van f.

c. Toon aan dat voor $|x| < 1$ geldt: $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$

4. Bepaling van een limiet met behulp van een lokale benadering:

a. Bepaal de tweede-orde-benadering van $1 - \cos x$ in 0.

b. Bepaal $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

5. De n-de-orde-benadering van e^x levert voor $x = 1$:

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

a. Benader hiermee de waarde van e door $n = 5$ te kiezen.

b. Benader de waarde van e door $n = 8$ te kiezen.

Zo'n deling $\dfrac{2x^3+3x^2-6x+4}{x-1} = 2x^2+5x-1+\dfrac{3}{x-1}$ wordt als volgt berekend.

De noemer $x-1$ wordt genoteerd en tussen $/\ \ \backslash$ komt de teller $2x^3+3x^2-6x+4$.

Het resultaat van de deling wordt helemaal rechts achter de $\backslash$ geplaatst:

$$\begin{array}{lll}
 & & x-1\,/\,2x^3+3x^2-6x+4\,\backslash\,2x^2+5x-1 \\
2x^2\cdot(x-1)=2x^3-2x^2 & \Longrightarrow & \qquad\quad \underline{2x^3-2x^2} \\
 & & \qquad\qquad\qquad 5x^2-6x \\
5x\cdot(x-1)=5x^2-5x & \Longrightarrow & \qquad\qquad\qquad \underline{5x^2-5x} \\
 & & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -x+4 \\
-1\cdot(x-1)=-x+1 & \Longrightarrow & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-x+1} \\
 & & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 3
\end{array}$$

Om de term $2x^3$ te krijgen, moet je $x-1$ met $2x^2$ vermenigvuldigen en dat levert $2x^3-2x^2$ op. Dan blijft $5x^2-6x+4$ over. De term $5x^2$ krijg je door $x-1$ met $5x$ te vermenigvuldigen. Zo doorgaand wordt het resultaat $2x^2+5x-1$ met als rest 3.

Een tweede voorbeeld van zo'n staartdeling is:

$$\frac{3x^3+x^2+4}{x^2-1} = 3x+1+\frac{3x+5}{x^2-1}$$

Omdat in $3x^3+x^2+4$ geen term met x voorkomt, is in de onderstaande berekening een lege plaats opgenomen. De deling gaat door tot een rest is ontstaan die niet meer door x^2-1 is te delen.

$$\begin{array}{lll}
 & & x^2-1\,/\,3x^3+x^2\qquad\;+4\,\backslash\,3x+1 \\
3x\cdot(x^2-1)=3x^3-3x & \Longrightarrow & \qquad\quad \underline{3x^3\qquad -3x} \\
 & & \qquad\qquad\qquad x^2+3x \\
1\cdot(x^2-1)=x^2-1 & \Longrightarrow & \qquad\qquad\qquad \underline{x^2\qquad -1} \\
 & & \qquad\qquad\qquad\quad\;\; 3x+5
\end{array}$$

Het resultaat van zo'n staartdeling is geschikt voor verdere integratie.

Voorbeelden

1. $\displaystyle\int \frac{2x^3+3x^2-6x+4}{x-1}\,\mathrm{d}x.$

   Een staartdeling (zie het eerste voorbeeld van deze paragraaf) levert:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3+3x^2-6x+4}{x-1}\,\mathrm{d}x &= \int\left(2x^2+5x-1+\frac{3}{x-1}\right)\mathrm{d}x\\ &= \tfrac{2}{3}x^3+2{,}5x^2-x+3\ln|x-1|+c\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \frac{3x^3+x^2+4}{x^2-1}\,\mathrm{d}x.$

   Een staartdeling (zie het tweede voorbeeld) levert:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^3+x^2+4}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int\left(3x+1+\frac{3x+5}{x^2-1}\right)\mathrm{d}x \quad \text{(gebruik breuksplitsing)}\\ &= \int\left(3x+1+\frac{4}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\\ &= 1{,}5x^2+x+4\ln|x-1|-\ln|x+1|+c\end{aligned}$$

   (Ga zelf de correctheid van de breuksplitsing na.)

3. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x+1}\,\mathrm{d}x.$ Uitvoeren van de deling levert:

$$\begin{array}{llll} x+1\,/\,x^3 & & & \backslash\, x^2-x+1\\ \underline{x^3+x^2} & & & \\ -x^2 & & & \\ \underline{-x^2-x} & & & \\ x & & & \\ \underline{x+1} & & & \\ -1 & & & \end{array}$$

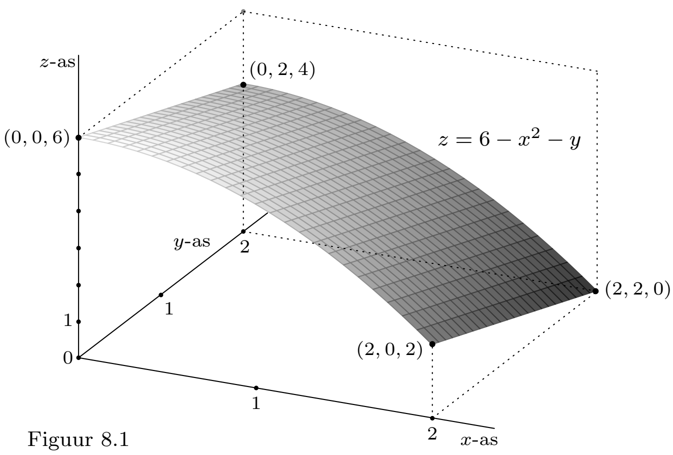
   Dus:

$$\int \frac{x^3}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int\left(x^2-x+1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{2}x^2+x-\ln|x+1|+c$$

Is f een functie van twee variabelen, dan kan ook een grafiek van f worden getekend. Daartoe wordt het xy-vlak horizontaal gelegd en een z-as loodrecht op het xy-vlak genomen, door de oorsprong. Dit wordt in perspectief getekend. De grafiek van f bestaat uit alle punten (x, y, z) met $z = f(x, y)$. Dat is dan een oppervlak in de ruimte. Als voorbeeld is in figuur 8.1 de grafiek getekend van de functie:

$$f(x, y) = 6 - x^2 - y \quad (0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 2)$$

Zo is $f(0{,}0) = 6 - 0^2 - 0 = 6$ en dat komt overeen met het punt $(0, 0, 6)$ van de grafiek.



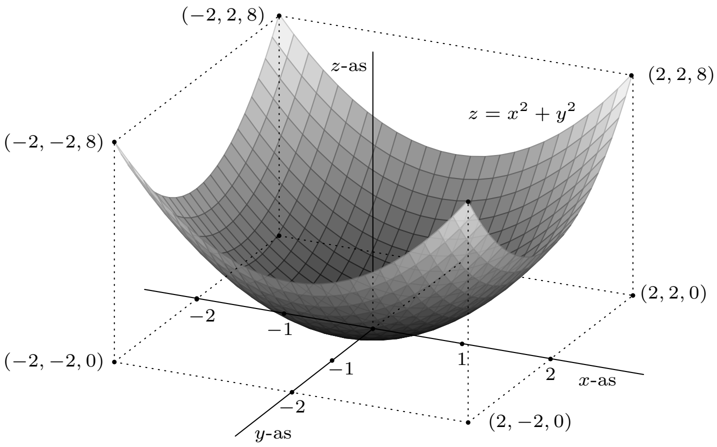
Figuur 8.1

In het xz-vlak (het vlak aan de voorzijde, door de x-as en de z-as) is $y = 0$ en dus geldt daar $z = 6 - x^2$. In de grafiek is dit het stuk parabool dat loopt van $(0, 0, 6)$ naar $(2, 0, 2)$.
In het yz-vlak geldt $x = 0$, dus $z = 6 - y$. In de grafiek is dit het rechte lijnstuk tussen $(0, 0, 6)$ en $(0, 2, 4)$.

Een tweede voorbeeld is de functie f op het domein $-2 \leq x \leq 2$ en $-2 \leq y \leq 2$, gedefinieerd door:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

De grafiek staat in figuur 8.2. Het laagste punt is $(0, 0, 0)$ want uit $x^2 \geq 0$ en $y^2 \geq 0$ volgt $f(x, y) \geq 0$ voor alle waarden van x en y. Omdat $f(-x, y) = f(x, y)$ is de grafiek symmetrisch ten opzichte van het yz-vlak. Deze symmetrie geldt ook ten aanzien van het xz-vlak en uit $f(-x, -y) = f(x, y)$ volgt ten slotte de symmetrie ten opzichte van de z-as.



Figuur 8.2

Snijden met het xz-vlak, dus invullen van $y = 0$, levert $z = x^2$, de bekende parabool. Op het gegeven domein heeft de functie een maximum in de hoekpunten en een minimum in $(0, 0, 0)$, het midden van het domein.

In het algemeen is het vrij lastig de grafiek van een functie van twee variabelen te tekenen. Er bestaan echter diverse programma's waarmee je een dergelijke grafiek kunt tekenen. Zo heeft het gratis programma Geogebra de optie '3D Graphics' en daarbij kun je een functie als $f(x, y) = x^2 + y^2$ invoeren waarna de grafiek verschijnt, die daarna bijvoorbeeld kan worden geroteerd.

Bij eenvoudige functies van twee variabelen kan een dergelijke grafiek inzicht geven in het gedrag van de bijbehorende functie. Bij ingewikkelder functies kun je de grafiek niet meer gemakkelijk interpreteren en bij functies van meer dan twee variabelen is een grafische voorstelling niet meer mogelijk. Er zijn dus andere technieken nodig om het gedrag van functies van meer variabelen te bepalen en eventuele maxima en minima van zo'n functie op te sporen.

8.2 Partiële afgeleiden

Houd je in $z = f(x, y)$ de variabele y constant, dan is z alleen een functie van x.

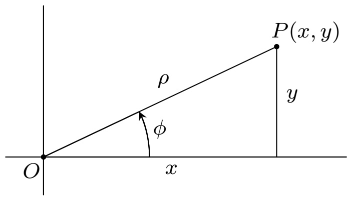
Bij de functie $z = x^2 + y^2$ van figuur 8.2, krijg je bijvoorbeeld voor $y = -2$ de doorsnijding van de grafiek met het voorvlak door de punten $(-2, -2, 8)$, $(-2, -2, 0)$ en $(2, -2, 0)$. In dat vlak geldt $z = x^2 + 4$ en in de vlakken daaraan evenwijdig geldt $z = x^2 + c$ met voor c de waarde van een vaste y^2.

In al die vlakken is de afgeleide van z naar x gelijk aan $2x$.

9.4 Integreren met poolcoördinaten

In plaats van xy-coördinaten kun je *poolcoördinaten* gebruiken (paragraaf 8.7). Dan is een punt P vastgelegd door:

- de afstand ρ van P tot de oorsprong O;
- de hoek ϕ tussen de positieve x-as en OP.



Figuur 9.20

Het verband tussen xy-coördinaten en poolcoördinaten is duidelijk uit figuur 9.20:

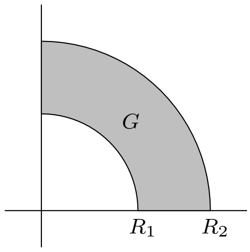
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\phi = \dfrac{y}{x} \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \end{cases}$$

In termen van poolcoördinaten heeft de positieve x-as vergelijking $\phi = 0$, de positieve y-as vergelijking $\phi = \pi/2$ en een cirkel met straal R heeft als vergelijking:

$$\rho = R$$

Aan de hand van een voorbeeld laten we zien hoe je een oppervlakintegraal met behulp van poolcoördinaten kunt berekenen.
Het gebied G in figuur 9.21 wordt begrensd door de x-as, de y-as en cirkels met respectieve straal R_1 en R_2.
In poolcoördinaten wordt het gebied gegeven door:

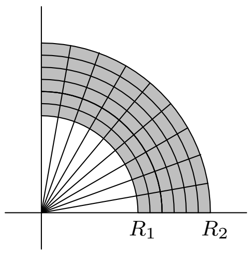
$$0 \leq \phi \leq \tfrac{1}{2}\pi \text{ en } R_1 \leq \rho \leq R_2$$



Figuur 9.21

Een oppervlakintegraal over dit gebied kan als volgt in termen van poolcoördinaten worden berekend.
Verdeel het gebied in kleine stukjes zoals in figuur 9.22.
Hierbij is vanaf $\phi = 0$ steeds een straal van de buitenste cirkel getekend en het deel daarvan binnen de cirkels is in kleine stukjes met lengte dρ verdeeld.

De hoek schuift steeds een stukje dϕ op.



Figuur 9.22

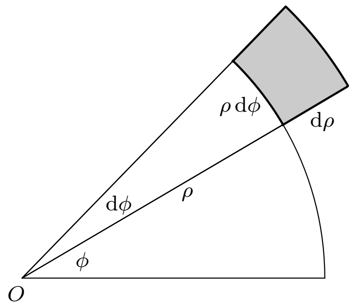
In figuur 9.23 staat zo'n stukje vergroot weergegeven, bij straal ρ en hoek ϕ.
De booglengte die hoort bij straal ρ en hoek $\mathrm{d}\phi$ is gelijk aan $\rho{\cdot}\mathrm{d}\phi$ (paragraaf 1.3.1).

Dus de oppervlakte van het stukje is ongeveer:

$$\rho{\cdot}\mathrm{d}\phi{\cdot}\mathrm{d}\rho$$

De bijdrage van dit stukje aan de oppervlakintegraal $\iint\limits_G f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ is:

$$f(\rho,\phi){\cdot}\rho{\cdot}\mathrm{d}\phi{\cdot}\mathrm{d}\rho$$



Figuur 9.23

Hierbij is f uitgedrukt in poolcoördinaten, dus als functie van ρ en ϕ. Sommeren van al die bijdragen leidt weer tot een integraal. De conclusie is:

$$\boxed{\iint\limits_G f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_G f\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi}$$

Deze laatste integraal wordt voor een berekening herleid tot enkelvoudige integralen (over ϕ en ρ).

Voorbeelden

1. G is het gebied van figuur 9.21. We berekenen $\iint\limits_G x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, dus de integraal van $f(x,y) = x$ over G.
   De integrand omzetten in poolcoördinaten kan met $x = \rho\cos\phi$.
   Het gebied G is in poolcoördinaten vastgelegd door: $0 \le \phi \le \frac{1}{2}\pi$ en $R_1 \le \rho \le R_2$.
   De berekening wordt:

$$\begin{aligned}\iint\limits_G x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_G \rho\cos\phi\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi = \iint\limits_G \rho^2\cos\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_{R_1}^{R_2} \rho^2\cos\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left[\tfrac{1}{3}\rho^3\cos\phi\right]_{\rho=R_1}^{R_2}\mathrm{d}\phi = \tfrac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(R_2^3 - R_1^3)\cos\phi\,\mathrm{d}\phi \\ &= \tfrac{1}{3}(R_2^3 - R_1^3)\Big[\sin\phi\Big]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \tfrac{1}{3}(R_2^3 - R_1^3)\end{aligned}$$