Wiskunde voor bachelor en master

Deel 3 Differentiaalvergelijkingen en dynamische systemen

Anne Kaldewaij

Arjen Valstar

2017, Syntax Media, Utrecht

Over de serie

Er is behoefte aan een degelijke wiskundekennis in tal van studies op hogescholen en universiteiten. Studenten dienen te beschikken over wiskundig inzicht waarmee zij de wiskundige toepassingen aankunnen die in andere vakken worden gebruikt.

Met de serie *Wiskunde voor bachelor en master* leer je hoe je in de praktijk met wiskunde omgaat. Dit zie je terug in de aanpak: veel uitleg met toepassingen en weinig bewijzen in strikt wiskundige zin. Elk deel bevat veel voorbeelden en heeft een grote verzameling opgaven, waaruit de docent een gerichte keus kan maken.

De eerste twee delen vormen de basis van de serie:

Deel 1 Basiskennis en basisvaardigheden
Deel 2 Differentiaalrekening en integraalrekening

De overige delen sluiten hier naadloos op aan, maar zijn gericht op meer specifieke onderwerpen. Zij komen in de loop van de komende jaren uit.

De volgende delen zijn voorzien:

- Differentiaalvergelijkingen en dynamische systemen (deel 3)
- Matrixrekening
- Vectorrekening
- Actuariële wiskunde
- De Laplace-transformatie
- Fouriertheorie en systeemtheorie

Deze delen kunnen onafhankelijk van elkaar worden gebruikt. Sommige passen in de bachelorfase en andere bij specifieke masters.

Over deel 3

Deel 3 van de serie *Wiskunde voor bachelor en master* betreft de behandeling van differentiaalvergelijkingen met hun toepassingen in verschillende disciplines.

Na een algemene inleiding in hoofdstuk 1 komen in hoofdstuk 2 differentiaalvergelijkingen van de eerste orde aan bod. Naast de lineaire differentiaalvergelijkingen komen ook andere typen aan de orde met als oplossingsmethoden het scheiden van variabelen en substituties.

In hoofdstuk 3 komen toepassingen met een specifieke achtergrond aan de orde.
Hierbij wordt de student vertrouwd gemaakt met wiskundige modellen en leert hij zelf eenvoudige modellen op te stellen en hieraan te rekenen. De docent kan desgewenst een gerichte keus maken uit de geboden toepassingen (zoals economie, mechanica of elektriciteitsleer).

De behandeling van differentiaalvergelijkingen van de tweede orde in hoofdstuk 4 betreft de lineaire differentiaalvergelijkingen en hun verband met lineaire systemen. Er wordt daarbij een duidelijke relatie gelegd tussen de differentiaalvergelijking en de natuurlijke en gedwongen responsie van het bijbehorende systeem.

Hoofdstuk 5 betreft het gebruik van complexe getallen bij lineaire systemen.
Hierbij wordt de responsie op wisselsignalen, zoals trillingen, wisselstromen en wisselspanningen, bepaald met behulp van een overdrachtsfunctie. Ook begrippen als resonantie en het doorlaten van bepaalde frequenties komen aan bod. Deze behandeling biedt een goede wiskundige basis voor verdere studie in bijvoorbeeld meet- en regeltechniek. Het hoofdstuk start met een korte herhaling van complexe getallen (deel 2, hoofdstuk 10), voor zover relevant voor dit onderwerp.

Net als in de voorgaande delen van de serie is er een uitgebreide verzameling opgaven.
Het boek bevat naast de antwoorden ook de uitwerkingen van alle opgaven.
Opmerkingen en verdere vragen over een uitwerking kun je rechtstreeks richten aan *anne.kaldewaij@me.com* of aan *info@syntaxmedia.nl.*

zomer 2017

dr. Anne Kaldewaij
drs. Arjen Valstar

Inhoud

1.2 Functies en hun afgeleiden

Bij algemene theorie gebruiken we als naam voor een functie meestal f en spreken we over de functie $y = f(x)$. Bij specifieke toepassingen is het duidelijker om de daarbij gebruikelijke letters te hanteren, zoals t voor tijd, R voor elektrische weerstand, T voor temperatuur en p voor prijs.

Als $y = f(x)$, dan wordt de afgeleide genoteerd als f', $f'(x)$, y' of $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
De definitie van de afgeleide is:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Een afgeleide bereken je met behulp van rekenregels, zoals de productregel en de kettingregel, uit standaardafgeleiden. De bovenstaande definitie wordt gebruikt bij het opstellen van modellen. Een belangrijke karakterisering van de afgeleide is:

$$\boxed{f'(x) \text{ is de snelheid waarmee } f \text{ in } x \text{ verandert.}}$$

Een klassiek voorbeeld is de snelheid van een bewegend voorwerp. Is s de door het voorwerp afgelegde weg, dan geldt voor de snelheid v:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

De snelheid waarmee v verandert heet de versnelling a:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

En de laatste kun je ook schrijven als $a = \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$.

Bij het opstellen van modellen voor het beschrijven van natuurkundige en economische processen wordt vaak een relatie gelegd tussen een grootheid en de snelheid waarmee deze verandert. Een proces dat in de tijd verandert, wordt ook een *dynamisch systeem* genoemd. Het bijpassende model heet dan een *dynamisch model* en leidt vaak tot een differentiaalvergelijking.

Dit *opstellen* van een model en bijbehorende differentiaalvergelijking blijkt een lastige opgave te zijn. In hoofdstuk 3 komen we hier uitgebreid op terug.

Voorbeelden

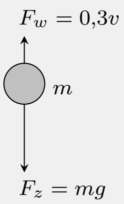
1. Bij een bacteriekweek wordt de populatiegrootte (het aantal bacteriën) op tijdstip t aangegeven met $N(t)$. Bij ongeremde groei is de snelheid waarmee de populatie toeneemt evenredig met de grootte van de populatie. In formulevorm:

   $$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = c \cdot N \quad \text{voor zekere positieve constante } c$$

   Dit is een differentiaalvergelijking in N van de eerste orde.

2. Zie figuur 1.1. Onder invloed van de zwaartekracht valt een steen met een massa van m kg. De luchtweerstand die de steen ondervindt, blijkt evenredig met de snelheid v van de steen, met evenredigheidsconstante 0,3.

   Op deze steen werken dan als krachten de zwaartekracht $F_z = mg$ met $g \approx 9{,}81$ m/s^2 en daaraan tegengesteld de weerstand $F_w = 0{,}3v$.

   Figuur 1.1

   Dus is de som van de krachten $F_{\text{totaal}} = mg - 0{,}3v$.

   De wet van Newton zegt $F_{\text{totaal}} = ma$ en met $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ komt er:

   $$mg - 0{,}3v = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \text{ofwel} \quad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 0{,}3v = mg$$

   Dit is een differentiaalvergelijking in v van de eerste orde.

3. In een vrijemarkteconomie hangt de prijsontwikkeling van een product af van het verschil V tussen vraag en aanbod van het product.

   Is $p(t)$ de prijs op tijdstip t, dan is er een verband tussen $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$ (de snelheid waarmee de prijs verandert) en dit verschil.

   Zo kan voor een specifiek product gelden:

   $$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \tfrac{1}{4}V^3$$

   Het verschil V hangt op zijn beurt van de prijs af, bijvoorbeeld $V = 1000 - 2p$ (een hogere prijs leidt tot minder vraag en meer aanbod, dus V neemt dan af).

   Dat levert dan als differentiaalvergelijking in p:

   $$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \tfrac{1}{4}(1000 - 2p)^3$$

Voorbeeld 1

Gaan we uit van een oorspronkelijk stilstaande bal ($v_0 = 0$ en $s_0 = 0$) en kiezen we als voorbeeld $\alpha = 30°$ (dus $\sin\alpha = \frac{1}{2}$), dan kan de beweging als volgt worden berekend.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g\sin\alpha = 9{,}8\cdot\tfrac{1}{2} = 4{,}9 \quad \text{dus} \quad v = 4{,}9t + c$$

Uit $v_0 = 0$ volgt $c = 0$, dus $v = 4{,}9t$.

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 4{,}9t \;\Rightarrow\; s = 4{,}9\cdot\tfrac{1}{2}t^2 + c = 2{,}45t^2 + c$$

Uit $s_0 = 0$ volgt $c = 0$, dus $s = 2{,}45t^2$.

Bij het eenvoudige geval dat weerstanden worden verwaarloosd, krijg je dus:

$$v = 4{,}9t \quad \text{en} \quad s = 2{,}45t^2$$

In de praktijk spelen echter meer krachten. Als het een goed opgepompte bal betreft, dan is de luchtweerstand de belangrijkste daarvan. Is de luchtweerstand bijvoorbeeld evenredig met het kwadraat van de snelheid van de bal, met evenredigheidsconstante β, dan is de totale langs de helling gerichte kracht op de bal:

$$F_{\text{tot}} = mg\sin\alpha - \beta v^2$$

Samen met $F_{\text{tot}} = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ resulteert dit in de bewegingsvergelijking:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg\sin\alpha - \beta v^2$$

Voorbeeld 2

Neem $\alpha = 30°$, $m = 1\,\mathrm{kg}$, $\beta = 0{,}1$ en voor g de waarde 9,8, dan is de vergelijking:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 4{,}9 - 0{,}1v^2$$

Deze differentiaalvergelijking is niet lineair, maar je kunt de variabelen scheiden. Om de berekening eenvoudig te houden, schrijven we de vergelijking als:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -0{,}1(v^2 - 49)$$

Scheiden van de variabelen levert dan:

$$\frac{1}{v^2-49}\mathrm{d}v = -0{,}1\mathrm{d}t$$

Je kunt $\dfrac{1}{v^2-49}$ breuksplitsen (deel 2, paragraaf 7.3):

$$\frac{1}{v^2-49} = \frac{1}{(v-7)(v+7)} = \tfrac{1}{14}\left(\frac{1}{v-7} - \frac{1}{v+7}\right)$$

De afleiding van de oplossing gaat nu als volgt:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{v^2-49}\,\mathrm{d}v = -0{,}1\,\mathrm{d}t && \{\text{breuksplitsen}\}\\
\Leftrightarrow\quad & \tfrac{1}{14}\left(\frac{1}{v-7} - \frac{1}{v+7}\right)\mathrm{d}v = -0{,}1\,\mathrm{d}t && \{\text{maal 14}\}\\
\Leftrightarrow\quad & \left(\frac{1}{v-7} - \frac{1}{v+7}\right)\mathrm{d}v = -1{,}4\,\mathrm{d}t && \{\text{integreer}\}\\
\Rightarrow\quad & \ln\left(\frac{v-7}{v+7}\right) = -1{,}4t + c && \{\text{definitie ln}\}\\
\Rightarrow\quad & \frac{v-7}{v+7} = \mathrm{e}^{-1{,}4t+c} = \mathrm{e}^{c}\,\mathrm{e}^{-1{,}4t} && \{\text{vervang } \mathrm{e}^{c} \text{ door een nieuwe constante } c\}\\
\Rightarrow\quad & \frac{v-7}{v+7} = c\,\mathrm{e}^{-1{,}4t}
\end{aligned}$$

Je lost v hieruit op door kruislings vermenigvuldigen:

$$\begin{aligned}
& \frac{v-7}{v+7} = c\,\mathrm{e}^{-1{,}4t} && \{\text{kruislings vermenigvuldigen}\}\\
\Leftrightarrow\quad & v-7 = vc\,\mathrm{e}^{-1{,}4t} + 7c\,\mathrm{e}^{-1{,}4t}\\
\Leftrightarrow\quad & v - vc\,\mathrm{e}^{-1{,}4t} = 7 + 7c\,\mathrm{e}^{-1{,}4t}\\
\Leftrightarrow\quad & v(1-c\,\mathrm{e}^{-1{,}4t}) = 7(1+c\,\mathrm{e}^{-1{,}4t})\\
\Leftrightarrow\quad & v = 7\cdot\frac{1+c\,\mathrm{e}^{-1{,}4t}}{1-c\,\mathrm{e}^{-1{,}4t}}
\end{aligned}$$

Uit $v_0 = 7\cdot\dfrac{1+c}{1-c}$ en $v_0 = 0$ volgt $c = -1$. Het resultaat is:

$$v = 7\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-1{,}4t}}{1+\mathrm{e}^{-1{,}4t}}$$

4.3.8 Opgaven

1. Bepaal een particuliere oplossing van:

a. $y'' + 4y' + 4y = t\mathrm{e}^{-t}$

b. $y'' + 4y' + 4y = t\mathrm{e}^{-2t}$

c. $y'' + 4y' = \mathrm{e}^{-t}\cos t$

d. $y'' + y' = 6t\mathrm{e}^{-t}$

4.3.9 Een overzicht

Een overzicht van particuliere oplossingen bij een gegeven input:

$ay'' + by' + cy = f(t)$		
Input $f(t)$	Karakteristieke vergelijking $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$	Vorm particuliere oplossing
$p\,\mathrm{e}^{rt}$	r geen wortel	$y = C\,\mathrm{e}^{rt}$
	r enkelvoudige wortel	$y = Ct\,\mathrm{e}^{rt}$
	r dubbele wortel	$y = Ct^2\,\mathrm{e}^{rt}$
$p\cos\omega t + q\sin\omega t$	$\omega\mathrm{i}$ geen wortel	$y = C\cos\omega t + D\sin\omega t$
	$\omega\mathrm{i}$ wortel	$y = t(C\cos\omega t + D\sin\omega t)$
$a_0 + \cdots + a_n t^n$	0 geen wortel	$y = A_0 + \cdots + A_n t^n$
	0 enkelvoudige wortel	$y = t(A_0 + \cdots + A_n t^n)$
	0 dubbele wortel	$y = t^2(A_0 + \cdots + A_n t^n)$
$\mathrm{e}^{rt}g(t)$		substitueer $y = z\,\mathrm{e}^{rt}$

4.3.10 Gemengde opgaven

1. Bepaal de algemene oplossing van:

a.	$y'' - y = 6\,\mathrm{e}^{t}$	d.	$y'' + 0{,}09y = 3\sin t$
b.	$y'' + y' + y = 3\,\mathrm{e}^{-t}$	e.	$y'' = t^4 + t - 1$
c.	$y'' - 3y' + 2{,}25y = 6\,\mathrm{e}^{1{,}5t}$	f.	$y'' + 2y' + 2y = 2$

2. Gegeven is het lineaire systeem $v'' + 4v' + 5v = u$ met input u en responsie v.
   a. Bepaal de natuurlijke responsie.
   b. Bepaal de responsie op $u = \sin t$. Wat is het gedwongen deel?
   c. Bepaal het gedwongen deel van de responsie op $u = A\cos\omega t$.

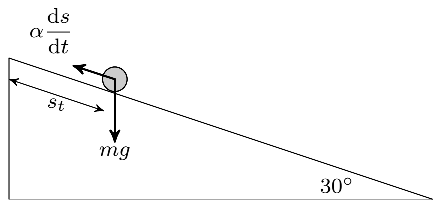
3. Los op:

a.	$y'' - 3y' - 4y = 136\sin 4t$	c.	$y'' + y' = 2t + 4$
b.	$y'' - 9y = 12\,\mathrm{e}^{3t}$	d.	$y'' + 5y' + 6y = 3\,\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{3x}$

4. Zie figuur 4.6.

   Een ronde kogel met massa m rolt van een helling met hellingshoek 30°.

   De kogel ondervindt een wrijving die evenredig is met zijn snelheid. De evenredigheidsconstante is α.



Figuur 4.6

   De afstand van de kogel tot het hoogste punt van de helling is s_t.

   a. Toon aan dat $m\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0{,}5mg$.
   b. Los s op uit deze differentiaalvergelijking.
   c. Toon aan dat voor de snelheid v_t geldt: $\lim\limits_{t\to\infty} v_t = \dfrac{mg}{2\alpha}$.

5. Los y op uit:

$$\begin{cases} y'' + y' = t + \sin t \\ y(0) = 0 \text{ en } \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 1 \end{cases}$$

We vatten het voorgaande als volgt samen.

Bij het lineaire systeem $av''+bv'+cv = u$ hoort de overdrachtsfunctie:

$$H(\omega) = \frac{1}{a(\mathrm{j}\omega)^2 + b\mathrm{j}\omega + c}$$

Is de input van het systeem een wisselsignaal, dan is het gedwongen deel van de responsie ook een wisselsignaal met dezelfde frequentie.

De *amplitudeverhouding* tussen de output v en de input u is $|H(\omega)|$.

Het *faseverschil* tussen deze output en de input is $\arg H(\omega)$.

Voorbeeld

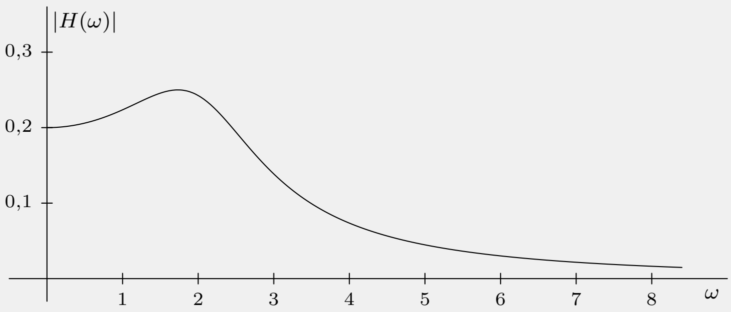
We bekijken het lineaire systeem beschreven door $v'' + 2v' + 5v = u$.
Voor de overdrachtsfunctie $H(\omega)$ geldt:

$$H(\omega) = \frac{1}{(\mathrm{j}\omega)^2 + 2\mathrm{j}\omega + 5} = \frac{1}{5 - \omega^2 + 2\mathrm{j}\omega}$$

De amplitudeverhouding tussen de output (het gedwongen deel) en de input is:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|5 - \omega^2 + 2\mathrm{j}\omega|} = \frac{1}{\sqrt{(5 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}}$$

Met behulp van een grafische rekenmachine of GeoGebra vind je de onderstaande grafiek van $|H(\omega)|$. Deze grafiek heet het *amplitudespectrum* van het systeem.



Figuur 5.7

Je ziet uit de grafiek van figuur 5.7 dat dit systeem geen hoge frequenties doorlaat, want als ω toeneemt, dan wordt $|H(\omega)| = \dfrac{|v|}{|u|}$ zeer klein. Dus dan wordt $|v|$ klein.

De waarde van $|H(\omega)|$ is maximaal als de noemer $\sqrt{(5-\omega^2)^2+4\omega^2}$ minimaal is, dus als $(5-\omega^2)^2+4\omega^2$ minimaal is. Noem je $\omega^2 = x$, dan komt er $(5-x)^2+4x = x^2-6x+25$ en dit heeft een minimum voor $x = 3$, dus als $\omega = \sqrt{3}$. Voor deze ω geldt:

$$H(\omega) = \frac{1}{2+2\mathrm{j}\sqrt{3}} = \frac{2-2\mathrm{j}\sqrt{3}}{4+12} = \tfrac{1}{8}(1-\mathrm{j}\sqrt{3})$$

Dan is $|H(\omega)| = \frac{1}{8}\sqrt{1+3} = \frac{1}{4}$ en $\arg H(\omega) = \arg \frac{1}{8}(1-\mathrm{j}\sqrt{3}) = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{1}{3}\pi$.

De conclusies voor het systeem beschreven door $v'' + 2v' + 5v = u$ zijn:

- Het systeem laat geen hoge frequenties door.
- De verhouding tussen de amplitudes van de output (het gedwongen deel) en de input is maximaal 0,25 voor $\omega = \sqrt{3}$.
- De output behorend bij input $\cos(\sqrt{3}\cdot t)$ is gelijk aan $0{,}25\cos(\sqrt{3}\cdot t - \frac{1}{3}\pi)$.

De karakteristieke vergelijking van $v'' + 2v' + 5v = u$ is $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$.
Deze heeft wortels $\lambda_1 = -1 + 2\mathrm{j}$ en $\lambda_2 = -1 - 2\mathrm{j}$ (ga na).
Dus de oplossing van de homogene vergelijking is $v = \mathrm{e}^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$.
De totale responsie op $u = \cos(\sqrt{3}\cdot t)$ is dus:

$$v = \mathrm{e}^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t) + 0{,}25\cos(\sqrt{3}\cdot t - \tfrac{1}{3}\pi)$$

De eerste term hiervan, de natuurlijke responsie, sterft snel uit.

Opmerkingen

1. In een later deel van deze serie komt de Laplace-transformatie aan de orde. Daar speelt eenzelfde soort overdrachtsfunctie een rol, maar deze heet dan $G(s)$.
   Je krijgt daaruit $H(\omega)$ door in $G(s)$ voor $s = \mathrm{j}\omega$ te nemen.
   Het verband is dus:

   $$H(\omega) = G(\mathrm{j}\omega)$$

2. Bij praktische toepassingen blijkt het handig om bij een amplitudespectrum op de assen specifieke logaritmische schalen te gebruiken. Je krijgt dan een zogeheten *Bodediagram*, genoemd naar de wetenschapper Hendrik Bode. Deze diagrammen spelen een belangrijke rol bij regeltechniek en telecommunicatie.

3.6 Gemengde opgaven

1.a. $y' = 0{,}1y - y^2$ kun je schrijven als $y' = y(0{,}1 - y)$.
Dit is gelijk aan $y' = \dfrac{\alpha}{g} y(g - y)$ voor $g = 0{,}1$ en $\alpha = 0{,}1$.
Hierbij hoort een logistische groei.

1.b. Volgens het schema uit paragraaf 3.1 is de algemene oplossing:

$$y = \frac{g}{1 + c\,\mathrm{e}^{-\alpha t}} = \frac{0{,}1}{1 + c\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}}$$

Als $y_0 = 10$ dan geldt $\dfrac{0{,}1}{1 + c} = 10$, dus $1 + c = 0{,}01$.
Hieruit volgt $c = -0{,}99$ en de oplossing is $y = \dfrac{0{,}1}{1 - 0{,}99\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}}$.

2.a. $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -0{,}2H$ kun je schrijven als $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} + 0{,}2H = 0$.
Dit is een lineaire homogene differentiaalvergelijking met oplossing $H(t) = c\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$.
$H(0) = c\cdot \mathrm{e}^0 = c$ en $H(0) = 500$ levert $c = 500$. Dus $H(t) = 500\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$.

2.b. Na 8 uur is het aantal mg gelijk aan $H(8) = 500\,\mathrm{e}^{-0{,}2\cdot 8} = 500\,\mathrm{e}^{-1{,}6} \approx 101$ mg.

Dit is dus net boven de grens van 100 mg.

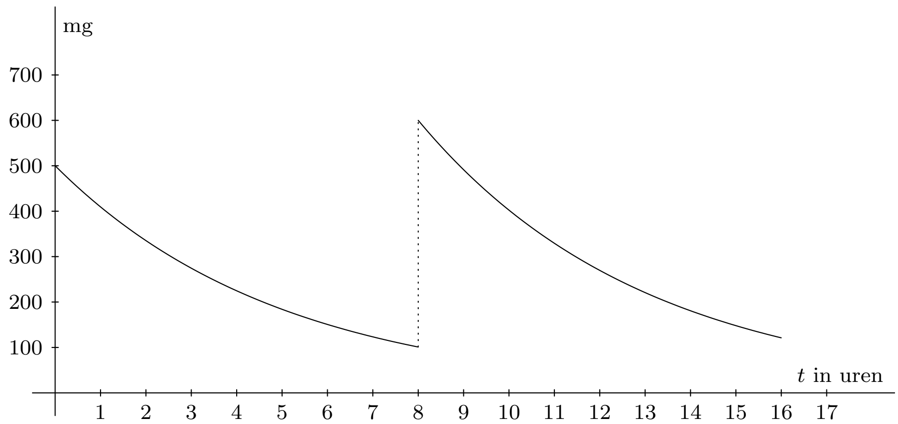
2.c. Na inname van de tweede pil is de hoeveelheid antibioticum $101 + 500 = 601$ mg.
Geven we de hoeveelheid antibioticum in het bloed t uur na de tweede pil aan met $H_2(t)$, dan levert dezelfde redenering als in 1.a. en 1.b.:

$$H_2(t) = 601\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} \text{ [mg] } (t \text{ in uren})$$

Dus 8 uur na inname van de tweede pil geldt dat er $H_2(8) = 601\,\mathrm{e}^{-1{,}6} \approx 121$ mg antibioticum in het bloed zit.

2.d De grafiek van H staat onderstaand. Deze wordt gegeven door het voorschrift:

$$H = 500\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} \qquad \text{voor } 0 \leq t < 8$$
$$H = 601\,\mathrm{e}^{-0{,}2(t-8)} \qquad \text{voor } 8 \leq t < 16$$



De hoeveelheid antibioticum in het bloed

3.a. Zonder luchtweerstand is de bewegingsvergelijking:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg$$

De parachutist valt dus met een versnelling van $g \approx 9{,}8$ m/s^2 naar beneden.

Dan is $v = gt = 9{,}8t$ m/s.

Na 10 seconden is $v = 98$ m/s $= 98{\cdot}3{,}6$ km/u $= 352{,}8$ km/u.

$(1 \text{ m/s} = \dfrac{\frac{1}{1000}\text{ km}}{\frac{1}{3600}\text{ u}} = 3{,}6 \text{ km/u})$

3.b. De bewegingsvergelijking is nu $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - 40v^2$.

De afleiding van de oplossing verloopt net als de oplossing van opgave 2.b. van paragraaf 3.3.1, alleen de getallen zijn anders.

Invullen van $m = 80$ en $g = 9{,}8$ levert $80\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 784 - 40v^2 = 40(19{,}6 - v^2)$.

Dit kun je schrijven als $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -0{,}5(v^2 - 19{,}6)$, dus:

$$\frac{1}{v^2 - 19{,}6}\,\mathrm{d}v = -0{,}5\,\mathrm{d}t$$