Wiskunde voor bachelor en master

Deel 2 Differentiaalrekening en integraalrekening

Uitwerkingen

Anne Kaldewaij

Arjen Valstar

2016, Syntax Media, Utrecht

Het uitwerkingenboek

Dit uitwerkingenboek is een uniek hulpmiddel bij het boek *Differentiaalrekening en integraalrekening*. Het biedt van alle opgaven een uitwerking met waar nodig een afleiding, nadere toelichting of een grafiek.

Met behulp van dit uitwerkingenboek kunnen grote delen van het theorieboek zelfstandig worden bestudeerd.

Uiteraard heeft het bestuderen van een uitwerking alleen zin als je zelf aan de opgave hebt gewerkt. In het theorieboek is van de meeste opgaven een antwoord opgenomen, zodat je daar direct kunt zien of je de opgave goed hebt gemaakt.

Het is echter verstandig om na het maken van een serie opgaven ook nog eens in dit uitwerkingenboek te bekijken of jouw aanpak strookt met de aanpak die de auteurs voor ogen hadden.

Opmerkingen en verdere vragen over een uitwerking kun je rechtstreeks richten aan *anne.kaldewaij@me.com* of aan *info@syntaxmedia.nl*.

zomer 2016

dr. Anne Kaldewaij

drs. Arjen Valstar

1.4.1 Opgaven

Bij de onderstaande antwoorden laten we de aanduiding (k geheel) of ($k \in \mathbb{Z}$) weg. Waar de letter k wordt gebruikt, is steeds een geheel getal bedoeld.
Dus k kan de waarden 0, 1, -1, 2, -2, $\cdots$ aannemen.

1.

x	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{1}{2}\pi$	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\arccos x$	π	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	0

2.a.
$$\begin{aligned} & \sin(2x+1) = 0 && \{\sin x = 0 \text{ heeft } x = k\pi \text{ als oplossing}\} \\ \Leftrightarrow\ & 2x + 1 = k\pi && \{\text{breng 1 naar rechts}\} \\ \Leftrightarrow\ & 2x = -1 + k\pi && \{\text{deel door 2}\} \\ \Leftrightarrow\ & x = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}k\pi \end{aligned}$$

2.b.
$$\begin{aligned} & 1 + \cos 2x = \tfrac{1}{2} && \{\text{breng 1 naar rechts}\} \\ \Leftrightarrow\ & \cos 2x = -\tfrac{1}{2} && \{\arccos(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{2}{3}\pi\} \\ \Leftrightarrow\ & 2x = \tfrac{2}{3}\pi + 2k\pi \ \vee\ 2x = -\tfrac{2}{3}\pi + 2k\pi && \{\text{deel door 2}\} \\ \Leftrightarrow\ & x = \tfrac{1}{3}\pi + k\pi \ \vee\ x = -\tfrac{1}{3}\pi + k\pi \end{aligned}$$

2.c.
$$\begin{aligned} & \cos \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} && \{\arccos \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \tfrac{1}{6}\pi\} \\ \Leftrightarrow\ & \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{6}\pi + 2k\pi \ \vee\ \tfrac{1}{2}x = -\tfrac{1}{6}\pi + 2k\pi && \{\text{maal 2}\} \\ \Leftrightarrow\ & x = \tfrac{1}{3}\pi + 4k\pi \ \vee\ x = -\tfrac{1}{3}\pi + 4k\pi \end{aligned}$$

2.d.
$$\begin{aligned} & \sin(1-x) = 0{,}5 && \{\arcsin 0{,}5 = \tfrac{1}{6}\pi\} \\ \Leftrightarrow\ & 1 - x = \tfrac{1}{6}\pi + 2k\pi \ \vee\ 1 - x = \tfrac{5}{6}\pi + 2k\pi && \{\text{1 naar rechts}\} \\ \Leftrightarrow\ & -x = -1 + \tfrac{1}{6}\pi + 2k\pi \ \vee\ -x = -1 + \tfrac{5}{6}\pi + 2k\pi && \{\text{deel door } -1\} \\ \Leftrightarrow\ & x = 1 - \tfrac{1}{6}\pi + 2k\pi \ \vee\ x = 1 - \tfrac{5}{6}\pi + 2k\pi \end{aligned}$$

2.e.

$$\begin{aligned} & \tan 3x = 1 && \{\arctan 1 = \tfrac{1}{4}\pi\} \\ \Leftrightarrow\ & 3x = \tfrac{1}{4}\pi + k\pi && \{\text{deel door } 3\} \\ \Leftrightarrow\ & x = \tfrac{1}{12}\pi + \tfrac{1}{3}k\pi && \end{aligned}$$

2.f.

$$\begin{aligned} & 3\tan 2x = \sqrt{3} && \{\text{deel door } 3\} \\ \Leftrightarrow\ & \tan 2x = \tfrac{1}{3}\sqrt{3} && \{\arctan \tfrac{1}{3}\sqrt{3} = \tfrac{1}{6}\pi\} \\ \Leftrightarrow\ & 2x = \tfrac{1}{6}\pi + k\pi && \{\text{deel door } 2\} \\ \Leftrightarrow\ & x = \tfrac{1}{12}\pi + \tfrac{1}{2}k\pi && \end{aligned}$$

3.a.

$$\begin{aligned} & \sin x = 0{,}2 && \{\arcsin 0{,}2 \approx 0{,}201\} \\ \Leftrightarrow\ & x = 0{,}201 + 2k\pi \ \vee\ x = \pi - 0{,}201 + 2k\pi && \end{aligned}$$

3.b.

$\sin x = 2$

geen enkele x voldoet, want $\arcsin 2$ bestaat niet $(-1 \leq \sin x \leq 1)$

3.c.

$$\begin{aligned} & \cos x = -\tfrac{1}{5} && \{\arccos(-0{,}2) \approx 1{,}77\} \\ \Leftrightarrow\ & x = 1{,}77 + 2k\pi \ \vee\ x = -1{,}77 + 2k\pi && \end{aligned}$$

3.d.

$\cos x = -1{,}5$

geen enkele x voldoet, want $\arccos(-1{,}5)$ bestaat niet $(-1 \leq \cos x \leq 1)$

3.e.

$$\begin{aligned} & \tan x = 100 && \{\arctan 100 \approx 1{,}56\} \\ \Leftrightarrow\ & x = 1{,}56 + k\pi && \end{aligned}$$

3.f.

$$\begin{aligned} & \tan x = -0{,}1 && \{\arctan(-0{,}1) \approx -0{,}10\} \\ \Leftrightarrow\ & x = -0{,}10 + k\pi && \end{aligned}$$

6.a. $x^2 + 2y^2 + xy = 7$ {neem van beide zijden de differentiaal}

$\Rightarrow\quad 2x\mathrm{d}x + 4y\mathrm{d}y + x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow\quad (4y + x)\mathrm{d}y = -(2x + y)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{2x + y}{4y + x}$

Dus $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ als $y = -2x$. Substitueer dit in de vergelijking van de kromme:

$x^2 + 2y^2 + xy = 7$ $\{y = -2x\}$

$\Rightarrow\quad x^2 + 8x^2 - 2x^2 = 7$

$\Rightarrow\quad 7x^2 = 7$

$\Rightarrow\quad x = 1 \vee x = -1$

In combinatie met $y = -2x$ geeft dit de punten $(1, -2)$ en $(-1, 2)$.

6.b. $x^2 + y^2 = 1$ is de eenheidscirkel met horizontale raaklijnen in $(0, 1)$ en $(0, -1)$.

6.c. $xy = x^2 + 1 \Rightarrow y = \dfrac{x^2 + 1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$. Dan is $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$, dus 0 voor $x = \pm 1$.

Deze x-waarden invullen in $y = x + \dfrac{1}{x}$ geeft als oplossingen: $(1, 2)$ en $(-1, -2)$.

6.d. $x^2 + 2xy + 2y^2 = 2y$ {neem van beide zijden de differentiaal}

$\Rightarrow\quad 2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y + 4y\mathrm{d}y = 2\mathrm{d}y$

$\Rightarrow\quad (2x + 4y - 2)\mathrm{d}y = -(2x + 2y)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{2x + 2y}{2x + 4y - 2} = -\dfrac{x + y}{x + 2y - 1}$

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ als $x + y = 0$, dus als $y = -x$.

Substitutie van $y = -x$ in $x^2 + 2xy + 2y^2 = 2y$ geeft $x^2 - 2x^2 + 2x^2 = -2x$,

dus $x^2 + 2x = 0$ met oplossing $x = 0 \vee x = -2$.

Samen met $y = -x$ levert dit de punten $(0, 0)$ en $(-2, 2)$.

2.10 Gemengde opgaven

1.a. $V = t^4 - 3t^2 - \sin 2t \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 4t^3 - 6t - \cos 2t{\cdot}2 = 4t^3 - 6t - 2\cos 2t$

1.b. $y = \dfrac{2}{\sqrt{3x}} = 2(3x)^{-\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2{\cdot}-\tfrac{1}{2}(3x)^{-1\frac{1}{2}}{\cdot}3 = -3(3x)^{-1\frac{1}{2}} = -\dfrac{3}{3x\sqrt{3x}}$

$$= -\frac{1}{x\sqrt{3x}}$$

1.c. $y = \dfrac{1}{\tan x} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x} = -\dfrac{1}{\cos^2 x \tan^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

1.d. $H = 1 - t^2 \sin t \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0 - 2t\sin t - t^2 \cos t = -t(2\sin t + t\cos t)$

1.e. $y = \sqrt{x}\cos\sqrt{x} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}{\cdot}\cos\sqrt{x} + \sqrt{x}{\cdot}-\sin\sqrt{x}{\cdot}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$= \frac{\cos\sqrt{x} - \sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

1.f. $y = \sin^2 x - \cos^2 x \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\sin x{\cdot}\cos x - 2\cos x{\cdot}-\sin x$

$$= 4\sin x\cos x = 2\sin 2x$$

2.a. $P = \dfrac{(t^2-1)(t+1)}{t} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \dfrac{(2t(t+1) + (t^2-1)){\cdot}t - 1{\cdot}(t^2-1)(t+1)}{t^2}$

$$= \frac{(3t^2+2t-1)t - (t^3+t^2-t-1)}{t^2}$$

$$= \frac{3t^3+2t^2-t-t^3-t^2+t+1}{t^2}$$

$$= \frac{2t^3+t^2+1}{t^2}$$

2.b. $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\cos x(1+\cos x) - \sin x{\cdot}-\sin x}{(1+\cos x)^2}$

$$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+\cos x}$$

4.a. $\int_1^2 x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \;=\; \left[\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\right]_1^2 \;=\; \frac{2}{5}\cdot 4\sqrt{2} - \frac{2}{5}\cdot 1\sqrt{1} \;=\; \frac{2}{5}(4\sqrt{2}-1)$

b. $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; [\ln|x|]_1^e = \ln(e) - \ln(1) \;=\; 1-0 \;=\; 1$

c. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \;=\; [2\sqrt{x}]_1^4 \;=\; 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} \;=\; 4-2 \;=\; 2$

d. $\int_0^2 (x^2+1)\,\mathrm{d}x \;=\; \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^2 \;=\; \frac{1}{3}\cdot 8 + 2 - (\frac{1}{3}\cdot 0 + 0) \;=\; \frac{8}{3} + 2 \;=\; 4\frac{2}{3}$

e. $\int_{-3}^3 x^3\,\mathrm{d}x \;=\; \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-3}^3 \;=\; \frac{1}{4}\cdot 3^4 - \frac{1}{4}\cdot(-3)^4 \;=\; 0$

Dit volgt ook uit het feit dat de functie $f(x) = x^3$ een oneven functie is.

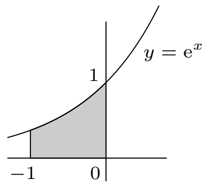
f. $\int_{-1}^1 \sin x\,\mathrm{d}x \;=\; [-\cos x]_{-1}^1 \;=\; -\cos(1) - (-\cos(-1)) \;=\; -\cos(1) + \cos(1) \;=\; 0$

Dit volgt ook uit het feit dat $f(x) = \sin x$ een oneven functie is.

5.a. Zie de nevenstaande figuur.

De gevraagde oppervlakte:

$$\int_{-1}^{0} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \;=\; \left[\mathrm{e}^x\right]_{-1}^{0} = \mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-1} \;=\; 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}63$$



5.b. Zie de nevenstaande figuur.

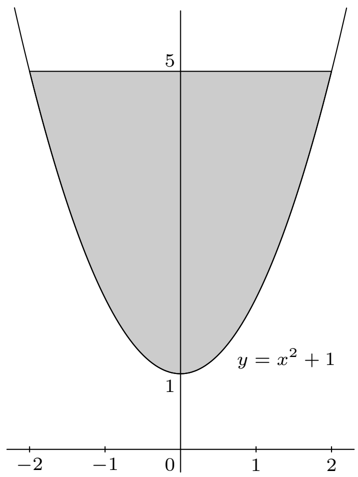
Snijpunten van de grafiek met $y = 5$:

$$\begin{aligned} & x^2 + 1 = 5 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 = 4 \\ \Leftrightarrow\quad & x = 2 \vee x = -2 \end{aligned}$$

De snijpunten zijn $(-2, 5)$ en $(2, 5)$.

De gevraagde oppervlakte:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} 5 - (x^2+1)\,\mathrm{d}x \;&=\; \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[4x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2} \\ &= 8 - \tfrac{8}{3} - (-8 + \tfrac{8}{3}) \\ &= 16 - \tfrac{16}{3} = 10\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

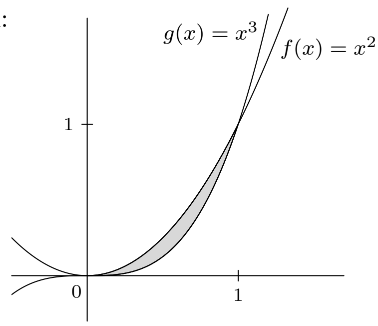


5.c. Zie de nevenstaande figuur. De x-coördinaten van de snijpunten van de grafieken berekenen:

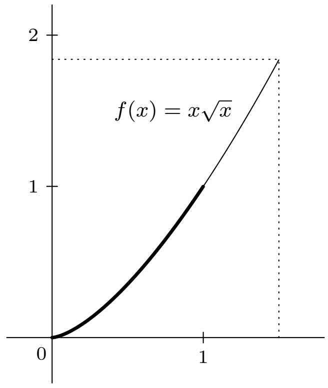
$$\begin{aligned} & x^3 = x^2 \\ \Leftrightarrow\quad & x^3 - x^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2(x-1) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x = 0 \vee x = 1 \end{aligned}$$

De gevraagde oppervlakte is:

$$\int_{0}^{1} (x^2 - x^3)\,\mathrm{d}x \;=\; \left[\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{12}$$



5.a. In de figuur staat de grafiek van $f(x) = x\sqrt{x}$ op het domein $[0, 1{,}5]$.
De boog van $(0,0)$ naar $(1,1)$ is iets dikker getekend.



5.b. De formule voor de booglengte is:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

Uit $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ volgt $\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}$,
dus de booglengte is:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x$$

De grafische rekenmachine geeft als antwoord: 1,43970987.

5.c. Exact: $\left[\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}(1 + \frac{9}{4}x)^{1\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \frac{8}{27}((\frac{13}{4})^{1\frac{1}{2}} - 1)$

$$= \frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{4\sqrt{4}} - 1\right)$$

$$= \frac{13\sqrt{13} - 8}{27}$$

($\approx$ 1,439709873 op dezelfde GR)

Uitwerkingen hoofdstuk 8

8.2.1 Opgaven

1.a. $z = x^2y + xy^2 \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2xy$ en $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x + 2y$

1.b. $z = \mathrm{e}^{xy} \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial z}{\partial x} = y\mathrm{e}^{xy}$ (met de kettingregel: $\dfrac{\partial \mathrm{e}^{xy}}{\partial x} = \mathrm{e}^{xy} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x}(xy) = y\mathrm{e}^{xy}$)

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = x\mathrm{e}^{xy}$ en $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}(x\mathrm{e}^{xy}) = 1 \cdot \mathrm{e}^{xy} + x \cdot y\mathrm{e}^{xy} = (1 + xy)\mathrm{e}^{xy}$

1.c. $z = \dfrac{x - y}{x + y} \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1 \cdot (x + y) - 1 \cdot (x - y)}{(x + y)^2} = \dfrac{2y}{(x + y)^2}$

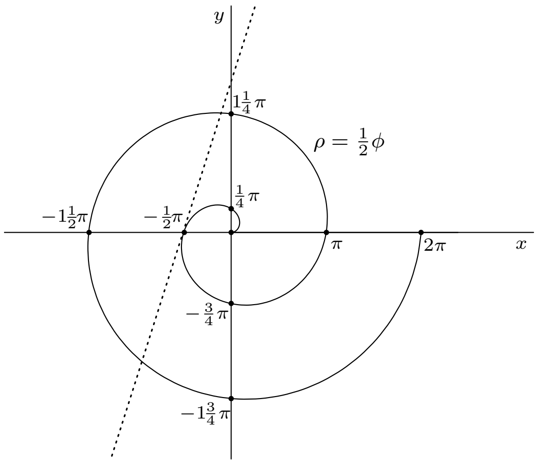
$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-1 \cdot (x + y) - 1 \cdot (x - y)}{(x + y)^2} = \dfrac{-2x}{(x + y)^2}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2x}{(x + y)^2}\right) = -2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x + y)^2}\right) = -2. \frac{1 \cdot (x + y)^2 - x \cdot 2(x + y)}{(x + y)^4}$$

$$= -2 \cdot \frac{(x + y) - 2x}{(x + y)^3} = -2 \cdot \frac{-x + y}{(x + y)^3} = \frac{2x - 2y}{(x + y)^3}$$

1.d. $z = \ln(x^2y + 1) \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2xy}{(x^2y + 1)}$ en $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^2}{(x^2y + 1)}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2x \cdot (x^2y + 1) - x^2 \cdot 2xy}{(x^2y + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2y + 1)^2}$$



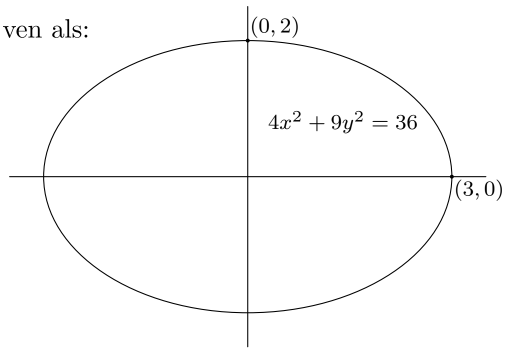
Je kunt dit niet omzetten in termen van x en y, maar je kunt met de theorie van dit hoofdstuk wel raaklijnen en toppen bepalen. Zie hiervoor opgave 6.c., waar de gestippelde raaklijn is berekend ($y = \pi x + \frac{1}{2}\pi^2$).

4.a. De ellips $4x^2 + 9y^2 = 36$ kun je schrijven als:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

en heeft assen met lengte 6 en 4 (paragraaf 1.5 uit het boek).

De ellips staat hiernaast afgebeeld.



4.b. De vergelijking in poolcoördinaten krijg je door in $4x^2 + 9y^2 = 36$ de x te vervangen door $\rho \cos \phi$ en de y door $\rho \sin \phi$:

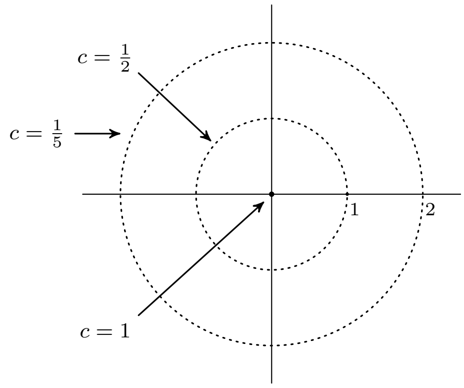
$$\begin{aligned}
& 4x^2 + 9y^2 = 36 && \{x = \rho\cos\phi \text{ en } y = \rho\sin\phi\} \\
\Leftrightarrow\quad & 4\rho^2\cos^2\phi + 9\rho^2\sin^2\phi = 36 && \{\cos^2\phi = 1 - \sin^2\phi\} \\
\Leftrightarrow\quad & 4\rho^2 - 4\rho^2\sin^2\phi + 9\rho^2\sin^2\phi = 36 && \\
\Leftrightarrow\quad & 4\rho^2 + 5\rho^2\sin^2\phi = 36 && \\
\Leftrightarrow\quad & \rho^2(4 + 5\sin^2\phi) = 36 &&
\end{aligned}$$

Dus de vergelijking in poolcoördinaten is $\rho^2(4 + 5\sin^2\phi) = 36$.

4.c. Je kunt de vergelijking schrijven als $\rho^2 = \dfrac{36}{4 + 5\sin^2\phi}$ en omdat $\rho \geq 0$:

$$\rho = \frac{6}{\sqrt{4 + 5\sin^2\phi}}$$

5.a. $z = \dfrac{1}{\rho^2 + 1}$



In de nevenstaande figuur zijn enkele niveaulijnen gegeven.

Het zijn cirkels, want $\dfrac{1}{\rho^2 + 1} = c$

is equivalent met $\rho^2 + 1 = \dfrac{1}{c}$, ofwel:

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{c} - 1}$$

5.b. $z = \dfrac{1}{\rho^2 + 1} \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial z}{\partial \rho} = -\dfrac{2\rho}{(\rho^2+1)^2}$ en $\dfrac{\partial z}{\partial \phi} = 0$

5.c. Met $x = \rho\cos\phi$ en $y = \rho\sin\phi$ volgt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{2\rho}{(\rho^2+1)^2}\cdot\cos\phi + 0 = -\frac{2\rho\cos\phi}{(\rho^2+1)^2}$$

Net zo: $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial \rho}\cdot\dfrac{\partial \rho}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial \phi}\cdot\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = -\dfrac{2\rho\sin\phi}{(\rho^2+1)^2}$

5.d. $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1} \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2x}{(x^2+y^2+1)^2} = -\dfrac{2\rho\cos\phi}{(\rho^2+1)^2}$

en evenzo: $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2y}{(x^2+y^2+1)^2} = -\dfrac{2\rho\sin\phi}{(\rho^2+1)^2}$

Dit stemt overeen met het resultaat van onderdeel 5.c.